

शिक्षा निदेशालय

राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली सरकार

सहायक सामग्री
(2018-2019)

कक्षा : दसवीं

गणित

मार्गदर्शनः

श्री संदीप कुमार
सचिव (शिक्षा)

श्री संजय गोयल
निदेशक (शिक्षा)

डॉ. सरोज बाला सेन
अतिरिक्त शिक्षा निदेशक (स्कूल एवं परीक्षा)

समन्वयकः

श्रीमती मुक्ता सोनी श्री यू.डी. ओझा श्री राजकुमार श्री कृष्ण कुमार
उप शिक्षा निदेशक (परीक्षा) उप शिक्षा अधिकारी (परीक्षा) विशेष कार्याधिकारी (परीक्षा) विशेष कार्याधिकारी (परीक्षा)

उत्पादन मंडल

अनिल कुमार शर्मा
दीपक तंवर

दिल्ली पाठ्य पुस्तक ब्यूरो में अनिल कौशल, सचिव, दिल्ली पाठ्य पुस्तक ब्यूरो, 25/2,
पंखा रोड, संस्थानीय क्षेत्र, नई दिल्ली द्वारा प्रकाशित तथा मैसर्स अरिहन्त ऑफसैट, नई दिल्ली
द्वारा मुद्रित।

SANDEEP KUMAR
IAS



संविधान (शिक्षा)
राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र
दिल्ली सरकार

पुराना सचिवालय, दिल्ली-110054
दूरभाष : 23890187 टेलीफैक्स : 23890119

Secretary (Education)
Government of National Capital Territory of Delhi
Old Secretariat, Delhi-110054
Phone : 23890187 Telefax : 23890119
e-mail : secyedu@nic.in

PREFACE

It gives me immense pleasure to present the Support Material for various subjects. The material prepared for students of classes IX to XII has been conceived and developed by a team comprising of the Subject Experts, Members of the Academic Core Unit and teachers of the Directorate of Education.

The subject wise Support Material is developed for the betterment and enhancement of the academic performance of the students. It will give them an insight into the subject leading to complete understanding. It is hoped that the teachers and students will make optimum use of this material. This will help us achieve academic excellance.

I commend the efforts of the team who have worked with complete dedication to develop this matter well within time. This is another endeavor of the Directorate to give complete support to the learners all over Delhi.


(SANDEEP KUMAR)
SECRETARY

Sanjay Goel, IAS



D.O. No. PS/DE/2018/343

Director

Education & Sports, Govt. of NCT of Delhi
Old Secretariat, Delhi-110054
Tel.: 23890172, Fax : 23890355
E-mail : diredu@nic.in
Website : www.edudel.nic.in

Date : 8/8/2018

DIRECTOR'S MESSAGE

Dear Students,

Through this Support Material, I am getting an opportunity to communicate directly with you and I want to take full advantage of this opportunity.

In Delhi, there are approximately 1020 other government schools like yours, which are run by Directorate of Education. The Head Quarters of Directorate of Education is situated at Old Secretariat, Delhi-54.

All the teachers in your school and officers in the Directorate work day and night so that the standard of our govt. schools may be uplifted and the teachers may adopt new methods and techniques to teach in order to ensure a bright future for the students.

Dear students, the book in your hand is also one such initiative of your Directorate. This material has been prepared specially for you by the subject experts. A huge amount of money and time has been spent to prepare this material. Moreover, every year, this material is reviewed and updated as per the CBSE syllabus so that the students can be updated for the annual examination.

Last, but not the least, this is the perfect time for you to build the foundation of your future. I have full faith in you and the capabilities of your teachers. Please make the fullest and best use of this Support Material.



DIRECTOR (EDUCATION)

Dr. (Mrs.) Saroj Bala Sain

Addl. Director of Edn. (School)/Exam



Govt. of NCT of Delhi

Directorate of Education

Old Secretariat, Delhi-110054

Tel.: 23890023

D.O. No. PA/Addl.DE(Sch)/80

Date : 16/07/2018

It gives me immense pleasure and a sense of satisfaction to forward the support material for classes IX to XII in all subjects. The support material is continuously revised redesigned and updated by a team of subject experts, members of Core Academic Unit and teachers from various schools of DOE.

Consistent use of support material by the students and teachers will make the year long journey seemless and enjoyable. The purpose of providing support material has always been to make available ready to use material which is matchless and most appropriate.

My commendation for all the team members for their valuable contribution.

A handwritten signature in black ink, appearing to read "S. Sain".

Dr. Saroj Bala Sain
Addl.DE (School)

शिक्षा निदेशालय
राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली सरकार

सहायक सामग्री
(2018-2019)

गणित
कक्षा : दसवीं
(हिन्दी माध्यम)

निःशुल्क वितरण हेतु

दिल्ली पाठ्य-पुस्तक ब्यूरो द्वारा प्रकाशित

Team Members for Review of Support Material

S.No.	Name & Designation	School Name/Branch
1.	Mr. Yogesh Agarwal (Principal) <i>Group Leader</i>	GBSSS Shahbad Dairy Delhi-110042
2.	Mr. Tushar Saluja TGT (Maths)	CORE ACADEMIC UNIT DoE, GNCT of Delhi
3.	Dr. Sushma Singh TGT (Maths)	CORE ACADEMIC UNIT DoE, GNCT of Delhi
4.	Ms. Anju Sareen TGT (Maths)	S.C.S.D G.S.V Sector-9 Rohini, Delhi
5.	Mr. Manish Jain TGT (Maths)	S.V., Sector-3, Rohini, Delhi
6.	Mr. Sunil Kumar Tiwari TGT (Maths)	S.B.V., Moti Nagar, Delhi-110015
7.	Mr. Maqsood Ahmed TGT (Maths)	Anglo Arabic Sr. Sec. School Ajmeri Gate, Delhi-6

Remodelled Assessment Structure effective from the Academic Year 2018-19

(Released by the CBSE)

1. Scholastic Area

Total 100 marks (Syllabus for assessment will be only Class-X)				
Subjects	80 Marks (Board Examination) Student has to secure 33% marks out of 80 marks in each subject		20 Marks (Internal Assessment) Student has to secure 33% marks out of 80 marks in each subject	
Language 1		Periodic test (10 Marks) (i)	Notebook Submission (5 Marks) (ii)	Subject Enrichment Activity (5 Marks) (iii)
Language 2	Board will conduct class-X Examination for 80 marks in each subject covering 100% syllabus of the subject of Class-X only.	Periodic written Test, restricted to three in each subject in an Academic Year.	This will cover : <ul style="list-style-type: none"> • Regularity • Assignment Completion • Neatness & upkeep of notebook 	Speaking and listening skills
Science		Average of the best two tests to be taken for final marks submission		Speaking and listening skills
Mathematics	Marks and Grades both will be awarded for Individual subjects.			Practical Lab work
Social Science	9-Point grading will be same as followed by the Board in Class XII.			Maths Lab Practical
6* Additional Subject	Scheme of studies for 6" additional subject is detailed in Annexure-I Note : In case student opts a language as 6th additional subject the modalities defined for Languages 1 and 2 shall be followed.			

(i) Periodic test (10 marks) :

The school should conduct three periodic written tests in the entire academic year and the average of the best two will be taken. The schools have the autonomy to make its own schedule. However, for the purpose of gradient learning, three tests may be held as one being the mid-term test and other the two being pre mid and post mid-term with portion of syllabus cumulatively covered. The gradually increasing portion of contents would prepare students acquire confidence for appearing in the Board examination with 100% syllabus. The school will take the average of the best two tests for final marks submission.

(ii) Notebook Submission (5 marks) :

Notebook submission as a part of internal assessment is aimed at enhancing seriousness of students towards preparing notes for the topics being taught in the classroom as well as assignments. This also addresses the critical aspect of regularity, punctuality, neatness and notebook upkeep.

(iii) Subject Enrichment Activities (5 marks) :

These are subject specific application activities aimed at enrichment of the understanding and skill development. These activities are to be recorded internally by respective subject teachers.

For Languages : Activities conducted for subject enrichment in languages should aim at equipping the learner to develop effective speaking and listening skills.

For Mathematics The listed laboratory activities and projects as given in the prescribed publication of CBSE/NCERT may be followed.

For Science : The listed practical works / activities may be carried out as prescribed by the CBSE in the curriculum.

For Social Science : Map and project work may be undertaken as prescribed by the CBSE in the curriculum.

SYLLABUS

[Released by the CBSE for Academic Year 2018-19]

Units	Unit Name	Marks
I	NUMBER SYSTEMS	06
II	ALGEBRA	20
III	COORDINATE GEOMETRY	06
IV	GEOMETRY	15
V	TRIGONOMETRY	12
VI	MENSURATION	10
VII	STATISTICS & PROBABILITY	11
	Total	80

UNIT I : NUMBER SYSTEMS

1. REAL NUMBERS (15) Periods

Euclid's division lemma, Fundamental Theorem of Arithmetic - statements after reviewing work done earlier and after illustrating and motivating through examples, Proofs of irrationality of $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$. Decimal representation of rational numbers in terms of terminating/non-terminating recurring decimals.

UNIT II : ALGEBRA

1. POLYNOMIALS (7) Periods

Zeros of a polynomial. Relationship between zeros and coefficients of quadratic polynomials. Statement and simple problems on division algorithm for polynomials with real coefficients.

2. PAIR OF LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES (15) Periods

Pair of linear equations in two variables and graphical method of their solution, consistency/inconsistency.

Algebraic conditions for number of solutions. Solution of a pair of linear equations in two variables algebraically - by substitution, by elimination and by cross multiplication method. Simple situational problems. Simple problems on equations reducible to linear equations.

3. QUADRATIC EQUATIONS (15) Periods

Standard form of a quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$). Solutions of quadratic equations (only real roots) by factorization, by completing the square and by using quadratic formula. Relationship between discriminant and nature of roots.

Situational problems based on quadratic equations related to day to day activities to be incorporated.

4. ARITHMETIC PROGRESSIONS (8) Periods

Motivation for studying Arithmetic Progression Derivation of the nth term and sum of the first n terms of A.P. and their application in solving daily life problems.

UNIT III : COORDINATE GEOMETRY

1. LINES (In two-dimensions) (14) Periods

Review: Concepts of coordinate geometry, graphs of linear equations. Distance formula. Section formula (internal division). Area of a triangle.

UNIT IV : GEOMETRY

1. TRIANGLES (15) Periods

Definitions, examples, counter examples of similar triangles.

1. (Prove) If a line is drawn parallel to one side of a triangle to intersect the other two sides in distinct points, the other two sides are divided in the same ratio.
2. (Motivate) If a line divides two sides of a triangle in the same ratio, the line is parallel to the third side.
3. (Motivate) If in two triangles, the corresponding angles are equal, their corresponding sides are proportional and the triangles are similar.
4. (Motivate) If the corresponding sides of two triangles are proportional, their corresponding angles are equal and the two triangles are similar.
5. (Motivate) If one angle of a triangle is equal to one angle of another triangle and the sides including these angles are proportional, the two triangles are similar.

6. (Motivate) If a perpendicular is drawn from the vertex of the right angle of a right triangle to the hypotenuse, the triangles on each side of the perpendicular are similar to the whole triangle and to each other.
7. (Prove) The ratio of the areas of two similar triangles is equal to the ratio of the squares of their corresponding sides.
8. (Prove) In a right triangle, the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the other two sides.
9. (Prove) In a triangle, if the square on one side is equal to sum of the squares on the other two sides, the angles opposite to the first side is a right angle.

2. CIRCLES **(8) Periods**

Tangent to a circle at, point of contact

1. (Prove) The tangent at any point of a circle is perpendicular to the radius through the point of contact.
2. (Prove) The lengths of tangents drawn from an external point to a circle are equal.

3. CONSTRUCTIONS **(8) Periods**

1. Division of a line segment in a given ratio (internally).
2. Tangents to a circle from a point outside it.
3. Construction of a triangle similar to a given triangle.

UNIT V : TRIGONOMETRY

1. INTRODUCTION TO TRIGONOMETRY **(10) Periods**

Trigonometric ratios of an acute angle of a right-angled triangle. Proof of their existence (well defined); motivate the ratios whichever are defined at 0° and 90° . Values (with proofs) of the trigonometric ratios of 30° , 45° and 60° . Relationships between the ratios.

2. TRIGONOMETRIC IDENTITIES **(15) Periods**

Proof and applications of the identity $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. Only simple identities to be given. Trigonometric ratios of complementary angles.

3. HEIGHTS AND DISTANCES: Angle of elevation, Angle of Depression **(8) Periods**

Simple problems on heights and distances. Problems should not involve more than two right triangles. Angles of elevation / depression should be only 30° , 45° , 60° .

UNIT VI: MENSURATION

1. AREAS RELATED TO CIRCLES (12) Periods

Motivate the area of a circle; area of sectors and segments of a circle. Problems based on areas and perimeter / circumference of the above said plane figures. (In calculating area of segment of a circle, problems should be restricted to central angle of 60° , 90° and 120° only. Plane figures involving triangles, simple quadrilaterals and circle should be taken.)

2. SURFACE AREAS AND VOLUMES (12) Periods

1. Surface areas and volumes of combinations of any two of the following: cubes, cuboids, spheres, hemispheres and right circular cylinders/cones. Frustum of a cone.
2. Problems involving converting one type of metallic solid into another and other mixed problems. (Problems with combination of not more than two different solids be taken).

UNIT VII : STATISTICS AND PROBABILITY

1. STATISTICS (18) Periods

Mean, median and mode of grouped data (bimodal situation to be avoided). Cumulative frequency graph.

2. PROBABILITY (10) Periods

Classical definition of probability. Simple problems on single events (not using set notation).

QUESTIONS PAPER DESIGN YEAR 2018-19

Mathematics (Code No. 041)

Marks : 80

S.N.	Typology of Questions	Very Short Answer (VSA) (1 Mark)	Short Answer-I (SA) (2Marks)	Short Answer-II (SA) (3 Marks)	Long Answer (LA) (4 Marks)	Total Marks	% Weightage (approx.)
1	Remembering (Knowledge based- Simple recall questions, to know specific facts, terms, concepts, principles or theories; Identify, define, or recite, information)	2	2	2	2	20	25%
2	Understanding (Comprehension- to be familiar with meaning and to understand conceptually, interpret, compare, contrast. explain, paraphrase, or interpret information)	2	1	1	4	23	29%
3	Application (Use abstract information in concrete situation, to apply knowledge to new situation; Use given content to interpret a situation, provide an example, or solve a problem)	2	2	3	1	19	24%
4	Higher Order Thinking Skills (Analysis & Synthesis- Classify, compare, contrast, or differentiate between different pieces of information; Organize and/or integrate unique pieces of information from variety of sources)	-	1	4	-	14	17%
5	Evaluation (Judge, and/or justify the value or worth of a decision or outcome, or to predict outcomes based on values)*	-	-	-	1	4	5%
	Total	$6 \times 1 = 6$	$6 \times 2 = 12$	$10 \times 3 = 30$	$8 \times 4 = 32$	80	100%

*Value based question is omitted as per CBSE guidelines.

INTERNAL ASSESSMENT

20 Marks

- Periodical Test 10 Marks
 - Note Book Submission 05 Marks
 - Lab Practical (Lab activities to be done from the prescribed books) 05 Marks

Mathematics-X

विषय—तालिका

क्रम सं.	विषय सामग्री	पृष्ठ संख्या
1.	वास्तविक संख्याएँ	11
2.	बहुपद	17
3.	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	23
4.	सिद्धांत समीकरण	31
5.	समांतर श्रेढ़ियाँ	41
6.	त्रिभुज	48
7.	निर्देशांक ज्यामिति	60
8.	त्रिकोणमिति का परिचय	67
9.	त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग	75
10.	वृत्त	83
11.	रचनाएँ	96
12.	वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल	102
13.	पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	115
14.	सांख्यिकी	126
15.	प्रायिकता	134
16.	आदर्श प्रश्न—पत्र—। (उत्तर सहित)	141-169

1

अध्याय

वास्तविक संख्याएँ

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यूकिलड विभाजन प्रमेयिका—दो घनात्मक पूर्णांक ‘ a ’ और ‘ b ’ के लिए संतुष्ट करने वाली पूर्ण संख्याएँ ‘ q ’ व ‘ r ’ इस प्रकार हैं।

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

2. यूकिलड विभाजन पूर्णांकों a और b ($a > b$) का म. स. नीचे दर्शायी गई विधि द्वारा प्राप्त किया जाता है।

चरण 1 : q ओर r ज्ञात करने के लिए यूकिलड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कीजिए जहाँ $a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$.

चरण 2 : यदि $r = 0$ तो म.स. व $(a, b) = b$

चरण 3 : यदि $r \neq 0$ तो b और r यूकिलड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कीजिए। इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखिए जब तक शोषफल शुन्य न प्राप्त हो। इस स्थिति वाला भाजक म.स. (a, b) होगा।

3. अंकगणित की आधारभूत प्रमेय—प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त (गुणनखंडित) किया जा सकता है। तथा वह गुणनखण्ड अद्वितीय होता है। इस पर कोई ध्यान दिए बिना कि अभाज्य गुणनखण्ड किस क्रम में आ रहे हैं।

4. मान लीजिए $x = \frac{p}{q}, \quad q \neq 0$ तथा ‘ q ’ का अभाज्य गुणनखण्ड $2^n \times 5^n$, के रूप का है। जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक हैं। तो x का दशमलव प्रसार सांत होगा।

5. मान लीजिए $x = \frac{p}{q}, \quad q \neq 0$ एक ऐसी परिमेय संख्या है। कि q का अभाज्य गुणनखण्ड $2^m 5^n$, के रूप का नहीं है। जहाँ m, n ऋणेतर पूर्णांक हैं तो x का दशमलव प्रसार अंसात आवर्ती होगा।

अति लघुउत्तराय प्रश्न

1. प्रत्येक घनात्मक सम पूर्णांक का सामान्य रूप लिखिए।
2. प्रत्येक घनात्मक विषम पूर्णांक का सामान्य रूप लिखिए।
3. यदि $n^2 - 1, 8$ से भाज्य है तो n के मान लिखिए।
4. $7 \times 11 \times 13 + 7$ एक भाज्य संख्या है या अभाज्य संख्या है। बताइए।
5. बताइए $5.131131113\dots$ एक परिमेय संख्या है या अपरिमेय संख्या।
6. यदि 65 और 117 के म.स. को $65m - 117$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, तो m का मान ज्ञात कीजिए।
7. एक अपरिमेय और परिमेय संख्या का गुणनखण्ड क्या होगा?
8. $\frac{13497}{1250}$ का दशमलव निरूपण कितने दशमलव स्थान के बाद सांत होगा।
9. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 1 से 10 तक की सभी संख्याओं से विभाजय है।
10. यदि संख्याएँ 525 और 3000; 3, 5, 15, 25 और 75 से भाज्य है तो 525 और 3000 का म.स. लिखिए।

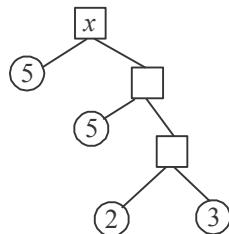
लघु उत्तरीय प्रश्न—(1)

11. क्या दो संख्याओं का म.स. 18 और ल.स. 380 हो सकता है? कारण बताओ।
12. यदि $a = 4q + r$ है तो a तथा q किस प्रकार की संख्याएँ होंगी? r के सम्भव मान लिखिए।
13. 9^n का ईकाई का अंक बताइए।
14. यदि n एक घनात्मक विषम पूर्णांक है, तो दर्शाइए कि $n^2 - 1, 8$ से विभाजय है,
15. यूकिलिड विभाजन एल्गोरिथम द्वारा 16 और 28 का म.स. ज्ञात कीजिए।
16. यदि n एक प्राकृत संख्या है तो दिखाइए 12^n का ईकाई का अंक 0 या 5 नहीं हो सकता है।
17. लम्बी विभाजन विधि का प्रयोग किए बिना बताइए कि $\frac{395}{10500}$ का दशमलव प्रसार सांत है या असान्त आवर्ती।
18. यदि किसी परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार $327.7081.$ हो और यदि वह $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त करें तो उसके हर (q) के अभाज्य गुणनखण्ड के बारे में आप क्या कह सकते हैं।

19. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ को गुणा करने पर एक परिमेय संख्या प्राप्त हो। उस परिमेय संख्या को भी ज्ञात करो।
20. $\sqrt{3}$ तथा $\sqrt{5}$ के बीच एक परिमेय तथा एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

लघु उत्तरीय प्रश्न-(2)

21. दर्शाइए कि किसी विषम घनात्मक पूर्णांक का वर्ग $4m + 1$ के रूप का होता है, जहाँ m एक घनात्मक पूर्णांक है।
22. दर्शाइए कि किसी घनात्मक पूर्णांक का वर्ग $4q$ या $4q + 1$ रूप में होता है, जहाँ q एक घनात्मक पूर्णांक है।
23. दर्शाइए कि किसी घनात्मक पूर्णांक का घन $4m, 4m + 1$ या $4m + 3$ के रूप में होता है, जहाँ m एक पूर्णांक है।
24. सिद्ध कीजिए $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।
25. अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का कथन लिखिए। इसका प्रयोग करते हुए 120 के अद्वितीय गुणनखण्ड कीजिए।
26. सिद्ध कीजिए $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।
27. सिद्ध कीजिए $5 - \frac{3}{7}\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।
28. सिद्ध कीजिए $\frac{1}{2 - \sqrt{5}}$ एक अपरिमेय संख्या है।
29. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा 56 और 112 का म.स. निकालो।
30. गुणनखण्ड वृक्ष में x का मान ज्ञात कीजिए।



दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

31. $\sqrt{45} \times \sqrt{20}$ को हल करो। बताइए यह परिमेय संख्या है या अपरिमेय संख्या।
32. यूक्लिड विभाजन एल्गोरिदम द्वारा 56, 96, 324 का म. स. ज्ञात कीजिए।

33. दर्शाइए कि किसी भी पूर्णांक q के लिए कोई भी घनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1, 6q + 3$ या $6q + 5$, के रूप में होगा।
34. दर्शाइए कि किसी घनात्मक पूर्णांक का वर्ग $5q, 5q + 1$ या $5q + 4$ के रूप का होता है, जहाँ q एक घनात्मक पूर्णांक है।
35. सिद्ध कीजिए कि तीन क्रमागत घनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 6 से भाज्य है।
36. किसी भी घनात्मक पूर्णांक n के लिए सिद्ध कीजिए कि $n^3 - n, 6$ से भाज्य है।
37. सिद्ध कीजिए $n, n + 2, n + 4$ में से एक ओर केवल एक 3 से भाज्य है।
38. सिद्ध कीजिए $n, n + 4, n + 8, n + 12$ और $n + 16$ में से एक ओर केवल एक ही 5 से विभाज्य है, n एक घनात्मक पूर्णांक है।
39. सलमान, ऋतिक और जॉन तीन घनिष्ठ मित्र थे। वे प्रातः कालीन भ्रमण पर एक साथ जाते थे। एक बार वे एक साथ निकलते हैं; इनके कदमों के नाप क्रमशः 40 से.मी., 42 से.मी. तथा 45 से.मी. है।
(a) ज्ञात कीजिए कितनी न्यूनतम दूरी प्रत्येक के चलने के लिए आवश्यक है ताकि उस दूरी को पूर्ण कदमों में तय कर सकें?
40. आकृति ने अपने जन्मदिन के उपलक्ष में एक अनाथाश्रम में दूध वितरित करने का निर्णय लिया। दूध के विक्रेता ने दूध के दो कंटेनर में 398 ली. और 436 ली. दूध है। एक ड्रम द्वारा इसमें से दूध तीसरे कंटेनर में डालना है। तीसरे कंटेनर में ड्रम द्वारा पलटने पर क्रमशः 7 ली. और 11 ली. दूध बचता है।
(a) ड्रम की अधिकतम धारिता ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

- | | |
|--|------------------|
| 1. $2m$ | 2. $2t + 1$ |
| 3. एक विषम पूर्णांक | 4. भाज्य संख्या |
| 5. अपरिमेय संख्या | 6. 2 |
| 7. अपरिमेय संख्या | 8. 4 |
| 9. 2520 | 10. 75 |
| 11. नहीं; म.स., ल.स., का गुणनखण्ड नहीं हैं। | |
| 12. a, q घनात्मक पूर्णांक, $0 \leq r < 4$ | |
| 13. समघात = 1 , विषम घात = 9 | |
| 14. — | 15. 4 |
| 16. — | 17. असांत आवर्ती |
| 18. हर 2 and 5 की घातों का गुणज (हर = $2^m \times 5^n$) | |
| 19. $\sqrt{5} + \sqrt{2}, 3$ | 20. — |
| 21. — | 22. — |
| 23. — | 24. — |
| 25. $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ | 26. — |
| 27. — | 28. — |
| 29. म.स. = 56, ल.स. = 112 | 30. 150 |
| 31. 30, परिमेय संख्या | 32. 4 |
| 33. — | 34. — |
| 35. — | 36. — |
| 37. — | 38. — |
| 39. (a) 2520 m, 25.2m | |
| 40. (a) 17 | |

अभ्यास प्रश्न—प्रश्न

वास्तविक संख्याएँ

समय : 50 मिनट

अंक : 20

खण्ड—अ

1. $\frac{51}{150}$ का दशमलव निरूपण कितने दशमलव स्थान के बाद सांत होगा। 1
2. यदि $a = bq + r$ है, a, b घनात्मक पूर्णांक हैं तब r के क्या मान हो सकते हैं? (यूकिलिड विभाजन प्रमेयिका में) 1

खण्ड—ब

3. दर्शाइए कि 9^n की ईकाई की संख्या कभी भी शून्य नहीं होगी। 2
4. लम्बी विभाजन विधि का प्रयोग करे बिना बताइए कि $\frac{935}{10500}$ का दशमलव प्रसार सांत है या असांत आवर्ती। 2

खण्ड—स

5. सिद्ध कीजिए $\frac{1}{3-2\sqrt{5}}$ अपरिमेय संख्या है। 3
6. यूकिलिड विभाजन प्रमेयिका द्वार 36, 96 और 120 का म. स. ज्ञात कीजिए। 3

खण्ड—द

7. यूकिलिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी भी घनात्मक पूर्णांक का घन $9q, 9q + 1$ या $9q + 8$ के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है। 4
8. एक बार एक खेल का सामान बेचने वाले विक्रेता ने एक 'पैदल चलने के फायदे' को जागरूकता के लिए एक अभियान चलाया। जिसमें सोहम और बानी ने हिस्सा लिया किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में बानी को 18 मिनट और सोहम को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करके एक ही दिशा में चलते हैं। तो
(a) कितने समय बाद वे पुनः प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे? 4

०००

2

अध्याय

बहुपद

प्रमुख बिंदु

1. यदि x एक चर है, n एक प्राकृत संख्या है और $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ वास्तविक संख्याएँ हैं, तो $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, ($a_n \neq 0$) चर x में एक बहुपद कहलाता है।
2. 1, 2 तथा 3 घातांक वाले बहुपद क्रमशः रैखिक, द्विघात एवं त्रिघात बहुपद कहलाते हैं।
3. एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के रूप का बीजीय व्यंजक होता है जबकि a, b तथा c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a \neq 0$.
4. बहुपद के शून्यक उन बिंदुओं के x – निर्देशांक हैं जिन पर $y = p(x)$ का आलेख (GRAPH) x -अक्ष को प्रतिच्छेद करता है। अर्थात् $x = a$, बहुपद $p(x)$ का शून्यक होगा यदि $p(a) = 0$
5. बहुपद के अधिकतम शून्यक उतने हो सकते हैं जितनी बहुपद की घात है।
6. (i) यदि बहुपद $p(x)$ का एक शून्यक दूसरे का योज्य प्रतिलोम हो तो x का गुणांक = 0
(ii) यदि बहुपद $p(x)$ के शून्यक एक–दूसरे के गुणन प्रतिलोम हो तो, x^2 का गुणांक = अचर पद
7. बहुपद के शून्यकों ओर गुणांकों में संबंध—
यदि α, β द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) के शून्यक हो, तो

$$\alpha + \beta = \text{शून्यकों का योग} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{c}{a}$$
8. यदि α, β किसी द्विघात बहुपद के शून्यक हो, तो बहुपद $p(x) = k [x^2 - (\text{शून्यकों का योग}) x + \text{शून्यकों का गुणनफल}]$ जहाँ k कोई वास्तविक संख्या है तथा $k \neq 0$
9. रैखिक बहुपद $p(x) = ax + b$ का आलेख एक सरल रेखा होती है।
10. विभाजन एल्गोरिद्म—किंही दो बहुपदों $p(x)$ तथा $g(x)$ के लिए अन्य दो बहुपदों $q(x)$ तथा $r(x)$ का अस्तित्व इस प्रकार है:

$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$; जबकि $g(x) \neq 0$ तथा $r(x) = 0$ या घातांक $r(x) <$ घातांक $g(x)$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. उस रैखिक बहुपद के शून्यकों की संख्या क्या होगी जिसका आलेख (ग्राफ):
(i) मूल बिंदु से गुजरता हो (ii) x -अक्ष को किसी भी बिंदु पर स्पर्श या प्रतिच्छेद नहीं करता हो।
2. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यक $(5+2\sqrt{3})$ और $(5-2\sqrt{3})$ हों।
3. यदि $4x^2 - (8k^2 - 40k)x - 9$ का एक शून्यक दूसरे शून्यक का योज्य प्रतिलोम हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।
4. $P(x) = x^2 - 5x + 4$ में क्या जोड़ा जाए ताकि प्राप्त बहुपद का एक शून्यक 3 हो।
5. एक द्विघात बहुपद के (i) अधिकतम (ii) न्यूनतम कितने शून्यक हो सकते हैं?
6. बहुपद $x^2 + 1$ के वास्तविक शून्यकों की संख्या क्या होगी?
7. यदि $6x^2 - 7x - 3$ के शून्यक α और β हो तो एक द्विघात बहुपद बनाइए जिसके शून्यक 2α और 2β हों।
8. यदि $4x^2 - 17x + k - 4$ के शून्यक α और $\frac{1}{\alpha}$ हो, तो k का मान क्या होगा?
9. उन बहुपदों के शून्यकों की संख्या क्या होगी जिनका आलेख (i) y -अक्ष (ii) x -अक्ष के समांतर हो।
10. उन बहुपदों के शून्यकों की संख्या क्या होगी जिनका आलेख अक्षों को केवल निम्नलिखित बिंदुओं पर स्पर्श या प्रतिच्छेद करता है:
(i) $(-3, 0), (0, 2)$ और $(3, 0)$ (ii) $(0, 4), (0, 0)$ और $(0, -4)$

लघु उत्तरीय प्रश्न (प्रकार 1)

11. यदि $(k-1)x^2 + kx + 1$ का एक शून्यक -3 हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।
12. यदि $ax^2 - 6x - 6$ के शून्यकों का गुणनफल 4 हो, तो a का मान ज्ञात कीजिए और उससे शून्यकों का योग ज्ञात कीजिए।
13. यदि बहुपद $x^2 - a(x+1) - b$ के शून्यक α और β इस प्रकार हों कि $(\alpha+1)(\beta+1) = 0$, तो b का मान ज्ञात करो।
14. यदि $x^2 - kx + 6$ के शून्यक $3 : 2$ के अनुपात में हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

15. यदि द्विघात बहुपद $(k^2 + k)x^2 + 68x + 6k$ का एक शून्यक दूसरे शून्यक का गुणन प्रतिलोम हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।
16. यदि α और β बहुपद $x^2 - 5x + m$ के शून्यक इस प्रकार से हो कि $\alpha - \beta = 1$, तो m का मान ज्ञात कीजिए।
17. यदि $x^2 - 8x + k$ के शून्यकों के वर्गों का योग 40 हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।
18. यदि α और β बहुपद $t^2 - t - 4$ के शून्यक हों तो एक द्विघात बहुपद बनाइए जिसके शून्यक $\frac{1}{\alpha}$ और $\frac{1}{\beta}$ हो।

लघु उत्तरीय प्रश्न (प्रकार 2)

19. यदि $y^2 + 2y - 15$ और $y^3 + a$ में से प्रत्येक का एक गुणनखंड $(k + y)$ हो, तो k और a के मान ज्ञात कीजिए।
20. बहुपद $4\sqrt{3}x^2 + 5x - 2\sqrt{3}$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और इसके शून्यकों और गुणाकों में संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।
21. यदि $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 12x + 18$ को $(x^2 + 5)$ से भाग करने पर शेषफल $= (px + q)$ प्राप्त हो तो p व q के मान ज्ञात कीजिए।
22. $2x^2 + px - 15$ का एक शून्यक -5 है। $p(x^2 + x) + k$ के शून्यक परस्पर समान हैं। k का मान ज्ञात कीजिए।
23. यदि बहुपद $3x^2 + 2kx + x - k - 5$ के शून्यकों का योग उनके गुणन का आधा हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।
24. यदि $y^2 + 5y + m$ के शून्यक α और β हों तो m का मान ज्ञात कीजिए ताकि $(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = 24$
25. यदि $x^2 - x - 2$ के शून्यक α और β हों, तो एक बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यक $(2\alpha + 1)$ और $(2\beta + 1)$ हों।
26. a और b के मान ज्ञात कीजिए ताकि बहुपद $x^4 + x^3 + 8x^2 + ax + b$, $x^2 + 1$ से पूर्णतया विभाजित हो जाए।
27. $8x^4 + 14x^3 - 2x^2 + 7x - 8$ में से क्या घटाया जाए ताकि प्राप्त बहुपद $4x^2 + 3x - 2$ से पूर्णतया विभाजित हो जाए?

28. $4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ में क्या जोड़ा जाए ताकि प्राप्त बहुपद $x^2 - 2x - 3$ से पूर्णतया विभाजित हो जाए?

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

29. यदि $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ के दो शून्यक $\sqrt{3}$ और $-\sqrt{3}$ हों, तो इसके सभी शून्यक लिखिए।
30. यदि $6x^3 + \sqrt{2}x^2 - 10x - 4\sqrt{2}$ का एक शून्यक $\sqrt{2}$ हो, तो इसके अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए।
31. यदि $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ के दो शून्यक $(2 \pm \sqrt{3})$ हो, तो अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए।
32. $x^3 - 5x^2 + 6x - 4$ को बहुपद $g(x)$, से भाग देने पर भागफल और शेषफल क्रमशः $(x - 3)$ और $(-3x + 5)$ हैं। $g(x)$ ज्ञात कीजिए।
33. यदि $x^3 + x^2 - 3x - 3$ के दो शून्यकों का योग और गुणन क्रमशः 0 और 3 हो तो इस बहुपद के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए।
34. यदि $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ का एक शून्यक $-\frac{1}{2}$ हो, तो इसके अन्य दो शून्यकों का योग तथा गुणन ज्ञात कीजिए।
35. बहुपद $2x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 3x + 6$ के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए, यदि इसके दो गुणनखंड $\left(x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ हों।
36. $p(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 36x - 9$ के दो शून्यकों का योग और गुणनफल क्रमशः 0 और -9 है। $p(x)$ के अन्य दो शून्यकों का योग और गुणनफल ज्ञात कीजिए।
37. एक व्यक्ति कुछ जरूरतमंद विद्यार्थिकों को k पुस्तकों वितरित करता है। यदि k , बहुपद $x^2 - 100x - 20000$ का एक शून्यक हो, तो
- व्यक्ति द्वारा वितरित पुस्तकों की संख्या ज्ञात कीजिए।
38. $x^3 - 12x^2 + 47x - 60$ का एक शून्यक 3 है तथा अन्य दो शून्यक विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए पेड़ों की संख्या हैं।
- दोनों विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए पेड़ों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

- 1.** (i) 1 (ii) 0 **2.** $x^2 - 10x + 13$
3. $k = 0, 5$ **4.** 2
5. (i) 2 (ii) 0 **6.** 0
7. $3x^2 - 7x - 6$ **8.** $k = 8$
9. (i) 1 (ii) 0 **10.** (i) 2 (ii) 1
11. $\frac{4}{3}$ **12.** $a = -\frac{3}{2}$, शून्यकों का योग = - 4
13. 1 **14.** - 5, 5
15. 5 **16.** 6
17. 12 **18.** $4t^2 + t - 1$
19. $k = 3, -5$ और $a = 27, -127$ **20.** $-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{4}$
21. $p = 2, q = 3$ **22.** $\frac{7}{4}$
23. 1 **24.** 1
25. $x^2 - 4x - 5$ **26.** $a = 1, b = 7$
27. $14x - 10$ **28.** $61x - 65$
29. $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\frac{1}{2}$ **30.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}$
31. - 5, 7 **32.** $x^2 - 2x + 3$
33. $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -1$ **34.** 0, 3
35. $2, -1, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ **36.** 4, 1
37. (i) 200
38. (i) 9

अभ्यास प्रश्न—प्रत्र

बहुपद

समय : 50 मिनट

अंक : 20

खंड—अ

- यदि α और β द्विघात बहुपद $p(x)$, के शून्यक हों, तो $p(x)$ का गुणनखंडन कीजिए। 1
- यदि $x^2 - x - 1$ के शून्यक α और β हों, तो $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

खंड—ब

- बहुपद $x^2 - (k+6)x + 2(2k-1)$ के शून्यक α और β हैं। यदि $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\alpha\beta$ हो तो k का मान ज्ञात कीजिए। 2
- एक द्विघात बहुपद बनाइए जिसका एक शून्यक $(3+\sqrt{2})$ हो और शून्यकों का योग 6 हो। 2

खंड—स

- a और b के मान ज्ञात कीजिए यदि $(x^2 + 1)$ बहुपद $x^4 + x^3 + 8x^2 + ax + b$ का एक गुणनखंडन हो। 3
- यदि सच और झूठ बहुपद $px^2 + qx + r$, ($p \neq 0$) के शून्यक हों जो एक-दूसरे के व्युत्क्रम हों तो
 - p और r में संबंध ज्ञात कीजिए। 3

खंड—द

- यदि बहुपद $x^3 + 2x^2 + kx + 7$ को $(x-3)$ से भाग करने पर शेषफल 25 प्राप्त होता हों तो भागफल तथा k का मान ज्ञात कीजिए। इस प्रकार प्राप्त भागफल के शून्यकों का योग और गुणनफल भी ज्ञात कीजिए। 4
- यदि β और $\frac{1}{\beta}$ बहुपद $(\alpha^2 + \alpha)x^2 + 61x + 6\alpha$ के शून्यक हों तो β और α के मान ज्ञात कीजिए। 4

□□□

3

अध्याय

दो चरों वाले रैखिक समीकरण युग्म

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. रैखिक समीकरण युग्म का व्यापक रूप है

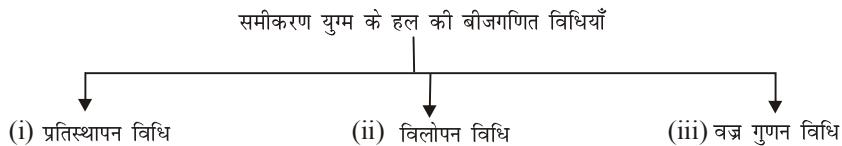
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

जहाँ a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 , और c_2 वास्तविक संख्याएँ हैं।

2. दो चर में एक रैखिक समीकरण युग्म दो रेखाएँ निरूपति करता है।

- (i) यदि रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं तो वह बिन्दु दोनों समीकरणों का अद्वितीय हल होता है।
- (ii) यदि रेखाएँ समान्तर हैं; तो समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होता है। इस स्थिति में समीकरण युग्म असंगत होता है।
- (iii) यदि रेखाएँ संपाती हैं; तो उसके अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं। इस स्थिति में समीकरण युग्म संगत होता है।



3. यदि दिए गए रैखिक समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ एक रैखिक समीकरण युग्म को प्रदर्शित करता है तो

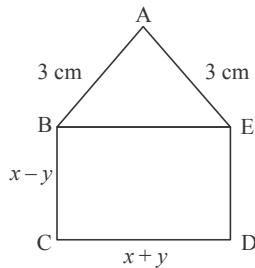
- (i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow$ रैखिक समीकरण युग्म संगत होता है (अद्वितीय हल)
- (ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow$ रैखिक समीकरण युग्म असंगत होता है (कोई हल नहीं)
- (iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow$ रैखिक समीकरण युग्म आश्रित और संगत होता है (अनेक अनन्त हल)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. यदि $x = 3m - 1$ तथा $y = 4$, समीकरण $x + y = 6$ का हल हो तो m का मान ज्ञात कीजिए।
2. समीकरण $3x - 2y = 6$ से बनी रेखा तथा y -अक्ष का प्रतिच्छेदों बिन्दु ज्ञात कीजिए।
3. p के किस मान के लिए रैखिक समीकरण युग्म $2x + py = 8$ और $x + y = 6$ का कोई हल नहीं है।
4. एक मोटर साईकिल वाला $x - y = 2$ के अनुसार चल रहा है। दूसरा मोटर साईकिल वाला $x - y = 4$ के अनुसार चल रहा है उनके चलने की दिशा ज्ञात कीजिए।
5. k का वह मान ज्ञात करो जिसके लिए रैखिक समीकरण युग्म $3x + 2y = -5$ और $x - ky = 2$ का एक अद्वितीय हल हो।
6. यदि $3x - 7y = 10$ हो तो y को x के पदों में व्यक्त करो।
7. यदि $2x + 5y = 4$ एक समीकरण हो, एक अन्य रैखिक समीकरण लिखो ताकि रैखिक समीकरण युग्म संपाती रेखाएँ प्रदर्शित करें।
8. जांच करो क्या रैखिक समीकरण युग्म $x + 2y - 4 = 0$ और $2x + 4y - 12 = 0$ का ग्राफ प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं या समान्तर रेखाएँ हैं।
9. यदि $3x + 2ky = 2$ तथा $2x + 5y + 1 = 0$ समान्तर रेखाओं के समीकरण हो तो k का मान ज्ञात करो।
10. $x = 2$ और $y = 3$ का आलेख बनाने पर किस प्रकार की रेखाएँ प्राप्त होगी?

लघु उत्तरीय टाईप 1 प्रश्न

11. एक रैखिक समीकरण युग्म बनाइये—यदि एक भिन्न के अंश व हर का योगफल उसके हर के दुगुने से 3 कम हो। तथा यदि अंश और हर दोनों में से एक घटा दिया जाए तो भिन्न का अंश हर का आधा हो जाता है।
12. p के किस मान के लिए रैखिक समीकरण युग्म $(p + 2)x - (2p + 1)y = 3(2p - 1)$, $2x - 3y = 7$ का एक अद्वितीय हल है।
13. दिए गए चित्र में यदि पंचभुज ABCDE का परिमाप 21 cm है। $BE \parallel CD$, तथा $BC \parallel DE$ यदि BC भुज CD पर लंब है तो x और y का मान ज्ञात करो।



14. x और y के लिए हल करो

$$x - \frac{y}{2} = 3 \text{ और } \frac{x}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{2}{3}$$

15. x और y के लिए हल करो

$$3x + 2y = 11 \text{ और } 2x + 3y = 4$$

p का मान भी ज्ञात कीजिए यदि $p = 8x + 5y$

16. रैखिक समीकरण युग्म

$$x - 7y + 42 = 0$$

$x - 3y - 6 = 0$ को प्रतिस्थापन विधि से हल करो।

17. राम बिन्दु $(1, 4)$ और $(0, 6)$ को जोड़ने वाली रेखा पर चल रहा रहीम बिन्दु $(3, 4)$ और $(1, 0)$ को जोड़ने वाली रेखा पर चल रहा है। ग्राफ द्वारा उपरोक्त को दर्शाइए और बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात करो जिस पर दोनों एक दुसरे को प्रतिच्छेद करे।

18. दिये हुए रैखिक समीकरण $2x + 3y - 12 = 0$ के लिए दो चर में अन्य रैखिक समीकरण लिखिए कि इस युग्म का ग्राफिय निरूपण है।

(i) समान्तर रेखाएँ (ii) संपाती रेखाएँ

19. दो संख्याओं का अन्तर 66 है, यदि एक संख्या दूसरी संख्या का 4 गुना हो तो संख्याएँ ज्ञात करो।

20. k के किस मान के लिए दिए गए रैखिक समीकरण युग्म असंगत है

$$kx + 3y = k - 3$$

$$12x + ky = k$$

लघु उत्तरीय प्रश्न टाईप 2

21. रैखिक समीकरण युग्म $5x - y = 5$ और $3x - 2y = -4$ को ग्राफीक विधि से हल करो। उन बिन्दुओं के निर्देशांक भी ज्ञात करो जहां ये रेखाएँ y -अक्ष को प्रतिच्छेद करती हो।

22. x और y के लिए हल करो

$$\frac{5}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2$$

$$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$$

23. वज्र गुणन विधि द्वारा हल करो।

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = a + b$$

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 2$$

24. a और b के वह मान ज्ञात करो ताकि रैखिक समीकरण युग्म

$$2x + 3y = 7$$

$$a(x+y) - b(x-y) = 3a + b - 2$$

के अनेक अनन्त हल हो।

25. रैखिक समीकरण युग्म को हल करो।

$$152x - 378y = -74$$

$$-378x + 152y = -604$$

26. पिंकी ने एक परीक्षा में 40 अंक अर्जित किए जबकि से सही उत्तर पर 3 अंक मिले और गलत उत्तर पर 1 अंक की कटौती की गई। यदि उसे सही उत्तर पर 4 अंक मिलते और गलत उत्तर पर 2 अंक कटते, तो पिंकी को 40 अंक ही मिलते। परीक्षा में कुल कितने प्रश्न थे?

27. एक दो अंकों की संख्या या तो उसके अंकों के योग के 8 गुना में 1 जोड़ने पर प्राप्त होता है या अंकों के अन्तर के 13 गुना में 2 जोड़ने पर प्राप्त होती है संख्या ज्ञात करो।

28. पिता को आयु उसके दो पुत्रों की आयु के योग की तीन गुणा है। 5 वर्ष बाद उसकी आयु अपने दोनों पुत्रों की आयु के योग की दुगुनी होगी। पिता की आयु ज्ञात कीजिए।

29. एक टी. वी. को 5% लाभ तथा फ्रिज को 10% लाभ पर बेचने पर एक दुकानदार को Rs. 2000. का लाभ होता है, यदि वह टी. वी. को 10% लाभ तथा फ्रिज 5% हानि पर बेचे तो उसे Rs. 1500 का लाभ होता है टी. वी. और फ्रिज के वास्तविक मूल्य ज्ञात करो।

30. सुनीता के पास Rs. 50 और Rs. 100 के कुछ नोट हैं जिनका मूल्य Rs. 15,500 है। यदि नोटों की कुल संख्या 200 है। तो सुनीता के पास Rs. 50 तथा Rs. 100 के नोटों की संख्या ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

31. रैखिक समीकरण युग्म $3x - 4y + 3 = 0$ और $3x + 4y - 21 = 0$ को ग्राफीय विधि से हल करो।

इन रेखाओं तथा x -अक्ष से बने त्रिभुज के निर्देशांक लिखिए। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल भी ज्ञात करो।

32. x और y के लिए हल करो।

$$\frac{1}{2(2x+3y)} + \frac{12}{7(3x-2y)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{(2x+3y)} + \frac{4}{(3x-2y)} = 2$$

$$2x + 3y \neq 0$$

$$3x - 2y \neq 0$$

33. समीकरण युग्मों को ऐखिक समीकरण युग्म में बदलकर हल कीजिए।

$$\frac{3x+2y}{xy} = 1 \text{ और } \frac{4x-2y}{xy} = 13$$

a का मान भी ज्ञात करो यदि $y = ax - 4$ हो।

34. एक व्यक्ति 600 किमी की दूरी पर अपने घर जाने के लिए कुछ दूरी रेलगाड़ी द्वारा तथा कुछ दूरी बस द्वारा तय करता है। यदि वह 120 किमी दूरी रेलगाड़ी द्वारा तथा शेष दूरी बस द्वारा तय करता है तो उसे कुल 8 घंटे का समय लगता है। यदि वह 200 किमी दूरी रेलगाड़ी द्वारा तथा शेष बस द्वारा तय करता है तो उसे पहले से 20 मिनट अधिक समय लगता है। रेलगाड़ी और बस की चाल ज्ञात करो।
35. A तथा B सड़क हाईवे में 150 किमी की दूरी पर हैं। दो कारें A तथा B से एक ही दिशा में एक ही समय पर अलग-अलग गति से चलती हैं तो 15 घंटे बाद मिलती है। यदि वे एक दूसरे की तरफ चलती हैं तो 1 घंटे बाद मिलती है। दोनों कारों की गति ज्ञात कीजिए।
36. एक नाव धारा के प्रतिकूल 32 किमी जाने तथा धारा के अनुकूल 36 किमी वापिस आने में 7 घंटे का समय लेती है। यदि वह 40 किमी धारा के प्रतिकूल तथा 48 किमी धारा के अनुकूल चले तो उसे 9 घंटे का समय लगता है। नाव की गति शांत जल में तथा धारा की गति ज्ञात कीजिए।
37. किसी भिन्न के अंश और हर का योग अंश के दुगुने से 4 अधिक है। यदि अंश और हर में 3 जोड़ दे उनका अनुपात 2 : 3 होगा। भिन्न ज्ञात करो।

38. राजू एक दिन में 2 प्लास्टिक के थैले और 1 कागज का प्रयोग करता है। इनको खरीदने के लिए उसे Rs. 35 खर्च करने पड़ते हैं। रमेश 3 प्लास्टिक तथा 4 कागज के थैले खरीदने के लिए Rs. 65 खर्च करता है।
(i) दोनों थैलों की प्रति थैला मूल्य ज्ञात कीजिए।
39. 8 महिलाएँ और 12 आदमी किसी कार्य को मिलकर 10 दिन में पूरा कर सकते हैं। जबकि 6 महिलाएँ 8 आदमी उसी कार्य को 14 दिन में कर सकते हैं। एक महिला और एक आदमी द्वारा अकेले इस कार्य को करने में कितने दिन लगेंगे?
40. दो व्यक्तियों की आय का अनुपात 3 : 4 है। जबकि उनके खर्चों का अनुपात 5 : 7 है। यदि प्रत्येक Rs. 15,000 वार्षिक बचत करता है। उनकी वार्षिक आय ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

1. $m = 1$ 2. $(0, -3)$
 3. $p = 2$ 4. समान्तर दिशा
 5. $k \neq \frac{-2}{3}$ 6. $y = \frac{3x-10}{7}$
 7. $4x + 10y = 8$ 8.
 9. $k = \frac{15}{4}$ 10. प्रतिच्छेदी रेखाएँ
 11. $x - y = -3, 2x - y = 1$ 12. $p \neq 4$
 13. $x = 5, y = 0$ 14. 4, 2
 15. $x = 5, y = -2, p = 30$ 16. 42, 12
 17. $(2, 2)$ 18. (i) $4x + 6y + 10 = 0$
 (iii) $4x + 6y - 24 = 0$
 19. 88, 22 20. $k = -6$
 21. $(2, 5)$ $(0, -5)$ और $(0, 2)$ 22. $(3, 2)$
 23. a^2, b^2 24. $a = 5, b = 1$
 25. 2, 1 26. 40 प्रश्न
 27. 41 28. 45 वर्ष
 29. टी. वी. का मूल्य = Rs. 20,000 फ्रिज का मूल्य = Rs. 10,000
 30. Rs. 50 के नोट = 90 Rs. 100 के नोट = 110
 31. हल $(3, 3)$, निर्देशांक $(-1, 0)$
 $(7, 0)$ और $(3, 3)$, क्षेत्रफल = 12 वर्ग इकाई
 32. $(2, 1)$ 33. $x = \frac{-2}{5}, y = \frac{1}{2}, a = \frac{-45}{4}$
 34. 60 किमी/घ, 80 किमी/घ 35. 80 किमी/घ, 70 किमी/घ
 36. 10 किमी/घ, 2 किमी/घ 37. $\frac{5}{9}$

38. (i) 15, 5,

39. एक महिला = 140 दिन,

एक आदमी = 280 दिन

40. Rs. 90,000, Rs. 1,20,000

अभ्यास प्रश्न—प्रत्र

दो चरों वाले रैखिक समीकरण युग्म

समय : 50 मिनट

अंक : 20

खण्ड—अ

1. k के किस मान के लिए समीकरण युग्मों का एक अद्वितीय हल है

$$x + 2y = 3, 5x + ky + 7 = 0$$

2. क्या बिन्दु (2, 3) रेखा $3x - 2y = 5$ के ग्राफ पर स्थित है?

1

1

खण्ड—ब

3. a तथा b के मान ज्ञात करो ताकि समीकरण युग्मों $2x - 3y = 7$ और $ax + 3y = b$ के अनेक अनन्त हल हो।

2

4. x और y के लिए हल करो

$$0.4x + 0.3y = 1.7$$

$$0.7x - 0.2y = 0.8$$

2

खण्ड—स

5. वज्र गुणन विधि से हल करो

3

$$x + y = a + b$$

$$ax - by = a^2 - b^2$$

6. एक पिता और उसके पुत्र की आयु का योगफल 40 वर्ष है। यदि पिता की आयु पुत्र की आयु का तीन गुना हो तो उनकी आयु ज्ञात कीजिए।

3

खण्ड—द

7. निम्न समीकरण युग्मों को ग्राफिय विधि से हल करो

4

$$3x + 5y = 12 \text{ और } 3x - 5y = -18$$

इन रेखाओं तथा x -अक्ष के बीच घिरे क्षेत्र को छायांकित कीजिए।

8. एक दो अंकों की संख्या तथा अंकों का स्थान बदलने पर प्राप्त संख्या का योगफल 99 है। यदि अंकों का स्थान बदलने पर प्राप्त संख्या वास्तविक संख्या से 9 अधिक हो तो संख्या ज्ञात कीजिए।

4

□□□

4

अध्याय

द्विघात समीकरण

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ द्विघात समीकरण है, जिसमें a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं। उदाहरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

2. **द्विघात समीकरण के मूल**

एक वास्तविक संख्या a को द्विघात समीकरण का मूल कहां जा सकता है यदि $aa^2 + ba + c = 0$

3. मूलों की संख्या—एक द्विघात समीकरण के दो मूल होते हैं।

द्विघात समीकरण हल करने की विधि

4. 
- गुणनखंड द्वारा पूर्णवर्ग विधि द्वारा द्विघात फार्मूले द्वारा

5. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के निम्न मूल हैं

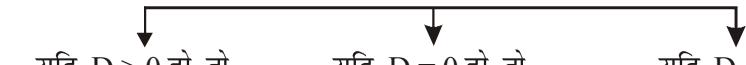
$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

6. **विविक्तकर** किसी द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के लिए विविक्तर $D = b^2 - 4ac$ होता है।

अर्थात् $D = b^2 - 4ac$ होने पर द्विघात समीकरण के मूल निम्न हैं

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

मूलों का स्वभाव

7. 
- यदि $D > 0$ हो तो यदि $D = 0$ हो तो यदि $D < 0$ हो तो
वास्तविक और असमान मूल होंगे। वास्तविक और समान मूल होंगे। अवास्तविक मूल होंगे।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. यदि $-\frac{1}{2}$ द्विघात समीकरण $2x^2 + kx + 1 = 0$ का मूल हो तो k ज्ञात करें।
2. द्विघात समीकरण $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ के मूल किस प्रकार के होंगे?
3. क्या समीकरण $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$ एक द्विघात समीकरण है?
4. समीकरण $5x^2 - \sqrt{2}x + 3 = 0$ को पूर्ण वर्ग विधि द्वारा हल करने पर कौन सा स्थिरांक जोड़ा या घटाया जाएगा?
5. यदि $x = -1$ और $x = -2$ समीकरण $px^2 + 3x + q = 0$ के मूल हों तो $q - p$ ज्ञात करें।
6. एक द्विघात समीकरण बनाएं जिसने मूल $\sqrt{2}$ और 1 हों।
7. निम्न के लिए द्विघात समीकरण बनाएं ‘दो कमागत सम पूर्णांकों का गुणनफल 1848’ है।
8. क्या 0.2 , समीकरण $x^2 - 0.4 = 0$ का मूल है?
9. यदि $ax^2 + bx + c$ के मूल बराबर हों तो c को a और b के यप में व्यक्त करें।
10. द्विघात समीकरण $x^2 + 6x - 91 = 0$ को यदि $(x + p)(x + q) = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर p और q क्या होंगे?

लघु उत्तरीय प्रश्न—(1)

11. गुणनखंड विधि द्वारा करें—
 - $8x^2 - 22x - 21 = 0$
 - $3\sqrt{5}x^2 + 25x + 10\sqrt{5} = 0$
 - $\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$
 - $2x^2 + ax - a^2 = 0$
12. यदि $2x^2 + kx + k = 0$ के मूल वास्तविक और बराबर हों तो k का मान ज्ञात करें।
13. यदि $9x^2 + 3kx + 4 = 0$ के मूल असमान हों तो k का मान ज्ञात करें।
14. p के किस मान के लिए द्विघात समीकरण $x^2 + 5px + 16 = 0$ के अवास्तविक मूल होंगे?
15. c के किस मान के लिए समीकरण $4x^2 - 2x + (c - 4) = 0$ के मूल एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे?
16. p के किस मान के लिए समीकरण $px^2 + 6x + 4p = 0$ के मूलों का गुणनफल और उनका योग बराबर होगा?

17. दो वर्गों की भुजाएं x सेमी और $(x + 4)$ सेमी हैं। उनके क्षेत्रफलों का योग 656 वर्ग सेमी हो तो वर्गों की भुजाओं का माप ज्ञात करें।
18. p का मान ज्ञात करें जिसके लिए समीकरण $px + (x - 3) + 9 = 0$ के मूल बराबर हों?
19. 16 के दो हिस्सें इस प्रकार करें कि बड़ी संख्या का दुगुना संख्या के वर्ग से 164 अधिक हो।
20. k का मान ज्ञात करें जब समीकरण $x^2 - 5x + (3k - 3) = 0$ के मूलों का अंतर 11 हो।
21. दो क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग 313 है। संख्याएँ ज्ञात करें।

लघु उत्तरीय प्रश्न 2

22. निम्न द्विघात समीकरण सरल करें—

$$(a) \frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}, a+b \neq 0$$

$$(b) \frac{1}{2a+b+2x} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{2x}$$

$$(c) \frac{2}{x+1} + \frac{2}{2(x-2)} = \frac{23}{5x}, x \neq -1, 2, 0$$

$$(d) 3\left(\frac{7x+1}{5x-3}\right) - 4\left(\frac{5x-3}{7x+1}\right) = 11, x \neq \frac{3}{5}, \frac{-1}{7}$$

$$(e) \frac{x-1}{x+2} + \frac{x-3}{x-4} = \frac{10}{3}, x \neq -2, 4$$

$$(f) ax^2 + (4a^2 - 3b)x - 12ab = 0$$

$$(g) 4x^2 - 4ax + (a^2 - b^2) = 0$$

$$(h) \frac{4}{x} - 3 = \frac{5}{2x+3}, x \neq 0, -3/2$$

23. द्विघात सूत्र का प्रयोग करके समीकरण सरल करें—

$$abx^2 + (b^2 - ac)x - bc = 0$$

24. यदि $-5, 2x^2 + px - 15$ का मूल हो और $p(x^2 + x) + k = 0$ के मूल बराबर हो तो p और k का मान ज्ञात करें।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

25. यदि द्विघात समीकरण $(p+1)x^2 - 6(p+1)x + 3(p+9) = 0$ के मूल बराबर हों तो p का मान ज्ञात करें तथा फिर इस समीकरण के मूल भी ज्ञात करें।
26. k के किस मान के लिए द्विघात समीकरण $(2k+1)x^2 - (7k+2)x + (7k-3) = 0$ के मूल बराबर होंगे? मुल भी ज्ञात करें।
27. यदि द्विघात समीकरण $(1+m^2) + 2mcx + (c^2 - a^2) = 0$ के मूल बराबर हों तो सिद्ध करें $c^2 = a^2 (1+m^2)$
28. k के किस मान के लिए $(4-k)x^2 + (2k+4)x + (8k+1) = 0$ एक पूर्ण वर्ग है?
29. बत्तख के समूह के वर्गमूल का $\frac{7}{2}$ गुणा नदी के किनारे खेल रहे थे। शेष दो बत्तख पानी के अंदर खेल रहे थे। बत्तखों की कुल संखा ज्ञात करें।
30. एक मोर 9m ऊँचे स्तंभ पर बैठा था स्तंभ के तल से 27m दूर एक सांप है जो अपने बिल की तरफ जो अपने बिल की तरफ जो स्तंभ के तल में है आ रहा है।
31. 9000 रु. को कुछ व्यक्तियों में बराबर बांटा गया। यदि 20 व्यक्ति और आ जाए तो प्रत्येक व्यक्ति को 160 रु कम प्राप्त होंगे। तो कुल व्यक्ति कितने हैं ज्ञात करें।
32. एक व्यक्ति एक खिलौना 24 रु में बेचता है और उतने प्रतिशत लाभ प्राप्त करता है जितना खिलौने का क्रयमूल्य हो। खिलौने का क्रयमूल्य ज्ञात करें।
33. एक विक्रेता कुछ किताबें 80 रु में खरीदता है। यदि वह 4 किताबें और उसी दाम में खरीदे तो प्रत्येक किताब का मूल्य 1 रु कम हो जाता है। उसने कुल कितनी किताबें खरीदी?
34. दो पाइप एक साथ एक सिस्टन को भरने में $3\frac{1}{13}$ मिनट लगाते हैं। यदि एक पाइप इसे भरने में दूसरे पाइप से 3 मिनट ज्यादा ले तो कितने समय में प्रत्येक पाइप इस सिस्टन को भरेगा?
35. दो वर्गों के क्षेत्रफलों का योग 400 cm^2 है। यदि उनके परिमापों का अंतर 16 cm हो तो प्रत्येक वर्ग की भुजा का माप ज्ञात करें।
36. एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल 60 cm^2 है। इसकी बराबर भुजाओं की लंबाई 13 cm है तो इस त्रिभुज का आधार ज्ञात करें।

37. एक चैस बोर्ड में 64 बराबर वर्ग हैं और हर वर्ग का क्षेत्रफल 6.25 cm^2 है। इस बोर्ड के चारों तरफ 2 cm चौड़ा बार्डर है। इस चैस बोर्ड की लंबाई ज्ञात करें।
38. एक लड़की की उम्र अपनी बहन से दुगनी है। चार वर्ष पश्चात दोनों की आयु का गुणनफल 160 होगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात करें।
39. एक नाव जिसकी गति शांत जल में 18 किमी/घंटा है जो 24 km किमी धारा के विरुद्ध जाने में और 24 km किमी धारा की दिशा में आने पर 1 घंटा ज्यादा लेती है। धारा की गति ज्ञात करें।
40. एक तेज चलने वाली रेलगाड़ी एक धीरे चलने वाले रेलगाड़ी से 600 km किमी की दूरी तय करने में 3 घंटे कम लेती है। यदि धीमी रेलगाड़ी की गति 10 किमी/घंटा तेजी रेलगाड़ी से कम हो तो दोनों रेलगाड़ी की गति ज्ञात करें।
41. एक भिन्न का अंश, हर, से 3 कम है यदि अंश और हर दोनों ही में 2 जोड़ा जाए तो नए भिन्न और दिए गए भिन्न का जोड़ $\frac{29}{20}$ होगा। दिया गया भिन्न ज्ञात करें।
42. दो प्राकृतिक संख्याओं का अंतर 3 है और उनके व्युत्क्रमों का अंतर $\frac{3}{28}$ है। संख्याएँ ज्ञात करें।
43. तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों में पहली संख्या का वर्ग और अन्य दो संख्याओं का गुणफल जोड़ने पर 46 प्राप्त होता है। पूर्णांक ज्ञात करें।
44. एक दो अंकों की संख्या अपने अंकों के जोड़ से 3 गुना है और अपने अंकों के गुणनफल से तीन गुना है। संख्या ज्ञात करें।
45. एक समकोण त्रिभुजाकार भूमि का कर्ण सबसे छोटी भुजा के दुगुने से 10 मीटर बड़ा है। यदि तीसरी भुजा छोटी भुजा से 7 मीटर बड़ी हो तो भूमि की तीनों भुजाएँ ज्ञात करें।
46. एक कक्षा परीक्षा में p के गणित और विज्ञान में प्राप्त अंकों का जोड़ 28 है। यदि वह गणित में 3 अंक और प्राप्त करता है और विज्ञान में 4 अंक कम प्राप्त करता है तो उसके अंकों का गुणनफल 180 होता। उसके दोनों विषयों में प्राप्त अंक ज्ञात करें।
47. एक कपड़ा 200 रु का है। यदि कपड़े की लम्बाई 5 मी. अधिक होती और प्रति मीटर कपड़े का मूल्य 2 रु कम होता तो भी कपड़े का कुल मूल्य वही रहता। कपड़े की लंबाई और प्रति मीटर कपड़े का मूल्य ज्ञात करें।

48. एक हवाई जहाज अपने नियमित समय से 30 मिनट देर से चलता है। अपने गतव्य स्थान जो कि 1500 किमी दूर है पर समय से पहुँचने के लिए उसे अपनी गति 250 किमी/घंटा बढ़ानी पड़ती है। हवाई जहाज की वास्तविक गति ज्ञात करें।
49. यदि पहले n सम प्रकृतिक संख्याओं का योग 420 है। n का मान ज्ञात करो।
50. एक हवाई जहाज पर चढ़ते हुए एक आदमी को चोट लग जाती है। पायलट शीघ्रता से उसे अस्पताल पहुँचाने की व्यवस्था करता है। इसलिए हवाई जहाज 30 मिनट देर से चलता है। अपने गतव्य स्थान जो कि 1500 किमी दूर है पर समय से पहुँचने के लिए पायलट को गति 100 किमी/घंटा बढ़ानी पड़ती है। हवाई जहाज की वास्तविक गति ज्ञात करें।
51. A एक काम को पूरा करने में B से 10 दिन कम लेता है। A और B मिलकर उसी काम को 12 दिनों में पूरा करते हैं। B द्वारा अकेले उस काम को पूरा करने में कितना समय लगेगा?

उत्तरमाला

1. $k = 3$

2. बराबर मूल

3. हाँ

4. $\frac{2}{100}$ या $\frac{1}{50}$

5. 1

6. $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$

7. $x^2 + 2x - 1848 = 0$

8. नहीं

9. $c = \frac{b^2}{4a}$

10. $13 - 7$

11. (a) $x = \frac{7}{2}, x = \frac{-3}{4}$

(b) $x = \sqrt{5}, x = -\frac{2\sqrt{5}}{3}$

(c) $x = \sqrt{6}, x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

(d) $x = \frac{a}{2}, x = -a$

13. $k > 4, k < -4$

14. $-\frac{8}{5} < p < \frac{8}{5}$

15. $c = 8$

16. $p = \frac{-3}{2}$

17. 16 cm, 20 cm

18. $p \neq 0, p = 4$

19. $x = 10, 6$

20. $k = -7$

21. 12, 13

22. (a) $x = -a, x = -b$

23. $x = \frac{c}{b}, \frac{-b}{a}$

(b) $x = -a, x = -\frac{b}{2}$

24. $p = 7, p = \frac{7}{4}$

(c) $x = 4, x = -\frac{23}{11}$

25. $p = 3, x = 3, 3$

(d) $x = 0, x = 1$

26. $k = 4, \frac{-4}{7}$

(e) $x = \frac{1 \pm \sqrt{297}}{4}$

(f) $x = \frac{3b}{a}, x = -4a$

(g) $x = \frac{a+b}{a}, x = \frac{a-b}{2}$

(h) $x = -2, x = 1$

- 28.** $k = 0, 3$ **29.** 16
30. 12 m **31.** 25
32. 20 रु **33.** 16
34. 5 मिनट, 8 मिनट **35.** 12, 16
36. 24 सेमी या 10 सेमी **37.** 24 सेमी
38. 6 वर्ष, 12 वर्ष **39.** 6 किमी/घंटा
40. 40 किमी/घंटा **41.** $\frac{7}{10}$
 50 किमी/घंटा
42. 7, 4 **43.** 4, 5, 6
44. 24 **45.** 8 मी. 17 मी. 15 मी.
46. गणित में अंक 12 **47.** लम्बाई 20 मी.
 विज्ञान में अंक 16 दर = 10 रु/मी.
48. 750 किमी/घंटा **49.** $n = 20$
50. 500 किमी/घंटा **51.** 30 दिन।

अभ्यास प्रश्न—प्रत्र

द्विघात समीकरण

समय : 50 मिनट

अंक : 20

खण्ड—अ

- यदि समीकरण $6x^2 - bx + 2 = 0$ का विविक्तकर 1 हो तो b का मान ज्ञात करें। 1
- $x^2 + 5x - 300 = 0$ में x का मान ज्ञात करें

खण्ड—ब

- यदि $kx^2 - 2kx + 6 = 0$ के मूल बराबर हों तो k का मान ज्ञात करें। 2
- यदि $x^2 + px + 12 = 0$ के मूल 1 : 3 में हो तो p का मान ज्ञात करें। 2

खण्ड—स

- द्विघात समीकरण सरल करें—
 $(x - 1)^2 - 5(x - 1) - 6 = 0$ 3
- k का मान ज्ञात करें यदि समीकरण $x^2 - 5x + 3(k - 1) = 0$ के मूलों का अंतर 11 हो। 3

खण्ड—द

- यदि द्विघात समीकरण $(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$ के मूल बराबर हो तो सिद्ध करें $2b = a + c$ 4
- दो प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग 52 है। यदि पहली संख्या दूसरी संख्या के दुगुने से 8 कम है तो संख्याएं ज्ञात करें। 4

□□□

5

अध्याय

समांतर श्रेढ़ियाँ

महत्वपूर्ण बिन्दु:

1. अनुक्रम—संख्याओं का एक समुच्चय जो किसी नियम द्वारा निश्चित क्रम में व्यवस्थित होता है, अनुक्रम कहलाता है।
2. समान्तर श्रेढ़ी—एक अनुक्रम जिसमें प्रत्येक पद का अगले पद से निश्चित अंतर होता है, समान्तर अनुक्रम या समान्तर श्रेढ़ी (स. श्रे. या A. P.) कहलाती है। अर्थात्—समान्तर श्रेढ़ी (स. श्रे. या A. P.) एक अनुक्रम $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ हैं जहाँ $a_n - a_{n-1} = \dots = d$
3. व्यापक पद—यदि एक समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 'a' तथा सार्व अंतर 'd' हो तो n वाँ पद (व्यापक पद) निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त होता है—

$$a_n = a + (n - 1)d$$

4. समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल—

$$(i) s_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]; \text{ जहाँ } a = \text{प्रथम पद}$$

$$d = \text{सार्व अंतर}$$

$$(ii) s_n = \frac{n}{2} [a + l]; \text{ जहाँ } a = \text{प्रथम पद}$$

$$l = \text{अंतिम पद}$$

5. (i) यदि a_n दिया हो तो सार्व अंतर (d) = $a_n - a_{n-1}$
(ii) यदि s_n दिया हो तो $a_n = s_n - s_{n-1}$
(iii) यदि a, b, c , समान्तर श्रेढ़ी के क्रमागत पद हो तो $2b = a + c$
(iv) यदि किसी अनुक्रम में x पद हैं, तो इसका अंत से r वाँ पद प्रारंभ से $(n-r+1)$ वाँ पद।
(v) यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के m वें तथा n वें पदों में अंतर:

$$(a_m - a_n) = (m - n)d$$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. यदि एक स. श्रे. (A.P.) का n वां पद $3x-5$ हो तो इसका 5वां पद क्या होगा?
2. प्रथम 10 सम संख्याओं का योगफल ज्ञात करो।
3. विषय संख्याओं का n वां पद लिखिए।
4. प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योगफल क्या होगा?
5. प्रथम n सम संख्याओं का योग क्या होगा?
6. स0 श्रे0 $-10, -15, -20, -25, \dots$ का n वां पद ज्ञात कीजिए।
7. स0 श्रे0 $4\frac{1}{9}, 4\frac{2}{9}, 4\frac{1}{3}, \dots$ का सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।
8. स0 श्रे0 का सार्व अंतर ज्ञात कीजिए यदि इसका n वां पद $(a_n) = 3n + 7$
9. स0 श्रे0 $4, 9, 14, \dots, 254$ के लिए $a_8 - a_4$ का मान क्या होगा?
10. स0 श्रे0 $-10, -12, -14, -16, \dots$ के लिए $a_{30} - a_{10}$ का मान क्या होगा?
11. यदि $\frac{1}{x+2}, \frac{1}{x+3}$ और $\frac{1}{x+5}$ किसी स0 श्रेढ़ी के क्रमागत पद हो तो x का मान क्या होगा?
12. $\frac{4}{5}, p, 2$ समातंर श्रेढ़ी में हैं। p का मान ज्ञात कीजिए।

लघु उत्तरीय प्रश्न 1

13. क्या 144 समातंर श्रेढ़ी $3, 7, 11, \dots$ का एक पद है? अपने उत्तर की पृष्ठि कीजिए।
14. स0 श्रे0 $3, 8, 13, \dots, 253$ का अंत से 20वां पद ज्ञात कीजिए।
15. स0 श्रे0 $5, 15, 25, \dots$ का कौन-सा पद इसके 31वां पद से 130 अधिक होगा?
16. किसी समातंर श्रेढ़ी का प्रथम पद, सार्व-अंतर और अंतिम पद क्रमशः 12, 6 और 252 हैं।
इसके सभी पदों का योग ज्ञात कीजिए।
17. 15 के प्रथम 8 गुणजों का योग ज्ञात कीजिए।
18. क्या नीचे दी गई स्थितियों में बना अनुक्रम एक समातंर श्रेढ़ी है?
 - (i) कुल 1000 विधार्थियों में से विद्यालय सभागर में बचे विद्यार्थियों की संख्या जबकि वे विद्यालय सभागर को 25 के समूह में छोड़ते हैं।
 - (ii) प्रतिवर्ष खाते में राशि जबकि 100 रुपये प्रतिवर्ष जमा करवाए जाते हैं जिन पर 4% वार्षिक दर चक्रवृद्धि ब्याज संयोजित होता है।

19. 1 से 200 के बीच की सम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।
20. यदि $4m + 8, 2m^2 + 3m + 6, 3m^2 + 4m + 4$ एक समांतर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद हों तो m का मान ज्ञात कीजिए।
21. स0 श्रे0 22, 20, 18,..... के कितने पदों का योग शुन्य है?
22. एक स0 श्रे0 के दसवें पद का दस गुणा इसके बीसवें पद के 20 गुने समान है। इसका 30वां पद ज्ञात कीजिए।
23. स0 श्रे0 6, 13, 20,....., 216 का मध्यपद ज्ञात कीजिए।
24. स0 श्रे0 20, $19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}, 17\frac{3}{4}, \dots$ का कौन-सा पद प्रथम श्रेणात्मक पद होगा? पद भी ज्ञात कीजिए।

लघु उत्तरीय प्रश्न 2

25. स0 श्रे0 7, 13, 19,....., 241 के मध्य पद ज्ञात कीजिए।
26. 10 और 5000 के बीच के उन पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए जो 7 से विभाज्य हैं।
27. एक स0 श्रे0 के 5वें तथा 9वें पदों का योग 72 तथा 7वें और 12वें पदों का योग 97 है। स0 श्रे0 ज्ञात कीजिए।
28. एक स0 श्रे0 का m वां पद $\frac{1}{n}$ तथा n वां पद $\frac{1}{m}$ है। सिद्ध कीजिए कि इसका (mn) वां पद 1 है।
29. एक स0 श्रे0 का p वां पद 2 तथा q वां पद p है। सिद्ध कीजिए कि इसका n वां पद $(p + q - n)$ है।
30. यदि किसी स0 श्रे0 के p वें पद का p गुना इसके q वें पद के q गुने के बराबर हो तो सिद्ध कीजिए कि इसका $(p + q)$ वां पद शून्य होगा।
31. m के किस मान के लिए दो स0 श्रे0 (i) 1, 3, 5, 7,..... (ii) 4, 8, 12, 16,..... के m वें पद समान होंगे?
32. एक स0 श्रे0 का 24वां पद इसके 10वें पद का दो गुना है। सिद्ध कीजिए कि इसका 72वां पद इसके 15वें पद का 4 गुना है।
33. 101 और 994 के बीच उन प्राकृत संख्याओं की कुल संख्या ज्ञात कीजिए जो 2 और 5 दोनों से विभाज्य हों।

34. यदि किसी स0 श्रेत्र का 7वां पद $1/9$ और 9वां पद $1/7$ है, तो इसका 63वां पद ज्ञात कीजिए।
35. एक स0 श्रेत्र के 5वें और 9वें पदों का योग 30 है। यदि इसका 25वां पद इसके 8वें पद का 3 गुना हो तो स0 श्रेत्र ज्ञात कीजिए।
36. यदि किसी स0 श्रेत्र के प्रथम n पदों का योग $s_n = 5n^2 + 3n$ तो इसका n वां पद और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

37. एक समातंर श्रेढ़ी के तीसरे और सातवें पदों का योग 6 तथा गुणन 8 है। इस स0 श्रेत्र के प्रथम 16 पदों का योग ज्ञात कीजिए।
38. यदि किसी स0 श्रेत्र का m वां पद $\frac{1}{n}$ और n वां पद $\frac{1}{m}$ हो तो सिद्ध कीजिए। कि इसके प्रथम (mn) पदों का योग $\frac{1}{2} (mn + 1)$ है।
39. यदि किसी स0 श्रेत्र के प्रथम m पदों का योग n तथा प्रथम n पदों का योग m हो तो सिद्ध कीजिए कि इसके प्रथम $(m + n)$ पदों का योग— $(m + n)$ होगा।
40. वह स0 श्रेत्र ज्ञात कीजिए जिसका 4वां पद 18 है और 15वें और 9वें पद का अंतर 30 है।
41. यदि किसी स0 श्रेत्र के प्रथम k पदों का योग $\frac{1}{2}(3k^2 + 7k)$ ता इसका k वां पद लिखिए तथा इसका 20 वां पद ज्ञात कीजिए।
42. किसी स0 श्रेत्र के प्रथम 9 पदों का योग 162 है। इसके छठे पद का तेरहवें पद से अनुपात $1 : 2$ है। इस स0 श्रेत्र का पहला और पन्द्रहवां पद ज्ञात कीजिए।
43. एक स0 श्रेत्र का 10वां पद 21 है और प्रथम 10 पदों का योग 120 है। इसका n वां ज्ञात कीजिए।
44. एक स0 श्रेत्र के प्रथम 7 पदों का योग 63 और अगले 7 पदों का योग 161 है इसका 28वां पद ज्ञात कीजिए।
45. एक स0 श्रेत्र के प्रथम q पदों का योग $63q - q^2$ है। इसका p वां पद -60 है, p मान ज्ञात कीजिए तथा ग्यारहवां पद भी ज्ञात कीजिए।

46. किसी स0 श्रे0 का प्रथम पद –2, अंतिम पद –29 और सभी पदों का योग –155 है। इसका 11वां पद ज्ञात कीजिए।
47. किसी स0 श्रे0 के प्रथम बीस पदों का योग अगले बीस पदों के योग का एक तिहाई है। यदि इस स0 श्रे0 का प्रथम पद 1 हो तो इसके प्रथम 30 पदों का योग ज्ञात कीजिए।
48. एक स0 श्रे0 के प्रथम 10 पदों का योग अगले 10 पदों का योग का एक–तिहाई है। इसका पहला पद –5 है। प्रथम 30 पदों का योग ज्ञात कीजिए।
49. एक स0 श्रे0 का आठवाँ पद इसके दूसरे पद का आधा है तथा ग्यारहवाँ पद चौथे पद के एक–तिहाई से 1 अधिक है। इसका 15वां पद ज्ञात कीजिए।
50. एक स0 श्रे0 के प्रथम 6 पदों का योगफल 42 है। इसके 10वें पद तथा 30वें पद का अनुपात 1 : 3 है। इस स0 श्रे0 का पद तथा तेरहवां पद ज्ञात कीजिए।
51. एक वृद्ध महिला कृष्णा देवी ने 1,20,000 रु बैंक में 8% वार्षिक दर से जमा करावाए। प्रतिवर्ष उससे प्राप्त साधारण ब्याज को एक विद्यालय के 5 विद्यार्थियों को उनके सर्वांगीण प्रदर्शन के आधार पर छात्रवृत्ति के रूप में बांटा जाता है। प्रत्येक छात्रवृत्ति से 300 रु कम है प्रत्येक छात्रवृत्ति का का मूल्य ज्ञात कीजिए।
52. राम एक मजदूर से 10 मी0 गहरा कुंआ खोदने के लिए कहता है। वह पहले मीटर को खोदने की मजदूरी 150 रु तथा आगे के प्रत्येक मीटर को खोदने की मजदूरी 50 रु बताता है मजदूर अशिक्षित होने के कारण कुल 550 रु मजदूरी की माँग करता है। मजदूर को वास्तव में कितनी मजदूरी मिलनी चाहिए?

उत्तरमाला

- | | |
|--|---|
| 1. 10 | 26. 17885 |
| 2. 110 | 27. 6, 11, 16, 21, 26,..... |
| 3. $2n-1$ | 31. m का ऐसा कोई मान संभव नहीं है |
| 4. $\frac{n(n+1)}{2}$ | 33. 89 |
| 5. $n(n + 1)$ | 34. 1 |
| 6. $-5(n + 1)$ | 35. 3, 5, 7, 9, 11,..... |
| 7. $\frac{1}{9}$ | 36. $a_n = 10n - 2$ |
| 8. 3 | 37. 76, 20 |
| 9. 20 | 40. 3, 8, 13,..... |
| 10. -40 | 41. $a_k = 3k + 2, a_{20} = 62$ |
| 11. $x = 1$ | 42. 6, 48 |
| 12. $\frac{7}{5}$ | 43. $2n + 1$ |
| 13. नहीं, क्योंकि $a = 3$ (विषय संख्या), $d = 4$ (सम संख्या)ए इसलिए इस स0 श्रे0
का प्रत्येक पद विषय संख्या ही होगा। | 44. 57 |
| 14. 158 | 45. $p = 21, a_{11} = 0$ |
| 15. 44 वां | 46. -32 |
| 16. 5412 | 47. 900 |
| 17. 540 | 48. -4500 |
| 18. (i) हाँ (ii) नहीं | 49. 3क |
| 19. 9900 | 50. पहला पद = 2, 13वां पद = 26 |
| 20. 0, 2 | 51. 2520 रु. 2220 रु. 1920 रु. 1620
रु. 1320 रु. |
| 21. 23 | |
| 22. 0 | 52. 600 रु. |
| 23. 111 | |
| 24. 28वां, $-1/4$ | |
| 25. 121, 127 | |

अभ्यास प्रश्न—प्रत्र

सामांतर श्रेढियाँ

समय : 50 मिनट

अंक : 20

खण्ड—अ

- प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए। 1
- समान्तर श्रेणी $8\frac{1}{2}, 8\frac{2}{8}, 8\frac{3}{8}, \dots$ का सार्व अन्तर क्या होग? 1

खण्ड—ब

- 6 और 102 के बीच, 6 से विभाजित, दो अंकों वाली कितनी होगी? 2
- स0 श्रेणी के पहले n पदों का योग $n^2 + 3n$ है। इसका 20वां पद ज्ञात कीजिए। 2

खण्ड—स

- स0 श्रेणी के प्रथम पांच पद ज्ञात करो जिसका योग $12\frac{1}{2}$ हो और पहला तथा अंतिम पद का अनुपात $2 : 3$ हो। 3
- स0 श्रेणी 20, 16, 12, ..., -176 का मध्य पद ज्ञात करो। 3

खण्ड—द

- एक तीन अंकों के धन पूर्णांकों के अंक स0 श्रेणी में हैं और उनका योगफल 15 है। संख्या में से 594 घटाने पर अंक पलट जाते हैं। संख्या ज्ञात कीजिए। 4
- स0 श्रेणी के तीन संख्याओं का योग 24 है और उनका गुणनफल 440 है। संख्याएं ज्ञात कीजिए। 4

□□□

6

अध्याय

त्रिभुज

महत्वपूर्ण बिन्दु

- दो त्रिभुज समरूप कहलाते हैं यदि उनके संगत कोण बराबर हों और उनकी संगत भुजाएं समानुपाती हों।
- समरूप त्रिभुज के गुणधर्म :

ΔABC तथा ΔDEF

(i) **कोण—कोण—कोण समरूपता** : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ यदि $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$
तथा $\angle C = \angle F$

(ii) **भुजा—कोण—भुजा समरूपता** :

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ यदि $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ तथा $\angle B = \angle E$

(iii) **भुजा—भुजा—भुजा समरूपता** : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ यदि $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

- निम्न प्रमेयों का हल परीक्षा में पूछा जा सकता है।

(i) **आधारभूत आनुपातिकता** : एक त्रिभुज की एक भुजा के समांतर खींची गई रेखा अन्य दो भुजाओं को जिन दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है वे बिन्दु भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करते हैं।

(ii) दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात किन्हीं दो संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

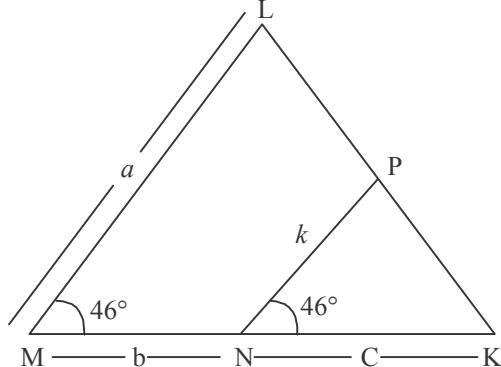
(iii) **पाइथागोरस प्रमेय** : एक समकोण त्रिभुज के कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

(iv) **पाइथागोरस प्रमेय का विलोम** : यदि किसी त्रिभुज की भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो पहली भुजा का समुख कोण समकोण होता है।

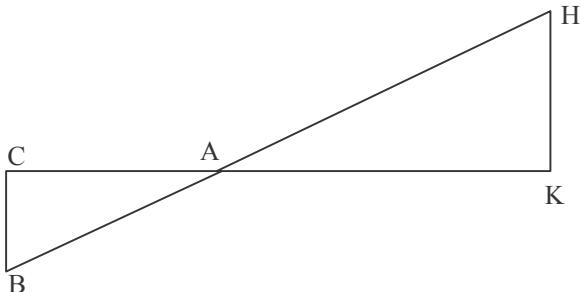
अति लघुत्तरात्मक प्रश्न

- क्या त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 12 सेमी., 16 सेमी तथा 18 सेमी. एक समकोण त्रिभुज है?

2. यदि $\Delta ABC \sim \Delta QRP$, $\frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta PQR)} = \frac{9}{4}$, $AB = 18$ सेमी, $BC = 15$ सेमी, तो PR ज्ञात कीजिए।
3. दी गई आकृति में $\angle M = \angle N = 46^\circ$, x को a, b तथा c के रूप में व्यक्त कीजिए।

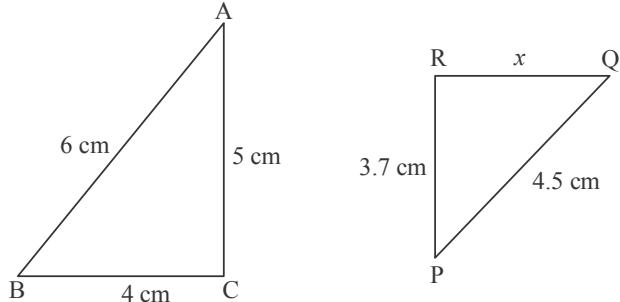


4. दी गई आकृति में, $\Delta AHK \sim \Delta ABC$. यदि $AK = 10$ सेमी, $BC = 3.5$ सेमी, तथा $HK = 7$ सेमी हो तो AC ज्ञात कीजिए।

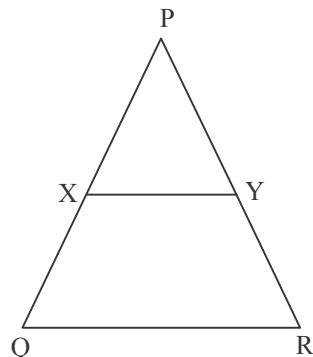


5. यदि $\Delta DEF \sim \Delta RPQ$ तो क्या यह कहना..... सत्य होगा की $\angle D = \angle R$ और $\angle F = \angle P$ है?
6. यदि दो समरूप त्रिभुजों के संगत माध्यिकों का अनुपात $5 : 7$ हो तो इनकी भुजाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।
7. एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके परिमाप बराबर है। यदि त्रिभुज की प्रत्येक भुजा एक सम संख्या हो तो कर्ण की लम्बाई 10cm हो तो त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए।
8. एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 2100 km/hr की चाल से उड़ता है। इसी समय एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से दक्षिण की ओर 2000 km/hr की चाल से उड़ता है। 1 घंटे बाद दोनों हवाई जहाजों के बीच की दूरी कितनी होगी?

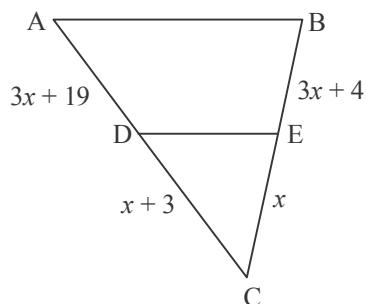
9. दो समरूप त्रिभुजों ΔABC तथा ΔDEF का क्षेत्रफल क्रमशः 225 cm^2 तथा 81 cm^2 है। यदि बड़े त्रिभुज ΔABC की सबसे बड़ी भुजा 30 cm हो तो छोटे त्रिभुज ΔDEF की सबसे बड़ी भुजा ज्ञात कीजिए।
10. दिए गए चित्र में, यदि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



11. दिए गए चित्र में, $XY \parallel QR$ तथा $\frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR} = \frac{1}{2}$, तो $XY : QR$ ज्ञात कीजिए।

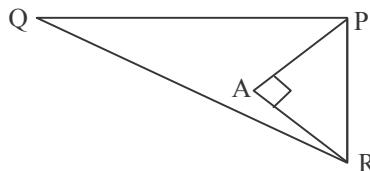


12. दिए गए चित्र में, यदि $DE \parallel AB$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

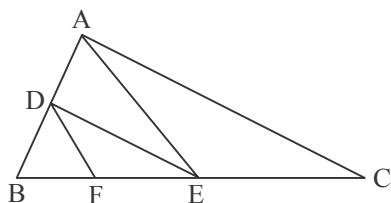


13. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $BC = 3EF$ तथा $\text{ar}(\Delta ABC) = 117 \text{ cm}^2$ तो $\text{ar}(\Delta DEF)$ ज्ञात कीजिए।

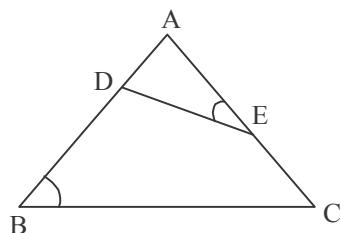
14. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ हो और $\angle A = 45^\circ$, $\angle F = 56^\circ$ तो $\angle C$ ज्ञात कीजिए।
15. यदि दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात $2 : 3$ हो तो उनके संगत ऊँचाईयों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
16. दिए गए चित्र में, $PQ = 24\text{cm}$, $QR = 26\text{cm}$, $\angle PAR = 90^\circ$, $PA = 6\text{cm}$ तथा $AR = 8\text{cm}$ तो $\angle QPR$ ज्ञात कीजिए।



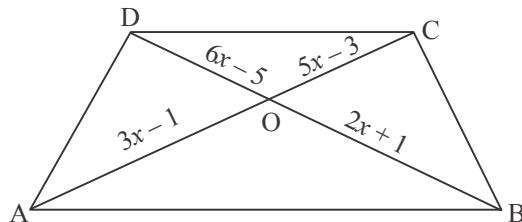
17. दिए गए चित्र में, $DE \parallel AC$ तथा $DF \parallel AE$ है। सिद्ध कीजिए $\frac{FE}{BF} = \frac{EC}{BE}$ है।



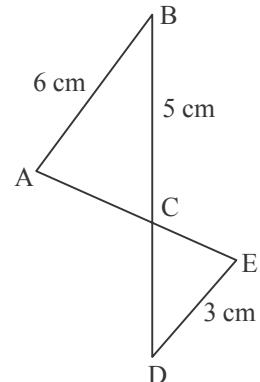
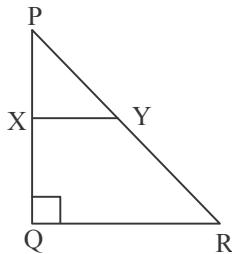
18. त्रिभुज ABC में, $AD \perp BC$ इसी प्रकार है कि $AD^2 = BD \times CD$ सिद्ध कीजिए ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।
19. दिए गए चित्र में, D तथा E , भुजाओं AB तथा CA पर दो बिंदु इस प्रकार हैं कि $\angle B = \angle AED$ है। सिद्ध करो कि $\Delta ABC \sim \Delta AED$ हैं।



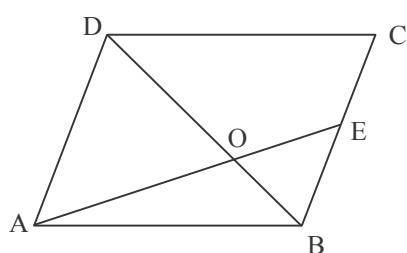
20. दिए गए चित्र में $AB \parallel DC$ तथा विकर्ण AC और BD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $OA = 3x - 1$, $OB = 2x + 1$, $OC = 5x - 3$ और $OD = 6x - 5$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



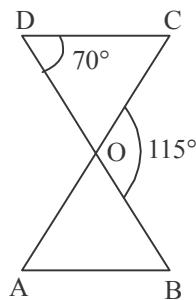
21. दिए गए चित्र में, त्रिभुज PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle LQ = 90^\circ$ तथा $XY \parallel QR$ है। यदि $PQ = 6\text{cm}$, $PY = 4\text{cm}$ तथा $PX : XQ = 1 : 2$ तो PR और QR की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



22. दिए गए चित्र में, $AB \parallel DE$. CD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



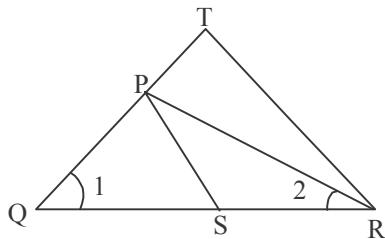
23. दिए गए चित्र में, ABCD एक समचतुर्भुज है। AE रेखा खण्ड BD को $1 : 2$ में विभाजित करता है। यदि $BE = 1.5\text{cm}$ हो तो BC ज्ञात कीजिए।



24. दिए गए चित्र में, $\triangle ODC \sim \triangle OBA$, $\angle BOC = 115^\circ$ तथा $\angle CDO = 70^\circ$ हो तो ज्ञात कीजिए (i) $\angle DOC$, (ii) $\angle DCO$, (iii) $\angle OAB$ और (iv) $\angle OBA$.

25. यदि दो समबाहु त्रिभुजों ΔABC तथा ΔPQR का परिमाप क्रमशः 144m और 96m हो तो $ar(\Delta ABC) : ar(\Delta PQR)$ ज्ञात कीजिए।

26. दिए गए चित्र में, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ हो तो सिद्ध कीजिए $\Delta PQS \sim \Delta TQR$

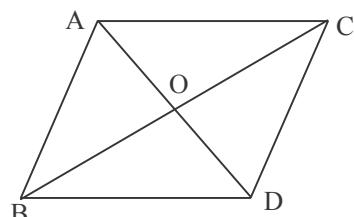


27. एक समबाहु ΔABC में $AD \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए $3BC^2 = 4AD^2$ है।

28. त्रिभुज ABC में, $\angle ACB = 90^\circ$ तथा $CD \perp AB$ हो तो सिद्ध कीजिए: $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$.

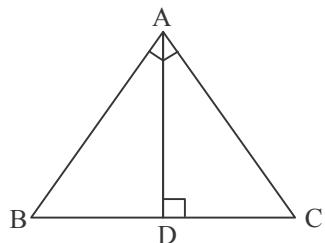
29. निम्न आकृति में, ΔABC और ΔDBC एक ही आधार पर BC पर हैं: AD और BC एक

$$\text{दूसरे को } O \text{ पर काटते हैं सिद्ध कीजिए } \frac{\text{क्षेत्रफल } (\Delta ABC)}{\text{क्षेत्रफल } (\Delta DBC)} = \frac{AO}{DO}$$



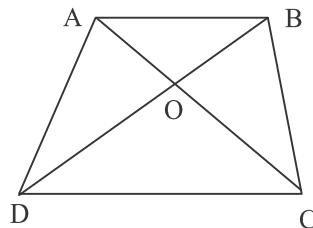
30. निम्न आकृति में, D त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु इस प्रकार है कि $\angle ADC = \angle BAC$ | सिद्ध कीजिए $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA}$

$$\angle ADC = \angle BAC \mid \text{सिद्ध कीजिए } \frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA}$$



31. निम्न आकृति में, ABCD एक समलम्ब है जिसमें $AB \parallel DC$ है। विकर्ण AC और BD एक

दूसरे को O पर प्रतिछेदित करते हैं। सिद्ध कीजिए $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{DO}$



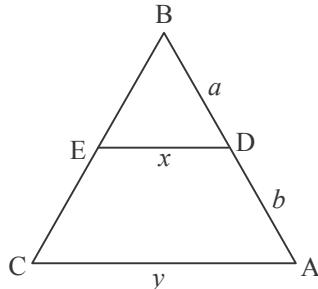
32. यदि AD और PS त्रिभुज ABC तथा त्रिभुज PQR की माध्यिकाएँ हैं जहाँ त्रिभुज $ABC \sim$

त्रिभुज PQR हो तो सिद्ध कीजिए $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PS}$.

33. त्रिभुज ABC में AD एक माध्यिका है, तो सिद्ध कीजिए कि $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

34. दिए गए चित्र में $DE \parallel AC$ है, निम्न में से कौन सा कथन सत्य है?

$$x = \frac{a+b}{ay} \quad \text{या} \quad x = \frac{ay}{a+y}$$



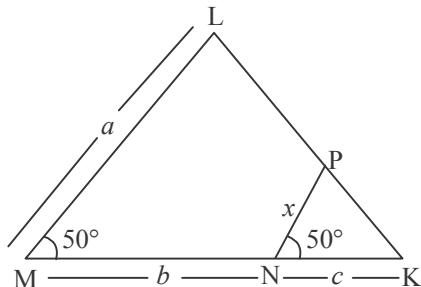
35. सिद्ध करो कि एक सम चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योग उसकी भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

36. एक बिजली के खम्बे पर 6 मी. की ऊँचाई पर एक बल्ब लगाया गया है। अगर 1.5 मी. लम्बी महिला की परछाई 3 मी. हो तो खम्बे से महिला की दूरी ज्ञात कीजिए।

37. दो खम्बे जिनकी ऊँचाईयाँ क्रमशः a मीटर तथा b मीटर तथा हैं, आपस में p मीटर की दूरी पर स्थित हैं। सिद्ध करो कि इन खम्बों के शीर्षों को इनके समुख खम्बों के पादों को

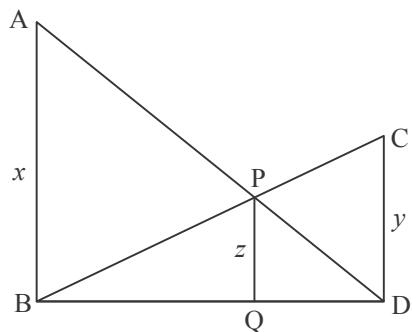
मिलाने वाली रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु की ऊँचाई $\frac{ab}{a+b}$ मीटर है।

38. दिए गए चित्र में a, b, c के रूप में x का मान ज्ञात कीजिए।

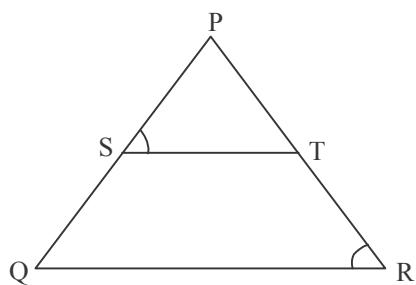


39. दिए गए चित्र में $AB \parallel PQ \parallel CD$, $AB = x$ $CD = y$ तथा $PQ = z$ है तो सिद्ध कीजिए,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

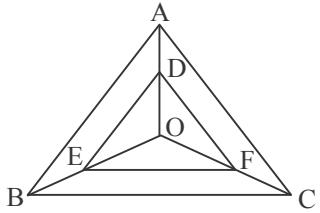


40. दिए गए चित्र में, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ तथा $\angle PST = \angle R$ सिद्ध कीजिए त्रिभुज PQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

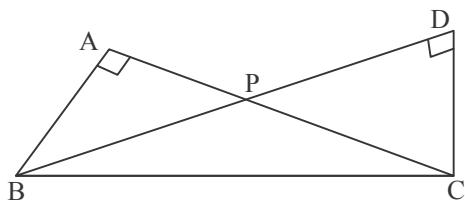


41. त्रिभुज ABC, $\angle C$ पर समकोण हैं। बिंदु P तथा Q भुजाओं CA तथा CB पर क्रमशः स्थित हैं। सिद्ध कीजिए $AQ^2 + BP^2 = AB^2 + PQ^2$

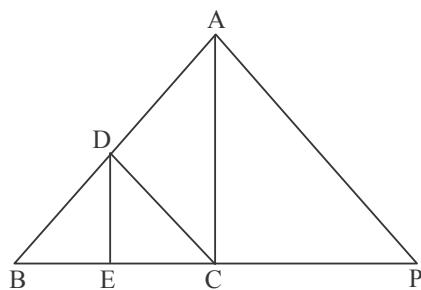
42. निम्न आकृति में, बिंदु O को त्रिभुजों के शीर्षों से मिलाया गया है। बिंदु D जो AO पर स्थित है, से $DE \parallel AB$ तथा बिंदु E जो OB पर स्थित है, से $EF \parallel BC$ खींची गई है। तो सिद्ध कीजिए $DF \parallel AC$



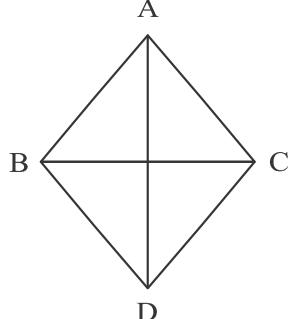
43. एक समबाहु ABC में, $AD \perp BC$, तो सिद्ध कीजिए $3AB^2 = 4AD^2$
44. समकोण त्रिभुज BAC और BDC क्रमशः A और D पर समकोण बनाती है तथा उभयनिष्ठ भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं। यदि भुजाएँ AC और BD एक दूसरे को P पर काटती हैं, तो सिद्ध करो कि $AP \times PC = DP \times PB$



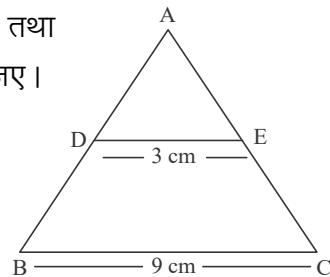
45. एक समकोण त्रिभुज में कर्ण की लम्बाई 25 सेमी है और बाकी दो भुजाओं में से एक भुजा दूसरी भुजा से 5 सेमी लम्बी है तो बाकी दोनों भुजाओं की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
46. दिए गए चित्र में, $DE \parallel AC$ तथा $\frac{BE}{EC} = \frac{BC}{CP}$ हों तो सिद्ध कीजिए $DC \parallel AP$.



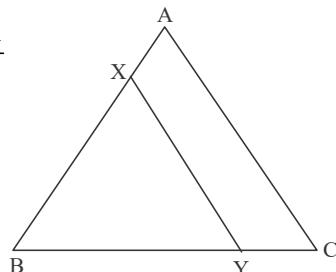
47. चतुर्भुज ABCD में $\angle B = 90^\circ$, $AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2$ है तो सिद्ध कीजिए $\angle ACD = 90^\circ$



48. दिए गए चित्र में, $DE \parallel BC$, $DE = 3$ सेमी, $BC = 9$ सेमी तथा $\text{ar}(\Delta ADE) = 30 \text{ cm}^2$. $\text{ar}(\text{BCED})$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



49. पाइथागोरस प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए
 50. यदि एक समबाहु त्रिभुज PQR में S भुजा QR का समत्रिभाजन बिन्दु है, तो सिद्ध करो कि: $9PS^2 = 7PQ^2$.
 51. त्रिभुज ΔPQR में, $PD \perp QR$, D भुजा QR पर स्थित है। यदि $PQ = a$, $PR = b$, $QD = c$ तथा $DR = d$ और $a, b, c, d \dots$ धनात्मक इकाई हों तो सिद्ध कीजिए $(a + b)(a - b) = (c + d)(c - d)$.
 52. एक समलब ABCD में $AB \parallel DC$ तथा $DC = 2AB$ है यदि EF को AB के सामातंर खींचते हुए AD को F में तथा BC को E में इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि $\frac{BE}{BC} = \frac{3}{4}$ विकर्ण DB, EF को G पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए $7EF = 10AB$.
 53. सिद्ध कीजिए की दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।
 54. दिए गए चित्र में, $XY \parallel AC$ इस प्रकार है कि XY त्रिभुज ABC को दो बराबर क्षेत्रफलों में बाँटता है। सिद्ध कीजिए $\frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$



55. ABCD एक समांतर चतुर्भुज में शीर्ष D से एक रेखा इस प्रकार खींची गई है कि वह रेखा भुजा BA तथा BC को E तथा F पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए:

$$\frac{DA}{AE} = \frac{FB}{BE} = \frac{FC}{CD}.$$

 56. सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो पहली भुजा का समुख कोण समकोण होता है।

उत्तरमाला

1. नहीं

2. 16 सेमी

$$3. \quad x = \frac{ac}{b+c}$$

4. 5 सेमी

5. $\angle D = \angle R$ सत्य, $\angle F = \angle P$ असत्य

6. 5 : 7

7. 24 सेमी

8. 2900 कि. मी.

9. 18 सेमी

10. $x = 3$

11. 1 : 3

12. $x = 2$

13. 13 वर्ग सेमी

14. 56°

15. 2 : 3

16. 90°

20. $x = 2$

21. PR = 12 सेमी, QR = $6\sqrt{3}$ सेमी

22. 2.5 सेमी

23. 3 सेमी

24. $65^\circ, 45^\circ, 45^\circ, 70^\circ$

25. 9 : 4

$$34. \quad x = \frac{ay}{a+b}$$

36. 9 मी.

$$38. \quad x = \frac{ac}{b+c}$$

45. 15 सेमी, 20 सेमी

48. 240 वर्ग सेमी

अभ्यास प्रश्न—प्रत्र

त्रिभुज

समय : 50 मिनट

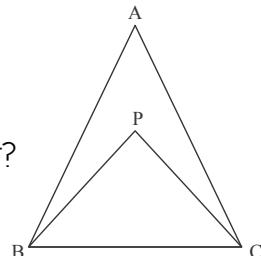
अंक : 20

खण्ड—अ

1. यदि एक समचतुर्भुज के विकर्णों की लम्बाई क्रमशः 16 सेमी तथा 12 सेमी है। समचतुर्भुज के भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 1
2. एक समबाहु त्रिभुज ABC, $AD \perp BC$ तथा $\frac{AD^2}{BC^2} = x$, तो x का मान ज्ञात कीजिए। 1

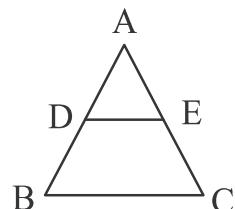
खण्ड—ब

3. त्रिभुज ABC में, यदि $DE \parallel BC$, $AD = x + 1$, $DB = x - 1$, $AE = x + 3$ तथा $EC = x$, तो x का मान ज्ञात कीजिए। 2
4. दिए गए चित्र में, क्या ΔABC , ΔPBC के समरूप है? यदि हाँ तो कारण बताइये। 2



खण्ड—स

5. PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle Q = 90^\circ$ है। यदि $QS = SR$, तो सिद्ध कीजिए: $PR^2 = 4PS^2 - 3PQ^2$. 3
6. दिए गए चित्र में, $DE \parallel BC$ तथा $AD : DB = 5 : 4$, तो $\frac{\text{Area}(\Delta DFE)}{\text{Area}(\Delta CFB)}$ बताइये।



खण्ड—द

7. पाइथागोरस प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए। 4
8. ΔLMN एक समबाहु त्रिभुज है, O भुजा MN का समत्रिभाजन बिन्दु है, तो सिद्ध करो $\frac{LO^2}{LM^2} = \frac{7}{9}$. 4

□□□

7

अध्याय

निर्देशांक ज्यामिति

महत्वपूर्ण बिंदु:

1. माना XOX^1 तथा YOY^1 दो परस्पर लंब रेखाएँ हैं। इन रेखाओं को निर्देशांक अक्ष कहते हैं। XOX^1 को x -अक्ष और YOY^1 को y -अक्ष कहते हैं।
2. x -अक्ष व y -अक्ष के प्रतिच्छेदन बिंदु 0 को मूल बिंदु कहते हैं। इसके निर्देशांक $(0, 0)$ होते हैं।
3. किसी बिंदु का x -निर्देशांक भुज तथा y -निर्देशांक कोटि कहलाता है।
4. निर्देशांक अक्ष समतल को चार चतुर्थांशों में विभाजित करता है।
 - (i) पहले चतुर्थांश में x और y दोनों निर्देशांक धनाद्यात्मक होते हैं।
 - (ii) दूसरे चतुर्थांश में x निर्देशांक ऋणात्मक व y निर्देशांक धनात्मक होता है।
 - (iii) तीसरे चतुर्थांश में x और y दोनों निर्देशांक ऋणात्मक होते हैं।
 - (iv) चौथे चतुर्थांश में x निर्देशांक धनात्मक व y निर्देशांक ऋणात्मक होता है।

5. दूरी सूत्र:

दो बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ ईकाई}$$

6. बिंदु A, B तथा C संरेख है यदि वे एक ही रेखा पर स्थित हैं।
7. बिंदुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु के निर्देशांक हैं:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

8. खंड सूत्र

उस बिंदुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाले रेखाखंड को $l : m$ के आंतरिक अनुपात में विभाजित करता है के निर्देशांक हैं:

$$\left(\frac{lx_1 + mx_2}{l + m}, \frac{ly_1 + my_2}{l + m} \right)$$

9. त्रिभुज का क्षेत्रफल

शीर्षों $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ तथा (x_3, y_3) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \text{ वर्ग इकाई यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य आता है तो उपरोक्त बिंदु संखेख होंगे।}$$

$$\text{इसके केन्द्रक के निर्देशांक } \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

खंड अ (1 अंक)

1. बिन्दु A(5, -7) की y-अक्ष से दूरी बताइये।
2. यदि बिन्दुओं (x, 2) तथा (3, -6) के बीच की दूरी 10 इकाई तो x का धनात्मक मान बताइये।
3. बिन्दुओं (4, 7) तथा (2, -3) को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु के निर्देशांक बताइये।
4. उस बिन्दु के निर्देशांक बताइये जहां रेखा $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 5$, y-अक्ष को प्रतिच्छेद करती है।
5. यदि A तथा B क्रमशः बिन्दु (-6, 7) तथा (-1, -5) हो तो 2AB का मान बताइये।
6. बिन्दु p(5, 3) से एक रेखा y-अक्ष के समान्तर खींची जाती है इस रेखा की y-अक्ष से दूरी बताइये।
7. रेखाओं $3x + 6 = 0$ तथा $x - 7 = 0$ के बीच की दूरी बताइये।
8. रेखाखंड AB का मध्यबिन्दु (4, 0) है। यदि A के निर्देशांक (3, -2) हो तो B के निर्देशांक बताइये।
9. x-अक्ष पर किसी बिंदु की कोटि बताइये।
10. y-अक्ष पर किसी बिंदु का भुज बताइये।
11. बिंदु (3, 2) की x-अक्ष से दूरी ज्ञात कीजिए।
12. बिंदु (3, -4) की y-अक्ष से दूरी बताइए।
13. बिंदु (3, 4) की मूल बिंदु से दूरी ज्ञात कीजिए।
14. y-का मान ज्ञात कीजिए यदि बिन्दुओं (2, -3) तथा (10, y) के बीच की दूरी 10 इकाई हो।
15. x-अक्ष पर उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (-2, 5) तथा (2, -3) से समान दूरी पर हो।

खण्ड 'ब' अंक 2

16. P के किस मान के लिए बिंदु (2, 1), (P, -1) और (-1, 3) सरेख हैं?
17. ΔPQR का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष P(-5, 7), Q(-4, -5) तथा R(4, 5) हैं।
18. बिन्दुओं (1, -2) और (-3, 4) को मिलाने वाले रेखाखंड को समात्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक बताइये।
19. एक Δ की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के निर्देशांक (3, 4), (4, 1) और (2, 0) हैं Δ के शीर्ष ज्ञात करिए।
20. यदि बिंदु A(4, 3) तथा B(x, 5) एक वृत्त जिसका केन्द्र O(2, 3) है, पर स्थित हों, तो x का मान ज्ञात कीजिए।
21. बिन्दुओं (6, 4) तथा (-1, 7) को मिलाने वाले रेखाखंड को x-अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है।
22. दर्शाइए कि बिन्दु (-2, 3) (8, 3) और (6, 7) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।
23. y-अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो कि बिन्दुओं A(5, -6) तथा B(-1, -4) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बांटता है।
24. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें y अक्ष बिन्दुओं A (5 – 6) तथा B (–1 , – 4) को मिलाने वाले रेखाखंड को बांटता है।
25. उस त्रिभुज के केन्द्र के निर्देशांक बताइये जिसके शीर्ष (3 – 5) (– 7,4) (10 – 2) हैं।

खण्ड 'स' (3 अंक)

26. दर्शाइये कि बिन्दु A (2 – 2) B (14,10), C (11,13) तथा D (-1 ,1) एक आयत के शीर्ष हैं।
27. दर्शाइये कि बिंदु A(5, 6), B(1, 5), C(2, 1) तथा D(6, 2) एक आयत के शीर्ष हैं।
28. बिंदु R, रेखाखंड AB, जबकि A(-4, 0) तथा B(0, 6) हैं को इसे प्रकार विभाजित करता है कि $AR = \frac{3}{4} AB$, तो R बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
29. एक समान्तर चतुर्भुज के तीन क्रमागत शीर्ष बिन्दु (-2, -1) (1, 0) तथा (4, 3) हैं। चौथे शीर्ष के निर्देशाक ज्ञात कीजिए।
30. यदि बिंदु P(x, y) की बिन्दुओं A(3, 6) तथा B(-3, 4) से दूरियां समान हों, तो सिद्ध कीजिए $3x + y = 5$

31. एक त्रिभुज के दो शीर्ष $(1, 2)$ तथा $(3, 5)$ हैं। यदि त्रिभुज का केन्द्रक मूल बिन्दु पर हो, तो तीसरे शीर्ष के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

32. यदि $P(x, y)$ बिंदुओं $A(a, c), B(o, b)$ को मिलाने वाले रेखाखंड पर स्थित हो तो

$$\text{सिद्ध कीजिए } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

33. बिंदुओं $A(2, 1)$ तथा $B(5, -8)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को P तथा Q इस प्रकार विभाजित करते हैं कि यदि बिंदु P , रेखा $2x - y + k = 0$ पर भी स्थित है तो P का मान ज्ञात कीजिए।

34. यदि $(3, 3)(6, y)(x, 7)$ और $(5, 6)$ क्रमानुसार एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं तो X तथा Y के मान ज्ञात कीजिए।

35. यदि एक त्रिभुज जिसके शीर्ष $(1, -3)(4, P)$ और $(-9, 7)$ हैं का क्षेत्रफल 15 वर्ग ईकाई हो तो P का मान ज्ञात कीजिए।

खण्ड 'ड' (4 अंक)

36. यदि बिन्दु $A(-2, 1), B(a, b)$, और $C(4, -1)$ संरेखी हैं तथा $a - b = 1$ वो a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

37. यदि बिंदु $A(0, 2)$ बिंदुओं $B(3, P)$ तथा $C(P, 5)$ से समदूरस्थ हैं तो P का मान और तथा AB की दूरी ज्ञात कीजिए।

38. एक पहेली को हल करने के लिए एक लड़की को तीन बिंदुओं $A(7, 5), B(2, 3)$ तथा $C(6, -7)$ को क्रमानुसार स्कैच पैन द्वारा मिलाना है तीनों बिंदुओं को मिलने पर उसे एक त्रिभुजकार आकृति प्राप्त होती है। त्रिभुज किस प्रकार का है?

39. मोना और निशा के घरों के निर्देशांक क्रमाशः $(7, 3)$ और $(4, -3)$ हैं जबकि उनके विद्यालय के निर्देशांक $(2, 2)$ हैं। यदि सुबह दोनों एक ही समय विद्यालय के लिए निकलती हैं और एक ही समय पर विद्यालय पहुंचती हैं दोनों में से कौन तेज चलता है?

40. एक अध्यापिका ने तीन विद्यार्थियों को एक त्रिभुज की आकृति के शीर्षों पर खड़े होने के लिए कहती है जिसके निर्देशांक $P(-1, 3), Q(1, -1)$ और $R(5, 1)$ हैं तथा एक चौथी विद्यार्थी इस क्रिया कलाप में भाग लेना चाहती है। वह उसे Q व R के मध्य बिन्दु S पर खड़ा होने के लिए कहती है उसकी P से दूरी ज्ञात कीजिए।

41. बिंदु P, बिंदुओं A(2, 1) तथा B(5, -8) को मिलाने वाले रेखाखंड को इस प्रकार विभाजित करता है कि $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$ यदि बिंदु P रेखा $2x - y + k = 0$ पर स्थित है, तो K का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

- | | |
|---|------------------------------------|
| 1. 5 | 21. $4 : 7$ |
| 2. 9 | 23. $(0, -2)$ |
| 3. $(3, 2)$ | 24. $5 : 1$ |
| 4. 15 | 25. $(2, -1)$ |
| 5. 26 | 28. $\left(-1, \frac{9}{2}\right)$ |
| 6. 3 | 29. $(1, 2)$ |
| 7. 9 | 31. $(-4, 7)$ |
| 8. $(5, 2)$ | 33. $k = -8$ |
| 9. 0 | 34. $x = 8, y = 4$ |
| 10. 0 | 35. $p = -3$ |
| 11. 2 units (इकाई) | 36. $a = 1, b = 0$ |
| 12. 3 units (इकाई) | 37. $p = 1, AB = \sqrt{10}$ इकाई |
| 13. 5 units (इकाई) | 38. समकोण त्रिभुज |
| 14. 3 या -9 | 39. निशा |
| 15. $(-2, 0)$ | 40. 5 इकाई |
| 16. 5 | 41. -8 |
| 17. 53 वर्ग इकाई | |
| 18. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right) \left(-\frac{5}{3}, 2\right)$ | |
| 19. $(1, 3), (5, 5), (3, -3)$ | |
| 20. $x = 2$ | |

अभ्यास प्रश्न—प्रत्र

निर्देशांक ज्यामिति

समय : 50 मिनट

अंक : 20

खण्ड—अ

1. m का वह मान ज्ञात करिए जिसमें बिंदु $(3, 5)$ $(m, 6)$ तथा $\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{2}\right)$ संरेख है। 1
2. बिन्दुओं $A(c, 0)$ तथा $B(0, c)$ के बीच की दूरी क्या है? 1

खण्ड—ब

3. P के किस मान के लिए बिंदु $(-3, 9), (2, p)$ तथा $(4, -5)$ संरेख है? 2
4. यदि बिन्दु $(8, 6)$ तथा $B(x, 10)$ एक वृत्त जिसका केन्द्र $(4, 6)$ है पर स्थित हों तो x का मान ज्ञात कीजिए। 2

खण्ड—स

5. दर्शाये कि बिन्दु $A(-3, 2), B(-5, -5), C(2, -3)$ तथा $D(4, 4)$ एक समचतुर्भु के शीर्ष हैं। 3
6. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिंदु $(2, y)$ बिंदुओं $A(-2, 2)$ तथा $B(3, 7)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को विभाजित करता है। y का मान भी ज्ञात कीजिए। 3

खण्ड—द

7. यदि P बिन्दुओं $A(-2, -2)$ तथा $B(2, -4)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को इस प्रकार विभाजित करता है कि $\frac{AP}{AB} = \frac{3}{7}$ तो P के निर्देशांक बताइये। 4
8. यदि $A(-5, 7), B(-4, -5), C(-1, -6)$ तथा $D(4, 5)$ एक चतुर्भुत के क्रमानुसार शीर्ष हैं तो उसके क्षेत्रफल ज्ञात कराए। 4

□□□

8

अध्याय

त्रिकोणमिति का परिचय

1. त्रिकोण भित्तिय अनुपात : ΔABC में $\angle B = 90^\circ$ कोण A के लिए—

$$\sin A = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{समुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

$$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

$$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{\text{समुख भुजा}}{\text{संलग्न भुजा}}$$

$$\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लंब}} = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{समुख भुजा}}$$

$$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{संलग्न भुजा}}$$

$$\csc A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{समुख भुजा}}$$

2. व्युत्क्रम

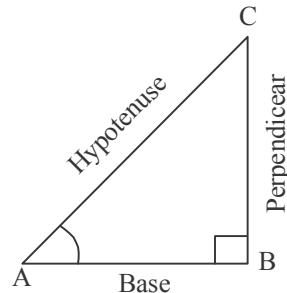
$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}, \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}, \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

3. आनुपातिक संबंध

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$



4. सर्वसामिकाएँ

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{ और } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \Rightarrow \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1 \text{ और } \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \Rightarrow \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta - 1 \text{ और } \operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

5. कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमिति अनुपातः

$\angle A$	0°	30°	45°	60°	90°
------------	-----------	------------	------------	------------	------------

Sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
-------	---	---------------	----------------------	----------------------	---

Cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
-------	---	----------------------	----------------------	---------------	---

Tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित
-------	---	----------------------	---	------------	-----------

Cot A	अपरिभाषित	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
-------	-----------	------------	---	----------------------	---

Sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अपरिभाषित
-------	---	----------------------	------------	---	-----------

Cosec A	अपरिभाषित	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
---------	-----------	---	------------	----------------------	---

6. पूरक कोणों के त्रिकोणमितिय अनुपात

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$$

$$\cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec \theta$$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. यदि $\sin \theta = \cos \theta$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

2. यदि $\tan \theta = \cot(30^\circ + \theta)$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।
3. यदि $\sin \theta = \cos(\theta - 6^\circ)$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।
4. यदि $\cos A = \frac{7}{25}$ तो $\tan A + \cot A$ का मान ज्ञात कीजिए।
5. यदि $\tan \theta = \frac{4}{3}$ तो $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।
6. यदि $3x = \operatorname{cosec} \theta$ और $\frac{3}{x} = \cot \theta$ तो $3\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ का मान बताइए।
7. यदि $x = a \sin \theta$ तथा $y = a \cos \theta$ तो $x^2 + y^2$ का मान ज्ञात कीजिए।
8. $\operatorname{cosec} 70^\circ - \sec 20^\circ$ का मान बताइए।
9. यदि $5x = \sec \theta$ और $\frac{5}{x} = \tan \theta$ तो $5\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।
10. $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$ का मान बताइए।
11. $\sec \theta$ को $\cot \theta$ में व्यक्त कीजिए।
12. $\cos \theta \cos(90^\circ - \theta) - \sin \theta (90^\circ - \theta)$ का मान ज्ञात कीजिए।
13. यदि $\sin(20^\circ + \theta) = \cos 30^\circ$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।
14. $\frac{1 + \tan^2 \theta}{1 + \cot^2 \theta}$ का मान बताइए।
15. $\frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

लघु उत्तरीय प्रश्न 1

सिद्ध कीजिए

16. $\sec^4 \theta - \sec^2 \theta = \tan^4 \theta + \tan^2 \theta$
17. $\sqrt{\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}} = \tan \theta + \sec \theta$
18. यदि $x = p \sec \theta + q \tan \theta$ और $y = p \tan \theta + q \sec \theta$ तो सिद्ध कीजिए $x^2 - y^2 = p^2 - q^2$

19. यदि $7 \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta = 4$ तो दिखाइए $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$
20. यदि $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।
21. $\frac{\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ}{\sin^2 59^\circ + \sin^2 31^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए
22. सिद्ध कीजिए: $\tan 1^\circ \tan 11^\circ \tan 21^\circ \tan 69^\circ \tan 79^\circ \tan 89^\circ = 1$
23. यदि $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$ तो A का मान ज्ञात कीजिए
24. यदि $3 \cot A = 4$, $\frac{\operatorname{cosec}^2 A + 1}{\operatorname{cosec}^2 A - 1}$ का मान ज्ञात कीजिए।
25. यदि $\tan(3x - 15^\circ) = 1$ तो x का मान बताइए।

लघु उत्तरीय प्रश्न 2

सिद्ध कीजिए:

26. $\frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \frac{1 + \sin A}{\cos A}$
27. $\frac{1}{\sec x - \tan x} - \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sec x + \tan x}$
28. $\frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \tan \theta + \cot \theta = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta + 1$
29. $(\sin \theta + \operatorname{cosec} \theta)^2 + (\cos \theta + \sec \theta)^2 = 7 + \tan^2 \theta + \cot^2 \theta$
30. $\sec A (1 - \sin A) (\sec A + \tan A) = 1$
31. यदि $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos \theta$ तो दिखाइए कि $\cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2} \sin \theta$
32. यदि $\tan \theta + \sin \theta = m$, $\tan \theta - \sin \theta = n$ तो दिखाइए कि $m^2 - n^2 = 4 \sqrt{mn}$.
33. यदि $\sec \theta = x + \frac{1}{4x}$, तो सिद्ध करिए $\sec \theta + \tan \theta = 2x$ या $\frac{1}{2x}$

34. यदि $\sin \theta + \sin^2 \theta = 1$ तो सिद्ध करिए $\cos^2 \theta + \cos^4 \theta = 1$

35. त्रिकोणमितिय सारणी को प्रयोगकिये बिना।

$\cot \theta \tan (90^\circ - \theta) - \sec (90^\circ - \theta) \operatorname{cosec} \theta + \sin^2 65^\circ + \sin^2 25^\circ + \sqrt{3} \tan 5^\circ \tan 85^\circ$ का मान ज्ञात करिए

36. सिद्ध करिए $\frac{\cot (90^\circ - \theta)}{\tan \theta} + \frac{\operatorname{cosec} (90^\circ - \theta) \sin \theta}{\tan (90^\circ - \theta)} = \sec^2 \theta$

37. $\frac{\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ}{\sec^2 50^\circ - \cot^2 40^\circ} + 2 \operatorname{cosec}^2 58^\circ - 2 \cot 58^\circ \tan 32^\circ - 4 \tan 13^\circ \tan 37^\circ \tan 77^\circ \tan 45^\circ \tan 53^\circ$. का मान ज्ञात कीजिए।

38. यदि A, B, C त्रिभुज ABC के अंत कोण हैं तो सिद्ध कीजिए $\operatorname{cosec}^2 = \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{B+C}{2} \right) - \tan^2 \frac{A}{2} = 1$

39. $\sec^2 10^\circ - \cot^2 80^\circ + \frac{\sin 15^\circ \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \sin 75^\circ}{\cos \theta \sin (90^\circ - \theta) + \sin \theta \cos (90^\circ - \theta)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

40. सिद्ध कीजिए $\frac{\tan \theta - \cot \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \tan^2 \theta - \cot^2 \theta$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

सिद्ध कीजिए:

$$41. \frac{\sec \theta + \tan \theta - 1}{\tan \theta - \sec \theta + 1} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}$$

$$42. \left(1 + \frac{1}{\tan^2 A} \right) \left(1 + \frac{1}{\cot^2 A} \right) = \frac{1}{\sin^2 A - \sin^4 A}$$

$$43. 2(\sin^6 \theta + \cos^6 \theta) - 3(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 1 = 0$$

$$44. (1 + \cot A + \tan A)(\sin A - \cos A) = \sin A \tan A - \cot A \cos A$$

$$45. \text{यदि } \sin \theta + \cos \theta = m \text{ और } \sec \theta + \operatorname{cosec} \theta = n \text{ तो दिखाइए } n(m^2 - 1) = 2m$$

46.
$$\frac{\cot(90^\circ - \theta) \tan \theta - \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) \sec \theta}{\sin 12^\circ \cos 15^\circ \sec 78^\circ \operatorname{cosec} 75^\circ} + \frac{\cos^2(50^\circ + \theta) \tan^2(40^\circ - \theta)}{\tan 15^\circ \tan 37^\circ \tan 53^\circ \tan 75^\circ}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

47. सर्वसमिका सिद्ध कीजिए:

$$\frac{1}{\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta} - \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta}$$

48. यदि $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = m$ और $\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = n$ है तो सिद्ध कीजिए $(m^2 + n^2) \cos^2 \beta = n^2$

49. यदि $\tan \theta + \sin \theta = m$, $\tan \theta - \sin \theta = n$, है, तो सिद्ध कीजिए $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$

50. सिद्ध कीजिए:

$$\sec^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta - 2\sin^4 \theta}{2\cos^4 \theta - \cos^2 \theta} = 1$$

51. $\cot \theta \tan(90^\circ - \theta) - \sec(90^\circ - \theta) \operatorname{cosec} \theta + \sqrt{3} \tan 12^\circ \tan 60^\circ \tan 78^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

52. मान ज्ञात कीजिए:

$$\frac{\sec(90^\circ - \theta) \operatorname{cosec} \theta - \tan(90^\circ - \theta) \cot \theta + \cos^2 25^\circ + \cos^2 65^\circ}{3 \tan 27^\circ \tan 63^\circ}$$

उत्तरमाला

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1. 45° | 2. 30° |
| 3. 24° | 4. $\frac{625}{168}$ |
| 5. 7 | 6. $\frac{1}{3}$ |
| 7. a | 8. 0 |
| 9. $\frac{1}{5}$ | 10. 9 |
| 11. $\frac{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}}{\cot \theta}$ | 12. 0° |
| 13. 50° | 14. $\tan^2 \theta$ |
| 15. $\tan \theta$ | 16. |
| 17. | 18. |
| 19. | 20. $A = 45^\circ, B = 15^\circ$ |
| 21. 1 | 22. |
| 23. 22° | 24. $\frac{17}{8}$ |
| 25. 20° | 35. $\sqrt{3}$ |
| 37. -1 | 39. 2 |
| 46. 0 | |
| 51. 2 | 52. $\frac{2}{3}$ |

अभ्यास प्रश्न—प्रत्र

त्रिकोणमिति का परिचय

समय : 50 मिनट

अंक : 20

खण्ड—अ

- यदि $\sin \theta = \frac{4}{5}$ तो $\cos \theta$ का मान ज्ञात कीजिए। 1
- $\sin(45^\circ + \theta) - \cos(45^\circ - \theta)$ का मान बताइए। 1

खण्ड—ब

- यदि $5 \tan \theta = 4$ तो $\frac{5 \sin \theta - 3 \cos \theta}{5 \sin \theta + 2 \cos \theta}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2
- $\tan 35^\circ \tan 40^\circ \tan 45^\circ \tan 50^\circ \tan 55^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

खण्ड—स

- सिद्ध कीजिए : $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \operatorname{cosec} \theta$ 3
- सिद्ध कीजिए : $\frac{\cos A}{1 - \tan A} - \frac{\sin^2 A}{\cos A - \sin A} = \sin A + \cos A$ 3

खण्ड—द

- यदि $\tan(A + B) = \sqrt{3}$ तथा $\tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए। 4
- सिद्ध कीजिए : $\frac{\tan \theta + \sec \theta - 1}{\tan \theta - \sec \theta + 1} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}$ 4

□□□

9

अध्याय

त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

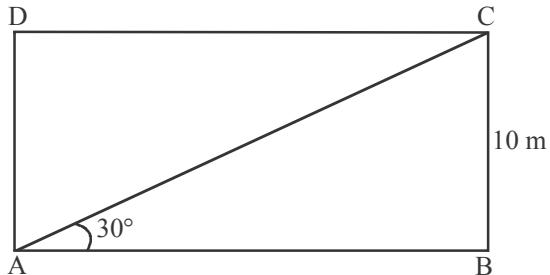
महत्वपूर्ण बिंदु:

1. दृष्टि रेखा : दृष्टि रेखा, प्रत्येक की ओँख से प्रेक्षक द्वारा देखी गई वस्तु के बिन्दु को मिलाने वाली रेखा होती है।
2. उन्नयन कोण : उन्नयन कोण, दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है, जबकि क्षैतिज स्तर से ऊपर होता है। अर्थात् वह स्थिति जबकि वस्तु को देखने के लिए हमें अपने सिर को ऊपर उठाना होता है।
3. अवनमन कोण : अवनमन कोण, दृष्टि देखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है, जबकि यह क्षैतिज स्तर से नीचा होता है अर्थात् वह स्थिति जबकि वस्तु को देखने के लिए हमें अपने सिर को झुकाना पड़ता है।

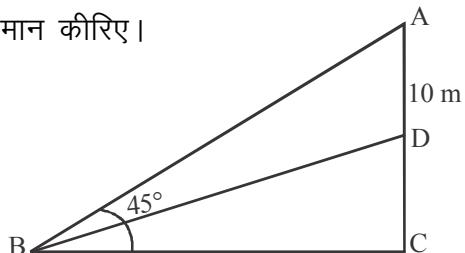
अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. एक मीनार 50 मीटर ऊँचा है। जब सूर्य का उन्नयन कोण 45 है, तो मीनार की छाया क्या होगी?
2. एक 50 मीटर लंबे बॉस की छाया $\frac{50}{\sqrt{3}}$ मीटर है। सूर्य का उन्नतांश ज्ञात कीजिए।
3. $10\sqrt{3}$ मी० ऊँचाई वाली एक मीनार के शिखर का भूमि पर उस मीनार के पाद से 30 मी० की दूरी पर स्थित बिन्दु से उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए।
4. एक पतंग समतल भूमि से $50\sqrt{3}$ मी० ऊँचाई पर उड़ रही है एक डोर से बंधी है, जो क्षैतिज से 60° कोण पर झुकी है। डोर की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

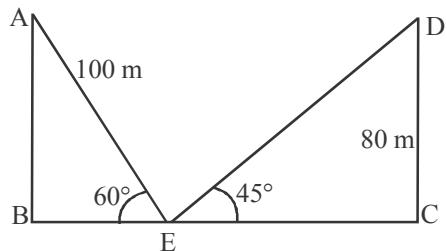
5. दी गई आकृति में आयत ABCD का परिमाप ज्ञात कीजिए।



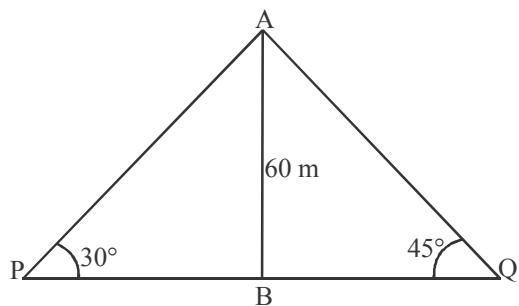
6. एक स्तंभ की छाया की लम्बाई उसकी ऊँचाई का $\sqrt{3}$ गुणी है प्रकाश के स्रोत का उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए।
7. आकृति में DC का मान कीरिए।



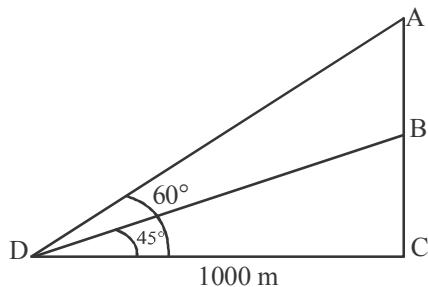
8. आकृति में BC का मान कीरिए।



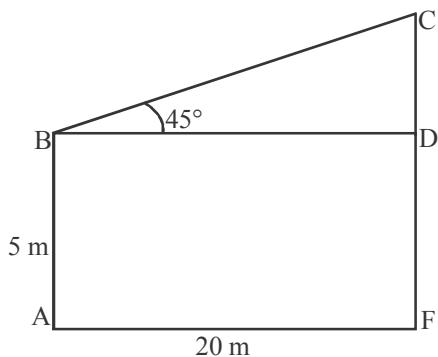
9. आकृति में दो व्यक्ति एक मीनार के विपरीत दिशा में P तथा Q पर खड़े हैं यदि मीनार AB की ऊँचाई 60मी0 है तो दोनों व्यक्तियों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।



10. आकृति में AB का मान ज्ञात कीजिए।



11. आकृति में CF का मान ज्ञात कीजिए।



12. यदि नाव की पुल से क्षैतिज दूरी 25 मी० हो और पुल की ऊँचाई 25मी० हो तो नाव का पुल से अवनमन कोण बमाइए।

लघु उत्तरीय प्रश्न

13. एक पहाड़ी के शिखर से पूर्व की ओर दो क्रमागत के पथरों के अवनमन कोण 30° और 45° के हैं। पहाड़ी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
14. एक पतंग के धागे की लम्बाई 150 मी० है तथा यह भूमितल के साथ 60° का कोण बनाती है। पतंग की भूमितल से ऊँचाई ज्ञात करिए (मान लीजिए धागे में कोई ढील नहीं है।)
15. सूर्य का उन्तांश 45° के स्थान पर 30° होने पर एक मीनार की छाया 10 मी० अधिक हो जाती है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करिए।
16. एक वायुयान 200 मी की ऊँचाई पर है। इससे एक नदी के दो किनारों के अवनमन कोण 45° और 60° के हैं। नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

17. एक मीनार की चोटी का एक बिन्दु पर उन्नयन कोण 45° का है। मीनार की ओर 40 मी० चलने पर यह कोण 60° का हो जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
18. एक वृक्ष का उपरी भाग टूटकर अपने पाद से 25 मी० की दूरी पर भूमि को स्पर्श करता है तथा मूमि के साथ 30° का कोण बनाता है। वृक्ष की कुल ऊँचाई क्या थी?
19. एक अर्धाधर ध्वजदंड एक समतल में लगा है। इसके शिखर का 100 मी० की दूरी पर एक बिंदु से उन्नयन कोण 45° का है। ध्वजदंड की ऊँचाई ज्ञात करिए।
20. एक पतंग के धागे की लम्बाई 200 मी० है यदि धागा भूमितल के साथ a कोण बनाता है और $\sin a = \frac{3}{5}$ हो तो पतंग की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जबकि धागे में कोई ढील नहीं है।
21. एक वायुयान 3000 मी० की ऊँचाई पर उड़ रहा है। वह एक दूसरे वायुयान के उपर से गुजरता है। ठीक उसी समय दोनों वायुयानों के भूमि तल पर एक बिन्दु पर उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 45° के होते हैं। दोनों वायुयानों के बीच की दूरी ज्ञात करिए।
22. एक झील से 60 मी० ऊँचाई पर स्थित एक बिन्दु पर बादल का उन्नयन कोण 30° का है और बादल के झील में प्रतिबम्ब का उसी बिन्दु पर अवनमन कोण 60° का है। बादल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
23. एक व्यक्ति पानी के जहाज पर पानी से 10 मी० की ऊँचाई के तल पर खड़ा है। वह देखता है कि सामने की पहाड़ी के शिखर का उन्नयन कोण 60° का है तथा पहाड़ी के आधार पर अवनमन कोण 30° का है। जहाज से पहाड़ी की दूरी और पहाड़ी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
24. एक मीनार के शिखर पर 7 मीटर ऊँचा एक ध्वजदंड लगा है। भूमि तल पर स्थिति एक बिंदु A पर दंड के शिखर उन्नयन कोण क्रमशः 45° व 30° के हैं। मीनार की ऊँचाई व पाद ज्ञात कीजिए।
25. गली के एक मकान की खिड़की जिसकी ऊँचाई भूमि तल से 60 मी० है से गली की विपरित दिशा में सामने बने मकान के शीर्ष के उन्नयन कोण तथा अवनमन कोण क्रमशः 60° व 45° के हैं। दर्शाइये कि विपरीत दिशा में बने मकान की ऊँचाई $60(1 + \sqrt{3})$ मी० है।
26. एक वायुयान का भूमि के केन्द्र A से उन्नयन कोण 60° है। 30° सेकण्ड की उड़ान के पश्चात यह उन्नयन कोण 30° हो जाता है। यदि वायुयान $3600\sqrt{3}$ मी० की अचर ऊँचाई पर उड़ रहा हो तो वायुयान की गति किमी/घंटा में ज्ञात करिए।

27. 80 मीटर ऊंचे पेड़ के शिखर पर एक पक्षी बैठा है। पृथकी के किसी बिंदु से पक्षी का उन्नयन कोण 45° है। पक्षी क्षैतिज दिशा में प्रेक्षण बिंदु के विपरीत इस प्रकार उड़ता है कि वह सदा समान ऊंचाई पर रहता है। 2 सेकण्ड बाद प्रेक्षण बिंदु से पक्षी का उन्नयन कोण 30° हो जाता है। पक्षी की उड़ने की गति ज्ञात कीजिए।
28. एक 7 मी० ऊंचे भवन के शिखर से एक मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण 60° तथा मीनार के पाद का अवनमन कोण 30° है। मीनार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।
29. किसी मीनार के आधर से 9 मी० तथा 4 मी० की दूरियों पर एक ही रेखा में स्थित दो बिंदुओं से देखने पर मीनार के शिखर के उन्नयन कोण पूरक कोण पाए जाते हैं। मीनार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।
30. क्षैतिज तल पर खड़ा एक लड़का 100 मी० की दूरी पर एक पक्षी को 30° के उन्नयन कोण पर देखता है। एक लड़की जो कि 20 मी० ऊंचे भवन पर खड़ी है उसी पक्षी को 45° के कोण पर देखती है। यदि लड़का और लड़की पक्षी की विपरीत दिशा में हैं तो पक्षी की लड़की से दूरी ज्ञात कीजिए।
31. 100 मीटर ऊंचे प्रकाश-स्तंभ की चोटी से एक प्रेक्षक समुद्र में एक जहाज को ठीक अपनी ओर आते हुए देखता है। यदि जहाज का अवनमन कोण 30° से बदलकर 60° हो जाता है तो प्रेक्षण की अवधि में जहाज द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।
32. 60 मी० ऊंचे एक भवन के शिखर से एक प्रकाश-स्तंभ के शिखर तथा पाद के उन्नयन तथा अवनमन कोण क्रमशः 30° व 60° के हैं। ज्ञात कीजिए।
 (i) प्रकाश-स्तंभ तथा भवन की ऊंचाई में अंतर
 (ii) प्रकाश-स्तंभ तथा भवन के बीच की दूरी।
33. आनन्द एक सर्कस खिलाड़ी को रस्सी पद चढ़ते देख रहा है जोकि 20 मी लम्बी है और एक उघ्घटित खंबे से बंधी है। यदि रस्सी जमीन के साथ 30° का कोण बनाती है तो खंभे की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।
34. एक सीधी सड़क पर दो दमकल केन्द्र P तथा Q हैं। उनके बीच की दूरी 20 किमी है। केन्द्रों को फोन द्वारा सूचना प्राप्त होती है कि बिल्डिंग B में आग लग गई है। बिल्डिंग B केन्द्र P से 60° तथा केन्द्र Q से 45° पर स्थित है। ज्ञात कीजिए : किस केन्द्र को अपनी बचाव टीम भेजनी चाहिए? ताकि जल्दी से जल्दी आग बुझाने का काम शुरू हो सके। उस टीम को बिल्डिंग तक पहुंचने कितनी दूरी तय करनी पड़ेगी?

35. गणित दिवस के उपलक्ष में 1.2 मी० लम्बी लड़की भूमि से 8.2 मी० की ऊंचाई पर एक क्षैतिज रेखा में हवा में उड़ रहे गुब्बारे को देखती है। किसी क्षण लड़की की आँख से गुब्बारे का उन्यमन कोण 60° है कुछ समय बाद उन्नयन कोण घटकर 30° हो जाता है। इस अंतराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| 1. 50 m | 2. 60° |
| 3. 30° | 4. 100 m |
| 5. $20(\sqrt{3} + 1)m$ | 6. 30° |
| 7. 60 m | 8. 130 m |
| 9. $60(\sqrt{3} + 1)m$ | 10. $1000(\sqrt{3} - 1)m$ |
| 11. 25 m | 12. 45° |
| 13. 1.37 km | 14. $75\sqrt{3} m$ |
| 15. 13.65 m | 16. 315.8 m |
| 17. 94.8 m | 18. 43.3 m |
| 19. 100 m | 20. 20 m |
| 21. 1268 m | 22. 120 m |
| 23. 40 m, 17.32 m | 24. 9.6 m |
| 25. 864 km/h | 26. 864 km/h |
| 27. 29.28 m | 28. 28 m |
| 29. 6 m | 30. $30\sqrt{2} m$ |
| 31. 115.5 m | 32. 20 m, 34.64 m |
| 33. 10 | 34. स्टेशन P, 14.64 km |
| 35. $58\sqrt{2} m$ | |

अभ्यास प्रश्न—प्रत्र

त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

समय : 50 मिनट

अंक : 20

खण्ड—अ

- 6 मी० ऊंचे जमीन पर खड़े एक खंबे की छाया की लम्बाई $2\sqrt{3}$ मी० है तो सूर्य का उन्नताशं ज्ञात कीजिए। 1
- एक मीनार की ऊंचाई 100 मीटर है, जब सूर्य का उन्नयन कोण 30° है तो मीनार की छाया की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 1

खण्ड—ब

- समतल पर स्थित एक बिन्दु की मीनार के पाद से दूरी 20 मी० है तथा उन्नयन कोण 60° हो तो मीनार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए। 2
- एक मीनार की ऊंचाई तथा इसकी छाया का अनुपात $1:\frac{1}{\sqrt{3}}$ है। उस क्षण सूर्य का उन्नयन कोण बताइये। 2

खण्ड—स

- सूर्य की ऊंचाई 60° के स्थान पर 45° होने पर एक मीनार की छाया 10 मी० अधिक हो जाती है। मीनार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए। 3
- एक चट्टान के शिखर के 100 मी० ऊंची मीनार के शिखर व पाद से उन्नयन कोण क्रमशः 30° तथा 45° है। चट्टान की ऊंचाई ज्ञात कीजिए। 3

खण्ड—द

- एक व्यक्ति पानी के जहाज पर पानी से 10 मीटर ऊंचाई के तल पर खड़ा है वह देखता है कि सामने की पहाड़ी के शिखर का उन्नयन कोण 60° का है तथा पहाड़ी के आधार का अवनमन कोण 30° का है। जहाज से पहाड़ी की दूरी और पहाड़ी की ऊंचाई ज्ञात करिए। 4
- एक गली मकान की खिड़की से जो 15 मी० ऊंची है, उसी गली के दूसरी ओर बने एक मकान के शिखर और पाद के उन्नयन तथा अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° है सिद्ध कीजिए कि दूसरे मकान की ऊंचाई 23. 66 मी० है। 4

□□□

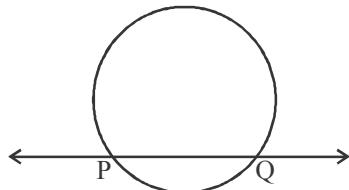
10

अध्याय

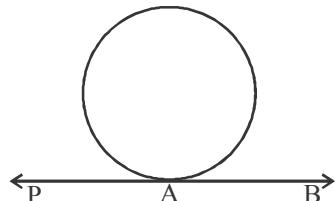
वृत्त

महत्वपूर्ण बिंदु:

1. वृत्त उन बिन्दुओं के समूह से बनता है जो एक निश्चित बिन्दु से अचर दूरी पर होते हैं। निश्चित बिन्दु वृत्त का केन्द्र कहलाता है और अचर दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है।
2. छेदक रेखा—यदि कोई रेखा किसी वृत्त को दो अभिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हो तो वह छेदक रेखा कहलाती है।



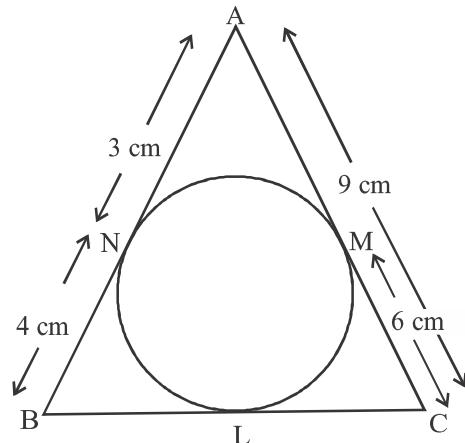
3. वृत्त की स्पर्श रेखा—वृत्त की स्पर्श रेखा वह रेखा होती है जो वृत्त को केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है। जिस बिन्दु पर स्पर्श रेखा वृत्त को स्पर्श करती है उसे स्पर्श बिन्दु कहते हैं।



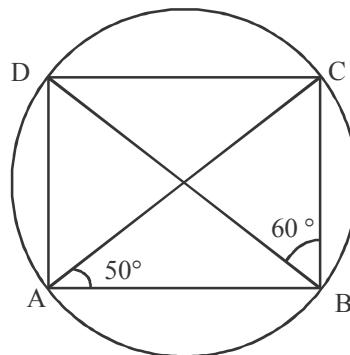
4. स्पर्श रेखा की संख्याएं—किसी वृत्त पर अंसर्व्य स्पर्श रेखाएं बनाई जा सकती हैं।
5. छेदक रेखा की संख्याएं—किसी वृत्त पर असंर्व्य छेदक रेखाएं बनाई जा सकती हैं।
6. निम्न प्रमेय सिद्ध करने के लिए पूछी जा सकती है—
 - (i) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।
 - (ii) किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर बनी स्पर्श रेखाओं की लंबाई बराबर होती है।

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

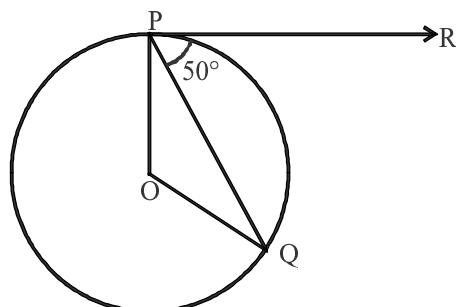
1. दिए गए चित्र में BC की लम्बाई ज्ञात करें।



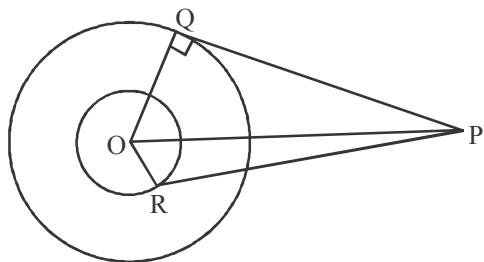
2. यदि बाह्य बिन्दु P से स्पर्श रेखा की लम्बाई 24 cm है। यदि इस स्पर्श रेखा की केन्द्र से दूरी 25 cm है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करें।
3. दिए गए चित्र में ABCD एक चतुर्भुज है। यदि $\angle BAC = 50^\circ$, $\angle DBC = 60^\circ$ तो $\angle BCD$ का मान ज्ञात करें।



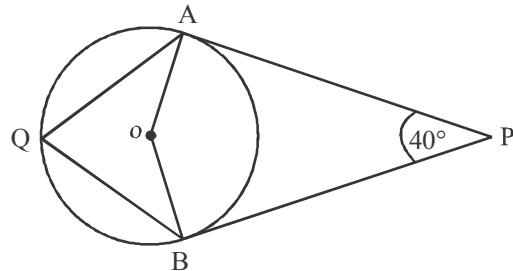
4. दिए गए चित्र में O वृत्त का केन्द्र है, PQ एक जीवा है और स्पर्श रेखा PR बिन्दु P पर 50° का कोण PQ के साथ बनाती है। $\angle POQ$ ज्ञात करें।



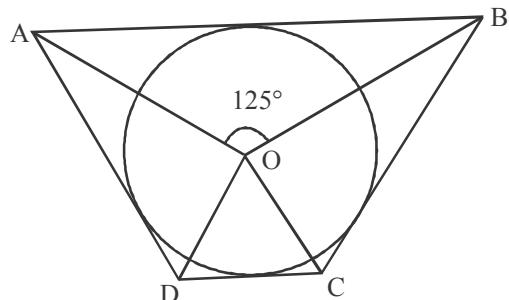
5. यदि दो स्पर्श रेखाएँ, 3 cm त्रिज्या वाले वृत्त पर इस प्रकार बनाई गई कि उनके बीच का कोण 60° हो तो स्पर्श रेखाओं की लम्बाई ज्ञात करें।
6. दो संकेन्द्री वृत्तों की त्रिज्याएँ 4 cm और 5 cm हैं। एक वृत्त की जीवा की लम्बाई ज्ञात करें जो दूसरे वृत्त पर स्पर्श रेखा हो।
7. दिए गए चित्र में PQ बाह्य वृत्त का और PR अंतः वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि $PQ = 4 \text{ cm}$, $OQ = 3 \text{ cm}$ और, $OR = 2 \text{ cm}$ हो तो PR की लम्बाई ज्ञात करें।



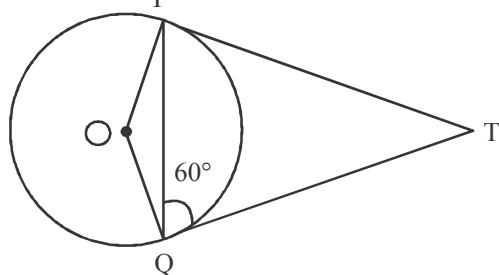
8. दिए गए चित्र में $\angle AQB$ ज्ञात करें।



9. दिए गए चित्र में $\angle ABQ = 125^\circ$ है तो $\angle COD$ ज्ञात करें।

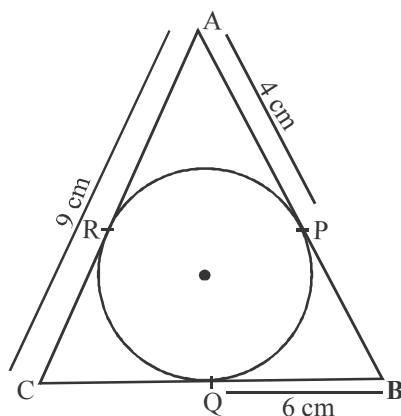


10. यदि TP और TQ बाह्य बिन्दु T से वृत्त की दो स्पर्श रेखाएं हैं और $\angle TQP = 60^\circ$ है तो $\angle OPQ$ ज्ञात करें।



लघु उत्तरीय प्रश्न 1

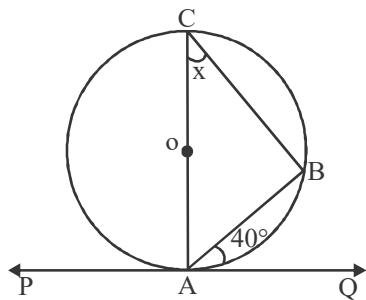
11. यदि दो संकेन्द्री वृत्तों का व्यास d_1 तथा d_2 हो ($d_1 > d_2$) तथा c वृत्त की जीवा की लम्बाई हो जो दूसरे वृत्त पर स्पर्श रेखा है। सिद्ध करो कि $d_2^2 = c^2 + d_1^2$
12. 2.5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त पर बाह्य बिन्दु P से स्पर्श रेखा की लम्बाई 6 सेमी है। बिन्दु P की वृत्त के निकटतम बिन्दु से दूरी ज्ञात करो।
13. केन्द्र O वाले वृत्त की बाह्य बिन्दु T से स्पर्श रेखाएं TP और TQ हैं। यदि $\angle OPQ = 30^\circ$ हो तो $\angle TQP$ का मान ज्ञात करें।
14. आकृति में $AP = 4 \text{ cm}$, $BQ = 6 \text{ cm}$ और $AC = 9 \text{ cm}$ है। ΔABC का अर्द्ध परिमाप ज्ञात करें।



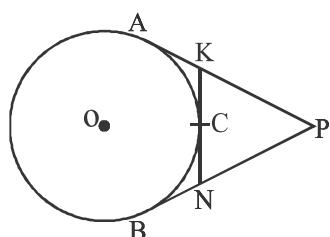
15. एक समकोण त्रिभुज जिसकी भुजाएं a , b तथा c हैं जहां c कर्ण है के अंतर्गत एक वृत्त बना है जो त्रिभुज की सभी भुजाओं को स्पर्श करता है। यदि वृत्त की त्रिज्या r हो तो सिद्ध कीजिए।

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

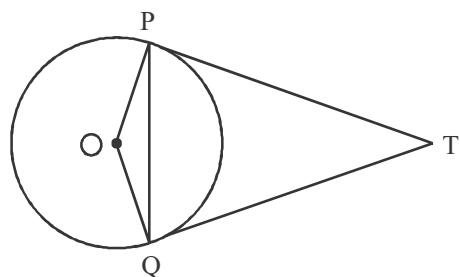
16. सिद्ध करो कि वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से त्रिज्या पर लम्ब होता है।
17. सिद्ध करो कि दो संकेन्द्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा जो छोटे वृत्त पर स्पर्श रेखा होती है स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजित होती है।
18. आकृति में, AC केन्द्र O वाले वृत्त का व्यास है और A स्पर्श बिन्दु है तो x का मान ज्ञात कीजिए।



19. आकृति में, KN, PA और PB, वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ हैं। सिद्ध कीजिए $KN = AK + BN$

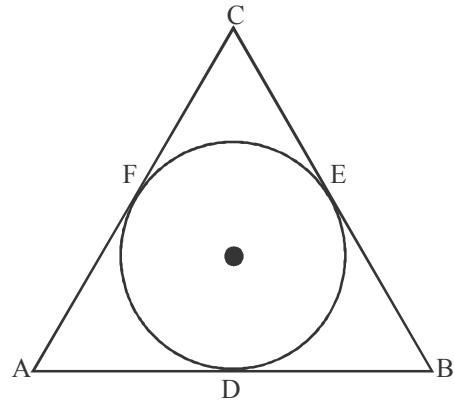


20. आकृति में, जीवा PQ की लम्बाई 6 सेमी तथा वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी है TP और TQ वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। $\angle PTQ$ का मान ज्ञात कीजिए।

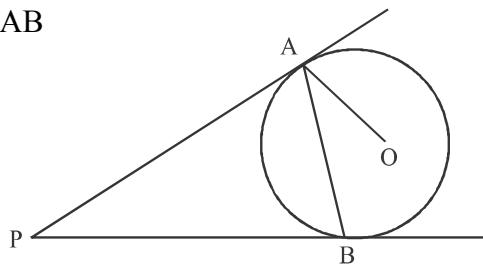


लघु उत्तरीय प्रश्न-II

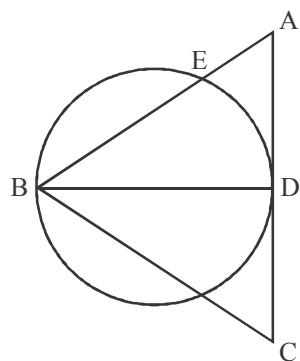
21. दी गई आकृति में, $AB = 12$ सेमी, $BC = 8$ सेमी और $AC = 10$ सेमी है, तो AD , BE और CF का मान ज्ञात कीजिए।



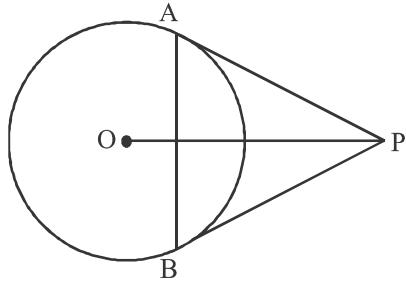
22. समकोण $\triangle ABC$ की भुजा AB को व्यास मानकर एक वृत्त खींचा जाता है। कर्ण AC को बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए $PB = PC$.
23. बाह्य बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB , O केन्द्र वाले वृत्त पर खींची गई। सिद्ध कीजिए $\angle APB = 2 \angle OAB$



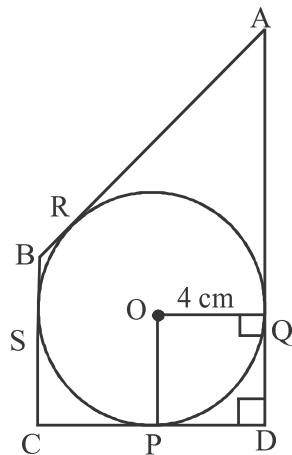
24. 9 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त पर एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC जिसकी भुजा $AB = AC = 6$ सेमी, रिथत है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
25. आकृति में $AB = AC$, 'D' AC का मध्य बिन्दु है तथा BD वृत्त का व्यास है तो सिद्ध कीजिए कि $AE = \frac{1}{4} AC$.



26. आकृति में OP वृत्त के व्यास के बराबर है, जहाँ O वृत्त का केन्द्र है। सिद्ध कीजिए $\angle ABP$ एक समबाहु त्रिभुज है।

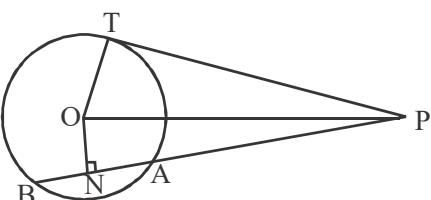


27. आकृति में $AB = 13$ सेमी, $BC = 7$ सेमी, $AD = 15$ सेमी। PC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

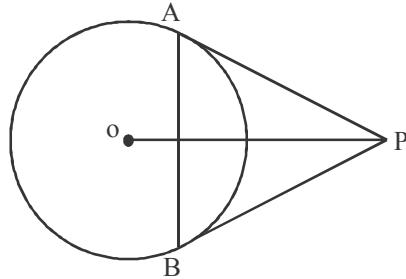


28. आकृति में बाह्य बिन्दु P से एक वृत्त जिसका केन्द्र O है पर स्पर्श रेखा PT तथा छेदक रेखा PAB खींचे गए हैं। ON जीवा AB पर लम्ब है। सिद्ध करो कि

- (i) $PA \cdot PB = PN^2 - AN^2$
- (ii) $PN^2 - AN^2 = OP^2 - PT^2$
- (iii) $PA \cdot PB = PT^2$

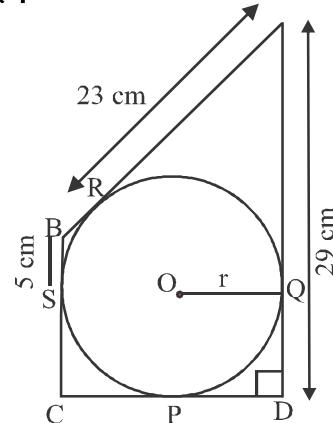


29. केन्द्र O वाले वृत्त का व्यास AB तथा जीवा AC हैं तथा $\angle BAC = 30^\circ$ । C पर स्पर्श रेखा AB को आगे बढ़ाने पर D मिलती है। सिद्ध करो कि $BC = BD$ ।
30. आकृति में PA और PB केन्द्र 'O' वाले वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। सिद्ध कीजिए OP, AB का लम्ब समद्विभाजक है।

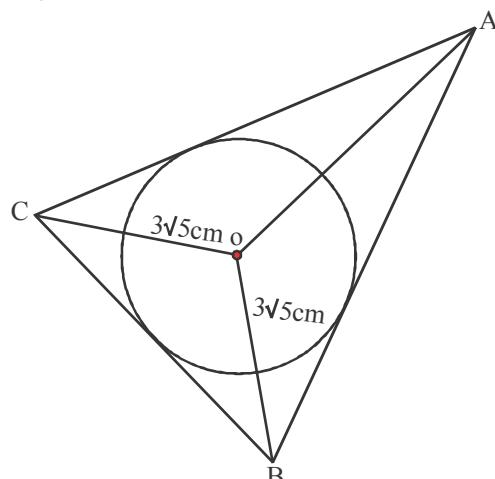


दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

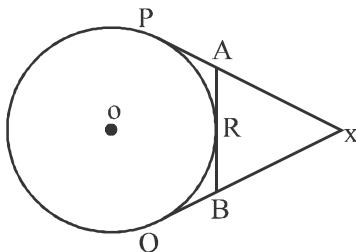
31. आकृति में वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



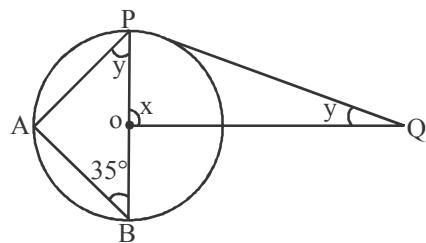
32. आकृति में यदि वृत्त की त्रिज्या 3 हो तो $\triangle ABC$ का परिमाप ज्ञात कीजिए।



33. एक वृत्त त्रिभुज ABC की भुज BC को P बिन्दु पर स्पर्श करती है, भुज AB और AC को क्रमशः Q और R बाह्य बिन्दु तक बढ़ाया गया। सिद्ध कीजिए कि AQ, त्रिभुज ABC के परिमाप का आधा है।
34. आकृति में XP और XQ बाह्य बिन्दु X से केन्द्र 'O' वाले वृत्त की स्पर्श रेखा हैं। R वृत्त पर एक बिन्दु है। सिद्ध कीजिए $XQ = XB + BR$.



35. आकृति में PQ वृत्त की स्पर्श रेखा तथा PB व्यास है। x और y के मान ज्ञात कीजिए।



उत्तरमाला

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1. 10 सेमी | 2. 7 सेमी |
| 3. 70° | 4. 100° |
| 5. $3\sqrt{3}$ सेमी | 6. 6 सेमी |
| 7. $\sqrt{21}$ सेमी | 8. 70° |
| 9. 55° | 10. 30° |
| 12. 4 सेमी | 13. 60° |
| 14. 15 सेमी | 18. 40° |
| 20. 120° | 21. $AD = 7$ सेमी, $BE = 5$ सेमी
$CF = 3$ सेमी |
| 24. $8\sqrt{2}$ वर्ग सेमी | 27. 5 सेमी |
| 31. 11 cm | 32. 32 cm |
| 35. $x = 35^\circ, y = 55^\circ$ | |

अभ्यास प्रश्न—प्रत्र

वृत्त

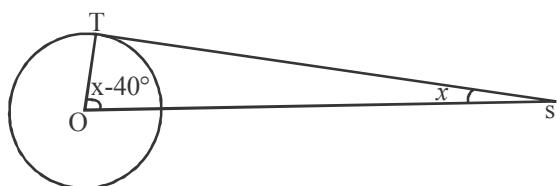
समय : 50 मिनट

अंक : 20

खण्ड—अ

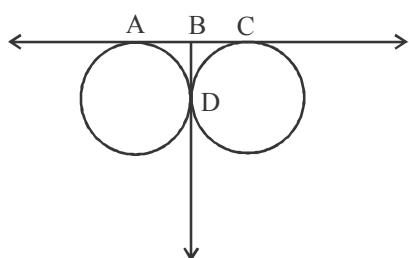
1. दिए गए चित्र में x का मान ज्ञात करें।

1



2. दिए गए चित्र में $AC = 9$ है। BD ज्ञात करें।

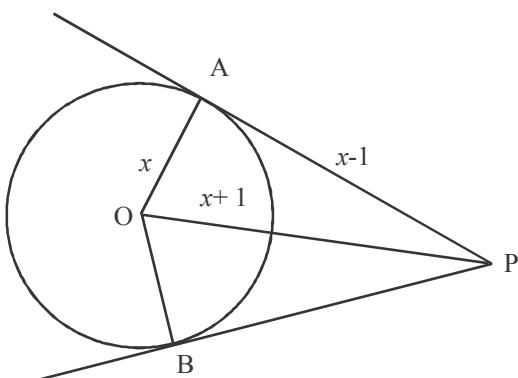
1



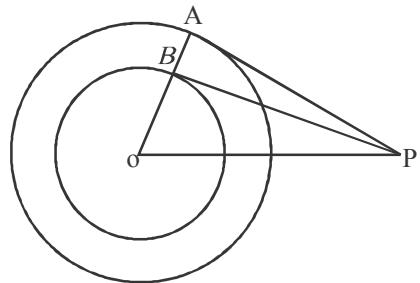
खण्ड—ब

3. x का मान ज्ञात करें।

2

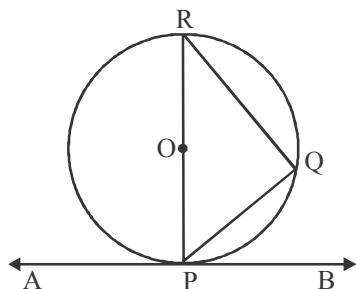


4. दो संकेन्द्री वृत्तों की त्रिज्या 6 cm और 3 cm है। बाह्य बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएं PA और PB बनाई गई। यदि $AP = 10 \text{ cm}$ है तो BP ज्ञात करें। 2

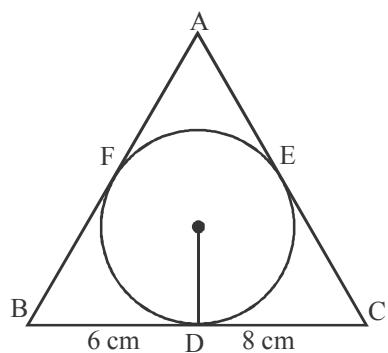


खण्ड-स

5. दिए गए चित्र में सिद्ध करें $\angle BPQ = \angle PRQ$ जहाँ AB वृत्त की स्पर्श रेखा है। 3

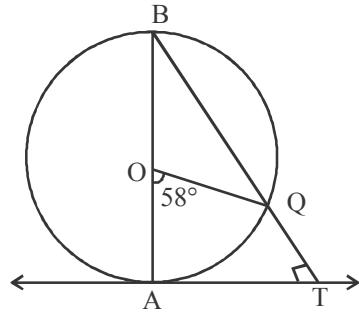


6. एक त्रिभुज ABC के अन्तर्गत बने वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी है। $BD = 6$ सेमी $DC = 8$ सेमी है। यदि ΔABC का क्षेत्रफल 63 वर्ग सेमी हो तो भूजा AB ज्ञात करें। 3

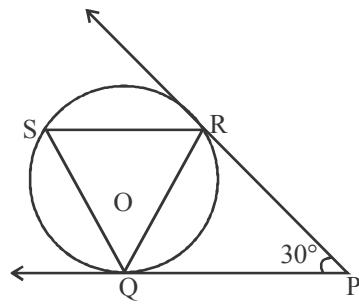


खण्ड-द

7. AB वृत्त का व्यास है। AT उसकी स्पर्श रेखा है। यदि $\angle AOQ = 58^\circ$ है तो $\angle ATQ$ ज्ञात करें। 4



8. PQ और PR बाह्य बिन्दु P से खींची गई दो स्पर्श रेखाएँ हैं। $\angle RPQ = 30^\circ$ है। जीवी RS स्पर्श रेखा PQ के समांतर है। $\angle RQS$ ज्ञात करें 4



□□□

11

अध्याय

रचनाएँ

महत्वपूर्ण बिन्दु:

1. रचना साफ और स्वच्छ बनाएं।
2. समरूप त्रिभुज बनाते समय हमें अपना स्केल का ध्यान रखना चाहिए।
3. रचना के पद तभी लिखें जब आप से कहा जाए।
4. रचना बनाते समय परकार और मापक का प्रयोग ही करें व्यापक कोण बनाते समय प्रोट्रैक्टर का प्रयोग किया जा सकता है।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. त्रिभुज ABC के समरूप त्रिभुज बनाने के लिए जिसकी भुजाएं त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं का $\frac{5}{3}$ है। एक किरण BX इस प्रकार खींचते हैं कि $\angle CBX$ न्यून कोण हो और X, A के विपरित दिशा में BC के सापेक्ष हो। BX पर कितने बिन्दु बराबर दूरी पर लगायेंगे।
2. वृत पर स्पर्श रेखाओं का युग्म इस प्रकार खींचा जाता है कि दोनों रेखाओं के बीच का कोण 30° हो तो दोनों त्रिज्याओं के बीच का कोण बताइये।
3. त्रिभुज ABC के समरूप त्रिभुज बनाने के लिए जिस की भुजाएं त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं का $2/5$ हैं। पहले एक किरण BX इस प्रकार खींची जाती है $\angle CBX$ न्यून कोण हो और X, A के विपरित दिशा में BC के सापेक्ष हो तब बिन्दु $B_1, B_2, B_3, \dots, B_x$ पर पद बराबर बराबर दर्शाये जाते हैं तो कौन से दो बिन्दु अगले चरण में मिलाये जाएंगे?
4. एक रेखाखंड AB को 3:7 के अनुपात में विभाजित करने के लिए किए किरण AX बराबर दूरी पर कितने बिन्दु चिन्हित करने पड़ेंगे?
5. वृत के अन्दर स्थित बिन्दु से कितनी स्पर्श रेखाएं खींची जा सकती हैं?

6. एक रेखाखंड AB को 4:5 के अनुपात में विभाजित करने के लिए AX किरण इस प्रकार खींची जाती है कि $\angle BAX$ न्यूनकोण 01 हो और तब बिन्दु A_1, A_2, A_3, \dots किरण AX पर बराबर बराबर दूरी पर दर्शाये जाते हैं। किरण AX के किस बिन्दु को B से मिलाया जाएगा।
7. एक रेखाखंड AB को 4:5 के अनुपात में विभाजित करने के लिए बिन्दु A_1, A_2, A_3, \dots और B_1, B_2, B_3, \dots किरण AX तथा BX पर बराबर-बराबर दूरी पर चिन्हित हैं तो कौन से दो बिन्दुओं को रेखाखंड को विभाजित करने के लिए मिलाना चाहिए?

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

8. रेखाखंड AB = 8 सेमी. खींचिए। AB पर एक बिन्दु C इस प्रकार लीजिए कि $AC = \frac{1}{3}CB$
9. एक $\triangle ABC$ की रचना कीजिए, जिसमें AB = 6.5 सेमी., $\angle B = 60^\circ$ तथा BC = 5.5 सेमी. हो। एक अन्य त्रिभुज $AB'C'$ की रचना कीजिए जो ABC के समरूप हो तथा जिसकी प्रत्येक भुजा $\triangle ABC$ की संगत भुजा का $3/2$ हो।
10. एक त्रिभुज $\triangle ABC$ की रचना कीजिए जिसमें BC = 5 सेमी., CA = 6 सेमी. और AB = 7 सेमी।। एक अन्य $\triangle A'BC'$ की रचना कीजिए जो $\triangle ABC$ के समरूप हो तथा जिसकी प्रत्येक भुजा $\triangle ABC$ की संगत का $7/5$ हो।
11. एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएं 4 सेमी., 5 सेमी. तथा 7 सेमी. की हो। इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा दिये गये त्रिभुज की संगत भुजा का $2/3$ गुने के बराबर हो।
12. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएं (कर्ण को छोड़कर) 8 सेमी. तथा 6 सेमी. लम्बाई हो। इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा दिये गये त्रिभुज की संगत भुजा के $3/4$ गुने के बराबर हों।
13. $\triangle ABC$ की रचना कीजिए जिसमें BC = 8 सेमी., $\angle B = 45^\circ$ और $\angle C = 30^\circ$ है। इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएं $\triangle ABC$ की संगत भुजाओं के $3/4$ गुने के बराबर हो।
14. $\triangle ABC$ की रचना कीजिए AB = 14 सेमी., BC = 7 सेमी. और $\angle BAC = 50^\circ$ । एक अन्य $A'BC'$, $\triangle ABC$ के समरूप बनाइये जिसमें $BA' = 6$ सेमी. और $BC' = 10.5$ सेमी. मापन स्केल भी बताइए।

15. ΔABC की रचना कीजिए जिसमें $AB = 5$ सेमी. $\angle B = 60^\circ$ और शीर्षलंब $CD = 3$ सेमी. हो, $\Delta AQR \sim \Delta ABC$ की रचना कीजिए ताकि ΔAQR के प्रत्येक ΔABC की संगत भुजाओं के 1.5 गुने के बराबर हो।
16. 6 सेमी. त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए वृत्त पर स्पर्श रेखाओं का एक युग्म इस प्रकार खींचिए कि दोनों स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण 60° हो।
17. एक समद्विबाहु ΔABC की रचना कीजिए जिसमें $AB = AC$ और आधार $BC = 7$ सेमी., उर्ध्वाधर कोण $= 120^\circ$ हो $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा, ΔABC की संगत भुजाओं के $1\frac{1}{3}$ गुने के बराबर हो।
18. 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए केन्द्र से 5 सेमी. की दूरी पर बाह्य बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखाएं खींचिए तथा उनकी लम्बाई भी माप कर लिखिए।
19. केन्द्र 0 तथा 4 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचिए उसका व्यास POQ खींचिए। P या Q से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए।
20. 5 सेमी. व 3 सेमी. त्रिज्या वाले दो वृत्त जिनके केन्द्र एक दूसरे से 9 सेमी. दूर है। प्रत्येक वृत्त के केन्द्र से दूसरे वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए।
21. 6 सेमी. तथा 4 सेमी. त्रिज्या के दो संकेन्द्रीय वृत्त खींचिए। बाह्य वृत्त के किसी बिन्दु से अंतः वृत्त पर स्पर्श रेखा की रचना करिए और उसकी लम्बाई माप कर लिखिए।
22. 3 सेमी. त्रिज्या का वृत्त खींचिए। इसके बढ़े हुए व्यास पर दो बिन्दु P तथा Q जो केन्द्र से प्रत्येक 7 सेमी. की दूरी पर हैं इस बिन्दुओं से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना करिए।
23. $PQ = 10$ सेमी. का एक रेखाखंड खींचिए। PQ पर एक बिन्दु A इस प्रकार लीजिए कि $\frac{PA}{PQ} = \frac{2}{5}$ हो PA तथा PQ की लम्बाई माप कर लिखिए।
24. एक समबाहु ΔPQR खींचिए जिसकी प्रत्येक भुजा 5 सेमी. है। $\Delta P'Q'R'$ समरूप ΔPQR बनाइये ताकि $\frac{P'Q}{PQ} = \frac{1}{2}$

25. 8 सेमी. लम्बाई की एक रेखाखंड खींचिए और इसे 5:8 में विभाजित कीजिए तथा दोनों हिस्सों की माप भी बताइए।
26. $\triangle ABC$ की रचना कीजिए, जहाँ $AB = 7$ सेमी. $BC = 7.5$ सेमी. $CA = 6.5$ सेमी। $\triangle ABC$ के समरूप Δ की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा $\triangle ABC$ की संगत भुजाओं का $3/2$ गुना हो।

उत्तरमाला

- | | | | |
|----|-------------|----|-----|
| 1. | 5 | 2. | 150 |
| 3. | B 5 से C | 4. | 10 |
| 5. | 0 | 6. | A 9 |
| 7. | A 4 तथा B 5 | | |

अभ्यास प्रश्न पत्र

रचनाएँ

समय :- 1 घंटा

अधिकतम अंक – 20

खंड-अ

- रेखाखंड $AB = 8$ सेमी. का लंब समद्विभाजिक खींचिए। 1
- एक दी हुई रेखा के समान्तर रेखा की रचना कीजिए। 1

खंड-ब

- 75° को कोण बनाइए तथा उसका समद्विभाजक खींचिए। 2
- 5.6 सेमी. लम्बाई का रेखाखंड खींचिए। उसे 2:3 के अनुपात में विभाजित कीजिए। 2

खंड-स

- 3.5 सेमी. त्रिज्या का वृत्त खींचिए। इसके केन्द्र से 5.5 सेमी की दूरी पर स्थित बाह्य बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखाएं खींचिए। 3
- 3.5 सेमी. त्रिज्या के वृत्त की रचना करिए तथा इस पर दो स्पर्श रेखाएं इस प्रकार खींचिए जो परस्पर 120° के कोण पर अंतरित हो। 3

खंड-द

- त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें $AB = 4$ सेमी. $BC = 5$ सेमी. और $AC = 7$ सेमी.। ΔABC के समरूप एक दूसरा त्रिभुज बनाइये जिसकी संगत भुजाएं दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं का $5/7$ गुना हो। 4
- एक समकोण ΔABC बनाइये जिसमें $AB = 6$ सेमी., $BC = 8$ सेमी., $\angle B = 90^\circ$. AC पर B से BD लंब खींचिए। B, C तथा D से होता हुआ वृत्त बनाइये तथा A से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए। 4

12

अध्याय

वृत्तों से सम्बन्धित क्षेत्रफल

महत्वपूर्ण बिन्दु:

1. यदि एक वृत्त की त्रिज्या 'r' हो तो:

$$(i) \text{ परिधि} = 2\pi r \text{ या } \pi d, \quad d = 2r \text{ है।}$$

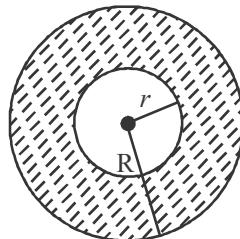
$$(ii) \text{ क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$(iii) \text{ अर्धवृत्त का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$(iv) \text{ चतुर्थांश का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2}{4}$$

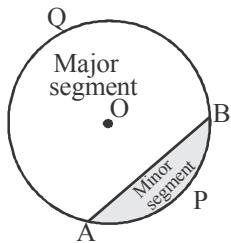
2. दो संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा आन्तरित क्षेत्रफल

यदि दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्या में R तथा r हैं तो दोनों वृत्तों द्वारा आन्तरित क्षेत्रफल
 $= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r)$



3. त्रिज्याखण्ड और उसका क्षेत्रफल

किसी वृतीय क्षेत्र के उस भाग को जो वृत्त की दो त्रिज्याओं और उनके संगत चाप द्वारा घिरा हो, उस वृत्त का एक त्रिज्याखण्ड कहते हैं। दिए गए चित्र में APB लघु त्रिज्याखण्ड तथा AQB दीर्घ त्रिज्याखण्ड हैं।



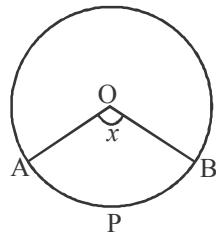
$$\text{त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल जिसका त्रिज्याखण्ड कोण } \theta \text{ है} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{चाप की लम्बाई} \times \text{त्रिज्या} = \frac{1}{2} lr$$

$$\text{कोण } \theta \text{ वाले त्रिज्यखण्ड के संगत चाप की लम्बाई} = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r \\ = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi d$$

4. वृत्तखण्ड और उसका क्षेत्रफल :

वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो एक जीवा और संगत चाप के बीच में परिबद्ध हो, एक वृत्तखण्ड कहलाता है। दिए गए चित्र में APB लघु वृत्तखण्ड तथा AQB दीर्घ वृत्तखण्ड है।



वृत्तखण्ड APB का क्षेत्रफल = त्रिज्याखण्ड OAPB का क्षेत्रफल – ΔOAB का क्षेत्रफल

$$= \frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \quad \text{या} = \frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2 - r^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

5. कुछ महत्वपूर्ण परिणाम :

- (i) यदि दो वृत्त अन्तः स्पर्श करते हैं, तो उनके केन्द्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के अन्तर के बराबर होती है।
- (ii) यदि दो वृत्त बाह्यतः स्पर्श करते हैं, तो उनके केन्द्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के योगफल के बराबर होती है।

- (iii) किसी घूमते हुए पहिये द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी उस पहिये की परिधि के बराबर होती है।
- (iv) किसी घूमते हुए पहिये द्वारा मिनट में लगाये गये चक्करों की संख्या

$$= \frac{\text{एक मिनट में चली गयी दूरी}}{\text{पहिये की परिधि}}$$
- (v) लघु त्रिज्याखण्ड वृत्त के केन्द्र पर लघु कोण (मान लीजिए θ) आन्तरित करता है जबकि दीर्घ त्रिज्याखण्ड केन्द्र पर अधिककोण ($360^\circ - \theta$) आन्तरित करता है।
- (vi) वृत्त के लघु तथा दीर्घ त्रिज्याखण्डों के क्षेत्रफलों का योगफल वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर होता है।
- (vii) किसी त्रिज्याखण्ड का परिमाप उसकी संगत चाप तथा संगत त्रिज्याओं के योगफल के बराबर होता है।
- (viii) घंटे की सुई द्वारा 1 मिनट में बना कोण = $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$
- (ix) मिनट की सुई द्वारा 60 मिनटों में बनाया कोण = 360°
- (x) मिनट की सुई द्वारा 1 मिनटों में बनाया गया कोण = 6°

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

- यदि एक अर्धवृत्ताकार चॉदे का व्यास 14 सेमी है, तो इसकी परिधि ज्ञात कीजिए।
- एक वृत्त की परिधि तथा क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से समान हो तो वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए।
- ' a ' सेमी भुजा वाले वर्ग के अन्तनिहित एक वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- एक वृत्त के त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिल्या r तथा संगत चाप की लम्बाई l है।
- एक पहिए की त्रिज्या 0.25 मी. है। पहिए द्वारा 11 किमी दूरी तय करने में लगाए गए चक्करों की संख्या ज्ञात कीजिए।
- यदि एक वृत्त का क्षेत्रफल 616 वर्ग सेमी हो तो इसकी परिधि ज्ञात कीजिए।
- एक 6 सेमी वाले वर्ग के अन्तनिहित वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. एक वृत्त का क्षेत्रफल दो वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है। दोनों वृत्तों की त्रिज्याएं 24 सेमी तथा 7 सेमी हैं तो बड़े वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए।
9. एक तार को मोड़कर 35 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाया जा सकता है। यदि इसी तार को एक वर्ग के आकार में मोड़ा जाए तो वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
10. एक वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी है तथा एक चाप की लम्बाई 3π सेमी है। इस चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर आन्तरिक कोण का मान ज्ञात कीजिए।
11. एक वृत्त के त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र लिखिए जिसका केन्द्र पर कोण θ तथा त्रिज्या r है।
12. यदि दो वृत्तों की परिधियों 2:3 के अनुपात में हो, तो इनके क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।
13. एक वृत्त की परिधि तथा त्रिज्या का अन्तर 37 सेमी हो तो वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए।

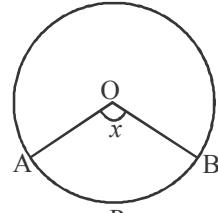
$$\left(\pi = \frac{22}{7} \right) \text{ लें}$$

14. यदि एक वृत्त का व्यास 40% बढ़ा दिया जाए तो कितने प्रतिशत से इसका क्षेत्रफल बढ़ेगा।
15. एक घड़ी की घण्टे की सुई की लम्बाई 6 सेमी है। प्रातः 11:20 बजे से 11:55 बजे तक घण्टे की सुई द्वारा अंकित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

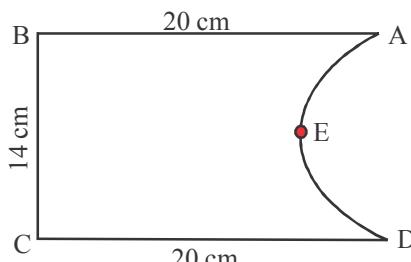
लघुत्तरात्मक प्रश्न 1

16. एक वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 22 सेमी है।
17. 10 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की किसी चाप की लम्बाई 5π सेमी. हो तो उस चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर आन्तरिक कोण का मान ज्ञात कीजिए।
18. यदि एक वर्ग का वृत्त के अन्तर्निहित हो, तो वृत्त तथा वर्ग के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
19. यदि किसी अर्धवृत्त की परिधि 18 सेमी. हो तो उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
20. यदि एक वृत्त की परिधि एक वर्ग के परिमाप के बराबर हो तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?
21. एक वृत्त का व्यास तथा एक समबाहु त्रिभुज की भुजा की लम्बाई समान हो तो इनके क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?

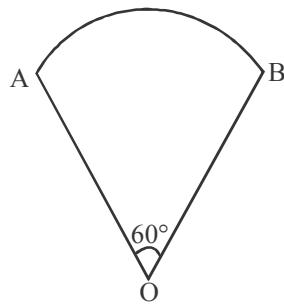
22. संलग्न चित्र में, O एक वृत्त का केन्द्र है। यदि त्रिज्याखण्ड OAB का क्षेत्रफल, वृत्त के क्षेत्रफल का $\frac{5}{18}$ हो तो x ज्ञात कीजिए।



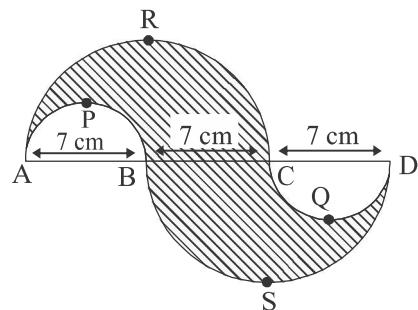
23. दिए गए चित्र में जहाँ AED एक अर्धवृत्त तथा ABCD एक आयत है तो चित्र का परिमाप ज्ञात कीजिए।



24. दिया गया चित्र एक वृत्त जिसकी त्रिल्या 10.5 सेमी. है, का त्रिज्याखण्ड है। इस त्रिज्याखण्ड का परिमाप ज्ञात कीजिए।

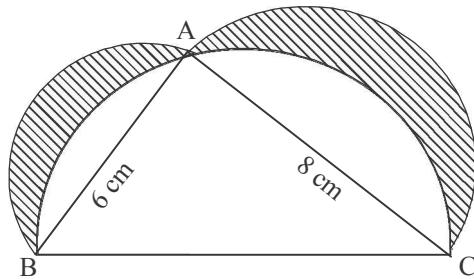


25. छायांकित भाग का परिमाप ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

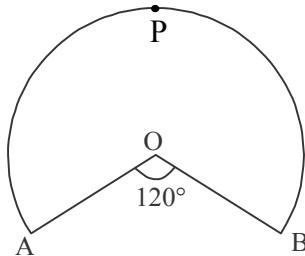


लघु उत्तरीय प्रश्न 2

26. 36 सेमी. त्रिज्या वाले एक वृत्त का त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल 54π वर्ग सेमी. हो तो संगत चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
27. एक घड़ी की मिनट की सुई 5 सेमी. लम्बी है। मिनट की सुई द्वारा प्रातः 6:05 बजे से 6:40 बजे तक बुहार किया गया क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
28. दिए गए चित्र में ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कोण $A = 90^\circ$, $AB = 6$ सेमी. तथा $AC = 8$ सेमी. है। AB, AC तथा BC को व्यास लेकर अर्धवृत्त खींचे गए हैं, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

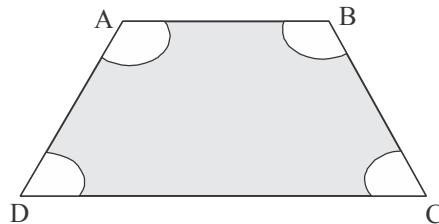


29. दिए गए चित्र में OAPB, एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 3.5 सेमी तथा कोण $\angle AOB = 120^\circ$ का त्रिज्याखण्ड है। OAPBO का परिमाप ज्ञात कीजिए।

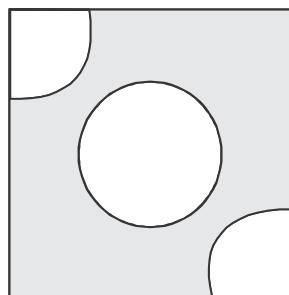


30. एक वृत्ताकार पदपथ (फुटपाथ) जिसकी चौड़ाई 2 मी० को रु20 प्रतिवर्ग मी० की दर से एक वृत्ताकार, पार्क जिसकी त्रिज्या 1500 मी० के चारों ओर बनाया गया है। पदपथ (फुटपाथ) को बनाने में कुल कितना खर्च आएगा? ($\pi = 3.14$ लीजिए)
31. एक लड़का इस प्रकार साईकिल चला रहा है कि साईकिल के पहिए प्रति मिनट 140 चक्कर लगाते हैं यदि पहिए का व्यास 60 सेमी० हो तो साईकिल की चाल ज्ञात कीजिए।
32. 5 सेमी० त्रिज्या वाले वृत्त की जीवा AB की लम्बाई $5\sqrt{3}$ सेमी० है। लघु त्रिज्याखण्ड AOB का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

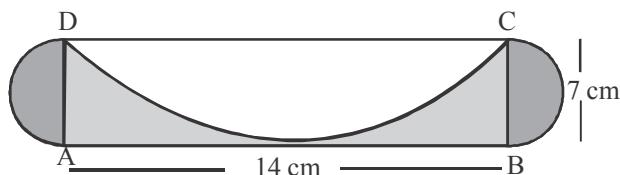
33. एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $49\sqrt{3}$ वर्ग सेमी० है। प्रत्येक शीर्ष को केन्द्र मानकर, त्रिभुज की भुजा की लम्बाई की आधी त्रिज्या लेकर वृत्त खींचे गए हैं। त्रिभुज के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो वृत्तों में सम्मिलित नहीं है।
34. ABCD एक समलम्ब जिसमें $AB \parallel DC$, $AB = 18$ सेमी०, $DC = 32$ सेमी० तथा AB और DC के बीच की दूरी 14 सेमी० है। शीर्षों A, B, C और D को केन्द्र लेकर चार बराबर त्रिज्या 7 सेमी० वाले वृत्त बनाए गए हैं तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



35. एक 6 सेमी० भुजा वाले वर्ग के दो सम्मुख कोणों से 1.4 सेमी० त्रिज्या के दो चतुर्थांश काटे गए हैं। वर्ग के बीच में 4.2 सेमी० व्यास का एक अन्य वृत्त भी काटा गया है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

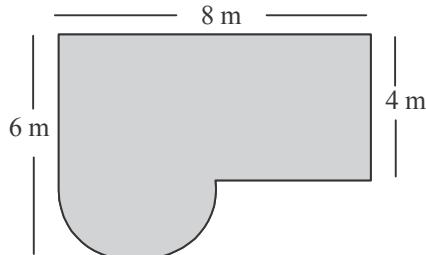


36. एक 100° का त्रिज्याखण्ड एक वृत्त से काटा गया है जिसका क्षेत्रफल 70.65 सेमी० है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$).
37. दिए गए चित्र में, ABCD एक आयत है जिसमें $AB = 14$ सेमी और $BC = 7$ सेमी है। DC, BC तथा AD को व्यास मानकर, तीन अर्धवृत्त खींचे गए हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

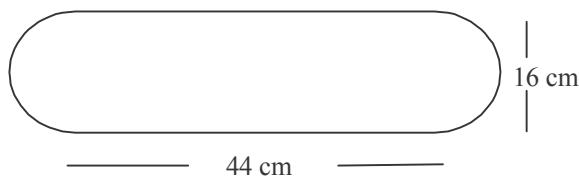


38. एक वर्गाकार पानी के टैंक के आधार की प्रत्येक भुजा 40 मी0 है। इसके चारों ओर चार अर्धवृत्ताकार घास के मैदान है। रु 1.25 प्रति वर्ग मी0 की दर से मैदान को समतल कराने का व्यय कीजिए ($\pi = 3.14$ लें)

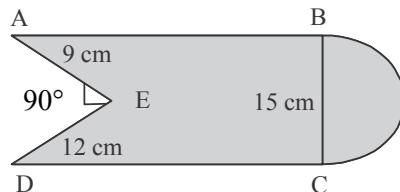
39. छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



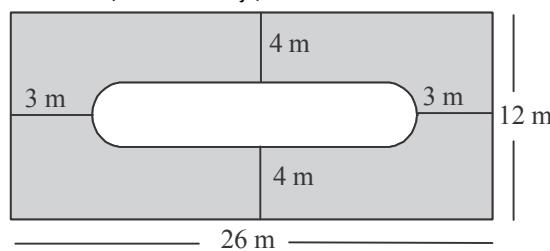
40. 28 सेमी0. त्रिज्या वाले वृत्त की कोई जीवा वृत्त के केन्द्र पर 45° का कोण बनाती है। जीवा द्वारा काटे गये लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।
41. एक तार को मोड़कर, वृत्त के केन्द्र पर 45° का कोण आन्तरित करने वाली चाप के रूप में बनाया जा सकता है। यदि तार की लम्बाई 11 सेमी0 हो तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
42. दिए गए चित्र में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



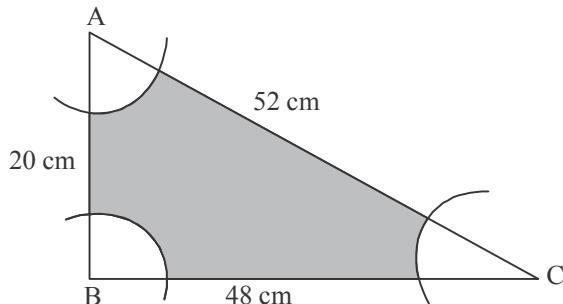
43. दिए गए चित्र का क्षेत्रफल वर्ग सेमी0 में ज्ञात कीजिए।



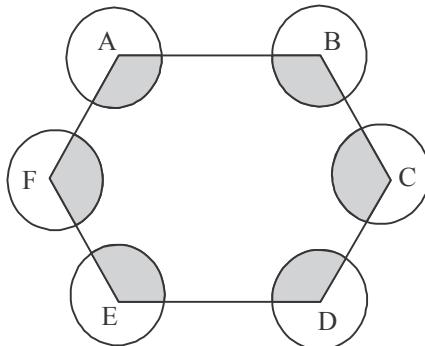
44. यदि एक वृत्त की परिधि इसके व्यास से 16.8 सेमी0 अधिक हो तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
45. छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



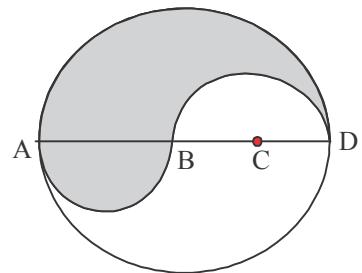
46. दो वृत्त बाह्यतः स्पर्श करते हैं। यदि इनके क्षेत्रफलों का योग 130π वर्ग सेमी 2 है तथा इनके केन्द्रों के बीच की दूरी 14 सेमी 2 है, तो इन वृत्तों की त्रिज्याएँ ज्ञात कीजिए।
47. तीन वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ 7 सेमी 2 हैं, इस प्रकार खींचे गए हैं कि हर वृत्त बाकी दो वृत्तों को स्पर्श करता है। तीनों वृत्तों के बीच वाले भाग को क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
48. एक पहिए का क्षेत्रफल 6.16 वर्ग मी 2 है। पहिए को 572 मी 2 की दूरी तय करने के लिए कुल कितने चक्कर लगाने पड़ेंगे।
49. एक समचतुर्भुज के सभी शीर्ष एक वृत्त पर है, यदि वृत्त का क्षेत्रफल 2464 वर्ग सेमी 2 हो तो समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
50. त्रिभुज ABC के शीर्ष A, B तथा C को केन्द्र लेकर तीन त्रिज्याखण्ड बनाए गए हैं जिनकी त्रिज्या 6 सेमी 2 है। यदि AB=20 सेमी 2 BC =48 सेमी 2 और CA=52 सेमी 2 हो, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)



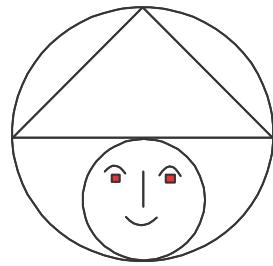
51. दी गई आकृति में, ABCDEF एक समषदभुज है जिसके शीर्षों को केन्द्र मानकर समान त्रिज्या r के वृत्त खींचे गए हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



52. एक 6 सेमी 0 त्रिज्या के वृत्त का व्यास ABCD इस प्रकार है कि AB, BC तथा CD बराबर है। चित्र के अनुसार AB और BD को व्यास मानकर अर्धवृत्त खींचे गए हैं। छायांकित भाग का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

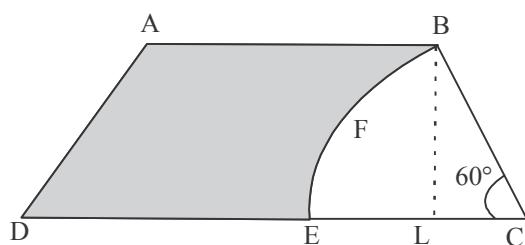


53. सड़क पर एक गरीब कलाकार बच्चों के लिए मजाकिया कार्टून बनाता है तथा अपनी जीविका अर्जित करता है। एक बार उसने आकृति में दर्शाए अनुसार एक हास्यकर मुख बनाया, जिसके लिए उसने एक वृत्त के अन्दर वृत्त खींचा, जहां बड़े वृत्त की त्रिज्या 30 सेमी 0 और छोटे वृत्त की त्रिज्या 20 सेमी 0 है। इस आकृति में टोपी के लिए कितना क्षेत्रफल दिया गया है?

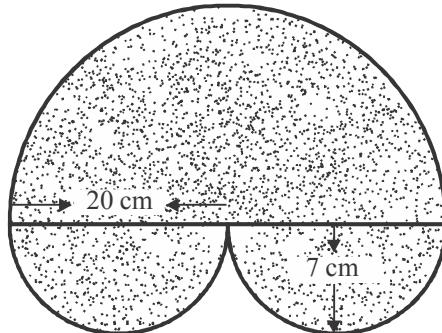


54. दिए गए चित्र में, ABCD एक समतलम्ब चतुर्भुज है $AB \parallel DC$ तथा कोण $BCD=60^\circ$ है। यदि BFEC केन्द्र C वाले वृत्त का त्रिज्याखण्ड है और $AB=BC=7$ सेमी 0 तथा $DE=4$

सेमी 0 हो, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7} \text{ तथा } \sqrt{3} = 1.732 \right)$ का प्रयोग कीजिए।



55. दिए गए चित्र में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तरमाला

- | | |
|---|-----------------------------|
| 1. 36 सेमी. | 22. 100 सेमी. |
| 2. 4 इकाई | 23. 76 सेमी. |
| 3. $\pi \frac{a^2}{4} cm^2$ | 24. 32 सेमी. |
| 4. $\frac{1}{2} lr$ वर्ग इकाई | 25. 66 सेमी. |
| 5. 7000 | 26. 3π सेमी. |
| 6. 88 सेमी. | 27. $45\frac{5}{6} cm^2$ |
| 7. 9π वर्ग सेमी. | 28. 24 cm^2 |
| 8. 50 सेमी. | 29. 21.67 सेमी. |
| 9. $3025 cm^2$ | 30. ₹377051.2 |
| 10. 90° | 31. 15.84 किमी/घंटा |
| 11. $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$ | 32. $\frac{25}{3}\pi cm^2$ |
| 12. 4:9 | 33. 7.77 cm^2 |
| 13. 44 सेमी. | 34. 196 cm^2 |
| 14. 96% | 35. 5.48 cm^2 |
| 15. $5.5 cm^2$ | 36. 9 सेमी. |
| 16. $9.625 cm^2$ | 37. 59.5 cm^2 |
| 17. 90° | 38. 5140 |
| 18. $\pi:2\pi:11:7$ | 39. $(32+2\pi)cm^2$ |
| 19. 3.5 सेमी. | 40. $(308-196\sqrt{2})cm^2$ |
| 20. $4:\pi$ | 41. 14 सेमी. |
| 21. $\pi:\sqrt{3}$ | 42. $(704+64\pi)cm^2$ |

43. 334.31 cm^2

50. 423.48 cm^2

44. 3.92 cm^2

51. $2\pi r^2$

45. $(248 - 4\pi)cm^2$

52. $P=37.71 \text{ cm}, A = 37.71 \text{ cm}^2$

46. 11 cm और 3 cm

53. $400\sqrt{2} \text{ cm}^2$

47. 7.87 cm^2

54. 28.89 cm^2

49. 1568 cm^2

55. 462 cm^2

48. 65

अभ्यास प्रश्न पत्र

वृत्तों से सम्बंधित क्षेत्रफल

समय: 50 मिनट

अंक : 20

खण्ड-अ

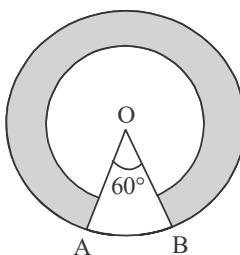
1. यदि दो वृत्तों की परिधि बराबर हो तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा? 1
2. यदि चाँदे का व्यास 21cm हो तो इसका परिमाप ज्ञात कीजिए। 1

खण्ड-ब

3. यदि एक वृत्त की परिधि 22 सेमी. हो तो वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 2
4. एक वृत्त के चतुर्भांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 44 सेमी. है 2

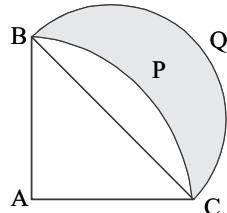
खण्ड-स

5. एक घोड़े को 28 सेमी लम्बी रस्सी द्वारा एक खम्भे से बँधा गया है। घोड़े द्वारा खायी जाने वाली घास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 3
6. दिए गए चित्र में $OA = 42$ सेमी., $OC = 21$ सेमी. तथा व्यास $\angle AOB = 60^\circ$ है तो छायांकित भाग को क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 3



खण्ड-द

7. यदि 10 सेमी. त्रिज्या के वृत्त में एक जीवा AB वृत्त के केन्द्र पर समकोण बनाती हो, तो लघु तथा दीर्घ हत्तखण्ड के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (दिया है : $\pi = 3.14$) 4
8. ABCP एक 20 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त का चतुर्थांश है। AC को व्यास मानकर एक अर्धवृत्त खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4



13

अध्याय

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

महत्वपूर्ण बिन्दु:

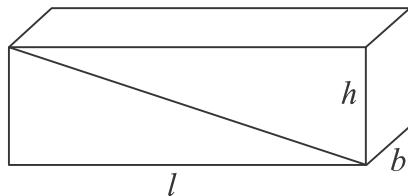
1. घनाभ = 3—आयामी आकार जैसे किताब, माचिस की डिब्बी, अलमारी इत्यादि घनाभ कहलाती हैं।

माना, लम्बाई = 1, चौड़ाई = b , ऊँचाई = h

$$\text{आयतन} = l \times b \times h$$

$$\text{ठोस घनाभ का पाश्व पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2h(l + b)$$

$$\text{ठोस घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2(lb + bh + lh)$$



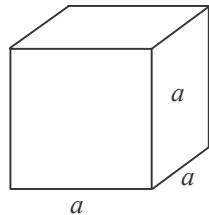
2. घन = 3—आयामी आकार जैसे आइस—क्यूबस, लूडो का पासा इत्यादि घन कहलाती हैं।

माना, लम्बाई = चौड़ाई = ऊँचाई = a

$$\text{आयतन} = a^3$$

$$\text{ठोस घन का पाश्व पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 4a^2$$

$$\text{ठोस घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 6a^2$$



3. बेलन = 3-आयामी आकार जैसे जार, स्तंभ, पाइप, रोड़-रोलर इत्यादि बेलन कहलाते हैं।

(क) माना, आधार त्रिज्या = r

$$\text{ऊंचाई} = h$$

$$\text{आयतन} = \pi r^2 h$$

$$\text{ठोस बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2\pi r h$$

$$\text{ठोस बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2\pi r(r + h)$$

(ख) बेलन (खोखला) के लिए,

$$\text{बाह्य त्रिज्या} = R$$

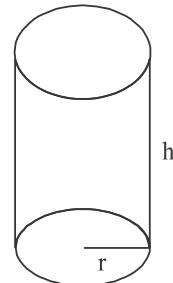
$$\text{अन्तः त्रिज्या} = r$$

$$\text{ऊंचाई} = h$$

$$\text{आयतन} = \pi(R^2 - r^2)h$$

$$\text{वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2\pi(R + r)h$$

$$\text{कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2\pi(R + r)h + 2\pi(R^2 - r^2)$$



4. शंकु : 3-आयामी आकार जैसे टैंट, आइसक्रीम कोन को शंकु कहते हैं।

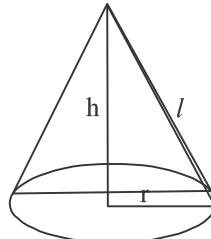
माना, आधार त्रिज्या = r

$$\text{ऊंचाई} = h$$

$$\text{तिरछी ऊंचाई} = l$$

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$\text{आयतन} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



$$\text{ठोस शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \pi r l$$

$$\text{ठोस शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \pi r(l + r)$$

ध्यान दें,

यदि एक शंकु व एक बेलन दोनों की आधार त्रिज्याएं समान हों व दोनों की ऊंचाई भी समान हो तब

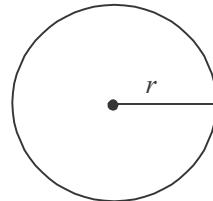
$$3 \times \text{शंकु का आयतन} = \text{बेलन का आयतन}$$

5. गोला : 3-आयामी आकार जैसे क्रिकेट बॉल, फूटबॉल इत्यादि को गोला कहते हैं।

(क) माना, त्रिज्या = r

$$\text{आयतन} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 4\pi r^2$$



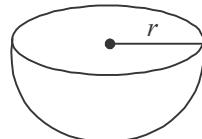
(ख) अर्ध गोलाकार (ठोस)

त्रिज्या = r

$$\text{आयतन} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\text{वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2\pi r^2$$

$$\text{कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 3\pi r^2$$



6. छिन्नक : जब एक शंकु को आधार के समांतर काटा जाता है तो उस कटाव से नीचे आधार तक के भाग को शंकु का छिन्नक कहते हैं।

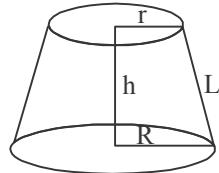
उदाहरण—तुर्की टोपी

माना,

आधार त्रिज्या = R

उपरी त्रिज्या = r

तिर्यक ऊँचाई = h



$$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

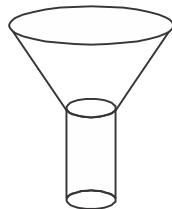
$$\text{आयतन} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$$

$$\text{वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (ठोस)} = \pi l(R + r)$$

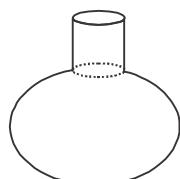
$$\text{कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (ठोस)} = \pi l(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. “कीप” किन दो ज्यामितीय आकारों का संयोजन है?



2. “सुराही” किन दो ज्यामितीय आकारों का संयोजन है?



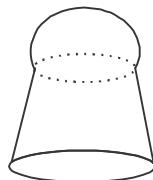
3. एक बेलनाकार ‘पेंसिल’ जो एक सिरे से छिली गई है, किन दो ज्यामितीय आकारों का संयोजन है?



4. दी गई “गिलास” की आकृति, किस 3–आयामी ज्यामिति आकारों सी प्रतीत होती है?



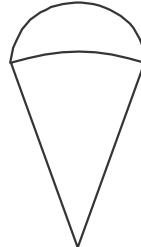
5. चिड़डी—छक्का खेलने के लिए उपयोग में आने वाली “चिड़डी” ज्यामितीय आकारों का संयोजन है?



6. गिल्ली डंडा खेल में प्रयोग में आने वाली “गिल्ली” किन-किन ज्यामितीय आकारों का संयोजन है?



7. राजमिस्त्री द्वारा प्रयोग में लाया जाने वाला “साहुल” किन दो ज्यामितीय आकारों का संयोजन है?



8. एक ठोस आकृति को दूसरी ठोस आकृति में रूपांतरण के दौरान, नई ठोस आकृति के आयतन पर क्या प्रभाव होगा?
9. शंकु को आधार के समानांतर विभाजित करने पर होता प्राप्त छिन्नक का उपरी अनुप्रस्थ काट का क्षेत्र किस आकृति का है?
10. एक ठोस-अर्ध-गोलाकार, जिसकी त्रिज्या 7 सेमी है, का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए।
11. दो गोलों के आयतन का अनुपात $64 : 125$ है। इनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात बताइए।
12. उस गोले का अधिकतम व्यास बताइए जिसे r सेमी. त्रिज्या व h सेमी ऊँचाई ($h > 2r$) के बेलन ने पूरी तरह से समाहित कर लिया है।
13. बेलन व शंकु के आयतन का अनुपात बताइए यदि इनके आधार की त्रिज्या समान है व दोनों की ऊँचाई भी समान है।
14. एक गोले (ठोस) जिसकी त्रिज्या r है, को पिघलाकर r ऊँचाई वाला एक ठोस शंकु बनाया गया है। शंकु के आधार की त्रिज्या बताइए।
15. एक ठोस अर्ध गोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए यदि इसकी त्रिज्या r है।
16. यदि एक गोले का आयतन उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के बराबर है, तो गोले की त्रिज्या बताइए।
17. एक बेलन, एक शंकु और एक अर्ध-गोले के आधार की त्रिज्याएं समान हैं। इनकी ऊँचाई भी समान हैं। तीनों के आयतनों का अनुपात बताइए।

18. समान त्रिज्या r वाले दो ठोस अर्ध—गोलों के आधारों की ओर से मिलकर जो आकृति प्राप्त होगी, उसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए।
19. एक घन का आयतन 1331 सेमी.^3 है। इसकी भुजा की लम्बाई बताइए।
20. एक खोखले बेलन की “क्षमता” का अर्थ क्या होता है?

लघु उत्तरीय प्रश्न 1

21. एक ठोस घनाभ जिसकी भुजाएँ $16 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ हैं, में से 2 cm भुजा वाले कितने घन बनाए जा सकते हैं।
22. 729 cm^3 आयतन वाले घन में से अधिक से अधिक कितनी ऊँचाई वाला शंकु काटा जा सकता है?
23. 64 cm^3 आयतन वाले दो घनों को मिलाकर घनाभ बनाया जाता है। इस घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए।
24. एक 2 cm व्यास व 16 cm ऊँचाई वाले ठोस धातु के बेलन को पिघलाकर बारह एक ही आकार के गोले बनाए गए। प्रत्येक गोले की त्रिज्या बताइए।
25. बाल्टी के दो सिरों का व्यास 44 cm और 24 cm है। बाल्टी की ऊँचाई 35 cm है। बाल्टी का आयतन बताइए।

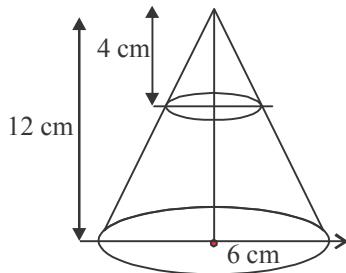
लघु उत्तरीय प्रश्न 2

26. उस छड़ की अधिकतम लंबाई बताइए जिसे $10 \text{ m} \times 10 \text{ m} \times 5 \text{ m}$ के कमरे में रखा जा सकें?
27. एक घन जिसका आयतन 1000 cm^3 है, का पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए।
28. दो अर्ध—गोलों के आयतन का अनुपात $8 : 27$ है। इनकी त्रिज्याओं का अनुपात बताइए।
29. एक ठोस शंकु जिसकी ऊँचाई 28 cm है और त्रिज्या 21 cm है, का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल व कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए।
30. शंकु के छिन्नक के रूप की बाल्टी $28,490$ लीटर पानी से पूरी तरह भरी है। इसके ऊपर और नीचे की त्रिज्याएँ 28 cm व 21 cm क्रमशः हैं। बाल्टी की ऊँचाई बताइए।
31. तीन एक ही धातु के घनों की भुजाओं का अनुपात $3 : 4 : 5$ है। इन तीनों को पिघलाकर बड़ा घन बनाया गया जिसका विकर्ण $12\sqrt{3}$ है। तीनों घनों की भुजाएँ बताइए।

32. 10.5 cm त्रिज्या वाले बेलनाकार टैंक की गहराई का पता लगाएं, अगर इसका आयतन $15\text{ cm} \times 11\text{ cm} \times 10.5\text{ cm}$ के घनाभ के आयतन के बराबर हो।
33. 8 cm त्रिज्या और 12 cm ऊँचाई के एक शंकु को उसके आधार के समानंतर धुरी के मध्यबिंदु से दो भागों में बांटा गया है। दोनों भागों के आयतनों का अनुपात बताइए।
34. एक पैट्रोल टैंक मध्य से 28 cm व्यास व 24 cm लम्बाई का बेलनाकार रूप में है। इसके दोनों छोर 28 cm व्यास व 9 cm लम्बाई के शंकुओं से जुड़े हैं। इस टैंक का आयतन बताइए।

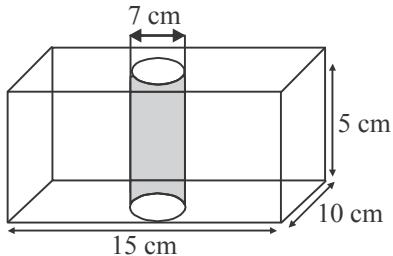
दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

35. दी गई आकृति 12 सेमी ऊँचाई के एक ठोस शंकु की है। जिसके आधार की त्रिज्या 6 सेमी है, इसके उपरी भाग से आधार के समानंतर तल द्वारा 4 सेमी ऊँचाई वाला शंकु काट दिया गया। शेष बचे ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ और $\sqrt{5} = 2.236$ लीजिए)



36. एक ठोस लकड़ी का खिलौना, अर्ध गोले पर अध्यारोपित समान त्रिज्या के शंकु के आकार का है। अर्ध गोले की त्रिज्या 3.5 सेमी है तथा इस खिलौने को बनाने में $166\frac{5}{6}\text{ घन सेमी}$ लकड़ी लगी है। खिलौने की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। खिलौने के अर्ध गोलाकार पृष्ठीय तल को रु 10 प्रति वर्ग सेमी की दर से रंग करवाने का व्यास भी ज्ञात कीजिए
- $(\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

37. दी गई आकृति, धातु के एक ठोस घनाभाकार ब्लाक की है। इसकी भुजाएँ $15\text{cm} \times 10\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ हैं। इसमें से 7 cm व्यास वाला एक बेलनाकार छेद काट कर निकाल दिया गया है। शेष बचे ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)



38. 2.52 किमी^2 प्रति घंटे की गति से पानी एक बेलनाकार पाइप से एक बेलनाकार टैंक में आ रहा है। यदि टैंक के आधार की त्रिज्या 40 cm है। तथा आधे घंटे में इसमें पानी का तल 3.15 m बढ़ जाता है, तो पाइप का आंतरिक व्यास ज्ञात कीजिए।
39. एक ठोस खिलौना बेलनाकार है जिसका एक सिरा अर्धगोलीय तथा दूसरे सिरे पर शंकु है। इन सभी का व्यास 4.2 cm है तथा बेलनाकार और शंकवाकार भाग की ऊँचाई क्रमशः 12 cm और 7 cm है। खिलौन का आयतन ज्ञात कीजिए।
40. एक टैन्ट 3 m की ऊँचाई तक बेलनाकार और उसके ऊपर शंकु के आकार का है। टैन्ट की कुल ऊँचाई 13.5 m तथा आधार की त्रिज्या 14 m है। टैन्ट को बनाने में लगे कपड़े का व्यय $80\text{ रु}0$ प्रति वर्ग मी 2 की दर से ज्ञात कीजिए।
41. $22\text{ m} \times 20\text{ m}$ की छत से वर्षा का पानी एक बेलनाकार बर्तन जिसके आधार का व्यास 2 m और ऊँचाई 3.5 m है, में डाला गया। यदि पानी से बर्तन पूरा भर जाए, तो बताइए कितने सेमी वर्षा हुई?
42. 12 cm व्यास तथा 15 cm ऊँचाई वाले एक लंबवृतीय बेलन के आकार का बर्तन आइसक्रीम को 12 cm ऊँचाई तथा 6 cm व्यास वाले शंकुओं, जिनका ऊपरी सिरा अर्धगोलाकार है, भरा जाना है। ऐसे शंकुओं की संख्या ज्ञात कीजिए जो इस आइसक्रीम से भरे जा सकते हैं।
43. 14 cm लम्बे एक लंब खोखले बेलन के बाहरी तथा अंदर के व्रक पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अंतर $88\text{ वर्ग सेमी}0$ है। यदि बेलन को बनाने में लगी धातु का आयतन $176\text{ घन सेमी}0$ हो तो बेलन के बाह्य तथा आन्तरिक व्यास ज्ञात कीजिए।

44. एक खिलौना ऐसे लंब वृतीय बेलन के आकार का है जिसके एक ओर अर्धवृताकार तथा दूसरी ओर एक शंक्वाकार भाग है। बेलनाकार भाग की त्रिज्या तथा ऊँचाई क्रमशः 5 cm और 13 cm है। अर्धगोलाकार और शंक्वाकार भाग की त्रिज्याएं बेलनाकार भाग की त्रिज्या के समान हैं। यदि खिलौने की कुल ऊँचाई 30 cm हो, तो इसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
45. एक खोखले शंकु को उसको आधार के समांतर एक तल से काटा जाता है और उसका ऊपरी भाग हटा दिया जाता है। यदि शेष भाग का व्रक पृष्ठ संपूर्ण शंकु के व्रक पृष्ठ का $\frac{8}{9}$ हो, तो तल के द्वारा काटे गए शंकु की ऊँचाई के दो भागों में अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

- | | |
|---|-----------------------------|
| 1. बेलन, छिन्नक | 2. बेलन, गोला |
| 3. बेलन, शंकु | 4. छिन्नक |
| 5. अर्ध-गोला, छिन्नक | 6. शंकु, सिरों वाला बेलन |
| 7. अर्धगोला, शंकु | 8. अपरिवर्तित |
| 9. वृत्त | 10. 462 cm^2 |
| 11. 16:25 | 12. $2r \text{ cm}$ |
| 13. 3:1 | 14. $2r$ इकाई |
| 15. $3\pi r^2$ | 16. 3 इकाई |
| 17. 3:1:2 | 18. $4\pi r^2$ |
| 19. 11 cm | 20. आयतन |
| 21. 240 | 22. 9 cm |
| 23. 160 cm^2 | 24. 1 cm |
| 25. 32706.6 cm^3 लगभग | 26. 15 m |
| 27. 600 cm^2 | 28. 2:3 |
| 29. ब्रक पृष्ठीय क्षेत्रफल 2310 cm^2
कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 3696 cm^2 | |
| 30. 15 cm | 31. 6 सेमी, 8 सेमी, 10 सेमी |
| 32. 5 सेमी | 33. $7 : 1, 1 : 7$ |
| 34. 18480 cm^3 | 35. 350.592 cm^2 |
| 36. $h = 6 \text{ सेमी}$, ₹ 770 | 37. 583 cm^2 |
| 38. 4 सेमी | 39. 218.064 cm^3 |
| 40. 82720 रुपये | 41. 2.5 cm |
| 42. 10 | 43. 5cm, 3cm |
| 44. 770 cm^2 | 45. 1 : 2 |

अभ्यास प्रश्न—प्रत्र

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

समय : 50 मिनट

अंक : 20

खण्ड—अ

- ठोस अर्ध—गोले के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र लिखिए। 1
- “कीप” किन दो ज्यामितीय आकारों का संयोजन है। 1

खण्ड—ब

- उस बेलनाकार टैंक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी ऊँचाई 2 मीटर व त्रिज्या 3.5 मीटर है। 2
- बाल्टी के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र लिखिए (संकेत : बाल्टी छिन्नक के रूप में है) 2

खण्ड—स

- उस सबसे बड़े शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए जिसे 4.2 cm भुजा वाले घन से काटा जा सकता है। 3
- छिन्नक का आयतन ज्ञात कीजिए यदि इसकी ऊँचाई 4 मीटर हो व दोनों सिरों की त्रिज्याएं 7 मीटर व 4 मीटर हैं। 3

खण्ड—द

- सिद्ध कीजिए कि समान आधार त्रिज्याएं व समान ऊँचाई वाले एक बेलन, एक शंकु और एक अर्ध—गोले का आयतन $3 : 1 : 2$ होता है। 4
- 40 cm व 30 cm भुजा वाले दो घनों (ठोस) को पिघलाकर 5824 एक जैसे घन (ठोस) बनाए गए हैं। नए बने घनों की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 4

□ □ □

14

अध्याय

सांख्यिकी

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. वर्गीकृत आंकड़ों का माध्य निम्नलिखित विधियों से ज्ञात किया जा सकता है।

$$(i) \text{ प्रत्यक्ष विधि, } \bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$(ii) \text{ कल्पित माध्य विधि, } \bar{X} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \text{ जहाँ } d_i = x_i - a$$

$$(iii) \text{ पद विचलन विधि, } \bar{X} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h \text{ जहाँ } u_i = \frac{x_i - a}{h}$$

2. वर्गीकृत आंकड़ों का बहुलक निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है:

$$\text{बहुलक} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h$$

l = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

f_1 = बहुलक वर्ग की बारंबारता

f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की बारंबारता

f_2 = बहुलक वर्ग ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारंबारता,

h = बहुलक वर्ग की माप

3. वर्गीकृत आंकड़ों की माध्यिका निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

$$\text{माध्यिक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

l = माध्यिक वर्ग की निम्न सीमा

n = प्रेषणों की संख्या

cf = माध्यिक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संचयी बारंबारता

f = माध्यिक वर्ग की बारंबारता

h = माध्यिक वर्ग का माप

4. 3 माध्यिक = बहुलक + 2 माध्य।

“अति लघु उत्तरीय प्रश्न”

1. पहली 12 अभाज्य संख्याओं का माध्य क्या होगा?
2. 20 संख्याओं का माध्य 18 है। यदि प्रत्येक संख्या में 2 जोड़ दिया जाए, तो नया माध्य क्या होगा?
3. पाँच प्रेक्षणों 3, 5, 7, x और 11 का माध्य 7 हो, तो x का मान बताइए।
4. पहली 5 प्राकृत संख्याओं का माध्यक क्या होगा?
5. यदि निम्न आंकड़ों का माध्यक 27.5 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।
24, 25, 26, $x + 2$, $x + 3$, 30, 33, 37
6. निम्न, आंकड़ों का बहुलक क्या है?
5, 7, 8, 5, 7, 6, 9, 5, 10, 6.
7. माध्य, माध्यक और बहुलक में सम्बन्ध लिखिए।
8. ‘से कम प्रकार’ तथा ‘से अधिक प्रकार’ के तोरण के प्रतिच्छेद बिन्दु का भुज केन्द्रीय प्रवृत्ति की कौन सी माप को दर्शाता है?
9. केन्द्रीय प्रवृत्ति की कौन सी माप के आलेख द्वारा प्राप्त नहीं किया जा सकता?
10. एक आंकड़े का माध्य तथा बहुलक क्रमशः 24 और 12 है, इसका माध्यक निकालिए।
11. वर्ग 19.5 – 29.5 का वर्ग चिन्ह ज्ञात कीजिए।
12. 5 संख्याओं का माध्य 18 है। यदि एक संख्या हटा दी जाए, तो उनका माध्य 16 है, हटाई गई संख्या ज्ञात कीजिए।

लघु उत्तरीय प्रश्न 1

13. 11 प्रेक्षणों का माध्य 50 है। यदि पहले 6 प्रेक्षणों का माध्य 49 तथा अंतिम 6 प्रेक्षणों का माध्य 52 हो, तो छठा प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।
14. निम्न बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए।

x	12	16	20	24	28	32
f	5	7	8	5	3	2

15. निम्न आंकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए।

x	10	12	14	16	18	20
f	3	5	6	4	4	3

16. निम्न बारंबारता बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
बारंबारता	2	7	18	10	8	3

17. निम्न आंकड़ों के लिए 'से कम प्रकार' का तोरण खीचिए।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
20 से कम	0
30 से कम	4
40 से कम	16
50 से कम	30
60 से कम	46
70 से कम	66
80 से कम	82
90 से कम	92
100 से कम	100

18. निम्न आकड़ों की 'से कम संचयी बारंबारता' तालिका बनाइए।

अंक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
विद्यार्थियों की संख्या	7	9	6	8	10

लघु उत्तरीय प्रश्न 2

19. निम्न आकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए।

C. I	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
f	8	12	10	11	9

20. यदि निम्न आकड़ों का माध्य 54 हो तो P का मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100
बारंबारता	7	P	10	9	13

21. निम्न बारंबारता बंटन का माध्यक ज्ञात कीजिए।

C.I.	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
f	5	3	10	6	4	2

22. निम्न बारंबारता का माध्यक 24 वर्ष है। x का मान ज्ञात कीजिए।

आयु (वर्षों में)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
व्यक्तियों की संख्या	2	25	x	18	7

23. निम्न आंकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

अंक	10 से कम	20 से कम	30 से कम	40 से कम	50 से कम	60 से कम
विद्यार्थियों की संख्या	0	12	20	28	33	40

24. निम्न आंकड़ों का 'से अधिक प्रकार' का तोरण खीचिए।

वजन (कि.ग्रा)	30–35	35–40	40–45	45–50	50–55	55–60
व्यक्तियों की संख्या	2	4	10	15	6	3

25. निम्न आंकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

ऊचाई (सेमी.में)	30से अधिक	40से अधिक	50से अधिक	60से अधिक	70से अधिक	80से अधिक
पेड़ों की संख्या	34	30	27	19	8	2

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

26. निम्न आंकड़ों का माध्य 53 है, तो f_1 और f_2 का मान ज्ञात कीजिए।

C.I	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	Total
f	15	f_1	21	f_2	17	100

27. निम्न बारंबारता बट्टन का माध्य 57.6 तथा बारंबारताओं का योग 50, है, तो f_1 तथा f_2 का मान ज्ञात कीजिए।

वर्गन्तराल	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120
बारंबारता	7	f_1	12	f_2	8	5

28. निम्न आंकड़ों का माध्यक 28.5, हो, तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।

वर्गन्तराल	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	योग
बारंबारता	5	8	x	15	y	5	60

29. निम्न बंटन का माध्यक 35 है। a तथा b का मान ज्ञात कीजिए।

C.I	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	Total
f	10	20	a	40	b	25	15	170

30. निम्न बांरबारता बंटन का माध्य, माध्यक तथा बहुलक ज्ञात कीजिए।

C.I	45–55	55–65	65–75	75–85	85–95	95–105	105–115
f	7	12	17	30	32	6	10

31. निम्न बांरबारता बंटन का माध्य, माध्यक तथा बहुलक ज्ञात कीजिए।

C.I	1–15	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40	41–45	46–50
f	2	3	6	7	14	12	4	2

32. एक शहर में 60 दिनों में दर्ज की गई वर्षा निम्न तालिका में दी गई है।

वर्षा (सेमी. में)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
दिनों की संख्या	16	10	8	15	5	6

से अधिक प्रकार के तोरण द्वारा माध्यक ज्ञात कीजिए। जल-संरक्षण क्यों आवश्यक है?

33. पद विचलन विधि द्वारा निम्न आंकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए।

दैनिक व्यय (रुपये में)	100–150	150–200	200–250	250–300	300–350
घरों की संख्या	4	5	12	2	2

34. निम्न आंकड़े एक कक्षा के 100 विद्यार्थियों के प्राप्तकों को दर्शाते हैं।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0–5	4
5–10	6
10–15	10
15–20	10
20–25	25
25–30	22
30–35	18
35–40	5

इन आंकड़ों द्वारा 'से कम प्रकार' तथा 'से अधिक प्रकार' के तोरण खीचिए। इस आलेख की सहायता से इसका माध्यक ज्ञात कीजिए।

35. एक औद्योगिक क्षेत्र की 30 फैक्ट्रियों द्वारा अर्जित वार्षिक लाभ निम्न है। इन आंकड़ों के लिए दोनों प्रकार के तोरण खीचकर माध्यक ज्ञात कीजिए।

लाभ (लाख रु. में)	फैकिट्रियों की संख्या
5 के बराबर या अधिक	30
10 के बराबर या अधिक	28
15 के बराबर या अधिक	16
20 के बराबर या अधिक	14
25 के बराबर या अधिक	10
30 के बराबर या अधिक	7
35 के बराबर या अधिक	3
40 के बराबर या अधिक	0

उत्तरमाला

- | | | | |
|-----|----------------------------|-----|-------------|
| 1. | 16.4 लगभग | 2. | 20 |
| 3. | 9 | 4. | 3 |
| 5. | $x = 25$ | 6. | 5 |
| 7. | बहुलक = 3 माध्यक – 2 माध्य | 8. | माध्यक |
| 9. | माध्य | 10. | माध्यक = 20 |
| 11. | 24.5 | 12. | 26 |
| 13. | 56 | 14. | 20 |
| 15. | 14.8 | 16. | 12.89 लगभग |

18. अंक विद्यार्थियों की संख्या

- | | |
|--|------------------------------------|
| 10 से कम | 7 |
| 20 से कम | 16 |
| 30 से कम | 22 |
| 40 से कम | 30 |
| 50 से कम | 40 |
| 19. 25.2 | 20. 11 |
| 21. 27 | 22. 10 |
| 23. 30 | 25. 63.75 सेमी. |
| 26. $f_1 = 18, f_2 = 29$ | 27. $f_1 = 8, f_2 = 10$ |
| 28. $x = 20, y = 7$ | 29. $a = 35, b = 25$ |
| 30. माध्य = 81.05, माध्यक = 82, बहुलक = 85.71 | |
| 31. माध्य = 32.4, माध्यक = 33, बहुलक = 34.39 लगभग | |
| 32. माध्य = 25 सेमी. | 33. माध्य = 211 रुपये |
| 34. माध्यक = 24 | 35. माध्यक = 17.5 लाख रुपये |

अभ्यास प्रश्न—प्रत्र

सांख्यिकी

समय : 50 मिनट

अंक : 20

खण्ड—अ

1. $a - b$ का वर्ग चिन्ह ज्ञात कीजिए। 1
2. 11 से 21 के मध्य सभी सम संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए। 1

खण्ड—ब

3. 50 प्रेक्षणों का माध्य 20 है। यदि प्रत्येक संख्या को 3 से गुण किया जाए, तो नया माध्य ज्ञात कीजिए। 2
4. 10 प्रेक्षणों का माध्य 15.3 है। यदि 6 और 9 के स्थान पर 8 और 14 रखा जाता है। तो नया माध्य क्या होगा? 2

खण्ड—स

5. बहुलक ज्ञात करिए: 3

अंक	20 से कम	40 से कम	60 से कम	80 से कम	100 से कम
छात्रों की संख्या	4	10	28	36	50

6. निम्न आंकड़ों का बहुलक 58 वर्ष है तो x का मान ज्ञात करिए। 3

आयु वर्षों में	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
रोगियों की सं.	5	13	x	20	18	19

खण्ड—द

7. निम्न बंटन का माध्य 57.6 और बारंबारताओं का योग 50 है तो f_1 तथा f_2 का मान ज्ञात करिए। 4

वर्गन्तराल	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120
बारंबारता	7	f_1	12	f_2	8	5

8. हॉस्पिटल में एक मास के दौरान दाखिल दिल के रोगियों को निम्न बंटन दर्शाता है।

आयु (वर्षों में)	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
रोगियों की सं.	2	8	15	12	10	5

‘कम प्रकार का’ तथा ‘अधिक प्रकार का’ तोरण खीचिए और माध्यक भी ज्ञात कीजिए।

4

□□□

15

अध्याय

प्रायिकता

महत्वपूर्ण बिन्दु:

- घटना E की सैन्दृतिक (या पर परपरागत) प्रायिकता जिसे हम $P(E)$ द्वारा दर्शाते हैं, को निम्न रूप में परिभावित किया जाता है:

$$P(E) = \frac{E \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की कुलसंख्या}}$$

जबकि हम कल्पना करते हैं कि प्रयोग के सभी परिणाम समप्रयाकि हैं।

- किसी प्रयोग की सभी प्रारम्भिक घटनाओं का योग 1 होता है। यह व्यापक रूप से भी सत्य है।
- निश्चित घटना की प्रायिकता एक होती है तथा असम्भावित घटना की प्रायिकता शून्य होती है।
- $P(E) + P(\bar{E}) = 1$
- घटना E की प्रायिकता एक ऐसी संख्या $P(E)$ है कि $0 \leq P(E) \leq 1$.
- ताश की गड्डी में 52 पत्ते होते हैं जो चार समूहों हुंकम , पान , ईट  तथा चिड़ी  में  बंटे होते हैं। प्रत्येक समूह में 13 पत्ते होते हैं। हुंकम और चिड़ी काले रंग व पान और ईट लाल रंग के पत्ते होते हैं।
- प्रत्येक समूह के 13 पत्तों में इक्का 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम, बेगम, बादशाह होते हैं।
- बादशाह, बेगम, गुलाम वाले पत्ते चित्र पत्ते (फेसकार्ड) कहलाते हैं। अतः ताश की गड्डी में कुल 12 चित्र पत्ते होंगे।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

- एक सिक्का दो बार उछालने पर एक चित्र आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
- ताश की एक गड्डी से एक पत्ता यादृच्छया निकाला गया है इसके गुलाम होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

3. ताश की गड्ढी से एक पत्ता यादृच्छ्या निकाला जाता है तो इसके ईंट का पत्ता होने की प्रायिकता बताइये।
4. एक पासे को एकबार फेंका गया इस पर सम अभाज्य संख्या आने की प्रायिकता क्या होगी?
5. एक पासे के दो बार फेंका जाता है। प्रायिकता क्या है कि दोनों बार एक ही संख्या आएगी ?
6. किसी लीप वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता बताइए।
7. 52 पत्तों की अच्छी प्रकार से फेंटी गई एक ताश की गड्ढी में से एक पत्ता यादृच्छ्या निकाला जाता है। काले रंग के तस्वीर वाले पत्ते के आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
8. यदि किसी घटना के सफल होने की प्रायिकता 27% हो, तो इस घटना के असफल होने की प्रायिकता क्या होगी?
9. उषा और आस्था मित्र हैं। दोनों का जन्मदिन 14 नवम्बर 2015 को हों, इसकी क्या प्रायिकता होगी?
10. “BHARTIYA” शब्द के अक्षरों में से एक शब्द चुना जाता है तो उस अक्षर के स्वर होने की प्रायिकता क्या होगी?
11. दो मित्रों का जन्म वर्ष 2000 में हुआ। दोनों का जन्म दिन एक ही दिन होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
12. एक पासा एक बार फेंका जाता है। अभाज्य संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
13. एक थैले में 6 लाल तथा 5 नीली गेंदें हैं। थैले में से एक गेंद यादृच्छ्या निकालने पर उसके नीली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
14. पासे के एक युग्म को एक बार उछाला जाता है। उन पर 11 का योग आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
15. एक बिना लीप वर्ष में 53 सोमवार होने की प्रायिकता क्या होगी?

लघु उत्तरीय प्रश्न

16. ताश के 52 पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छ्या निकाला जाता है प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह न तो इक्का होगा और न बादशाह।
17. एक बक्से में 250 बल्ब है जिनमें से 35 बल्ब खराब हैं। बक्से में से एक बल्ब यादृच्छ्या निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह बल्ब खराब नहीं है।
18. किसी घटना के विपरित 3:4. है। इस घटना के घटने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

19. यदि $(1, 4, 9, 16, 25, 29)$ में से 29 को हटा दिया जाए तो एक अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता बताइए।
20. ताश की एक गड्ढी में से एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है। इसके तस्वीर वाला कार्ड होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
21. 1000 लॉटरी के टिकटों में 5 टिकटों पर इनाम है। यदि एक व्यक्ति एक टिकट खरीदे तो उसके इनाम जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
22. ताश की गड्ढी में से 1 पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है। इसके काला पत्ता होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
23. एक पासा एक बार उछाला जाता है। पूर्ण वर्ग संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
24. दो पासों को एक साथ उछाला जाता है दोनों पासों पर अंकों योग 10 या 10 से अधिक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
25. $1, 2, 3, \dots, 33, 34, 35$ में 7 का गुणज आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

26. एक बक्से में कुछ कार्ड जिन पर क्रमशः संख्याएँ $3, 4, 5, \dots, 50$ अंकित हैं। बाक्स में से एक कार्ड यादृच्छया निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस पर ऐसी संख्या है जो
 - (i) 7 से विभाजित होती है
 - (ii) पूर्ण वर्ग हैं
27. एक थैले में 5 सफेद गेंदे, 7 लाल गेंदे, 4 काली गेंदे तथा 2 नीली गेंदे हैं। थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकालने पर प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गेंद

(i) सफेद या नीली है।	(ii) लाल या काली है।
(iii) सफेद नहीं है।	(iv) न सफेद तथा न काली है।
28. 52 पत्तों वाली ताश की गड्ढी में से ईंट के बादशाह, बेगम तथा गुलाम निकाल दिये जाते हैं। शेष पत्तों में से एक पत्ता निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकला पत्ता
 - (i) ईंट का होगा।
 - (ii) गुलाम होगा।
29. किसी खेल को जीतने की प्रायिकता $\frac{x}{12}$ है। यदि इसे हारने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए।
30. एक लाटरी में 10 इनाम और 25 खाली है। इनाम जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। इस घटना के लिए $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ की जाँच कीजिए।

31. 400 अंडों में से एक खराब अंडा निकालने की प्रायिकता 0.035 है। खराब अंडों की संख्या ज्ञात कीजिए। एक ठीक अंडा निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
32. किसी मेले में एक खेल की स्टॉल पर एक डिब्बे में कुछ परचियाँ रखी हैं जिन पर 3,3,5,7,7,7,9,9,9,11 लिखा है। एक व्यक्ति तब जीतता है यदि पर्ची पर संख्याओं का माध्य लिखा हो। उसके न जीतने की प्रायिकता क्या होगी?
33. एक बाक्स में 90 डिस्क हैं जिन पर 1 से 90 संख्या अंकित है इस बाक्स में से एक डिक्स यादृच्छ्या निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस पर जो संख्या अंकित होगी वह
- दो अंकों की संख्या होगी।
 - एक पूर्ण वर्ग संख्या होगी।
 - 5 से विभाजित होगी।
34. ताश की अच्छी तरह से फेंटी गई गड्ढी में से एक पत्ता यादृच्छ्या निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह पत्ता।
- हुक्म का है या इक्का है।
 - एक लाल बादशाह है।
 - न बादशाह तथा न बेगम।
 - या तो एक बादशाह या एक बेगम
35. ताश की अच्छी तरह फेंटी गई गड्ढी से एक पत्ता यादृच्छ्या निकाला जाता है उसके
- चित्र पत्ता।
 - लालरंग का चित्रपत्ता।
 - काले रंग का चित्रपत्ता होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
36. रमेश को 24000 रुपये त्यौहार के बोनस के रूप में मिले उसने 5000 रुपये मंदिर को, 12000 रुपये अपनी पत्नी को, 2000 रुपये अपने नौकर को और शेष राशि अपनी बेटी को दे दी।
- पत्नी को प्राप्त राशि की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
 - नौकर को प्राप्त राशि की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
 - बेटी को प्राप्त राशि की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
37. एक हास्टल में 240 विद्यार्थी रहते हैं जिसमें 50% प्रातःकाल योग क्लास जाते हैं, 25% जिम क्लब तथा 15% मार्निंग वाक को जाते हैं। शेष विद्यार्थी लाफिंग क्लब से जुड़े हैं। लाफिंग क्लब से जुड़े विद्यार्थियों की प्रायिकता बताइए।

उत्तरमाला

1. $\frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{13}$

3. $\frac{1}{4}$

4. $\frac{1}{6}$

5. $\frac{1}{6}$

6. $\frac{2}{7}$

7. $\frac{3}{26}$

8. $\frac{73}{100}$ या 73%

9. $\frac{1}{365}$

10. $\frac{3}{8}$

11. $\frac{1}{366}$

12. $\frac{1}{2}$

13. $\frac{5}{11}$

14. $\frac{1}{18}$

15. $\frac{1}{7}$

16. $\frac{11}{13}$

17. $\frac{43}{50}$

18. $\frac{4}{7}$

19. 0

20. $\frac{3}{13}$

21. 0.005

22. $\frac{1}{2}$

23. $\frac{1}{3}$

24. $\frac{1}{6}$

25. $\frac{1}{7}$

26. $\frac{7}{48}, \frac{1}{8}$

$$27. \frac{7}{18}, \frac{11}{18}, \frac{13}{18}, \frac{1}{2}$$

$$28. \quad \frac{10}{49}, \frac{3}{49}$$

29. 8

30. $\frac{2}{7}$

31. 14, 0.965

$$32. \quad \frac{7}{10}$$

$$33. \quad \frac{9}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}$$

34. (i) $\frac{4}{13}$

(ii) $\frac{1}{26}$

(iii) $\frac{11}{13}$

(iv) $\frac{2}{13}$

35. (i) $\frac{3}{13}$

(ii) $\frac{3}{26}$

(iii) $\frac{3}{26}$

36. $\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{5}{24}$

$$37. \frac{1}{10}$$

अभ्यास प्रश्न—प्रत्र

प्रायिकता

समय : 50 मिनट

अंक : 20

खण्ड—अ

- एक पासा एक बार फेंका जाता है तो विषम संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 1
- एक थैले में 4 लाल तथा 6 काली गेंदे हैं। थैले में से 1 गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। काली गेंद आने की प्रायिकता बताइए। 1

खण्ड—ब

- एक अधिवर्ष में 53 शुक्रवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2
- ताश को अच्छी तरह फेंटी गई गड्ढी में से 1 पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है उसके काले रंग का चित्र पत्ता या लाल रंग का चित्र पत्ता होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

खण्ड—स

- एक बक्से में 5 लाल, 4 हरे तथा 7 सफेद कंचे हैं। बक्से में से 1 कंचा यादृच्छया निकालने पर उसके
(i) सफेद ना होने की।
(ii) न लाल और न ही सफेद होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 3
- एक पासा एक बार फेंका जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि प्राप्त होने वाली संख्या
(i) एक सम अभाज्य संख्या है।
(ii) एक पूर्ण वर्ग संख्या है। 3

खण्ड—द

- एक थैले में कार्ड है, जिस पर 1, 3, 5, ..., 35 संख्याएं अंकित हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि एक निकाले गये कार्ड पर
(i) 15 से कम वाली अभाज्य संख्या अंकित है।
(ii) 3 तथा 15 दोनों से विभाजित होने वाली संख्या अंकित है। 4
- 52 ताश के पत्तों की गड्ढी से चिड़ी का बादशाह, बेगम तथा गुलाम हटाए गए तथा शेष पत्तों में से एक पत्ता खींचा गया प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि खींचा गया पत्ता।
(i) पान का पत्ता होगा।
(ii) बेगम होगा।
(iii) चिड़ी का पत्ता होगा। 4

□ □ □

मॉडल टेस्ट पेपर-1

गणित

(उत्तर सहित)

कक्षा-दसवीं

[निर्धारित समय : 3 घण्टे]

[अधिकतम अंक : 80]

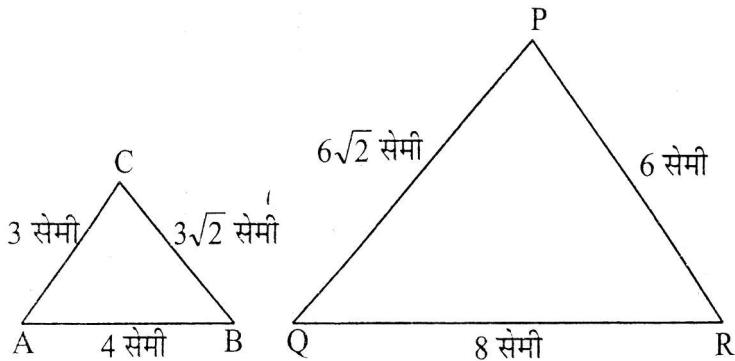
सामान्य निर्देश :

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (ii) इस प्रश्नपत्र में 30 प्रश्न हैं जिन्हें चार खंडों अ, ब, स तथा द में विभाजित किया गया है।
- (iii) खंड 'अ' में 6 प्रश्न हैं प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है। खंड 'ब' में 6 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है। खंड 'स' में 10 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है तथा 'द' में 8 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।
- (iv) इस प्रश्नपत्र में कोई समग्र विकल्प नहीं है।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

खंड 'अ'

प्रश्न संख्या 1 से 6 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. $\sec 50^\circ + \cot 78^\circ$ को 0° और 45° के कोणों के बीच t -अनुपातों के पदों के रूप में व्यक्त कीजिए।
2. ΔABC और ΔPQR की दी गई आकृतियों को देखिए। ज्ञात कीजिए कि क्या वे समरूप हैं या नहीं।



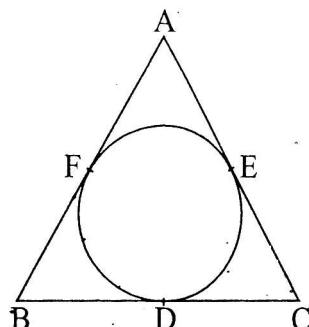
3. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग और गुणफल क्रमशः -7 और -18 है।
4. k एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों $kx^2 + 2x + 1 = 0$ के वास्तविक और भिन्न मूल हैं।

5. किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पद $3y - 1$, $3y + 5$ और $5y + 1$ हैं। y का मान ज्ञात कीजिए।
6. एक ठोस अर्धगोले का आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से समान है। अर्धगोले का व्यास क्या है?

खंड 'ख'

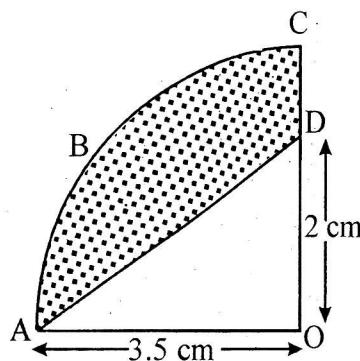
प्रश्न संख्या 7 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

7. सिद्ध कीजिए कि किसी जीवा के अंत बिंदुओं पर स्थित स्पर्श रेखाएँ जीवा के साथ समान कोण बनाती हैं।
8. अच्छी तरह मिश्रित 52 पत्तों की एक गड्ढी से एक पत्ता यादृच्छ्या निकाला गया है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाला गया पत्ता न तो लाल पत्ता है न एक बेगम है।
9. 3825 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।
10. $\triangle ABC$ के अंदर बना वृत्त भुजाओं BC , CA और AB को क्रमशः D , E और F पर स्पर्श करता है। यदि $AB = AC$, है तो सिद्ध कीजिए कि $BD = CD$ है।



11. आकृति में, केंद्र O और 3.5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त का चतुर्थांश $OABC$ है। यदि $OD = 2$ सेमी है, तो छायांकित हिस्से का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

$$\left[\pi = \frac{22}{7} \text{ का प्रयोग कीजिए} \right]$$



12. एक पौधे की 42 पत्तियों की लंबाई को नजदीकी मिलीमीटर में सही मापा गया है और आँकड़ा नीचे दिया गया है:

लंबाई (मिमी में)	118 – 126	126 – 134	134 – 142	142 – 150	150 – 158	158 – 166
पत्तियों की संख्या	4	5	10	14	4	5

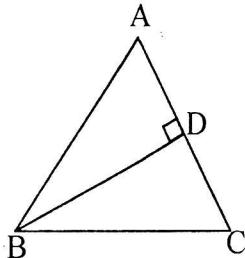
पत्तियों की बहुलक लंबाई ज्ञात कीजिए।

खंड 'स'

प्रश्न संख्या 13 से 22 तक प्रत्येक ज्ञात कीजिए।

13. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में $AB = AC$, है तथा B से भुज AC पर लंब BD है। सिद्ध कीजिए:

$$BD^2 - CD^2 = 2CD \cdot AD.$$



14. 5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त पर स्पर्श रेखाओं का युग्म बनाइए जोकि परस्पर 60° पर झुकी हों।

15. सिद्ध कीजिए: $\frac{\sin A}{\sec A + \tan A - 1} + \frac{\cos A}{\operatorname{cosec} A + \cot A - 1} = 1$

16. एक स्कूल के कक्षा X के विद्यार्थियों का साप्ताहिक जेबखर्च निम्न सारणी में दिया गया है:

जेबखर्च (में)	0 – 40	40 – 80	80 – 120	120 – 160	160 – 200	200 – 240
विद्यार्थियों की संख्या	5	7	15	10	5	8

उपर्युक्त आँकड़े का माध्यक ज्ञात कीजिए।

17. x के लिए निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए:

$$9x^2 - 9(p+q)x + (2p^2 + 5pq + 2q^2) = 0$$

18. उस चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $A(1, 0), B(5, 3), C(2, 7)$ और $D(-2, 4)$ हैं।

19. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $X(4, -3)$, $Y(-6, -3)$ और $Z(0, -3)$ के रूप में हैं।
20. एक बेलनाकार टैंक, जिसकी धारिता 6160 घन मी है, की गहराई ज्ञात कीजिए, यदि इसकी त्रिज्या 14 मी है। इसके बक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (बाह्य.) को ₹ 3/मी² की दर से रंग करवाने की लागत को परिकलित कीजिए।
21. बहुपद $2x^4 - 11x^3 + 7x^2 + 13x - 7$ के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए यदि यह दिया गया है कि इसके दो शून्यक $(3 + \sqrt{2})$ और $(3 - \sqrt{2})$ हैं।
22. वह समांतर श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए जो चौथा पद 18 और पंद्रहवें पद से नौवें पद का अंतर 30 है।

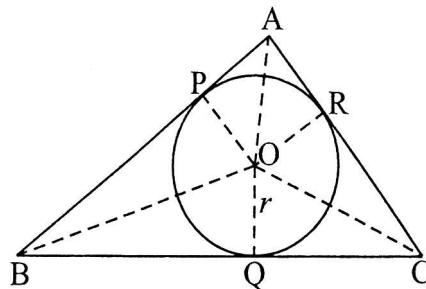
खंड 'द'

प्रश्न संख्या 23 से 30 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।

23. अनिल को वरुण की तुलना में किसी काम को खत्म करने में 6 दिन कम लगते हैं। यदि अनिल और वरुण दोनों को उस काम को करने में 4 दिन लगते हैं तब उस काम को वरुण को अलग से करने में कितना समय लगेगा?
24. x के लिए हल कीजिए:

$$2\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) - 3\left(\frac{x+3}{2x-1}\right) = 5; \text{ दिया है कि } x \neq -3, x \neq \frac{1}{2}$$

25. आकृति में, त्रिभुज ABC की भुजाएँ AC, BC और CA केंद्र O और r त्रिज्या वाले वृत्त को क्रमशः P, Q और R पर स्पर्श करती हैं।



सिद्ध कीजिए:

$$(i) AB + CQ = AC + BQ$$

$$(ii) \text{ क्षेत्रफल } (\Delta ABQ) = \frac{1}{2} (\Delta ABC \text{ का परिमाप}) \times r$$

26. समान ऊँचाई के दो खंभे 80 मीटर चौड़ी सड़क के दोनों ओर एक-दुसरे के सम्मुख खड़े हैं। इन दोनों खंभों के बीच सड़क के किसी बिंदु P से एक खंभे के शीर्ष का उन्नयन कोण 60° है तथा दूसरे खंभे के शीर्ष से बिंदु P का अवनमन कोण 30° है। खंभों की ऊँचाईयाँ तथा बिंदु P की खंभों से दुरियाँ ज्ञात कीजिए।
27. 2.52 किमी प्रति घंटे की गति से पानी एक बेलनाकार पाइप से एक बेलनाकार टैंक में आ रहा है। यदि टैंक के आधार की क्रिया 40 सेमी है तथा आधे घंटे में इसमें पानी का तल 3.15 मी बढ़ जाता है। तो पाइप का आंतरिक व्यास कीजिए।
28. यदि A, B, C त्रिभुज ΔABC , के आंतरिक कोण हैं, तो दर्शाइए कि

$$\operatorname{cosec}^2\left(\frac{B+C}{2}\right) - \tan^2 \frac{A}{2} = 1$$

29. एक डिब्बे में 150 आम हैं जिनमें से 90 अच्छे हैं, 45 थोड़े खराब और 15 सड़े हैं। क्या प्रायिकता है कि डिब्बे से एक सड़ा आम न प्राप्त हो? यदि 10 डिब्बे खरीदे जाते हैं, तो आप कितने सड़े आमों की उम्मीद करते हैं?
30. दर्शाइए कि एक सम पूर्णांक किसी धनात्मक पूर्णांक q के लिए $6q$ या $6q + 2$ or $6q + 4$, के रूप में होता है।

उत्तर

उत्तर ‘अ’

1. $\operatorname{cosec} 40^\circ + \tan 12^\circ$ 2. $\Delta ABC \sim \Delta RQP$
 3. $k[(x+9)(x-2)]$, जहाँ k एक शून्येतर स्थिरांक है।
 4. k के सभी वास्तविक मान < 1 5. $y = 5$ 6. 9 इकाई

उत्तर ‘ब’

8. $\frac{6}{13}$ 9. $3825 = 3^2 \times 5^2 \times 17$
 11. 6.125 सेमी² 12. बहुलक = 144.29 मिमी

उत्तर ‘स’

16. माध्यक = 114.67 17. $\frac{2p+q}{3}$ और $\frac{p+2q}{3}$ 18. 25 वर्ग इकाई

19. ΔXYZ का क्षेत्रफल = 0 20. गहराई = 10 मी, रंग करने की लागत = ₹ 2,640

21. सभी शून्यक $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}, \frac{1}{2}$ और -1 हैं। 22. 3, 8, 11, 16,...

उत्तर 'स'

23. 12 दिन

24. $x = -10$ और $x = -\frac{1}{5}$

26. प्रत्येक खंभे की ऊँचाई 34.64 मी और बिंदु P से खंभे AB की दूरी 20 P की CD से दूरी = 80 मी – 20 मी = 60 मी है।

27. बेलनाकार पाइप का आंतरिक व्यास = 4 सेमी

29. 0.9; 150 सड़े आम;

मॉडल टेस्ट पेपर 2

गणित

(उत्तर सहित)

कक्षा-दसवीं

[निर्धारित समय: 3 घंटे]

[अधिकतम अंक: 80]

सामान्य निर्देश:

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (ii) इस प्रश्नपत्र में 30 प्रश्न हैं जिन्हें चार खंडों अ, ब, स तथा द में विभाजित किया गया है।
- (iii) खंड 'अ' में 6 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है। खंड 'ब' में 6 प्रश्न हैं प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है। खंड 'स' में 10 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है तथा खंड 'द' में 8 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।
- (iv) इस प्रश्नपत्र में कोई समग्र विकल्प नहीं है।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

खंड 'अ'

प्रश्न संख्या 1 से 6 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. m और n का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निम्नलिखित रेखिक समीकरणों के युगम के अनंत बहुत से हल हैं:

$$3x + 4y = 12$$

$$(m+n)x + 2(m-n)y = (5m-1)$$

2. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए:

x	10	20	30	40	50
f	2	3	2	3	1

3. यदि $x = \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$, है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

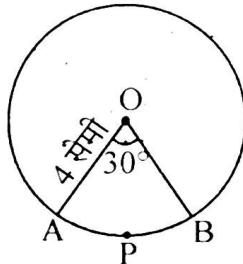
4. यदि $\sin \theta = \frac{a}{b}$, है, तो $\cos \theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

- यदि दो गोलों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात $9 : 16$, है, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।
- 1 से 100 तक सभी प्राकृतिक संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

खंड 'ब'

प्रश्न संख्या 7 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

- सिद्ध कीजिए कि दो संकेंद्रीय वृत्तों में, बड़े वृत्त की जीवा, जोकि छोटे वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिंदु पर समद्विभाजित होती है।
- 4 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के 30° कोण वाले वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। संगत दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।



- एक समांतर श्रेढ़ी का 10 वाँ पद 47 है और प्रथम पद 2 है। इसके 15 पदों का योग ज्ञात कीजिए।
- p का वह मान ज्ञात कीजिए जिससे द्विघात समीकरण $px(x - 3) + 9 = 0$ के दो समान मूल हों।
- तीन सिक्कों को एक साथ उछाला गया, ठीक एक चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
- व्याख्या कीजिए कि क्यों $(5 \times 7 \times 13 + 7)$ एक भाज्य संख्या है।

खंड 'स'

प्रश्न संख्या 13 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है।

- समबाहु त्रिभुज ABC का शीर्षलंब AD है। AD को आधार लेकर समाबहु त्रिभुज ADE की रचना की गई है। सिद्ध कीजिए कि क्षेत्रफल (ΔMDE) : क्षेत्रफल (ΔABC) = $3 : 4$ है।
- यदि द्विघात समीकरण ABC , में बिंदु D भुजा BC पर इस प्रकार है कि $BD = \frac{1}{3} BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $9AD^2 = 7AB^2$ है।

15. सिद्ध कीजिए: $\frac{\tan A}{1 - \cot A} + \frac{\cot A}{1 - \tan A} = 1 + \sec A \cdot \cosec A.$

16. सिद्ध कीजिए: $\frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta}$

17. यदि द्विघात समीकरण $p(x) = 3x^2 - 4x + 1$, के दो शून्यक α और β हैं, तो एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यक $\frac{\alpha^2}{\beta}$ और $\frac{\beta^2}{\alpha}$ हों।

18. एक ΔABC की रचना कीजिए जिसमें $BC = 6.5$ सेमी, $AB = 4.5$ सेमी और $\angle ACB = 60^\circ$ हो। एक अन्य समरूप त्रिभुज बनाइए जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं की $\frac{4}{5}$ गुना हों।

19. ग्राफ द्वारा निम्नलिखित समीकरणों के युगम को हल कीजिए और इन रेखाओं और x -अक्ष द्वारा बने त्रिभुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए:

$$4x - 3y + 4 = 0, 4x + 3y - 20 = 0.$$

20. बिंदुओं $A(2, -3)$ और $B(-4, -6)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को तीन समान भागों में बाँटने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

21. उस चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $A(3, -1), B(9, -5), C(14, 0)$ और $D(9, 19)$ हैं।

22. एक अर्धगोलाकार कटोरा आंतरिक व्यास 30 सेमी है, में कोई तरह है। इस तरल को 5 सेमी व्यास और 6 सेमी ऊँचाई वाली बेलनाकार बोतलों में भरना है। कटोरे को खाली करने के लिए आवश्यक बोतलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

खंड 'द'

प्रश्न संख्या 23 से 30 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।

23. एक ट्रेन 1200 किमी की दूरी पर अचर चाल से चल रही है। जब ट्रेन के ड्राइवर को पता चलता है कि उसे देर हो ही है, तो वह 5 किमी प्रति घंटा की दर से गति बढ़ा देता है। अब यात्रा में 8 घंटे कम लगते हैं और ट्रेन समय पर पहुँचती है। ट्रेन की आंरभिक गति ज्ञात कीजिए।

24. 10 और 250 के बीच 4 के कितने गुणज हैं? उनका योग भी ज्ञात कीजिए।
25. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के किसी बिंदु से उस वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा स्पर्श बिंदु से त्रिज्या पर लंब होती है।
26. किसी सीधी खड़ी मीनार का धरती पर स्थित किसी बिंदु से उन्नयन कोण 60° है। पहले बिंदु से ऊर्ध्वाधर रूप से इसका उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
27. 52 पत्तों की गड्ढी से चिड़ी के बादशाह, बेगम और गुलाम हटा दिए गए हैं और शेष पत्तों को भली प्रकार फेंटा गया है। शेष पत्तों से यादृच्छता एक पत्ता निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाला गया पत्ता (i) एक पान का पत्ता (ii) एक बेगम (iii) एक चिड़ी का पत्ता हो। k
28. निम्नलिखित वितरण का माध्य 25.2 और कुल बारंबारता 50 है। लुप्त बारंबारताएँ x और y ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
बारंबारता	8	x	10	y	9

29. एक पाइप, जिसका व्यास 14 सेमी है, से पानी 15 किमी/घंटा की दर से घनाभाकार तालाब में बह रहा है। घनाभाकार तालाब की लंबाई 15 मी और चौड़ाई 44 मी है। कितने समय में तालाब का जल स्तर 21 सेमी उठ जाएगा?
30. दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक q के लिए कोई धनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$, के रूप में होता है।

उत्तर

खंड ‘अ’

1. $m = 5$ और $n = 1$ 2. 30 3. 45°

4. $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ 5. $3 : 4$ 6. 5050

खंड ‘ब’

8. वृत्तखंड का क्षेत्रफल = 4.186 सेमी 2 , दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल = 46.054 सेमी 2

9. 555

10. $p = 4$

11. $\frac{3}{8}$

12. दी गई संख्या का एक गुणनखंड 7 है। इसलिए यह एक भाज्य संख्या है।

खंड ‘स’

17. $f(x) = k \left(x^2 - \frac{28}{9}x + \frac{1}{3} \right)$, जहाँ k एक शून्येतर वास्तविक संख्या है।

19. $x = 2, y = 4$; x -अक्ष द्वारा बने Δ के शीर्ष क्रमशः $(5, 0), (2, 4)$ और $(-1, 0)$ हैं।

20. $(0, -4), (-2, -5)$

21. 182 वर्ग इकाई

22. बोतलों की संख्या = 60

खंड ‘द’

23. 25 किमी/घंटा;

24. $S_{60} = 7800$

26. 15 मी

27. (i) $\frac{13}{49}$ (ii) $\frac{3}{49}$ (iii) $\frac{10}{49}$

28. लुप्त बांग्नारताएँ $x = 12, y = 11$ हैं।

29. 2 घंटे

मॉडल टेस्ट पेपर-3

गणित

(उत्तर सहित)

कक्षा-दसवीं

[निर्धारि समय : 3 घंटे]

[अधिकतम अंक: 80]

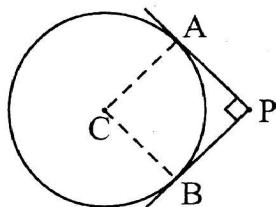
सामान्य निर्देश :

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (ii) The question paper consists of 30 questions divided into sections – A, B, C and D.
- (iii) खंड 'अ' में 6 प्रश्न हैं। और और प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है। खंड 'ब' में 6 प्रश्न हैं। और प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है। खंड 'स' में 10 प्रश्न हैं। और प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है तथा खंड 'द' में 8 प्रश्न हैं। और प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।
- (iv) इस प्रश्नपत्र में कोई समग्र विकल्प नहीं है।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

खंड 'अ'

प्रश्न संख्या 1 से 6 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. गणित की आधारभूत प्रमेय का प्रयोग करके 96 और 360 का ल.स. ज्ञात कीजिए।
2. एक रेखाखंड की लंबाई 5 सेमी है। यदि इसके एक सिरे के निर्देशांक $(2, 2)$ और दूसरे सिरे के निर्देशांक $(-1, x)$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।
3. आकृति में, केंद्र C और 4 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के किसी बाह्य बिंदु से PA और PB दो स्पर्श रेखाएँ खींची गई हैं। यदि $PA \perp PB$, तो प्रत्येक स्पर्श की लंबाई ज्ञात कीजिए।

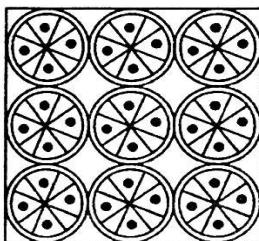


4. एक समांतर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पद $3y - 1$, $3y + 5$ और $5y + 1$ हैं। y का मान ज्ञात कीजिए।
5. एक पासे को एक बार उछाला गया। क्या प्रायिकता है कि यह 4 से बड़ी संख्या को दर्शाए़?
6. r त्रिज्या के एक ठोस गोले को पिघलाकर r ऊँचाई का एक ठोस शंकु बनाया गया है। शंकु के आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

खंड 'अ'

प्रश्न संख्या 7 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है।

7. मान निकालिए : $(\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ) + \frac{\cot 25^\circ}{\tan 65^\circ} + \cot 5^\circ \cot 10^\circ \cot 60^\circ \cot 80^\circ \cot 85^\circ$
8. एक वर्गाकार रुमाल पर नौ वृत्ताकार डिजाइन, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 7 सेमी है, बनाए गए हैं। रुमाल के बाकी हिस्से का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



9. बिंदु R रेखाखंड AB , को विभाजित करता है, जहाँ $A(-4, 0)$ और $B(0, 6)$ इस प्रकार हैं कि $AR = \frac{3}{4} AB$ है। R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
10. m का वह मान ज्ञात कीजिए जिससे द्विघात समीकरण $mx(5x - 6) + 9 = 0$ के दो समान मूल हों।
11. $\sqrt{2}$ और $\sqrt{3}$ के बीच परिमेय संख्या लिखिए।
12. एक मीनार भूमि पर ऊर्ध्वाधर खड़ी है। भूमि पर किसी बिंदु से, जोकि मीनार के पाद से 25 मी दूर है, मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण 45° पाया गया। मीनार की ऊँचाई (मी) में ज्ञात कीजिए।

खंड 'स'

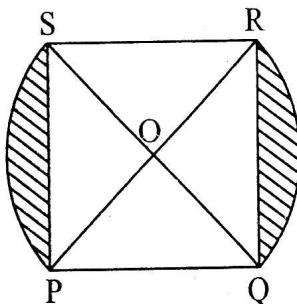
प्रश्न संख्या 13 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है।

13. सिद्ध कीजिए कि किसी वर्ग की एक भुजा पर बने समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल वर्ग के विकर्ण पर बने समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।
14. त्रिभुज PQR जिसमें P . समकोण है, QT और RS इसकी माध्यिकाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि $4(QT^2 + RS^2) = 5QR^2$ है।

15. निम्नलिखित बारंबारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए:

वर्ग	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30
बारंबारता	1	2	2	6	7	2

16. एक राजमार्ग पर स्थान A और B एक-दूसरे से 100 किमी दूर हैं। एक ही समय पर एक कार स्थान A से तथा दूसरी कार स्थान B से चलना शुरू करती है। यदि कारें एक ही दिशा में भिन्न-भिन्न चालों से चलती हैं तो वे 5 घंटे में मिलती हैं। यदि वे एक-दूसरे की ओर चलती हैं तो वे 1 घंटे में मिलती हैं। दोनों कारों की चाल क्या है?
17. कार्ड, जिन पर 2 से 151 तक की संख्याएँ अंकित हैं, एक डिब्बे में रखकर अच्छी प्रकार से मिलाए गए हैं। इस डिब्बे से एक कार्ड यादृच्छया निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाले गए कार्ड पर अंकित संख्या
- (i) 75 से छोटी अभाज्य संख्या है।
 - (ii) एक विषम संख्या है।
 - (iii) एक पूर्ण वर्ग संख्या है।
18. यदि बहुपद $p(x) = 2x^2 + 11x + 5$, के शून्यक α और β हैं, तो $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 2\alpha\beta$ का मान ज्ञात कीजिए।
19. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें रेखा $3x + y - 9 = 0$ बिंदुओं (1, 3) और (2, 7) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को विभाजित करती है।
20. समीकरण $\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}$ के मूल ज्ञात कीजिए।
21. आकृति में, $PQRS$ एक वर्गाकार लॉन है जिसकी भुजा $PQ = 42$ मीटर है। दो वृत्ताकार फूलों की क्यारियाँ भुजाओं PS तथा QR पर हैं जिसका केंद्र इस वर्ग के विकर्णों का प्रतिच्छेदन बिंदु O है। दोनों फूलों की क्यारियों (छायांकित भाग) का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



22. दर्शाइए कि $n, n+2, n+4$ में से केवल और केवल एक ही 3 से विभाजित होता है, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

खंड 'द'

प्रश्न संख्या 23 से 30 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।

23. एक एक्सप्रेस ट्रेन को मैसूर और बंगलौर (बीच में आने वाले स्टॉपों के समय को देते हुए) के बीच 132 किमी की यात्रा करने में पैसेन्जर ट्रेन की अधिक है, तो दोनों ट्रेनों की औसत गति ज्ञात कीजिए।
24. किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम छह पदों का योग 42 है। इसके 10वें पद से 30वें पद का अनुपात $1 : 3$ है। श्रेढ़ी का प्रथम और 13वाँ पद ज्ञात कीजिए।
25. सिद्ध कीजिए कि एक चतुर्भुज, जोकि एक वृत्त के परिगत बना है, की सम्मुख भुजाएँ वृत्त के केंद्र के साथ संपूरक कोण बनाती हैं।
26. एक बिल्डिंग के शीर्ष का टॉवर के पाद से उन्नयन कोण 30° है और टॉवर के शीर्ष का बिल्डिंग के पाद से उन्नयन कोण 60° है। यदि टॉवर 60 मी ऊँचा है, तो बिल्डिंग की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
27. अचानक बाढ़ आने पर, कुछ कल्याणकारी संस्थाओं ने मिल कर सरकार को उसी समय 100 टेंट लगाने के लिए कहा तथा इस पर आने वो खर्च का 50% देने की पेशकश की। यदि प्रत्येक टेंट का निचला भाग बेलनाकार है जिसका व्यास 4.2 मी तथा ऊँचाई 4 मी है तथा ऊपरी भाग उसी व्यास का शंकु है जिसकी ऊँचाई 2.8 मी है, और इस पर लगने वाले कैनवस की लागत प्रति वर्ग मी है। तो ज्ञात कीजिए कि इन संस्थाओं को कितनी राशि देनी होगी।

$$\left[\text{Use } \pi = \frac{22}{7} \right]$$

28. सिद्ध कीजिए: $\frac{\sin \theta}{1-\cos \theta} + \frac{\tan \theta}{1+\cos \theta} = \cos \theta \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta.$

29. निम्न बंटन एक फैक्टरी में 50 मजदूरों की दैनिक आय दर्शाता है :

दैनिक आय (में)	200 – 250	250 – 300	300 – 350	350 – 400	400 – 450	450 – 500
मजदूरों की संख्या	10	5	11	8	6	10

बंटन को 'से कम प्रकार' के संचयी बारंबारता वितरण में बदलिए और इसका तोरण बनाइए। दैनिक आय माध्यक भी ज्ञात कीजिए।

30. 5 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त बनाइए P , 8 सेमी दूर एक बिंदु P से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं का एक युग्म खींचिए। प्रत्येक स्पर्श रेखा की लंबाई मापिए।

उत्तर

ਖੰਡ ‘ਅ’

1. 1440 2. $x = 6$ या $x = -2$ 3. PA = PB = 4 cm
4. $y = 5$ 5. $\frac{1}{3}$ 6. $2r$

ਖੰਡ 'ਕ'

7. $\frac{6+\sqrt{3}}{3}$

8. शेष हिस्से का क्षेत्रफल = 378 सेमी²

9. R के निर्देशांक $\left(-1, \frac{9}{2}\right)$

10. $m = 5$

11. $\sqrt{2}$ और $\sqrt{3}$ के बीच परिमेय संख्या 1.5 स्थित है।

12. 25 m

ਖੰਡ 'ਸ'

- 15.** माध्य = 18

16. कारों की गति क्रमशः 60 किमी/घंटा और 40 किमी/घंटा है।

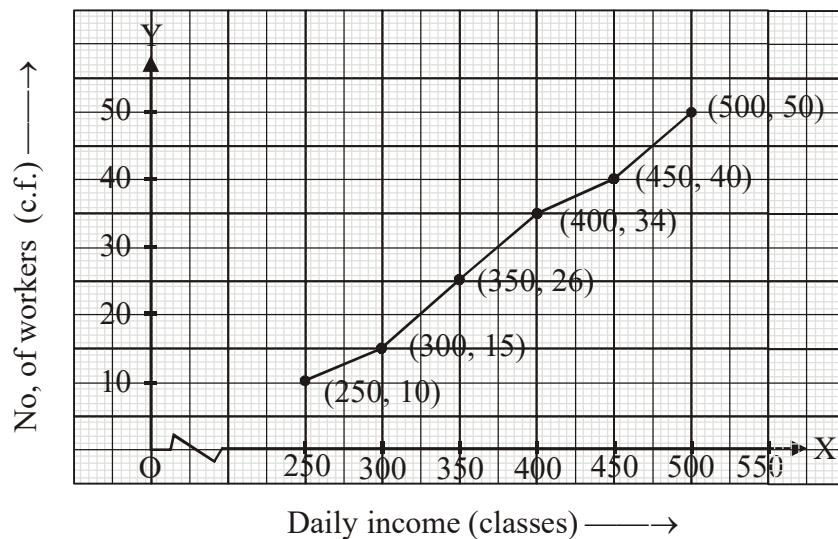
17. (i) $\frac{7}{50}$, (ii) $\frac{1}{2}$, (iii) $\frac{11}{150}$ **18.** $-\frac{36}{5}$ **19.** अनुपात $3 : 4$ आंतरिक रूप से

20. $x = 1, 2$, **21.** 504 मी²

ਖੁੰਡ 'ਦ'

23. पैसेन्टर ट्रेन की औसत गति 33 किमी/घंटा और एक्सप्रेस ट्रेन की औसत गति 44 किमी/घंटा है।

24. प्रथम पद = 2, $a_{13} = -26$
 26. बिल्डिंग की ऊँचाई 20 मीटर है।
 27. संस्थाओं को = ₹ 379500 देने पड़ेगे।
 29. माध्यक दैनिक आय = 345



दैनिक आय (वर्ग)	मजदूरों की संख्या (c.f.)
250 से कम	10
300 से कम	15
350 से कम	26
400 से कम	34
450 से कम	40
500 से कम	50

30. प्रत्येक स्पर्श रेखा की लंबाई = $\sqrt{39}$ सेमी

मॉडल टेस्ट पेपर-4

गणित

(उत्तर सहित)

कक्ष-दसवीं

[निर्धारित समय : 3 घंटे]

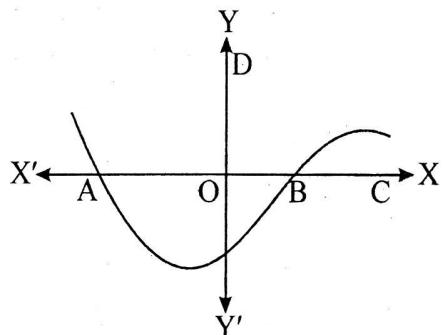
[अधिकतम अंक : 80]

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (ii) इस प्रश्नपत्र में 30 प्रश्न हैं जिनमें चार खंडों अ, ब, स, तथा द में विभाजित किया गया है।
- (iii) खंड 'अ' में 6 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है। खंड 'ब' में 6 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है। खंड 'स' में 10 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है तथा खंड 'द' में 8 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।
- (iv) इस प्रश्न पत्र में कोई समग्र विकल्प नहीं है।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

खंड 'अ'

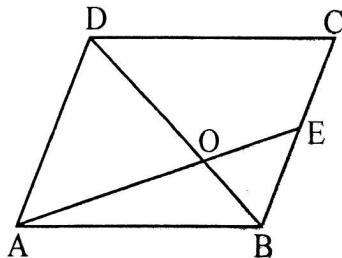
प्रश्न संख्या 1 से 6 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. $\frac{189}{125}$ का दशमलव प्रसार दशमलव के कितने स्थानों के बाद सांत होगा?
2. आकृति में, बहुपद $p(x)$ का ग्राफ दर्शाया गया है। $p(x)$ के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए।



3. यदि x प्रेक्षणों x_1, x_2, \dots, x_n , का गणितीय माध्य \bar{x} है, तो $x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a$ का गणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।
4. एक समांतर श्रेढ़ी में, यदि $a = 15, d = -3$ और $a_n = 0$, है तो n का मान ज्ञात कीजिए।

5. आकृति में, $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है। AE रेखाखंड BD को $1 : 2$ के अनुपात में विभाजित करता है। यदि $BE = 1.5$ सेमी है, तो BC ज्ञात कीजिए।



6. दो संख्याएँ p और q इस प्रकार हैं कि समीकरण $px^2 + 3x + 2q = 0$ के शून्यकों का योग और गुणनफल -6 है तो p और q का मान ज्ञात कीजिए।

खंड 'ब'

प्रश्न संख्या 7 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

7. 14 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जब संगत वृत्तखंड का कोण 30° है। $\left[\pi = \frac{22}{7} \text{ लीजिए} \right]$
8. यदि $\tan(2A) = \cot(A - 18^\circ)$, जहाँ $2A$ एक न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।
9. 200 से 500 के बीच कितने पूर्णांक 8 से विभाज्य हैं?
10. निम्नलिखित समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए:

$$\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-8} = \frac{11}{33}; x \neq -3, 8$$

11. 21975 को इसके अभाज्य गुणनखंडों के गुणफल के रूप में लिखिए।
12. यदि $a \cos \theta + b \sin \theta = c$, है, तो सिद्ध कीजिए कि :

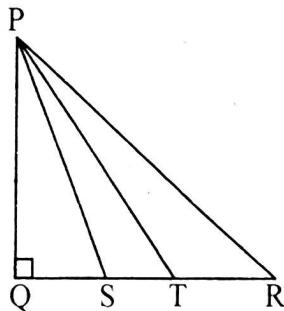
$$a \sin \theta - b \cos \theta = \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \text{ है।}$$

खंड 'स'

प्रश्न संख्या 13 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है।

13. आकृति में, S और T समकोण त्रिभुज PQR , की भुजा QR को त्रिभाजित करते हैं। सिद्ध कीजिए:

$$8PT^2 = 3PR^2 + 5PS^2.$$



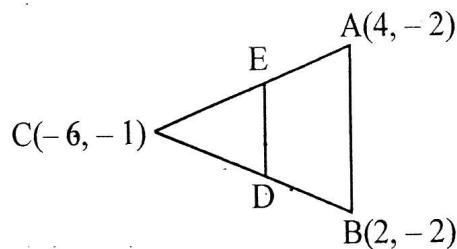
14. $2x + y = 6$ और $2x - y + 2 = 0$, का एक ग्राफ बनाइए। इन रेखाओं x -अक्ष द्वारा घिरे क्षेत्र को छायांकित कीजिए। छायांकित हिस्से का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
15. निम्नलिखित सारणी एक योग/कैप में प्रतिभागियों की संख्या दर्शाती है:

आयु (वर्षों में)	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
प्रतिभागियों की संख्या	8	40	58	90	83

- प्रतिभागियों की बहुलक आयु ज्ञात कीजिए।
16. अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा 117, 143, 104 का म.स. × और ल.स. ज्ञात कीजिए। यह भी दर्शाइए कि म.स. × ल.स. ≠ तीन संख्याओं का गुणनफल है।
17. निम्नलिखित बारंबारता बंटन का माध्य 50 है और सभी बारंबारताओं का योग 120 है। लुप्त बारंबारताएँ x और y ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100	Total
बारंबारता	17	x	32	y	19	120

18. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत का व्यास AB उन सभी जीवाओं को, जोवाओं बिंदु A पर स्थित स्पर्श रेखा के समांतर हैं, समद्विभाजित करता है।
19. आकृति में, $\triangle ABC$, में, D और E क्रमशः भुजाओं BC और AC के मध्यबिंदु हैं। DE की लंबाई ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए कि $DE = \frac{1}{2} AB$ है।



20. सिद्ध कीजिए कि $(2, -2), (-2, 1)$ और $(5; 2)$ समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। त्रिभुज का क्षेत्रफल और कर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए।
21. एक संख्या और उसके धनात्मक वर्गमूल का योग $\frac{6}{25}$ है। संख्या ज्ञात कीजिए।
22. $30x^4 + 11x^3 - 82x^2 - 12x + 48$ by $(3x^2 + 2x - 4)$ से विभाजित कीजिए और निष्कर्ष का सत्यापन विभाजन एल्गोरिद्म द्वारा कीजिए।

खंड 'द'

प्रश्न संख्या 23 से 30 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।

23. निम्नलिखित बंटन एक फैक्ट्री के 50 मजदूरों की दैनिक आय दर्शाता है:

दैनिक आय (में)	100 – 120	120 – 140	140 – 160	160 – 180	180 – 200
मजदूरों की संख्या	12	14	8	6	10

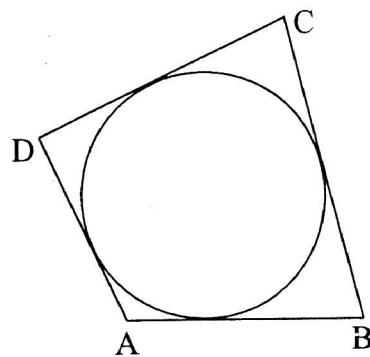
उपर्युक्त बंटन को 'से कम प्रकार' के संचयी बंटन में बदलिए और इसका तोरण बनाइए। ग्राफ से माध्यक आय ज्ञात कीजिए और सूत्र द्वारा निष्कर्ष का सत्यापन कीजिए।

24. धरातल के एक बिंदु A से एक हवाई जहाज का उन्नयन कोण 60° है। 10 सेकण्ड की उड़ान के पश्चात्, उन्नयन कोण 30° हो जाता है। यदि जहाज की गति 648 किमी/घंटा है, तो हवाई जहाज की निश्चित ऊँचाई, जिस पर वह उड़ रहा है, ज्ञात कीजिए।

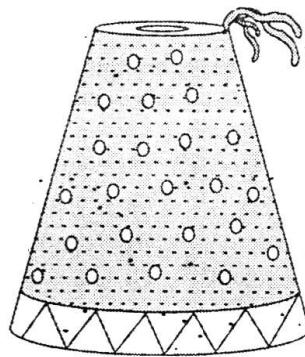
$$[\sqrt{3} = 1.732 \text{ का प्रयोग कीजिए}]$$

25. एक मोटर बोट, जिसकी स्थिर जल में चाल 20 किमी/घंटा है, को धारा के प्रतिकूल 48 किमी जाने में उसी स्थान पर धारा के अनुकूल वापिस आने की तुलना में 1 घंटा अधिक लगता है। धारा की गति ज्ञात कीजिए।

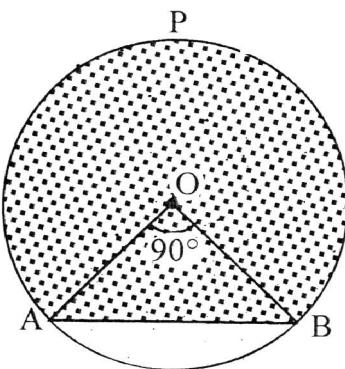
26. यदि $\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1$ और $\frac{y}{a} \sin \theta - \frac{x}{b} \cos \theta = -1$, है, तो सिद्ध कीजिए:
27. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिंदु से उस वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाई समान होती है। उपरिलिखित प्रमेय के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि यदि एक वृत्त के परिगत बने एक चतुर्भुज $ABCD$ की चारों भुजाओं को स्पर्श करता है। सिद्ध कीजिए कि $AB + CD = AD + BC$ है।



28. 'फैज', एक तुर्की टोपी, की आकृति एक शंकु के छिनक के जैसी होती है। (आकृति देखिए)। यदि इसकी त्रिज्या खुली तरफ से 10 सेमी और ऊपरी आधार पर त्रिज्या 4 सेमी है और तिर्यक ऊँचाई 15 सेमी है, तो इसे बनाने में प्रयुक्त कपड़े का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। टोपी को बनाने में लगे कपड़े में, लगे कपड़े की लागत भी ज्ञात कीजिए, यदि इसकी कीमत ₹ 7 प्रति 10 सेमी² है।



29. 35 सेमी त्रिज्या और $\angle AOB = 90^\circ$ वाले वृत्त के दीर्घ वृत्तखंड APB का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



30. एक समकोण त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें $AB = 4.5$ सेमी, $AC = 7.5$ सेमी और $\angle B = 90^\circ$ है। ऐसा ही एक दूसरा त्रिभुज बनाइए जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं की $4/5$ गुना हों।

उत्तर

खंड ‘अ’

- | | | |
|------|-----------|------------------------------------|
| 1. 2 | 2. 2 | 3. $AM = \bar{x} + a$ |
| 4. 6 | 5. 3 सेमी | 6. $\frac{1}{2}$ और $-\frac{3}{2}$ |

खंड ‘ब’

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|----------------|
| 7. 2.33 सेमी ² | 8. $A = 36^\circ$ | 9. 37 पूर्णांक |
| 10. $x = 2$ या $x = 3$ | 11. $21975 = 3 \times 5^2 \times 293$ | |

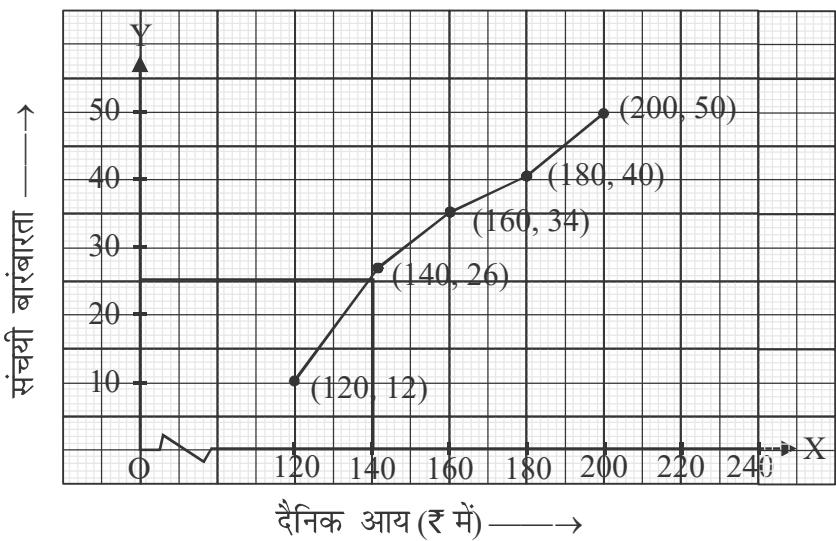
खंड ‘स’

- | | |
|--|--|
| 14. 2 वर्ग इकाई | 15. प्रतिभागियों की बहुलक आयु = 58.65 वर्ष |
| 16. म.स. = 13, ल.स. = 10296 | |
| 17. $x = 28$ और $y = 24$ | |
| 20. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{25}{2}$ वर्ग इकाई, कर्ण लंबाई = $5\sqrt{2}$ इकाई | |
| 21. $\frac{1}{25}$ | |

खंड ‘द’

23. Daily income (in)Cumulative frequency

दैनिक आय (में)	संचयी बारंबारता
120 से कम	12
140 से कम	26
160 से कम	34
180 से कम	40
200 से कम	50



माध्यक आय = ₹ 138.60

24. 1.5588 किमी

25. 4 किमी/घंटा

28. $710\frac{2}{7}$ सेमी², 497.20

29. 3500 किमी²

मॉडल टेस्ट पेपर-5

गणित

(उत्तर सहित)

कक्षा-दसवीं

[निर्धारित समय : 3 घंटे]

[अधिकतम अंक : 80]

- (i) सभी प्रश्न आनिवार्य हैं।
- (ii) इस प्रश्नपत्र में 30 प्रश्न हैं जिन्हें चार खंडों अ, ब, स तथा द में विभाजित किया गया है।
- (iii) खंड 'अ' में 6 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है। खंड 'ब' में 6 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है। खंड 'स' में 10 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है। खंड 'द' में 8 प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।
- (iv) इस प्रश्नपत्र में कोई समग्र विकल्प नहीं है।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

खंड 'अ'

प्रश्न संख्या 1 से 6 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. यदि बहुपद $(a^2 + 9)x^2 + 13x + 6a$ का एक मूल दूसरे व्युत्क्रम है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।
2. यदि दो गोलों के आयतनों का अनुपात $27 : 8$ है, तो उनके वक्र पृथीष्य क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
3. यदि द्विघात समीकरण $lx^2 + mx + n = 0$ का एक मूल दूसरे का व्युत्क्रम है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।
4. यदि एक समांतर श्रेढ़ी का n वाँ $(3n + 2)$, है, तो श्रेढ़ी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।
5. दो समरूप त्रिभुजों ABC और DEF के क्षेत्रफल क्रमशः 256 सेमी^2 और 144 सेमी^2 हैं। यदि बड़े त्रिभुज ABC की सबसे लंबी भुजा 32 सेमी है, तो छोटे त्रिभुज की सबसे लंबी ज्ञात कीजिए।
6. यदि $\theta + \cot \theta = 7$, है, तो $\tan^2 \theta + \cot^2 \theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

खंड 'ब'

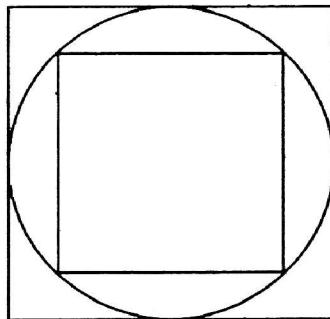
प्रश्न संख्या 7 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

7. दो संख्याओं का म.स. और ल.स. क्रमशः 9 और 459 हैं यदि एक संख्या 27 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

8. $\triangle ABC$ की भुजाएँ AB और AC तथा परिमाप P1 एक अन्य $\triangle DEF$ की संगत भुजाओं DE और DF और परिमाप P2 का तिगुना है। क्या ये दोनों त्रिभुज समरूप हैं? यदि हाँ, तो $\frac{\text{क्षेत्रफल } (\Delta ABC)}{\text{क्षेत्रफल } (\Delta DEF)}$ ज्ञात कीजिए।
9. निम्न आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए:

वर्ग	0 – 50	50 – 100	100 – 150	150 – 200	200 – 250
बारंबारता	12	13	15	8	12

10. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त की जीवा के अंत सिरों से खींची गई स्पर्श रेखाएँ जीवा के साथ समान कोण बनाती हैं।
11. आकृति में, d व्यास वाले एक वृत्त के अंदर एक वर्ग बना है और दूसरा वर्ग वृत्त के परिगत बना है। बाह्य वर्ग के क्षेत्रफल का अंदर बने वर्ग के क्षेत्रफल से अनुपात ज्ञात कीजिए।



12. एक पासे को एक बार उछाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि प्राप्त संख्या 2 या 3 का गुणज हो।

खंड 'स'

प्रश्न संख्या 13 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है।

13. $5x^3 - 13x^2 + 21x - 14$ को $(3 - 2x + x^2)$ से विभाजित कीजिए और विभाजन एल्गोरिद्म का सत्यापन कीजिए।
14. यदि किसी त्रिभुज की भुजाओं के मध्यबिंदुओं के निर्देशांक $(2, 1)$, $(3, -5)$ और $(6, 4)$ हैं, तो इसका केंद्रक ज्ञात कीजिए।
15. एक ठोस बेलन की ऊँचाई 15 सेमी और व्यास 7 सेमी है। प्रत्येक वृत्ताकार किनारे से 3 सेमी त्रिज्या और 4 सेमी ऊँचाई के दो समान शंकवाकार छिद्र काटे गए हैं। शेष ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

16. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिंदु $P(-1, y)$ बिंदुओं $A(-3, 10)$ और $B(6, -8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को विभाजित करता है। y का मान भी ज्ञात कीजिए।

17. k के किस मान के लिए निम्नखिलित रैखिक समीकरणों के निकाय का कोई हल नहीं होगा?

$$3x + y = 1$$

$$(2k-1)x + (k-1)y = 2k+1$$

18. यदि $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$, $0^\circ < A+B \leq 90^\circ$, $A > B$, तो A और B ज्ञात कीजिए।

19. 70 पैकेटों में चाय का भार निम्न सारणी में दर्शाता गया है:

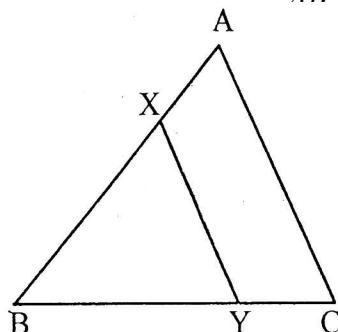
भार (ग्राम में)	200–201	201–202	202–203	203–204	204–205	205–206
पैकेटों की संख्या	13	27	18	10	1	1

पद विचलन विधि का प्रयोग करके पैकेटों का माध्य भार ज्ञात कीजिए।

20. किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 5 और आखिरी पद 45 है तथा इसके सभी पदों का योग 400 है। पदों की संख्या और सार्व-अंतर ज्ञात कीजिए।

21. एक रेखाखंड 7.6 सेमी खीजिए और इसे 3 : 2 के अनुपात में विभाजित कीजिए।

22. दी गई आकृति में, रेखाखंड XY , ΔABC की भुजा AC के समांतर है और यह त्रिभुज को दो समान क्षेत्रफलों वाले हिस्सों में विभाजित करता है। $\frac{AX}{AR}$ का अनुपात ज्ञात कीजिए।

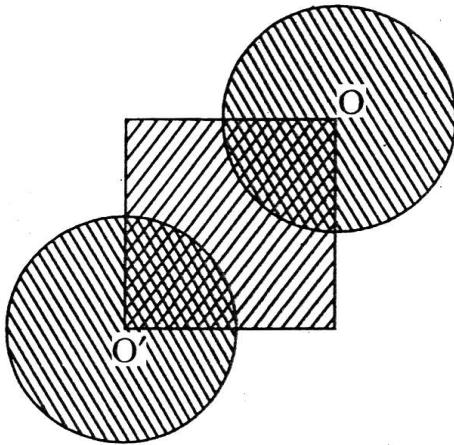


खंड 'द'

प्रश्न संख्या 23 से 30 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।

23. यदि समीकरण $x^2 + px - 4 = 0$ का एक मूल -4 है और समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूल समान हैं, तो p और q के मान ज्ञात कीजिए।

24. तीन अंकों वाली उन सभी संख्याओं, जिनको 4 से भाग करने पर 3 शेष आता हैं, से बनी श्रेढ़ी का मध्य पाद ज्ञात कीजिए। मध्य पद के दोनों ओर आने वाली सभी संख्याओं का अलग-अलग योगफल भी ज्ञात कीजिए।
25. दी गई आकृति में, वर्ग भुजा 28 सेमी और प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या वर्ग की भुजा की लंबाई का आधा है, जहाँ वृत्तों के केंद्र O और O' हैं। छायांकित हिस्से कि क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



26. भूमि के एक बिंदु से, 20 मी ऊँचे भवन के ऊपर लगाए गए टावर के तल और शीर्ष के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
27. सिद्ध कीजिए कि एक चतुर्भुज, जोकि एक वृत्त के बाहर बना है, की सम्मुख भुजाएँ वृत्त के केंद्र के साथ संपूरक कोण बनाती हैं।
28. माना $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos \theta$ हैं। दर्शाइए कि $\cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2} \sin \theta$ है।
29. एक मनोरंजन केन्द्र का प्रवेश शुल्क 5 है। केन्द्र के कार्यक्रमों में एक सिक्का को तीन बार उछालना भी शामिल है। यदि यह 1 या 2 चित्त दर्शाता है तो श्वेता को अपना शुल्क वापिस मिल जाता है। यदि वह 3 चित्त उछालती है तो उसे प्रवेश शुल्क की दुगुनी राशि प्राप्त होती है: अन्यथा वह खेल हार जाती है। तीन बार सिक्का उछालने पर क्या प्रायिकता है कि उसे निम्न प्राप्त हो:
- (i) वह प्रवेश शुल्क हार जाए।
 - (ii) उसे दुगुनी प्रवेश शुल्क प्राप्त हो।
 - (iii) उसे सिर्फ प्रवेश शुल्क प्राप्त हो।
30. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। यहाँ से दर्शाइए कि $3\sqrt{5} - 8$ भी एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर

खंड 'अ'

1. 3

2. $9 : 4$

3. $2m^2 = 9 \ln$

4. $\frac{n(3n+7)}{2}$

5. छोटे त्रिभुज की सबसे लंबी भुजा = 24 सेमी

6. 47

खंड 'ब'

7. 153

8. हाँ, $9 : 1$

9. 111.11

11. $2 : 1$

12. $\frac{2}{3}$

खंड 'स'

14. $\left(\frac{11}{3}, \frac{-7}{6}\right)$

15. 444.72 सेमी² (लगभग)

16. अनुपात $2 : 7$ और $y = 6$

17. $k = 2$

18. $A = 45^\circ$ and $B = 15^\circ$

19. 201.957 ग्राम

20. पदों की संख्या = 16; सार्व-अंतर = $\frac{8}{3}$

22.
$$\frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

खंड 'द'

23. $p = 3$. और $q = \frac{9}{4}$

24. मध्य पद = 551; मध्य पद से पहले आने वाले सभी पदों का योगफल 36400 तथा मध्य पद के बाद आने वाले सभी पदों का योगफल 87024 है।

25. 1708 सेमी²

26. टावर की ऊँचाई = 14.64 मीटर

29. (i) $\frac{1}{8}$, (ii) $\frac{1}{8}$, (iii) $\frac{3}{4}$