Government of Tamilnadu

ఏడవ తరగతి

STANDARD SEVEN

TELUGU MEDIUM

కాలావధి III

TERM III

భాగము 2 VOLUME 2

గణితము
MATHEMATICS

విజ్ఞాన శాస్త్రము
SCIENCE

సాంఘిక శాస్త్రము
SOCIAL SCIENCE

Untouchability is Inhuman and a Crime

Department of School Education

© Government of Tamilnadu

First Edition - 2012
Revised Edition - 2013, 2014, 2015
(Published under Uniform System of School Education Scheme in Trimester Pattern)

Textbook Prepared and Compiled By
State Council of Educational Research and Training
College Road, Chennai - 600 006.

Textbook Printing
Tamil Nadu Textbook and Educational Services Corporation
College Road, Chennai - 600 006.

This book has been printed on 80 G.S.M. Maplitho Paper

Price : Rs.

Printed by Offset at :

Textbook available at
www.textbooksonline.tn.nic.in

విషయ సూచిక

గణితము MATHEMATICS (1-97)

అధ్యాయము	పాఠ్యాంశము	పేజి సంఖ్య
1.	బీజగణితము	2
2.	అనుదిన అంకగణితము	14
3.	కొలతలు	47
4.	క్షేత్రగణితము	72
5.	ప్రయోగాత్మక రేఖాగణితము	81
6.	దత్తాంశమును ఉపయోగించుట	86
	జవాబులు	93

విజ్ఞాన శాస్త్రము SCIENCE (98-160)

అధ్యాయము	పాఠ్యాంశము	పేజి సంఖ్య
జీవ శాస్త్రము		
1.	ఆవరణ వ్యవస్థ	99
2.	నీరు అత్యంత విలువైన వనరు	112
రసాయన శాస్త్రము		
3.	దహనము మరియు జ్వాల	126
భౌతికశాస్త్రము		
4.	ఉష్ణము మరియు కాంతి	141

సాంఘిక శాస్త్రము SOCIAL SCIENCE (161-228)

క్రమ సంఖ్య	అధ్యాయములు	పుటసంఖ్య
చరిత్ర		
1.	విజయనగర మరియు బహమనీ రాజ్యములు	162
2.	భక్తి మరియు సూఫీ ఉద్యమములు	171
భూగోళశాస్త్రం		
1.	విపత్తు మరియు విపత్తుల నిర్వహణ	178
2.	మహాసముద్ర శాస్త్రము – పరిచయము	191
పౌరశాస్త్రం		
1.	ఐక్యరాజ్యసమితి	200
2.	స్త్రీ, శిశు సంక్షేమ పథకములు మరియు శాసనములు	207
అర్థశాస్త్రం		
1.	ఉత్పత్తి కారకములు	213
2.	పన్ను మరియు దాని యొక్క ముఖ్యత్వము	224

గణితము

MATHEMATICS

TELUGU MEDIUM

ఏడవ తరగతి

STANDARD SEVEN

కాలావధి III

TERM III

1 బీజగణితము

1.1 రెండు చరరాశులతో సాధారణ సమాసము (Simple expressions with two variables)

దీర్ఘచతురస్రము గురించి మీరందరు తెలిసికొనియున్నారు. దాని వైశాల్యము $l \times b$ ఇక్కడ 'l' మరియు 'b' చరరాశులు అగును. సంఖ్యలలోని నాలుగు ప్రాథమిక ప్రక్రియలు, చరరాశులలోను అనుసరించబడును. చరరాశులను ఉపయోగించి కొన్ని వాక్యములను సమాసములుగా మార్చుటకు మనము ప్రయత్నించెదము.

ప్రక్రియ	వాక్యములు	బీజీయ సమాసము
కూడిక	x మరియు y ల మొత్తము	$x + y$
తీసివేత	a మరియు b ల మధ్య వ్యత్యాసము	$a - b$ ($a > b$ అయిన) (లేక) $b - a$ ($b > a$ అయిన)
గుణకారము	x మరియు y ల లబ్ధము	$x \times y$ (లేక) xy
భాగహారము	p ను q తో భాగించిన	$p \div q$ (లేక) $\frac{p}{q}$

గణిత వాక్యములలో ఎలాంటి గణిత ప్రక్రియలను ఉపయోగించాలి మరియు వాటిని ఎలా గుర్తుంచుకోవాలో తెలుసుకోవడానికి క్రింది పట్టిక ఉపయోగపడుతుంది.

కూడిక	తీసివేత	గుణకారము	భాగహారము
మొత్తము	వ్యత్యాసము	లబ్ధము	విభాజ్యము
ఎక్కువైన	తక్కువైన	గుణించిన	భాగించిన
సంకలనం	వ్యవకలనం	రెట్లు	నిష్పత్తి
కూడుటకు	తీసివేయుటకు		
ఎక్కువగా	తక్కువగా		

ఉదాహరణ 1.1

క్రింది వాటిని బీజీయ సమాసములుగా వ్రాయుము.

1) m మరియు n ల మొత్తమునకు 2 రెట్లు.
2) b లో 2 రెట్లు a తక్కువైన.
3) x మరియు y అను రెండు సంఖ్యల వర్గముల మొత్తము.
4) p మరియు q ల లబ్ధమును 7 తో కూడిన.

5) 2 రెట్లు a మరియు b ల లబ్ధమును 5 తో భాగించుము.

6) మూడులో రెండవ వంతు y కంటే x ఎక్కువ.

7) x అను సంఖ్య సగంలో 3 ను తగ్గించిన.

8) m మరియు n సంఖ్యల మొత్తములో వాటి లబ్ధమును తగ్గించిన.

9) y మరియు 6 మొత్తములో 4 రెట్లు x తక్కువ.

10) మూడులో ఒక వంతు a మరియు m ల మొత్తమునకు 2 రెట్లు.

11) y ను 5 తో భాగించి x తో కూడుట.

సాధన:

1) $2(m+n)$ 2) $b-2a$

3) x^2+y^2 4) $7+pq$

5) $\frac{2ab}{5}$ 6) $\frac{2}{3}y+x$

7) $\frac{x}{2}-3$ 8) $(m+n)-mn$

9) $(y+6)-4x$ 10) $2\left(\frac{1}{3}a+m\right)$

11) $\frac{y}{5}+x$

ప్రయత్నించుము

క్రింది వాక్యములను బీజీయ సమాసములుగా వ్రాయుము.

(i) a రెట్లు b.

(ii) a, b మొత్తమును 5 తో భాగించుము.

(iii) 2 రెట్లు m లో n తక్కువైన.

(iv) 4 రెట్లు x ను y తో భాగించుట.

(v) 5 రెట్లు p ను 3 రెట్లు q తో గుణించుట.

అభ్యాసము 1.1

1. **సరియైన జవాబును ఎన్నుకొనుము:**

(i) 5 రెట్లు x, 3 రెట్లు y మరియు 7 ల మొత్తము.

(అ) $5(x+3y+7)$ (ఆ) $5x+3y+7$

(ఇ) $5x+3(y+7)$ (ఈ) $5x+3(7y)$

(ii) a మరియు b ల మొత్తములో సగం.

(అ) $\frac{1}{2}(a+b)$ (ఆ) $\frac{1}{2}a+b$ (ఇ) $\frac{1}{2}(a-b)$ (ఈ) $\frac{1}{2}+a+b$

(iii) x మరియు y ల వ్యత్యాసమునకు 3 రెట్లు.

(అ) $3x-y$ (ఆ) $3-x-y$ (ఇ) $xy-3$ (ఈ) $3(y-x)$

(iv) y మరియు z ల లబ్ధము నుండి 2 ను తీసివేయుము

(అ) $2 - yz$ (ఆ) $2 + yz$ (ఇ) $yz - 2$ (ఈ) $2y - z$

(v) 6 మరియు q ల లబ్ధమునకు p యొక్క సగమును కూడుట

(అ) $\frac{p}{2} + 6q$ (ఆ) $p + \frac{6q}{2}$ (ఇ) $\frac{1}{2}(p + 6q)$ (ఈ) $\frac{1}{2}(6p + q)$

2. చరరాశి, స్థిరరాశి మరియు గణిత ప్రక్రియలను ఉపయోగించి క్రింది వాక్యములను బీజీయ సమాసములుగా వ్రాయుము:

(i) x మరియు 2 రెట్లు y ల మొత్తము.

(ii) y నుండి z ని తీసివేసిన.

(iii) x మరియు y ల లబ్ధమునకు 4 ను కూడుము.

(iv) 3 రెట్లు x మరియు 4 రెట్లు y ల వ్యత్యాసము.

(v) 10, x మరియు y ల మొత్తము.

(vi) p మరియు q ల లబ్ధము నుండి 5 ను తీసివేసిన.

(vii) 12 నుండి m మరియు n ల లబ్ధమును తీసివేసిన.

(viii) a మరియు b ల మొత్తమును వాటి లబ్ధము నుండి తీసివేసిన.

(ix) 3 రెట్లు c మరియు d ల లబ్ధమునకు 6 ను కూడిన.

(x) 4 రెట్లు x మరియు y ల లబ్ధమును 3 తో భాగించిన.

1.2 సామాన్య సమీకరణములు (Simple Linear Equations)

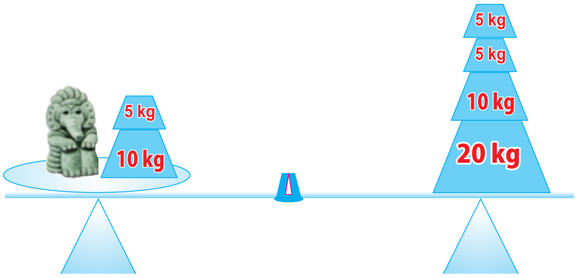
మాలతికి తన మామ ఒక బొమ్మను బహూకరించెను. ఆమె బొమ్మ బరువును తెలుసుకోవాలనుకుంది. బరువును తెలుసుకొనుటకు త్రాసును ఉపయోగించింది. ఆమె బరువు 40 కి.గ్రా అని, మరియు బొమ్మ బరువు, బంగాళదుంపల బరువు కలిపిన తన బరువు అని తెలుసుకొనెను.

అనగా,

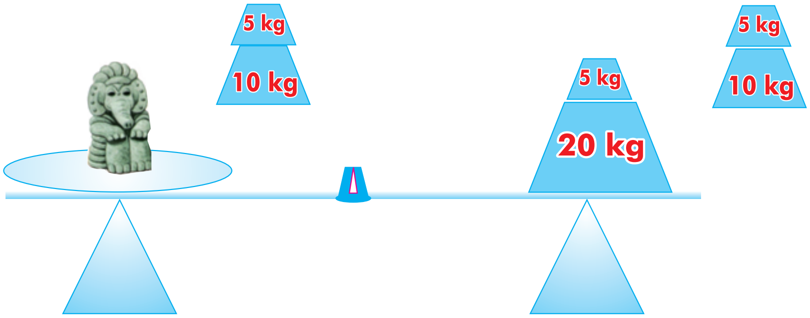
బొమ్మ బరువు	కూడిక	బంగాళదుంపల బరువు	సమము	మాలతి బరువు
s	+	15	=	40

పట్టిక 1.1

పై వాటి నుండి s విలువను తెలుసుకొనుటకు ఆలోచించెదము.



15 ను ఇరువైపుల తీసివేయుము.



మిగిలినది బొమ్మ బరువు అగును.

$$s + 15 = 40$$ (పట్టిక 1.1 నుంచి)

$$s + 15 - 15 = 40 - 15$$ (15 ను ఇరువైపుల నుంచి తీసివేసిన)

$$s = 25$$

కాబట్టి బొమ్మ బరువు 25 కి.గ్రా.

$s + 15 = 40$ అను వాక్యము ఒక సమీకరణము అగును. అనగా ఒక వాక్యములో రెండు గణిత సమాసములు సమానముగా వుండిన దానిని సమీకరణము అందురు.

సమానము చేయుటకు ఒక గుర్తించిన బరువును ఒకవైపు తీసివేసిన, అంతే బరువును మరియొక వైపు నుండి తీసివేయవలెను.

ఒక గుర్తించిన బరువును ఒక వైపు కూడిన అంతే బరువును మరియొక వైపున కూడా కూడవలెను.

ఇరువైపుల సమాన బరువు కలిగిన త్రాసులాంటిది సమీకరణము అగును. సమీకరణంలో సమాన గుర్తు ఎల్లప్పుడు వుండును. ఎడమ ప్రక్కనున్న సమాసము విలువ (LHS) కుడి ప్రక్కనున్న సమాసము విలువ (RHS) సమానము అని ఈ సమాన గుర్తు తెలియజేయుచున్నది.

★ $x + 7 = 15$ అను సమీకరణమును తీసుకొనుము.

దీనిలో ఎడమ ప్రక్క వున్నది $x + 7$

కుడి ప్రక్కన ఉన్నది 15

ఇరువైపుల 7 ను తీసివేయుము

$$x + 7 - 7 = 15 - 7$$ (7 ను తీసివేసిన ఎడమ ప్రక్కన x మిగులును)

$$x = 8$$ (చరరాశి x వేరు చేయబడినది)

★ $n - 3 = 10$ అను సమీకరణమును తీసుకొనుము.

ఎడమ ప్రక్క $n - 3$

కుడి ప్రక్క 10

ఇరువైపుల 3 ను చేర్చిన

$$n - 3 + 3 = 10 + 3$$

$n = 13$ (చరరాశి n వేరు చేయబడినది)

★ $4m = 28$ అను సమీకరణమును తీసుకొనుము.

ఇరువైపుల 4 తో భాగించుము.

$$\frac{4m}{4} = \frac{28}{4}$$

$$m = 7$$

★ $\frac{y}{2} = 6$ అను సమీకరణమును తీసుకొనుము.

ఇరువైపుల 2 తో గుణించుము.

$$\frac{y}{2} \times 2 = 6 \times 2$$

$$y = 12$$

ఒక సమీకరణము యొక్క సమస్థితి మారకుండావుండుటకు, ఆ సమీకరణము ఒక వైపు ఏ సంఖ్యను కూడినను (తీసివేసినను) మరియొక వైపు అదే సంఖ్యను కూడుట (తీసివేయుట) చేయవలెను. ఇదే విధముగా సున్నాకాని సంఖ్యలను గుణించిన లేక భాగించిన సమీకరణము సమస్థితిలో వుండును. అనగా సమీకరణమును సాధించుటకు, సమీకరణములో వుండు చరరాశిని వేరుచేయుటకు గణిత ప్రక్రియలు చేయవలసి వున్నది.

ఉదాహరణ 1.2

సాధించుము: $3p + 4 = 25$

సాధన: $3p + 4 - 4 = 25 - 4$ (ఇరువైపుల 4 ను తీసివేసిన)

$$3p = 21$$

$\frac{3p}{3} = \frac{21}{3}$ (ఇరువైపుల 3 తో భాగించుము)

$$p = 7$$

ఉదాహరణ 1.3

సాధించుము: $7m - 5 = 30$

సాధన: $7m - 5 + 5 = 30 + 5$ (ఇరువైపుల 5 ను కూడుము)

$$7m = 35$$

$$\frac{7m}{7} = \frac{35}{7} \quad \text{(ఇరువైపుల 7 తో భాగించుము)}$$

$$m = 5$$

సమీకరణమును సాధించునపుడు, ఒకే సంఖ్యను ఇరువైపుల కూడుట లేక తీసివేయుట చేయుచున్నాము. ఇదే విధముగా ఒక సంఖ్యను ఇరువైపుల కూడుట లేక తీసివేయుట చేయకుండా మనము సంఖ్యను స్థానమార్పిడి చేయవచ్చును.

సంఖ్యను స్థాన మార్పిడి చేయుట అనునది (ఒక వైపు నుండి మరియొక వైపునకు తీసుకొని వెళ్ళుట) ఒక సంఖ్యను ఇరువైపుల కూడుటనో లేక తీసివేయుటనో చేసే ప్రక్రియ ఒకటే అగును. సంఖ్యను స్థాన మార్పిడి చేయునప్పుడు గుర్తు మార్చవలయును. స్థాన మార్పిడికి కొన్ని ఉదాహరణలను చూచెదము.

ఉదాహరణ 1.4

సాధించుము: $2a - 12 = 14$

సాధన:

ఇరువైపుల కూడుట లేక తీసివేయుట	స్థాన మార్పిడి
$2a - 12 = 14$ $2a - 12 + 12 = 14 + 12$ (ఇరువైపుల 12 ను కూడుము) $2a = 26$ $\frac{2a}{2} = \frac{26}{2}$ (ఇరువైపుల 2 తో భాగించిన) $a = 13$	$2a - 12 = 14$ ఎడమ ప్రక్కన వున్న (−12) ను కుడి ప్రక్కకు స్థాన మార్పిడి చేసిన. $2a = 14 + 12$ (స్థాన మార్పిడిలో −12 అనునది +12 గా మారును) $2a = 26$ $\frac{2a}{2} = \frac{26}{2}$ (ఇరువైపుల 2 తో భాగించిన) $a = 13$

ఉదాహరణ 1.5

సాధించుము: $5x + 3 = 18$

సాధన: +3 ను ఎడమ ప్రక్క నుండి కుడి ప్రక్కకు స్థాన మార్పిడి చేయుము.

$$5x = 18 - 3 \quad \text{(స్థాన మార్పిడిలో +3, −3 అగును)}$$

$$5x = 15$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{15}{5} \quad \text{(ఇరువైపుల 5 తో భాగించుము)}$$

$$x = 3$$

ఉదాహరణ 1.6

సాధించుము: $2(x+4) = 12$

సాధన: ఎడమ ప్రక్కన వున్న కుండలీకరణమును (bracket) తీసివేయుటకు ఇరువైపుల 2 తో భాగించుము.

$$\frac{2(x+4)}{2} = \frac{12}{2}$$

$$x + 4 = 6$$

$$x = 6 - 4 \quad \text{(+4 ను కుడి ప్రక్కకు స్థాన మార్పిడి చేసిన)}$$

$$x = 2$$

ఉదాహరణ 1.7

సాధించుము: $-3(m-2) = 18$

సాధన: ఎడమ ప్రక్కన వున్న కుండలీకరణమును తీసివేయుటకు ఇరువైపుల (−3) తో భాగించుము.

$$\frac{-3(m-2)}{-3} = \frac{18}{-3}$$

$$m - 2 = -6$$

$$m = -6 + 2 \quad \text{(−2 ను కుడి ప్రక్కకు స్థాన మార్పిడి చేసిన)}$$

$$m = -4$$

ఉదాహరణ 1.8

సాధించుము: $(3x + 1) - 7 = 12$

సాధన:

$$(3x + 1) - 7 = 12$$

$$3x + 1 - 7 = 12$$

$$3x - 6 = 12$$

$$3x = 12 + 6$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{18}{3}$$

$$x = 6$$

ఉదాహరణ 1.9

సాధించుము: $5x + 3 = 17 - 2x$

సాధన:

$$5x + 3 = 17 - 2x$$

$5x + 2x = 17 - 3$ (+3 ను కుడి ప్రక్కకి, $-2x$ ను ఎడమ ప్రక్కకి స్థాన మార్పిడి చేసిన)

$$7x = 14$$

$$\frac{7x}{7} = \frac{14}{7}$$

$$x = 2$$

ఉదాహరణ 1.10

మూడు వరుస సహజ సంఖ్యల మొత్తము 45. ఆ మూడు సహజ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన: మొదటి సహజ సంఖ్య x అనుకొనుము.

$\Rightarrow$ రెండవ సంఖ్య $= x + 1$

మూడవ సంఖ్య $= x + 1 + 1 = x + 2$

వాటి మొత్తము $= x + (x + 1) + (x + 2) = 45$

$$3x + 3 = 45$$

$$3x = 42$$

$$x = 14$$

ఆ మూడు సహజ సంఖ్యలు $x = 14$

$$x + 1 = 15$$

$$x + 2 = 16$$

ఉదాహరణ 1.11

ఒక సంఖ్యను 60 తో కూడిన 75 వచ్చును . ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన: కనుగొనవలసిన సంఖ్య x అని అనుకొనుము.

సమీకరణము $60 + x = 75$

$$x = 75 - 60$$

$$x = 15$$

ఉదాహరణ 1.12

ఒక సంఖ్య నుండి 20 ను తీసివేసిన 80 వచ్చును. ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన: కనుగొనవలసిన సంఖ్య x అని అనుకొనుము.

సమీకరణము $x - 20 = 80$

$$x = 80 + 20$$

$$x = 100$$

ఉదాహరణ 1.13

ఒక సంఖ్య పదిలో ఒక వంతు 63. ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన: కనుగొనవలసిన సంఖ్య x అని అనుకొనుము.

సమీకరణము $\frac{1}{10}(x) = 63$

$$\frac{1}{10}(x) \times 10 = 63 \times 10$$

$$x = 630$$

ఉదాహరణ 1.14

ఒక సంఖ్యను 4 తో భాగించి 6 తో కూడిన 10 వచ్చును. ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము..

సాధన: కనుగొనవలసిన సంఖ్య x అని అనుకొనుము.

సమీకరణము $\frac{x}{4} + 6 = 10$

$$\frac{x}{4} = 10 - 6$$

$$\frac{x}{4} = 4$$

$$\frac{x}{4} \times 4 = 4 \times 4$$

$\therefore$ ఆ సంఖ్య 16.

ఉదాహరణ 1.15

తులసి వయస్సు, రేవతి వయస్సు కంటే 3 తక్కువ. తులసి వయస్సు 18 అయిన, రేవతి వయస్సు ఎంత?

సాధన: రేవతి వయస్సు x అనుకొనుము.

$\Rightarrow$ తులసి వయస్సు $= x - 3$

తులసి వయస్సు 18 సంవత్సరములు అని ఇవ్వబడినది.

$$\Rightarrow \quad x - 3 = 18$$

$$x = 18 + 3$$

$$x = 21$$

కాబట్టి, రేవతి వయస్సు 21 సంవత్సరములు.

అభ్యాసము 1.2

1. సరియైన జవాబును ఎన్నుకొనుము.

(i) $p + 3 = 9$ అయిన, p అనునది

(అ) 12 (ఆ) 6 (ఇ) 3 (ఈ) 27

(ii) $12 - x = 8$ అయిన, x అనునది

(అ) 4 (ఆ) 20 (ఇ) -4 (ఈ) -20

(iii) $\frac{q}{6} = 7$ అయిన, q అనునది

(అ) 13 (ఆ) $\frac{1}{42}$ (ఇ) 42 (ఈ) $\frac{7}{6}$

(iv) $7(x - 9) = 35$ అయిన, x అనునది

(అ) 5 (ఆ) -4 (ఇ) 14 (ఈ) 37

(v) ఒక సంఖ్య యొక్క 3 రెట్లు 60 అయిన, ఆ సంఖ్య

(అ) 63 (ఆ) 57 (ఇ) 180 (ఈ) 20

2. సాధించుము:

(i) $x - 5 = 7$ (ii) $a + 3 = 10$ (iii) $4 + y = -2$

(iv) $b - 3 = -5$ (v) $-x = 5$ (vi) $-x = -7$

(vii) $3 - x = 8$ (viii) $14 - n = 10$ (ix) $7 - m = -4$

(x) $20 - y = -7$

3. సాధించుము:

(i) $2x = 100$ (ii) $3l = 42$ (iii) $36 = 9x$

(iv) $51 = 17a$ (v) $5x = -45$ (vi) $5t = -20$

(vii) $-7x = 42$ (viii) $-10m = -30$ (ix) $-2x = 1$

(x) $-3x = -18$

4. సాధించుము:

(i) $\frac{1}{2}x = 7$ (ii) $\frac{a}{6} = 5$ (iii) $\frac{n}{3} = -8$

(iv) $\frac{p}{-7} = 8$ (v) $\frac{-x}{5} = 2$ (vi) $\frac{-m}{3} = -4$

5. సాధించుము:

(i) $3x + 1 = 10$ (ii) $11 + 2x = -19$ (iii) $4z - 3 = 17$

(iv) $4a - 5 = -41$ (v) $3(x + 2) = 15$ (vi) $-4(2 - x) = 12$

(vii) $\frac{y+3}{5} = 14$ (viii) $\frac{x}{3} + 5 = 7$ (ix) $6y = 21 - y$

(x) $11m = 42 + 4m$ (xi) $-3x = -5x + 22$ (xii) $6m - 1 = 2m + 1$

(xiii) $3x - 14 = x - 8$ (xiv) $5x - 2x + 7 = x + 1$ (xv) $5t - 3 = 3t - 5$

6. రెండు సంఖ్యల మొత్తము 33. ఒక సంఖ్య 18 అయిన, మరియొక సంఖ్యను కనుగొనుము.
7. ఒక సంఖ్యను 12 తో కూడిన 25 వచ్చును. ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.
8. ఒక సంఖ్య నుండి 60 ను తీసివేసిన 48 వచ్చును. ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.
9. ఒక సంఖ్య 5 రెట్లు 60 అయిన, ఆ సంఖ్య ఎంత?
10. ఒక సంఖ్య 3 రెట్లు నుండి 6 ను తీసివేసిన 18 వచ్చును. ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.
11. రెండు వరుస సంఖ్యల మొత్తము 75 అయిన, ఆ సంఖ్యలు ఏవి?
12. రాముకి అతని తండ్రి రూ ₹ 75 ఇచ్చెను. ఇప్పుడు అతని దగ్గర రూ 130 ఉన్నవి. అయితే మొదట్లో అతని దగ్గర ఎంత డబ్బు వుండినది?
13. 8 సం॥కు ముందు నా వయస్సు 27. ఇప్పుడు నా వయస్సు ఎంత?

సాధించుము:

(i) $y + 18 = -70$ (ii) $-300 + x = 100$

(iii) $\frac{t}{3} - 5 = -6$ (iv) $2x + 9 = 19$

(v) $3x + 4 = 2x + 11$

ఆటాడుకుందాం రండి:

ఏదైనా ఒక సంఖ్యను అనుకొనుము అని రాము తన స్నేహితులైన అరుణ, శరణ్య, రవిలకు చెప్పెను. అనుకొనిన సంఖ్యకు 50 ను కూడి వచ్చిన విలువను రెండింతలు చేయమనెను.తరువాత వాళ్ళను చూచి చివరగా వచ్చిన విలువతో 48 ను కూడి, 2 తో భాగించి వచ్చిన విలువ నుండి అనుకొనిన సంఖ్యను తీసివేయమని చెప్పెను. మీకందరికి చివరిగా వచ్చిన సంఖ్య 74 అని రాము చెప్పగా అందరికి ఆశ్చర్యము.

		అరుణ్	శరణ్య	రవి
ఒక సంఖ్యను అనుకొనుము	x	16	20	7
50 ను కూడుము	$x+50$			
రెండింతలు చేయుట	$2x + 100$			
48 ను కూడుము	$2x + 148$			
2 తో భాగించుము	$x + 74$			
నీవు అనుకొనిన సంఖ్యను తీసివేయుము.	74			

గుర్తుంచుకోవలసిన విషయములు

1. బీజగణితము గణితశాస్త్రంలో ఒక భాగము అగును. గణిత ప్రక్రియలు, సంఖ్యలు మరియు ఆంగ్ల అక్షరములను కలిగినదిగా ఈ భాగము వుండును.
2. వివిధ సంఖ్యా రూపముల విలువలను తీసుకొను ఒక పరిమాణము చరరాశి అగును.
3. నిర్ణయించిన సంఖ్యా రూపమునే విలువగా తీసుకొను ఒక పరిమాణము స్థిరరాశి అగును.
4. చరరాశులను, సంఖ్యారూపములను గణిత ప్రక్రియల ఆధారముగా చేర్చి వ్రాసిన సమాసము బీజీయ సమాసము అగును.
5. అనేక పదములతో ఏర్పడినది సమాసము అగును.
6. ఒకే ఘాతములను కలిగిన ఒకే చరరాశి లేక చరరాశుల గుణకారము సదృశ్యపదములనబడును. వేర్వేరు ఘాతములను కలిగిన వేర్వేరు చరరాశులు లేక చరరాశుల గుణకారము విదృశ్య పదములనబడును.
7. ఒక చరరాశితో వుండు ఒక సమీకరణము అంతస్థు అనునది ఆ చరరాశి యొక్క మిక్కిలి అధిక ఘాతము అగును. ఒకటి కంటే ఎక్కువ చరరాశులతో వుండు ఒక సమీకరణము అంతస్థు అనునది, చరరాశుల మిక్కిలి అధిక ఘాతముల మొత్తము అగును.
8. సమ స్థితిలో వున్న రెండు సమాసములను కలిగిన ఒక వాక్యమును సమీకరణము అని అందురు.
9. ఒక సమీకరణము ఎడమ ప్రక్కను, కుడి ప్రక్కను స్థానమార్పిడి చేసినను దాని విలువ మారదు.
10. చరరాశి యొక్క ఏ విలువ సమీకరణమును తృప్తిపరచునో, ఆ విలువనే ఆ సమీకరణము యొక్క సాధన అని చెప్పవచ్చును.

2 అనుదిన అంకగణితము

2.1 శాతము

అంగడిలో ఉన్న బేనర్‌లలో ఉండు 25%, 20% లనుండి ఏమి తెలుసుకొంటిరి ?

రాము ఆరవ తరగతిలో, గణితములో ఏ స్థితిలో ఉన్నాడు అనునది తెలుసుకొనుటకు రాము తల్లి అతని మార్కుల కార్డును చూచినది.

అతని మార్కుల కార్డులో ఇవ్వబడియున్న గణిత మార్కులు ఏవనగా

17 / 25 , 36 / 50 , 75 / 100 , 80 / 100 , 22 / 25, 45 / 50

పేరు:రాము. కె తరగతి మరియు కక్ష్య: VI 'A'

పాఠ్యాంశము	అంశ పరీక్ష – 1	నెల పరీక్ష – 1	మూడు నెలల పరీక్ష	ఆరు నెలల పరీక్ష	అంశ పరీక్ష – 2	నెల పరీక్ష – 2
అత్యధిక మార్కులు	25	50	100	100	25	50
ఆంగ్లము	23	41	75	80	22	40
ద్వితీయ భాష	20	35	85	80	21	41
గణితము	17	36	75	80	22	45
విజ్ఞాన శాస్త్రము	23	39	92	90	21	42
సాంఘిక శాస్త్రము	18	42	86	92	24	42
ఉపాధ్యాయుల సంతకము						
ప్రధానోపాధ్యాయుల సంతకము						
తల్లి/తండ్రి సంతకము						

రాము తల్లివల్ల అతని మార్కుల కార్డును చూచిన వెంటనే రాము యొక్క ఎక్కువ మార్కులు మరియు తక్కువ మార్కులను తెలుసుకొనుటకు వీలుకాలేదు. అందువలన, ఆమె ఇవ్వబడిన అన్ని మార్కులను మొత్తము మార్కులు 100 గా మార్చుకొన్నారు. (100 ను హారముగా కలిగిన భిన్నములు)

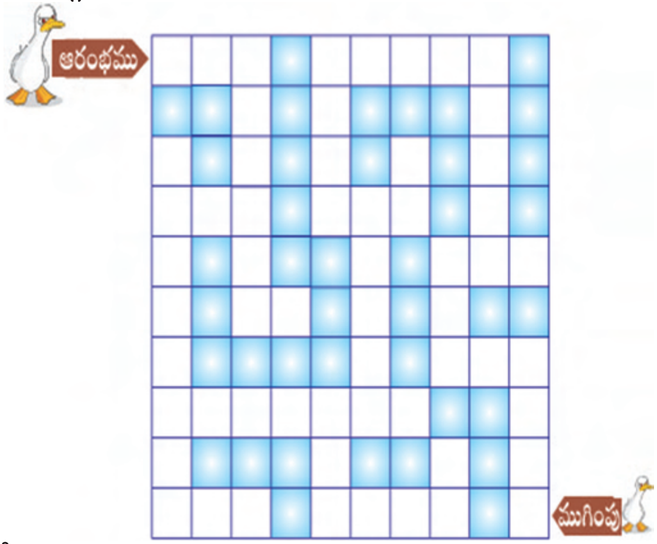
అంశ పరీక్ష 1	నెల పరీక్ష 1	మూడు నెలల పరీక్ష	ఆరు నెలల పరీక్ష	అంశపరీక్ష 2	నెలపరీక్ష 2
$\frac{68}{100}$	$\frac{72}{100}$	$\frac{75}{100}$	$\frac{80}{100}$	$\frac{88}{100}$	$\frac{90}{100}$

ఇప్పుడు, అతని మార్కులు అన్ని నూరు మార్కులకు మార్చబడియున్నవి.

అందువలన, ఆమె రాము మార్కులను పోల్చినపుడు అతను ఆరవ తరగతి గణితములో కొంచెము కొంచెముగా అభివృద్ధి చెందియున్నాడు అని తెలుసుకొని సంతోషపడినది.

ఈ ప్రత్యేక భిన్నమును గురించి తెలుసుకొందుము.

ఈ బాతు తన చిన్న బాతు దగ్గరకు పోవుటకు సహాయపడండి. అది పోవుటకు ఒకటి కంటే అధికమైన దారి వున్నదా ?



లేదు, ఒకే ఒక దారి మాత్రము "ఆరంభము" నుండి "ముగింపు" వరకు గలదు.

చిన్న చతురస్రముల మొత్తము సంఖ్య = 100

ఛాయవేయబడిన చతురస్రముల సంఖ్య = 41

ఛాయవేయని చతురస్రముల సంఖ్య = 59

దారిని దాటు చతురస్రముల సంఖ్య = ____

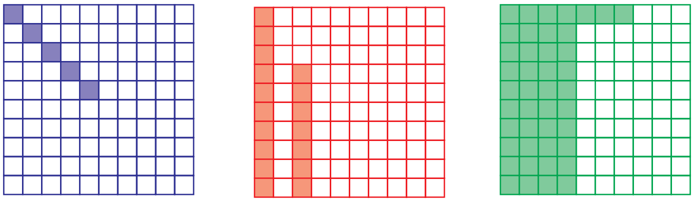
ఇప్పుడు క్రింది ఇవ్వబడిన పట్టికను చూడుము.

		నిష్పత్తి	భిన్నము	శాతము
ఛాయవేయబడిన భాగము	100 లో 41 భాగము	41 : 100	$\frac{41}{100}$	41%
ఛాయవేయని భాగము	100 లో 59 భాగము	59 : 100	$\frac{59}{100}$	59%
దారిని దాటు భాగము	100 లో ____ భాగము	____ : 100	$\frac{—}{100}$	____ %

- 100ను హారముగా కలిగినట్టి భిన్నము "శాతము" అనబడును.
- శాతమనునది "Percentum" అను లాటిన్ పదము నుండి వచ్చినది. దీనిని "Percent" అని కూడా చెప్పవచ్చును.
- శాతమును % అను గుర్తుతో గుర్తించెదరు. శాతమనునది "నూటికి" అని అర్థము.
- $x : y$ అను నిష్పత్తిలో $y = 100$ అయిన దానిని శాతము అనవచ్చును.

శాతమును చాలా పద్ధతులలో నిరూపించుట.

శాతమును పటము సహాయముతో తెలియజేయుట



ఛాయవేయబడిన భాగమును క్రింది విధముగా గుర్తించెదము:

నిష్పత్తి	5 : 100	17 : 100	43 : 100
భిన్నము	$\frac{5}{100}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{43}{100}$
శాతము	5%	17%	43%

అభ్యాసము 1.1

1) క్రింద ఇవ్వబడిన వాటిని శాతముగా వ్రాయుము:

(i) 20:100 (ii) $\frac{93}{100}$ (iii) 11 ను 100 చే భాగించుట (iv) $\frac{1}{100}$ (v) $\frac{100}{100}$

2) క్రింద ఇవ్వబడిన వాటిని నిష్పత్తులుగా వ్రాయుము:

(i) 43% (ii) 75% (iii) 5% (iv) $17\frac{1}{2}$% (v) $33\frac{1}{3}$%

3) క్రింద ఇవ్వబడిన వాటిని భిన్నములుగా వ్రాయుము:

(i) 25% (ii) $12\frac{1}{2}$% (iii) 33% (iv) 70% (v) 82%

ఆలోచించుము !

అంగడి - I

అంగడి - II

అంగడి 1లో 25% తగ్గింపు ఇచ్చిన, అమ్మకపు ధరయొక్క శాతమును కనుగొనుము. అంగడి 2లో ఇవ్వబడియున్న తగ్గింపు శాతమును కనుగొనుము .

ఏ అంగడిలో తక్కువ ధరలో అమ్మబడుచున్నది?

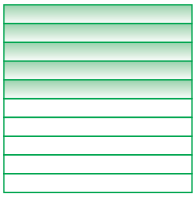
2.2 భిన్నము మరియు దశాంశ సంఖ్యలను శాతముగా మార్చుట :

$\frac{5}{100} = 5\%$, $\frac{1.2}{100} = 1.2\%$, $\frac{175}{100} = 175\%$ అనునది మనము తెలుసుకొనినదే.

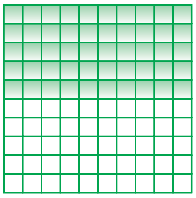
$\frac{5}{10}$ ను శాతముగా మార్చుట

$\frac{5}{10}$ అను భిన్నమును శాతముగా క్రింది విధముగా మార్చవచ్చును :

$\frac{5}{10}$



$\frac{50}{100}$



హారమును 100 గా మార్చుటకు లవమును, హారమును 10 చే గుణించుము

$$\frac{5 \times 10}{10 \times 10} = \frac{50}{100} = 50\%$$

దానిని ఈ విధముగా చేయవచ్చును $\frac{5}{10}$ ను 100% చే గుణించిన

$$\left(\frac{5}{10} \times 100\right)\% = 50\%$$

ప్రయత్నించుము

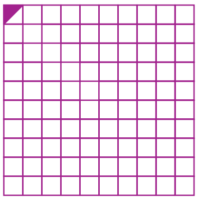
వృత్తమున 50% ఛాయవేయబడి యున్నది. వృత్తమున 25% ఛాయవేయబడినది

వృత్తమున (i) 50%, (ii) 25% భాగమును వేరే విధముగా ఛాయ వేయుటకు ప్రయత్నించుము.

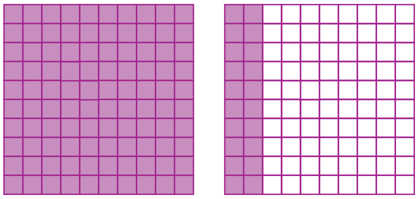
మీకు తెలుసా?

1 కన్నా తక్కువ సంఖ్యను 100 కన్నా పెద్ద సంఖ్యను శాతముగా గుర్తించుటకు వీలగును.

$\frac{1}{2}\%$



120%



(i) హారమును 100 గా మార్చుటకు వీలగు భిన్నములు :

ఉదాహరణ 2.1

$\frac{3}{5}$ ను శాతముగా మార్చుము

సాధన :

5 ను 20 చేత గుణించిన 100 లభించును.

$$\frac{3 \times 20}{5 \times 20} = \frac{60}{100} = 60\%$$

$$\frac{3}{5} = 60\%$$

ప్రయత్నించుము

1) 2 × ____ = 100

2) 5 × 20 = _____

3) 4 × 25 = _____

4) 10 × _____ = 100

5) 1 × _____ = 100

ఉదాహరణ 2.2

$6\frac{1}{4}$ ను శాతముగా మార్చుము

సాధన :

$$6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$$

4 ను 25 చేత గుణించిన 100 లభించును.

$$\frac{25 \times 25}{4 \times 25} = \frac{625}{100} = 625\%$$

(ii) హారమును 100 గా మార్చుటకు వీలుకాని భిన్నములు :

ఉదాహరణ 2.3

$\frac{4}{7}$ ను శాతముగా మార్చుము

సాధన : 100% చేత గుణించుము

$$\left(\frac{4}{7} \times 100\right)\% = \frac{400}{7}\%$$

$$= 57\frac{1}{7}\% = 57.14\%$$

ఉదాహరణ 2.4

$\frac{1}{3}$ ను శాతముగా మార్చుము

సాధన : 100% చేత గుణించుము

$$\left(\frac{1}{3} \times 100\right)\% = \left(\frac{100}{3}\right)\%$$

$$= 33\frac{1}{3}\% \text{ లేక } 33.33\%$$

ఉదాహరణ 2.5

250 మంది విద్యార్థులు గల ఒక పాఠశాలలో, 55 మంది విద్యార్థులు బాస్కెట్ బాలు, 75 మంది విద్యార్థులు కాలి బంతిని, 63 మంది విద్యార్థులు త్రోబాలును మిగిలిన విద్యార్థులు క్రికెట్‌ను ఇష్టపడిరి. అయిన,

(అ) బాస్కెట్ బాలు (ఆ) త్రోబాలును ఇష్టపడు విద్యార్థుల శాతము ఎంత ?

సాధన :

మొత్తము విద్యార్థుల సంఖ్య = 250

(అ) బాస్కెట్ బాలును ఇష్టపడు విద్యార్థుల యొక్క సంఖ్య = 55

250 లో 55 మంది బాస్కెట్ బాలును ఇష్టపడిరి అనుదానిని $\frac{55}{250}$ అని గుర్తించవచ్చును.

బాస్కెట్‌బాలును ఇష్టపడు విద్యార్థుల శాతము = $\left(\frac{55}{250} \times 100\right)\% = 22\%$

(ఆ) త్రోబాలును ఇష్టపడు విద్యార్థుల సంఖ్య = 63

250 లో 63 మంది త్రోబాలును ఇష్టపడిరి అనుదానిని $\frac{63}{250}$ అని గుర్తించవచ్చును.

త్రోబాలును ఇష్టపడు విద్యార్థుల శాతము = $\left(\frac{63}{250} \times 100\right)\%$

$= \frac{126}{5}\% = 25.2\%$

బాస్కెట్‌బాలును ఇష్టపడు విద్యార్థుల శాతము = 22 %

త్రోబాలును ఇష్టపడు విద్యార్థుల శాతము = 25.2 %

(iii) దశాంశ సంఖ్యలను శాతముగా మార్చుట :

ఉదాహరణ 2.6

0.07 ను శాతముగా మార్చుము

సాధన :

100% చేత గుణించుము

$(0.07 \times 100)\% = 7\%$

మరొకపద్ధతి :

$0.07 = \frac{7}{100} = 7\%$

ఉదాహరణ 2.7

0.567 ను శాతముగా మార్చుము

సాధన : 100% చేత గుణించుము

$(0.567 \times 100)\% = 56.7\%$

మరొకపద్ధతి : $0.567 = \frac{567}{1000} = \frac{567}{10 \times 100}$

$= \frac{56.7}{100} = 56.7\%$

గమనిక : ఒక భిన్నమును(లేక) ఒక దశాంశ సంఖ్యను శాతముగా మార్చుటకు 100% చేత గుణించవలయును.

ఆలోచించుము !

1. శరీరములోనున్న రక్తములో $\frac{9}{10}$ భాగము నీరుగలదు అనిన, రక్తము యొక్క శాతము ఎంత?
2. శరీరము బరువు $\frac{2}{5}$ భాగము కండరములతో కూడినది అనిన, శరీరములోని కండరముల శాతము ఎంత ? శరీరము బరువులో $\frac{2}{3}$ భాగము నీరు గలదు. కండరము బరువు మరియు నీటి బరువు మొదలగు వాటి మొత్తము 100% కన్నా ఎక్కువగనో (లేక) తక్కువగనో ఉండునా? అలాగా వుండిన కండరమును గూర్చి ఏమి చెప్పుటకు వీలగును?

అభ్యాసము 2.2

1. సరైన జవాబును ఎన్నుకొనుము :

(i) 6.25 =

(అ) 62.5% (ఆ) 6250% (ఇ) 625% (ఈ) 6.25%

(ii) 0.0003 =

(అ) 3% (ఆ) 0.3% (ఇ) 0.03% (ఈ) 0.0003%

(iii) $\frac{5}{20}$ =

(అ) 25% (ఆ) $\frac{1}{4}$% (ఇ) 0.25% (ఈ) 5%

(iv) 1 గంటలో 20 నిమిషముల శాతము

(అ) $33\frac{1}{3}$ (ఆ) 33 (ఇ) $33\frac{2}{3}$ (ఈ) ఇవి ఏమియూ కాదు

(v) 1 రూ.లో 50 పైసలు శాతము

(అ) 500 (ఆ) $\frac{1}{2}$ (ఇ) 50 (ఈ) 20

2. క్రింద ఇవ్వబడిన భిన్నములను శాతముగా మార్చుము

i) $\frac{20}{20}$ ii) $\frac{9}{50}$ iii) $5\frac{1}{4}$ iv) $\frac{2}{3}$ v) $\frac{5}{11}$

3. క్రింద ఇవ్వబడిన దశాంశ సంఖ్యలను శాతముగా మార్చుము

i) 0.36 ii) 0.03 iii) 0.071 iv) 3.05 v) 0.75

4. ఒక గుర్తించిన రోజులో, 35 మంది విద్యార్థులు ఉన్న ఒక తరగతిలో 7 మంది విద్యార్థులు హాజరు కాలేదు. అయిన హాజరు కాని విద్యార్థుల శాతమును కనుగొనుము.
5. రాము కొనిన 36 మామిడిపండ్లలో 5 మామిడిపండ్లు కుళ్ళిపోయెను. అయిన, కుళ్ళిపోయిన మామిడిపండ్ల శాతమును కనుగొనుము.
6. 50 మంది గల ఒక తరగతిలో 23 మంది బాలికలు, మిగిలినవారు బాలురు అయిన, బాలురు, బాలికల శాతమును కనుగొనుము.
7. రవి గణితములో 75 కు 66 మార్కులు, విజ్ఞాన శాస్త్రములో 80కు 72 మార్కులు తీసెను. అయిన, ఏ పాఠములో అధికముగా మార్కులు తీసియుండును?
8. శ్యామ్ యొక్క నెలసరి ఆదాయము ₹12,000. అతను పొదువు చేసినది ₹1,200. అతని యొక్క పొదుపు, ఖర్చుల శాతమును కనుగొనుము.

2.3 శాతమును భిన్నముగానో (లేక) దశాంశ సంఖ్యగానో మార్చుట :

i) శాతము అనునది 100 ను హారముగా గల భిన్నము. భిన్నముతో గుర్తించునపుడు, సూక్ష్మ రూపములో వ్రాయవలయును.

ఉదాహరణ 2.8

12% ను భిన్నముగా మార్చుము

సాధన :

$$12\% = \frac{12}{100} \text{ (సూక్ష్మ రూపమునకు మార్చుము)}$$

$$= \frac{3}{25}$$

ఉదాహరణ 2.9

$233\frac{1}{3}\%$ ను భిన్నముగా మార్చుము

సాధన :

$$233\tfrac{1}{3}\% = \frac{700}{3}\%$$

$$= \frac{700}{3 \times 100} = \frac{7}{3}$$

$$= 2\frac{1}{3}$$

> చిన్న భిన్నములు గల శాతములు
>
> $50\% = \frac{1}{2}$
>
> $25\% = \frac{1}{4}$
>
> $33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$
>
> పైన గుర్తించబడియున్న విధముగా వేరే కొన్ని భిన్నములను కనుగొనుము.

ఉదాహరణ 2.10

$\frac{1}{4}\%$ ను భిన్నముగా మార్చుము

సాధన :

$$\frac{1}{4}\% = \frac{1}{4 \times 100} = \frac{1}{400}$$

(ii) శాతము అనునది 100 ను హారముగా గల భిన్నము. ఈ భిన్నమును దశాంశ సంఖ్యగా మార్చుటకు, లవములో ఉన్న సంఖ్య యొక్క దశాంశ బిందువును రెండు సంఖ్యలకు ఎడమ ప్రక్కగా వుంచవలెను.

ఉదాహరణ 2.11

15% ను దశాంశ సంఖ్యగా మార్చుము.

సాధన :

$$15\% = \frac{15}{100} = 0.15$$

ఉదాహరణ 2.12

25.7% ను దశాంశ సంఖ్యగా మార్చుము.

సాధన :

$$25.7\% = \frac{25.7}{100}$$

$$= 0.257$$

గణిత ఆట – (3 కార్డులను కలుపుట)

ఈ ఆటను 2 లేక 3 మంది ఆడవచ్చును.

ఒక్కొక్క శాతమునకునూ తగిన సమాన నిష్పత్తిని దశాంశ సంఖ్యను క్రింది ఇవ్వబడియున్న విధముగా వేర్వేరు కార్డులలో వ్రాయుము.

5%	1 : 20	0.05
$33\frac{1}{3}\%$	1 : 3	0.33

48 కార్డులు గల ఒక కట్టను ఏర్పరచుము. దానిలో ఒక్కొక్క మూడు కార్డులును శాతము, నిష్పత్తి మరియు దశాంశ సంఖ్య రూపములో ఒకే విలువను కలిగియుండును.

కార్డులు కులికి అందరికి సమానముగా కార్డులను వేయుము.

వాటిలో ఒకే విలువను ఇచ్చు (శాతము, నిష్పత్తి, దశాంశ సంఖ్య గల) కార్డులను కనుగొని అందరికి చూపించి మేజాపై ఉంచుము.

మిగిలియున్న కార్డులను తీసుకొని ఆటను మరల ప్రారంభించుము. ఆడువారికి ఎడమప్రక్కనున్న వారి నుండి ఒక కార్డును తీసుకొనుము. ఒకే విలువగల మూడు కార్డులు దొరికిన వాటిని మేజాపై ఉంచుము. ఒకే విలువగల మూడు కార్డులు ఏర్పరచుటకు వీలుకాలేదు. అనిన దానిని అలాగే వుంచుకొనవలయును. ఒకే విలువగల అన్ని మూడు కార్డులు చేరువరకు ఆటను సాగించుము. అధికమైన కార్డులు వున్నవారు గెలుపొందిన వారగుదురు.

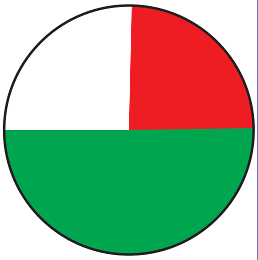
శాతము యొక్క విలువను కనుగొనుట

ఒక వృత్తమును 50% పచ్చ రంగుతోను , 25% ఎరుపు రంగుతోను నింపుము.

$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ వృత్తమును పచ్చ రంగుతో నింపుము.

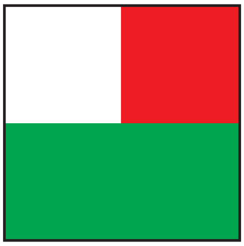
అదే విధముగా, $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$ వృత్తమును ఎరుపు రంగుతో నింపుము



ఇప్పుడు, చతురస్రములో $\frac{1}{2}$ భాగమును పచ్చరంగుతోను, $\frac{1}{4}$ భాగమును ఎరుపు రంగుతోను నింపుము.

రెండు పటములలోనూ పచ్చ రంగు భాగము సమముగా వున్నదా?



వృత్తము యొక్క 50% ను చతురస్రము యొక్క 50% ను సమము కాదు. అదే విధముగా, వృత్తము యొక్క 25% ను చతురస్రము యొక్క 25% ను సమము కాదు.

ఇప్పుడు, ₹100 లో 50% ను ,₹10 లో 50% ను కనుగొనెదము.

₹100 లో 50% ఎంత?

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

కాబట్టి, 100 లో $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 100 = 50$

₹100 లో 50% = ₹50.

₹10 లో 50% ఎంత?

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

10 లో $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$

₹10 లో 50% = ₹5.

ఉదాహరణ 2.13

1000 కి.గ్రా లో 20% ను కనుగొనుము.

సాధన :

$$\begin{aligned} 1000 \text{ లో } 20\% &= 1000 \text{ లో } \frac{20}{100} \\ &= \frac{20}{100} \times 1000 \\ 1000 \text{ కి.గ్రా లో } 20\% &= 200 \text{ కి.గ్రా} \end{aligned}$$

ఉదాహరణ 2.14

200 లో $\frac{1}{2}\%$ ను కనుగొనుము.

సాధన :

$$200 \text{ లో } \frac{1}{2}\% = 200 \text{ లో } \frac{\frac{1}{2}}{100}$$

$$= \frac{1}{2 \times 100} \times 200$$

$$\frac{1}{200} \times 200 = 1$$

$$\therefore 200 \text{ లో } \frac{1}{2}\% = 1$$

ఉదాహరణ 2.15

40 కి.గ్రా.లో 0.75 % ను కనుగొనుము.

సాధన :

$$0.75\% = \frac{0.75}{100}$$

$$40 \text{ కి.గ్రా. లో } 0.75\,\% = \frac{0.75}{100} \times 40$$

$$= \frac{3}{10} = 0.3$$

$$40 \text{ కి.గ్రా. లో } 0.75\,\% = 0.3 \text{ కి.గ్రా.}$$

ఉదాహరణ 2.16

70 మంది గల తరగతిలో, 60% బాలురు అయిన, బాలురు, బాలికల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన :

మొత్తము విద్యార్థులు = 70

బాలుర సంఖ్య = 70 లో 60%

$$= \frac{60}{100} \times 70$$

= 42

బాలుర సంఖ్య = 42

బాలికల సంఖ్య = మొత్తము విద్యార్థులు – బాలురు సంఖ్య

= 70 – 42

= 28

బాలికల సంఖ్య = 28

ఉదాహరణ 2.17

2010 లో ఒక నగరము యొక్క జనసంఖ్య 1,50,000 తర్వాత సంవత్సరములో అది 10% అధికమయ్యెను. అయిన, 2011 లో జనసంఖ్యను కనుగొనుము .

సాధన :

2010 లోని జనసంఖ్య = 1,50,000

అధికరించిన జనసంఖ్య $= \frac{10}{100} \times 1,50,000$

= 15,000

2011 లోని జనసంఖ్య = 150000 + 15000

= 1,65,000

అభ్యాసము 2.3

1. సరైన జవాబును ఎన్నుకొనుము :

(i) 30 % యొక్క సామాన్య భిన్నము

(అ) $\frac{1}{10}$ (ఆ) $\frac{7}{10}$ (ఇ) $\frac{3}{100}$ (ఈ) $\frac{3}{10}$

(ii) $\frac{1}{2}$% యొక్క సామాన్య భిన్నము

(అ) $\frac{1}{2}$ (ఆ) $\frac{1}{200}$ (ఇ) $\frac{200}{100}$ (ఈ) 100

(iii) 25% కు సమానమైన దశాంశ సంఖ్యను కనుగొనుము.

(అ) 0.25 (ఆ) 25 (ఇ) 0.0025 (ఈ) 2.5

(iv) ₹300 లో 10%

(అ) ₹10 (ఆ) ₹20 (ఇ) ₹30 (ఈ) ₹300

(v) ₹150 లో 5%

(అ) ₹7 (ఆ) ₹7.50 (ఇ) ₹5 (ఈ) ₹100

2. క్రింద ఇవ్వబడిన శాతములను భిన్నములుగా మార్చుము.

i) 9% ii) 75% iii) $\frac{1}{4}$% iv) 2.5% v) $66\frac{2}{3}$%

3. క్రింద ఇవ్వబడిన శాతములను దశాంశ సంఖ్యలుగా మార్చుము.

i) 7% ii) 64% iii) 375% iv) 0.03% v) 0.5%

4. విలువను కనుగొనుము :

i) 24 లో 75% ii) ₹72 లో $33\frac{1}{3}$% iii) 80 మీ. లో 45%

iv) 150 లో 72% v) 50 కి.గ్రాలో 7.5%

5. రామ్ తన ఆదాయములో 25% ను బాడుగకు ఇచ్చెను. అతని ఆదాయము ₹25,000గా ఉండునపుడు, అతను బాడుగకు ఇచ్చిన మొత్తము ఎంత?

6. ఒక సమయములో ఒక జట్టు 25 పోటీలలో ఆడినది. దానిలో 36% గెలుపొందినది. ఆ జట్టు గెలిచిన పోటీల సంఖ్యను కనుగొనుము.

7. ఒక గ్రామములో 32,000 జనాభా ఉండిరి. వారిలో 40% పురుషులు, 25% స్త్రీలు, మిగిలిన వారు పిల్లలు అయిన, పురుషులు మరియు పిల్లల సంఖ్యను కనుగొనుము.

8. ఒక పాత కారు ధర ₹45,000 దాని ధర 15% కు తగ్గించిన, దాని క్రొత్త ధర ఎంత?

9. 7,500 జనాభా గల ఒక గ్రామములో చదివినవారు 47% అయిన, చదవనివారు ఎందరు ?

ఆలోచించుము !

1) ఇది సరియా ?

25 లో 20% ను, 20లో 25%ను సమానము.

2) ఒక భోజనశాలలో, రసీదు ప్రకారము 1.5% పన్ను వసూలు చేయబడినది.

అ) పన్ను శాతమును దశాంశ సంఖ్యగా మార్చుము.

ఆ) 6 మంది కుటుంబసభ్యులు ₹750 కు భోజనము చేసిరి. వారు చెల్లించిన పన్ను ఎంత?

ఇ) భోజనశాలకు వారు చెల్లించిన మొత్తము ఎంత?

2.4 లాభము మరియు నష్టము :

2008 లో రామ్ & కంపెనీ ₹1,50,000 లాభము పొందినది.

2009 లో రామ్ & కంపెనీ ₹25,000 నష్టము పొందినది.

రామ్ & కంపెనీ మొదటి సంవత్సరములో లాభమును తర్వాత సంవత్సరములో నష్టమును పొందుటకు వీలగునా ?

సంచులు కర్మాగారము నుండి అంగడికి వచ్చి చేరు కొన్ని స్థలములు చూపబడినవి.

కర్మాగారము

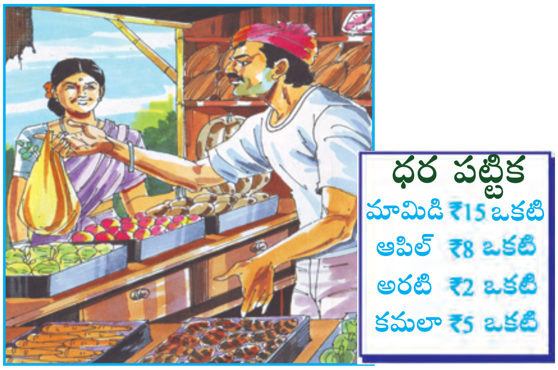
మొత్తం వ్యాపారము

చిల్లర వ్యాపారము

సంచులు ఎక్కడ తయారు చేయబడుచున్నవి?

తయారుచేయువారు వస్తువులను నేరుగా (స్వయముగా) అమ్ముచున్నారా ?

వస్తువులు చివరిగా ఎవరిదగ్గర పోయి చేరును ?



రాజా అను పండ్ల అంగడి వ్యాపారి, పండ్లను మొత్త వ్యాపార అంగడిలో కొని, తన అంగడిలో అమ్మెను. ఒక రోజు , అతడు ఆపిల్ , మామిడి పండ్లను మరియు అరటి పండ్లను కొని అమ్ముచున్నాడు. ధర పట్టికలో ఉండునట్లు ఒక్కొక్క పండుకు 2 ధరలు (ఒక్కొక్క అంగడిలో ఒకటి) ఉండును.

రాజా పండ్లను మార్కెట్‌లో కొనిన ధరను " కొన్నధర" అని చెప్పవచ్చును. అతను పండ్లను అంగడిలో అమ్ముధరను "అమ్మకపుధర" అని చెప్పుదురు.

పైన ఇవ్వబడియున్న ధర పట్టిక నుండి ఆపిల్ మరియు మామిడి పండ్ల అమ్మకపు ధర దాని కొన్న ధర కన్నా అధికముగా ఉన్నది. అంగడి వానికి కొన్న ధర కన్నా కొంచెము అధికముగా లభించుచున్నది. ఈ అధికమైన ధరను "లాభము" అని చెప్పవచ్చును.

మామిడి పండ్ల అమ్మిన ధర = మామిడి పండ్లు కొన్న ధర + లాభము

అమ్మిన ధర = కొన్న ధర + లాభము

లాభము = అమ్మిన ధర – కొన్నధర

= 15 – 10

లాభము = ₹5

లాభము = అమ్మిన ధర – కొన్నధర

ఆపిల్ పండ్లలో,

ఆపిల్ యొక్క అమ్మకపుధర > ఆపిల్ కొన్న ధర, అందువలన లాభము వచ్చును.

లాభము = అమ్మిన ధర – కొన్నధర

= 8 – 6

లాభము = ₹2

అరటి పండ్లు శీఘ్రముగా క్రుళ్లిపోవు గుణము గలవి. అందుచే ఆ అంగడివాడు వాటిని వృధాచేయకుండా అమ్ముటకు ఇష్టపడెను. అందువలన, అతను అరటి పండ్లను కొంచెము తక్కువ ధరకు (కొన్న ధర కన్నా తక్కువ ధర) అమ్మెను. కొన్న ధర నుండి తగ్గించబడిన ధరను "నష్టము" అని చెప్పవచ్చును.

అరటి పండ్లలో,

అరటి పండ్ల కొన్నధర > అరటి పండ్ల అమ్మిన ధర, కావున నష్టము వచ్చును.

అరటి పండ్ల అమ్మకపుధర = అరటిపండ్ల కొన్నధర – తగ్గించబడిన ధర

అమ్మకపు ధర = కొన్న ధర – నష్టము

నష్టము = కొన్న ధర – అమ్మిన ధర

నష్టము = 3 – 2

నష్టము = ₹1

నష్టము = కొన్న ధర – అమ్మిన ధర

1. ఒక వస్తువు అమ్మిన ధర, కొన్నధర కన్నా అధికముగా ఉండునట్లయితే, లాభము పొందగలరు.

   లాభము = అమ్మిన ధర – కొన్నధర

2. ఒక వస్తువు కొన్నధర , అమ్మిన ధర కన్నా అధికముగా ఉండునట్లయితే , నష్టము పొందగలరు.

   నష్టము = కొన్నధర – అమ్మినధర

3. అమ్మకపు ధర = కొన్న ధర + లాభము
4. అమ్మకపు ధర = కొన్న ధర – నష్టము

లాభము / నష్టము శాతమును కనుగొనుట :

రాకేష్ ₹10,000 కు వస్తువులను కొని వాటిని ₹11,000 కు అమ్మినందున ₹1000 లాభమును పొందెను. అయితే రమేష్ ₹1,00,000 కు వస్తువులను కొని ₹1.01,000 కు అమ్మినందున ₹1,000 లాభమును పొందెను.

వారిద్దరు ఒకే లాభమును పొందిననూ, వారిద్దరు ఒకే విధమైన ఫలితమును సంపాదించారు అని చెప్పుటకు వీలగునా? వీలుకాదు.

ఎవరు అధిక లాభము తీసియున్నారు అని తెలుసుకొనుటకు, లాభమును పెట్టుబడి ధరతో పోల్చ వలెను. శాతముగా వ్రాయునపుడు సంఖ్యలను పోల్చుట సులభమగుచున్నది. కనుక, లాభశాతమును కనుగొనుము.

రాకేష్ ₹10,000 పెట్టుబడి పెట్టునపుడు ₹1,000 లాభము పొందుచున్నాడు.

అనగా ₹10,000 లో ₹1,000 లాభము పొందెను.

అందువలన, ఒక్కొక్క ₹1కి లభించు లాభము $\frac{1000}{10000}$ అగును

కాబట్టి ₹100 కి లాభము $= \frac{1000}{10,000} \times 100$

లాభశాతము $= 10\%$

ప్రయత్నించుము

1) హారము 100 గా గల ఒక్కొక్క భిన్నమును ____________ అని చెప్ప వచ్చును.
2) $\frac{1}{2}$ = ___________%
3) 35% = ___________ (భిన్నములో)
4) 0.05 = ___________%
5) $\frac{1}{4}$ = __ %

రమేష్ ₹1,00,000 పెట్టుబడి పెట్టునపుడు ₹ 1000 లాభమును పొందెను.

₹1,00,000 లో ₹1000 లాభము $= \frac{1000}{100000}$

లాభశాతము $= \frac{1000}{100000} \times 100 = 1\%$

పైన చెప్పబడిన దాని నుండి రాకేష్ , రమేష్ కన్నా అధిక లాభము పొందెను అని చెప్పవచ్చును.

కాబట్టి,

$$\text{లాభశాతము} = \frac{\text{లాభము}}{\text{కొన్న ధర}} \times 100$$

అదే విధముగా, నష్టశాతమును కనుగొనబడుచున్నది

$$\text{నష్టశాతము} = \frac{\text{నష్టము}}{\text{కొన్న ధర}} \times 100$$

లాభ శాతము (లేక) నష్ట శాతము కనుగొనునపుడు ఒక వస్తువు యొక్క కొన్నధరలో మాత్రమే లెక్కించవలయును.

ఉదాహరణ 2.18

ఒక మొత్తవ్యాపారి, ఒక టెలివిజన్ సెట్‌ను ₹10,000కు కొని, ₹12,000 లకు అమ్మెను. ఒక టెలివిజన్ యొక్క లాభము / నష్టమును కనుగొనుము. 5 టెలివిజన్ లు అమ్మినందున లభించు లాభము / నష్టము మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన :

ఒక టెలివిజను అమ్మకపు ధర = ₹12,000

ఒక టెలివిజన్ కొన్న ధర = ₹10,000

అమ్మకపు ధర > కొన్న ధర, అందువలన లాభము లభించును

లాభము = అమ్మకపు ధర – కొన్నధర

= 12000 – 10000

లాభము = ₹2,000

ఒక టెలివిజన్ అమ్మినందున లభించిన లాభము = ₹2,000

5 టెలివిజన్‌లు అమ్మినందున లభించిన లాభము = 2000×5

5 టెలివిజన్‌లు అమ్మినందున లభించిన లాభము = ₹10,000

ఉదాహరణ 2.19

సంజయ్ ఒక సైకిలును ₹5,000 లకు కొనెను. రెండు సంవత్సరముల తరువాత ₹ 600 కు తగ్గించి అమ్మెను. సైకిలు యొక్క అమ్మినధర మరియు నష్టశాతమును కనుగొనుము.

సాధన :

సైకిలు కొన్నధర = ₹5000

నష్టము = ₹600

అమ్మకపు ధర = కొన్న ధర – నష్టము

= 5000 – 600

సైకిలు అమ్మకపు ధర = ₹4400

$$\text{నష్టశాతము} = \frac{\text{నష్టము}}{\text{కొన్న ధర}} \times 100$$

$$= \frac{600}{5000} \times 100$$

$$= 12$$

నష్టశాతము = 12%

ఉదాహరణ 2.20

ఒక వ్యక్తి ఒక పాత సైకిలును ₹1,250 లకు కొనెను. దానిని బాగు చేయుటకు ₹250 ను ఖర్చు పెట్టెను. అతను దానిని ₹1400 లకు అమ్మెను. అతని యొక్క లాభము లేక నష్ట శాతమును కనుగొనుము.

సాధన :

సైకిలు కొన్న ధర = ₹1,250

బాగుచేయుటకు అయిన ఖర్చు = ₹250

మొత్తము కొన్న ధర = 1250 + 250 = ₹1,500

అమ్మకపు ధర = ₹1,400

కొన్న ధర > అమ్మినధర, నష్టము ఏర్పడును.

నష్టము = కొన్నధర – అమ్మినధర

= 1500 – 1400

= 100

నష్టము = ₹100

నష్టశాతము = $\frac{\text{నష్టము}}{\text{కొన్న ధర}} \times 100$

= $\frac{100}{1500} \times 100$

= $\frac{20}{3}$

= $6\frac{2}{3}$ (లేక) 6.67

నష్టశాతము = 6.67%

ఉదాహరణ 2.21

ఒక పండ్ల వ్యాపారి 8 పెట్టెల ద్రాక్షను, ఒక పెట్టె ధర ₹150 కు కొనెను. దానిలో ఒక పెట్టె క్రుళ్ళిపోయినది. మిగిలిన పెట్టెలను ఒక పెట్టె ధర ₹190 కు అమ్మెను. దీని నుండి లాభము / నష్ట శాతమును కనుగొనుము.

సాధన :

ఒక పెట్టె ద్రాక్ష కొన్న ధర = ₹150

8 పెట్టెల ద్రాక్ష కొన్నధర = 150×8

= ₹1200

క్రుళ్ళిపోయిన పెట్టెల సంఖ్య = 1

అమ్మిన పెట్టెల సంఖ్య = 8 – 1

= 7

ఒక పెట్టె అమ్మిన ధర = ₹190

7 పెట్టెలు అమ్మిన ధర = 190 × 7

= ₹1330

అమ్మిన ధర > కొన్న ధర, లాభము లభించును

లాభము = అమ్మిన ధర – కొన్నధర

= 1330 – 1200

= 130

లాభము = ₹130

లాభశాతము = $\frac{\text{లాభము}}{\text{కొన్న ధర}} \times 100$

= $\frac{130}{1200} \times 100$

= 10.83

లాభశాతము = 10.83%

ఉదాహరణ 2.22

రాము అను అంగటివాడు ఒక కలమును ₹50 కు కొని ₹5. నష్టమునకు అమ్మెను. ఆ కలము అమ్మకపు ధరను కనుగొనుము.

సాధన :

కలము కొన్నధర = ₹50

నష్టము = ₹5

అమ్మకపుధర = కొన్నధర – నష్టము

= 50 – 5

= 45

కలము అమ్మకపుధర = ₹45.

ఉదాహరణ 2.23

ఒక పాఠశాలలో జరుగు ఉత్సవమునకు శృతి కేక్ తయారు చేసెను. ఒక కేకు కొన్న ధర ₹55 అగును. ఆమె ఒక్కొక్క కేకును ₹11 లాభమునకు 25 కేకులను అమ్మియుండిన కేకుల అమ్మకపు ధరను మరియు లాభశాతమును కనుగొనుము.

సాధన :

ఒక కేకు కొన్నధర = ₹55

అమ్మినకేకుల సంఖ్య = 25

25 కేకుల కొన్న ధర = 55 × 25 = ₹1375

1 కేకు లాభము = ₹11

25 కేకుల లాభము = 11 × 25 = ₹275

అమ్మకపుధర = కొన్నధర + లాభము

= 1375 + 275

= 1,650

అమ్మకపుధర = ₹1,650

లాభశాతము = $\frac{\text{లాభము}}{\text{కొన్న ధర}} \times 100$

$= \frac{275}{1375} \times 100$

= 20

లాభశాతము = 20%

అభ్యాసము 2.4

1. సరైన జవాబును ఎన్నుకొనుము :

i) ఒక సంచి కొన్న ధర ₹575 మరియు అమ్మినధర ₹625 గా ఉండిన లాభము ₹

(అ) 50 (ఆ) 575 (ఇ) 625 (ఈ) ఇవి ఏవియు కాదు

ii) ఒక పెట్టె కొన్నధర ₹155 మరియు అమ్మిన ధర ₹140 గా ఉండిన నష్టము ₹

(అ) 155 (ఆ) 140 (ఇ) 15 (ఈ) ఇవి ఏవియు కాదు

iii) ఒక సంచి అమ్మిన ధర ₹235 మరియు కొన్నధర ₹200 గాఉండిన

(అ) లాభము ₹235 (ఆ) నష్టము ₹3

(ఇ) లాభము ₹35 (ఈ) నష్టము ₹200

iv) లాభము లేక నష్ట శాతము ఎల్లప్పుడు .... మీద లెక్క చేయబడును

(అ) కొన్న ధర (ఆ) అమ్మిన ధర (ఇ) లాభము (ఈ) నష్టము

v) ఒక వ్యక్తి ₹250 లకు కొన్న వస్తువును ₹25 లాభమునకు అమ్మెను దాని లాభశాతము.

(అ) 25 (ఆ) 10 (ఇ) 250 (ఈ) 225

అభ్యాసము

2. క్రింది ఇవ్వబడిన పట్టికను పూర్తిచేయుము

కొన్నధర ₹	అమ్మిన ధర ₹	లాభము ₹	నష్టము ₹
144	168		
59	38		
600	635.45		
26599	23237		
107.50	100		

3. కొన్నధర మరియు లాభము / నష్టము ఇవ్వబడియున్నది. వాటి అమ్మకపు ధరను కనుగొనుము.

i) కొన్నధర = ₹450 లాభము = ₹80

ii) కొన్నధర = ₹760 నష్టము = ₹140

iii) కొన్నధర = ₹980 లాభము = ₹47.50

iv) కొన్నధర = ₹430 నష్టము = ₹93.25

v) కొన్నధర = ₹999.75 నష్టము = ₹56.25

4. వినోద్ ఒక ఇంటిని ₹27, 50,000 లకు కొనెను. అతడు ఇంటిని బాగుచేయుటకు ₹2,50,000 లను ఖర్చుచేసెను. ఆ ఇంటిని ₹33,00,000 లకు అమ్మెను. అయిన, లాభ (లేక) నష్టశాతమును కనుగొనుము.

5. ఒక అంగటి వ్యాపారి 10 అరటిపండ్లను ₹100కు తీసుకొనెను. వాటిలో 2 అరటిపండ్లు కుళ్లిపోయెను. మిగిలియున్న పండ్లను ఒక పండు ₹11 కు అమ్మెను. అతనికి లభించిన లాభ (లేక) నష్టశాతమును కనుగొనుము.

6. ఒక అంగడివాడు 100 కలములను ₹250 లకు కొనెను. ఒక్కొక్క కలము ₹4కు అమ్మెను. లాభశాతమును కనుగొనుము.

7. ఒక కూరగాయల వ్యాపారి 40 కి.గ్రా ఎర్రగడ్డలను ₹360 లకు కొనెను. అతను ఒక కి.గ్రా ₹11 ధరకు 36 కి.గ్రాలను అమ్మెను. మిగిలియున్న వాటిని ఒక కి.గ్రా ₹4.50 ల ధరకు అమ్మెను. అతనికి లభించిన లాభ / నష్టశాతమును కనుగొనుము.

ప్రయత్నించుము

ఒక వస్తువు కర్మాగారమునందు ఉత్పత్తి చేసి బయటకు వచ్చినప్పటి నుండి కొనుగోలు దారులను చేరునంత వరకు మారునట్టి వేర్వేరు స్థలములు ఏవి?

ఆలోచించుము !

ఉత్పత్తి చేయు వారే స్వయముగా (నేరుగా) అమ్మిన, కొనుగోలు దారులకు సౌకర్యముగా ఉండునా? చర్చించుము.

మీరు చేసి చూడండి:

1. కి.గ్రా ₹100, ₹80 లు ఉన్న రెండు రకముల నూనెలను ఒక వ్యాపారి 3: 2 అను నిష్పత్తిలో కలిపి దానిని ఒక కి.గ్రా ₹101.20 లకు అమ్ముచున్నాడు. అతని లాభ లేక నష్టశాతమును కనుగొనుము.
2. సతీష్ ఒక కెమెరాను రాజేష్‌కు 10% లాభమునకు అమ్మెను, రాజేష్ దానిని జాన్ దగ్గర 12% నష్టమునకు అమ్మెను, జాన్ ₹4,840 చెల్లించియుండిన, ఆ కెమెరాను సతీష్ ఎంత ధరకు కొనెను?
3. ఒక పుస్తకముల వ్యాపారికి ఒక పుస్తకమును 5% నష్టమునకు అమ్ముకుండా 5% లాభమునకు అమ్మినపుడు ₹15 అధికముగా లభించినది. అయిన పుస్తకము కొన్న ధరను కనుగొనుము.

2.5 బారువడ్డీ (Simple Interest)

₹10,000 ను ఇప్పుడు చెల్లించి 7 సంవత్సరముల చివరిలో రూ. 20,000ను తీసుకొనవచ్చును.

₹10,000 ను ఇప్పుడు చెల్లించి 6 సంవత్సరముల చివరిలో రూ. 20,000ను తీసుకొనవచ్చును.

లోకేష్ తాను బహుమతిగా తీసిన ₹5,000 ను జూన్ 2008 సం॥లో బ్యాంకులో పెట్టుబడిగా వేసియుండెను.

ఒక సంవత్సరమునకు తర్వాత రూ. 5,400 లుగా తిరిగిపొందెను. అతను ఎందుకు ఎక్కువ డబ్బును తీసుకొన్నాడు?

ఎంత డబ్బులు అతనికి అధికముగా లభించినది ?

₹5,000 ను అతను తన సంచిలో ఉంచుకొని యుండిన, ₹400 ను లాభముగా తీసుకొని యుండుటకు వీలగునా?

లోకేష్ ₹5,000 ను ఒక సంవత్సరమునకు పెట్టుబడిగా చెల్లించి, ఒక సంవత్సరము చివరిలో ₹ 5,400 గా తీసుకొనెను.

మనము అప్పుగా తీసుకొనునపుడు తీసుకొను సొమ్ముకన్నా అధికముగా చెల్లించెదము. అదే సమయములో అప్పు ఇచ్చునపుడు ఇచ్చు సొమ్ముకన్నా అధికమైన సొమ్మును తీసుకొందుము. ఈ అధికమైన సొమ్మును వడ్డీ (I) అని గుర్తించుచున్నాము.

పైన చెప్పిన సందర్భములో, లోకేష్ ₹400 ను వడ్డీగా (I) తీసుకొనెను. ₹5,000 అప్పుగా తీసుకొను (లేక) ఇచ్చుచున్న సొమ్మును అసలు (P) అని గుర్తించుచున్నాము.

ఈ విధముగా పెట్టుబడిగా (ముందుగా) చెల్లించిన ₹ 5,000 లు అసలు అగును.

అసలు వడ్డీతో కలిసిన సొమ్ము, మొత్తము (A) అగును.

పై విధములో చెప్పిన మొత్తము = అసలు + వడ్డీ

= ₹5000 + ₹400 = ₹5,400.

వడ్డీ అనునది ఎల్లప్పుడూ ఒకే మాదిరిగా ఉండిపోవునా?

నిశ్చయముగా ఉండదు, ఇప్పుడు క్రింది వచ్చు సంఘటనలను చూచెదము.

(i) పెట్టుబడి సొమ్ముగా చెల్లించబడు అసలు ₹5,000 ల నుండి ₹10,000 గా ఎక్కువగునపుడు, వడ్డీ కూడా ఎక్కువగునా?

(ii) అదే విధముగా, ₹5,000 ఎక్కువ సంవత్సరములకు పెట్టుబడిగా ఉంచునపుడు వడ్డీ సొమ్ము ఎక్కువగునా ?

అవును. పైన చెప్పిన రెండు సంఘటనలలో వడ్డీ అధికమగును. పైన చెప్పిన విధముగా అసలును బట్టి మరియు పెట్టుబడి సొమ్ముకు తగిన సంవత్సరములను బట్టియు వడ్డీ అధికమగును. కాని వడ్డీరేటును బట్టియూ ఇది మారును.

సంవత్సర పొడవున ₹100 కు వడ్డీరేటుగా లెక్కించబడును. అనగా, సంవత్సరమునకు వడ్డీ రేటు 10% గా ఉండిన ఆ సంవత్సరమునకు ₹100 కు ₹10 వడ్డీ గా పొందవచ్చును.

కనుక, వడ్డీ క్రింది ఇవ్వబడిన వాటికి సంబంధించి యుండును.

అసలుగా చెల్లించబడు (లేక) తీసుకొను సొమ్ము (P) కాలము (n) (అనేకముగా సంవత్సరములుగా వుండును) వడ్డీ రేటు (r)

ఈ వడ్డీ, అసలు సొమ్మును అనుసరించి మాత్రమే ఉండుట వలన దీనిని బారువడ్డీ (లేక) సాధారణ వడ్డీ అని గుర్తించుచున్నాము.

వడ్డీని కనుగొనుట :

అసలు ₹100 గాను, వడ్డీ రేటు 'r' గాను ఉండిన

1 సంవత్సరమునకు వడ్డీ $= 100 \times 1 \times \frac{r}{100}$

2 సంవత్సరములకు వడ్డీ $= 100 \times 2 \times \frac{r}{100}$

3 సంవత్సరములకు వడ్డీ $= 100 \times 3 \times \frac{r}{100}$

n సంవత్సరములకు వడ్డీ $= 100 \times n \times \frac{r}{100}$

కావున, (వడ్డీ) I $= \frac{Pnr}{100}$

$$\text{మొత్తము (A)} = P + I$$

$$A = P + \frac{Pnr}{100}$$

$$A = P\left(1 + \frac{nr}{100}\right)$$

$$\text{వడ్డీ} = \text{మొత్తము} - \text{అసలు}$$

$$I = A - P$$

$I = \frac{Pnr}{100}$ అను సూత్రము నుండి క్రిందనున్న సూత్రములను పొందవచ్చును.

$$r = \frac{100I}{Pn}$$

$$n = \frac{100I}{Pr}$$

$$P = \frac{100I}{rn}$$

గమనిక : 'n' అనునది ఎల్లప్పుడు సంవత్సరములలో లెక్కించబడును. 'n' నెలలలో, రోజులలో ఉండిన దానిని సంవత్సరములుగా మార్చి లెక్కించబడవలయును.

ఖాళీ స్థలములను పూరింపుము :

ప్రయత్నించుము

అసలు ₹	వడ్డీ ₹	మొత్తము ₹
5,000	500	
12,500		17,500
	6,000	25,000
8,450	750	
12,000		15,600

ఉదాహరణ 2.24

కమల్ ఒక సంవత్సరమునకు 7 % వడ్డీ రేటులో ₹3,000ను నిల్వయుంచెను. ఒక సంవత్సరము ముగింపులో అతను తీసుకొను బారువడ్డీ, మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన :

అసలు (P) = ₹3,000

సంవత్సరములు (n) = 1

వడ్డీరేటు (r) = 7 %

$$\text{బారువడ్డీ (I)} = \frac{Pnr}{100}$$

$$= \frac{3000 \times 1 \times 7}{100}$$

$$I = ₹210$$

$$A = P + I$$

$$= 3000 + 210$$

మొత్తము (A) = ₹3,210

ఉదాహరణ 2.25

రాధిక సంవత్సరమునకు 11 % వడ్డీ రేటులో ₹5,000 ను 2 సంవత్సరములకు పెట్టుబడిగా చెల్లించెను, 2 సంవత్సరముల ముగింపులో ఆమె పొందు బారువడ్డీని, మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన :

అసలు (P) = ₹5,000

సంవత్సరములు (n) = 2 సం॥లు

వడ్డీరేటు (r) = 11 %

$$I = \frac{Pnr}{100}$$

$$= \frac{5000 \times 11 \times 2}{100}$$

$$= 1100$$

$$I = ₹1,100$$

మొత్తము (A) = P + I

$$= 5000 + 1100$$

$$A = ₹6,100$$

ఉదాహరణ 2.26

₹7,500 లకు 8 % వడ్డీరేటులో ఒక సంవత్సరము 6 మాసములకు బారువడ్డీ, మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన :

P = ₹7,500

n = 1 సంవత్సరము 6 మాసములు

= $1\frac{6}{12}$ సం॥లు

= $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ సం॥లు

r = 8 %

నీకు తెలుసా?

12 మాసములు = 1 సం॥ము

6 మాసములు = $\frac{6}{12}$ సం॥ము

= $\frac{1}{2}$ సం॥ము

3 మాసములు = $\frac{3}{12}$ సం॥ము

= $\frac{1}{4}$ సం॥ము

$$I = \frac{Pnr}{100}$$

$$= \frac{7500 \times \frac{3}{2} \times 8}{100}$$

$$= \frac{7500 \times 3 \times 8}{2 \times 100}$$

$$= 900$$

I = ₹900

మొత్తము (A) = P + I

= 7500 + 900

= ₹8,400

వడ్డీ = ₹900, మొత్తము = ₹8,400

మరొక పద్ధతి:

P = ₹7,500

$n = \frac{3}{2}$ సంవత్సరములు

r = 8 %

మొత్తము (A) $= P\left(1 + \frac{nr}{100}\right)$

$$= 7500\left(1 + \frac{\frac{3}{2} \times 8}{100}\right)$$

$$= 7500\left(1 + \frac{3 \times 8}{2 \times 100}\right)$$

$$= 7500\left(\frac{28}{25}\right)$$

$$= 300 \times 28$$

$$= 8400$$

A = ₹8400

I = A – P

= 8400 – 7500

= 900

I = ₹900

వడ్డీ = ₹900

మొత్తము = ₹8,400

ఉదాహరణ 2.27

₹6,750 లకు 219 రోజులకు 10 % వడ్డీ రేటున బారువడ్డీ మరియు మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన :

P = ₹6,750

n = 219 రోజులు

= $\frac{219}{365}$ సం॥ము = $\frac{3}{5}$ సం॥ము

r = 10 %

I = $\frac{Pnr}{100}$

I = $\frac{6750 \times 3 \times 10}{5 \times 100}$

= 405

I = ₹405

A = P + I

= 6750 + 405

= 7,155

A = ₹7,155

వడ్డీ = ₹405, మొత్తము = ₹7,155

> **ఇది నీకు తెలియునా?**
>
> 365 రోజులు = 1 సం॥ము
>
> 219 రోజులు = $\frac{219}{365}$ సం॥ము
>
> = $\frac{3}{5}$ సం॥ము
>
> 73 రోజులు = $\frac{73}{365}$ సం॥ము
>
> = $\frac{1}{5}$ సం॥ము

ఉదాహరణ 2.28

రాహుల్ ₹4,000 ను 07-06-06 లో తీసుకొని దానిని 19-08-06 లో తిరిగి చెల్లించెను. 5 % రేటున వడ్డీ లెక్కించబడిన, అతను చెల్లించిన మొత్తమును కనుగొనుము?

సాధన :

P = ₹4,000

r = 5 %

రోజులు, జూన్ = 24 (30 – 6)

జూలై = 31

ఆగష్టు = 18

మొత్తము రోజులు = 73

n = 73 రోజులు

> **ఇది నీకు తెలుసా?**
>
> ఏప్రిల్, జూన్, సెప్టెంబర్ మరియు నవంబరు నెలలకు 30 రోజులు ఉండును. ఫిబ్రవరి తప్ప మిగిలిన నెలలకు 31 రోజులు ఉండును.

$$= \frac{73}{365} \text{ సంవత్సరము}$$

$$= \frac{1}{5} \text{ సంవత్సరము}$$

$$A = P\left(1 + \frac{nr}{100}\right)$$

$$= 4000\left(1 + \frac{1 \times 5}{5 \times 100}\right)$$

$$= 4000\left(1 + \frac{1}{100}\right)$$

$$= 4000\left(\frac{101}{100}\right)$$

$$= 4{,}040$$

మొత్తము $= ₹4{,}040$

ఉదాహరణ 2.29

₹7,000 అసలుకు 16 మాసములలో ₹1,680 బారువడ్డీ లభించిన వడ్డీ రేటును కనుగొనుము.

సాధన :

$P = ₹7{,}000$

$n = 16$ మాసములు

$= \frac{16}{12}$ = సంవత్సరము $= \frac{4}{3}$ సంవత్సరము

$I = ₹1{,}680$

$r = ?$

$$r = \frac{100I}{Pn}$$

$$= \frac{100 \times 1680}{7000 \times \frac{4}{3}}$$

$$= \frac{100 \times 1680 \times 3}{7000 \times 4}$$

$$= 18$$

వడ్డీ రేటు $(r) = 18\ \%$

ఉదాహరణ 2.30

విజయ్ ₹10,000 ను 5 % వడ్డీరేటున పెట్టుబడిగా చెల్లించెను. కొన్ని సంవత్సరముల తరువాత ₹11,000 పొందెను. సంవత్సరముల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన :

$A = ₹11{,}000$

$P = ₹10{,}000$

$$r = 5\%$$

$$n = ?$$

$$I = A - P$$

$$= 11{,}000 - 10{,}000$$

$$= 1{,}000$$

$$I = ₹1000$$

$$n = \frac{100\,I}{P\,r}$$

$$= \frac{100 \times 1000}{10000 \times 5}$$

$n = 2$ సంవత్సరములు

మరొక పద్ధతి:

$$A = P\left(1 + \frac{nr}{100}\right)$$

$$11000 = 10000\left(1 + \frac{n \times 5}{100}\right)$$

$$\frac{11000}{10000} = 1 + \frac{n}{20}$$

$$\frac{11}{10} = \frac{20 + n}{20}$$

$$\frac{11}{10} \times 20 = 20 + n$$

$$22 = 20 + n$$

$$22 - 20 = n$$

$n = 2$ సంవత్సరములు

ఉదాహరణ 2.31

ఒక గుర్తించిన అసలు 8 % వడ్డీ రేటులో ఒక గుర్తించిన కాలములో మూడింతలు అయ్యెను. ఎన్ని సంవత్సరములలో మూడింతలు అగునని కనుగొనుము .

సాధన :

అసలును ₹P అని అనుకొందాము.

మొత్తము = మూడింతలు అసలు

$$= ₹3\,P$$

$$r = 8\%$$

$$n = ?$$

$$I = A - P$$
$$= 3P - P$$
$$= 2P$$
$$I = ₹2\ P$$
$$n = \frac{100I}{Pr}$$
$$= \frac{100 \times 2P}{P \times 8}$$
$$n = 25 \text{ సంవత్సరములు}$$

సంవత్సరముల సంఖ్య = 25

మరొక పద్ధతి:

అసలును ₹100 అనుకొనుము

$$\text{మొత్తము} = 3 \times 100$$
$$= ₹300$$
$$I = A - P$$
$$= 300 - 100$$
$$I = ₹200.$$
$$n = \frac{100I}{Pr} = \frac{100 \times 200}{100 \times 8}$$
$$n = \frac{200}{8} = 25$$

సంవత్సరముల సంఖ్య = 25.

ఉదాహరణ 2.32

ఒక గుర్తించిన అసలు 8% వడ్డీ రేటులో 5 సంవత్సరములలో ₹10,080 అయినది, అసలును కనుగొనుము

సాధన :

$$A = ₹10,080$$
$$n = 5 \text{ సంవత్సరములు}$$
$$r = 8\ \%$$
$$P = ?$$
$$A = P\left(1 + \frac{nr}{100}\right)$$

$$10080 = P\left(1 + \frac{5 \times 8}{100}\right)$$
$$10080 = P\left(\frac{7}{5}\right)$$
$$10080 \times \frac{5}{7} = P$$
$$7{,}200 = P$$

అసలు = ₹7,200

ఉదాహరణ 2.33

ఒక గుర్తించిన అసలు 6 సంవత్సరములలో ₹8,880 గాను 4 సంవత్సరములలో ₹7,920 గాను మారుచున్నది. అసలు మరియు వడ్డీ రేటును కనుగొనుము.

సాధన :

6 సంవత్సరముల మొత్తము = అసలు + 6 సం॥ముల వడ్డీ

$= P + I_6 = 8880$

4 సంవత్సరముల మొత్తము = అసలు + 4 సం॥ముల వడ్డీ

$= P + I_4 = 7920$

$I_2 = 8880 - 7920$

$= 960$

2 సంవత్సరముల వడ్డీ = ₹960

1 సంవత్సరము వడ్డీ $= \frac{960}{2}$

$= 480$

4 సంవత్సరముల వడ్డీ $= 480 \times 4$

$= 1{,}920$

$P + I_4 = 7920$

$P + 1920 = 7920$

$P = 7920 - 1920$

$P = 6{,}000$

అసలు = ₹6,000

$$r = \frac{100I}{pn}$$
$$= \frac{100 \times 1920}{6000 \times 4}$$
$$r = 8\,\%$$

అభ్యాసము 2.5

1. సరైన జవాబును ఎన్నుకొనుము:

i) ₹1000 కు 10 % వడ్డీ రేటున 2 సంవత్సరములకు బారువడ్డీ

(అ) ₹1000 (ఆ) ₹200 (ఇ) ₹100 (ఈ) ₹2000

ii) మొత్తము = ₹11,500 మరియు అసలు = ₹11,000 అయిన, వడ్డీ

(అ) ₹500 (ఆ) ₹22,500 (ఇ) ₹11,000 (ఈ) ₹10,000

iii) 6 మాసములు =

(అ) $\frac{1}{2}$ సం॥ము (ఆ) $\frac{1}{4}$ సం॥ము (ఇ) $\frac{3}{4}$ సం॥ము (ఈ) 1 సం॥ము

iv) 292 రోజులు =

(అ) $\frac{1}{5}$ సం॥ము (ఆ) $\frac{3}{5}$ సం॥ము (ఇ) $\frac{4}{5}$ సం॥ము (ఈ) $\frac{2}{5}$ సం॥ము

v) P = ₹14000 మరియు I = ₹1000, అయిన, A అనునది

(అ) ₹15000 (ఆ) ₹13000 (ఇ) ₹14000 (ఈ) ₹1000

2. ₹5,000 లకు 10 % వడ్డీరేటున 5 సంవత్సరములలో లభించు బారువడ్డీ, మొత్తమును కనుగొనుము.
3. ₹1,200 లకు $12\frac{1}{2}$% వడ్డీరేటున 3 సంవత్సరములలో లభించు బారువడ్డీ, మొత్తమును కనుగొనుము.
4. లోకేష్ ₹10,000 ను సంవత్సరమునకు 10 % వడ్డీ రేటున వడ్డీ ఇచ్చు ఒక బ్యాంకులో పెట్టుబడిగా చెల్లించెను. ఆ మొత్తమును 2 సంవత్సరములు 3 మాసములకు తరువాత అతను తిరిగి పొందెను. అతను పొందిన వడ్డీను కనుగొనుము.
5. ₹2,500ను 13% సంవత్సర వడ్డీ రేటున పెట్టుబడిగా చెల్లించిన, 146 రోజులలో పొందిన మొత్తమును కనుగొనుము.
6. ₹12,000 లకు 9% సంవత్సర వడ్డీ రేటున మే 21,1999 నుండి ఆగష్టు 2,1999 వరకు లభించు బారువడ్డీ మరియు మొత్తమును కనుగొనుము.
7. సత్యా ₹6,000 ను ఒక బ్యాంకులో చెల్లించి 5 సంవత్సరముల ముగింపులో ₹7500 ను పొందెను, అయిన వడ్డీరేటును కనుగొనుము.
8. 10 % సంవత్సర వడ్డీ రేటులో $2\frac{1}{2}$ సంవత్సరములలో ₹250 లు, వడ్డీని ఇచ్చు అసలు కనుగొనుము.
9. ఎన్ని సంవత్సరములలో 8 % వడ్డీ రేటులో ₹5,000 లు, ₹5,800 లుగా మారును ?
10. ఒక మొత్తము 10 సంవత్సరములలో రెండింతలుగా లభించెను. అయిన వడ్డీ రేటును కనుగొనుము.
11. ఒక మొత్తము $12\frac{1}{2}$% సంవత్సర వడ్డీ రేటులో ఒక గుర్తించిన సంవత్సరములో రెండింతలు అగుచున్నది. సంవత్సరముల సంఖ్యను కనుగొనుము.
12. ఒక గుర్తించిన మొత్తము 6 % వడ్డీరేటులో 3 సంవత్సరములలో ₹6,372 అయినది. అయిన అసలును కనుగొనుము.
13. ఒక గుర్తించిన మొత్తము 3 సంవత్సరములలో ₹6,500 గాను $1\frac{1}{2}$ సంవత్సరములలో ₹5,750 గాను మారుచున్నది.. అసలు, వడ్డీరేటును కనుగొనుము.

14. ₹ 3600లకు 15% వడ్డీరేటుతో 3 సం॥ల 9 నెలలకు అగు వడ్డీని, మొత్తమును కనుగొనుము.

15. $3\frac{1}{4}$ సం॥లలో 16% వడ్డీ రేటుతో ₹ 2080 వడ్డీనిచ్చు అసలు ఎంత?

ఆలోచించుము !

1) ఒక అసలు 2 సంవత్సరములలో $\frac{9}{4}$ రెట్లు అగును అనిన, దాని వడ్డీ రేటు (శాతము) ఎంత?

2) పది సంవత్సరములు తరువాత రాముకు ₹6,00,000 కావలసియున్నది. సంవత్సరమునకు 20 % ఇచ్చు బ్యాంకులో రాము అసలుగా ఎంత పెట్టుబడి పెట్టవలయును?

గుర్తుంచుకోవలసిన విషయములు

1. ఒక భిన్నములో హారము 100 (లేక) ఒక నిష్పత్తి యొక్క రెండవ పదము 100 గా ఉండిన, దానిని "శాతము" అందురు.
2. శాతమును '%' అని గుర్తించెదము. శాతము అనునది నూటికి అని అర్థము.
3. భిన్నమును (లేక) దశాంశ సంఖ్యను శాతముగా మార్చుటకు దానిని 100 చే గుణించవలయును
4. ఒక వస్తువును తీసుకొను ధరను "కొన్నధర" అని అందురు.
5. ఒక వస్తువును అమ్ముధరను "అమ్మకపుధర" అని అందురు.
6. ఒక వస్తువు అమ్మకపు ధర కొన్నధరకన్నా ఎక్కువగా ఉండిన లాభము లభించును.
7. ఒక వస్తువు కొన్న ధర అమ్మకపు ధర కన్నా ఎక్కువగా ఉండిన, నష్టము ఏర్పడును.
8. మొత్తము కొన్నధర = కొన్నధర + బాగుచేయు ఖర్చు(లేక) రవాణా ఖర్చు.
9. లాభము (లేక) నష్టము ఒకే పరిమాణము గల వస్తువులకు మాత్రమే లెక్కించబడవలయును.
10. లాభము = అమ్మకపు ధర – కొన్న ధర
11. నష్టము = కొన్నధర – అమ్మకపు ధర

12. లాభశాతము $= \frac{\text{లాభము}}{\text{కొన్న ధర}} \times 100$

13. నష్టశాతము $= \frac{\text{నష్టము}}{\text{కొన్న ధర}} \times 100$

14. అమ్మకపు ధర = కొన్నధర + లాభము

15. అమ్మకపు ధర = కొన్నధర – నష్టము

16. వడ్డీని కనుగొనుటకు సూత్రము $I = \frac{Pnr}{100}$

17. మొత్తము (A) = P + I (అసలు + వడ్డీ)

$$= P + \frac{Pnr}{100}$$

$$= P\left(1 + \frac{nr}{100}\right)$$

18. వడ్డీ (I) = A – P (మొత్తము – అసలు)

19. $P = \frac{100I}{nr}$

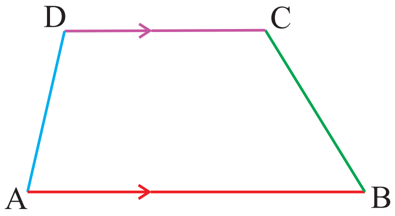
20. $r = \frac{100I}{Pn}$

21. $n = \frac{100I}{Pr}$

3 కొలతలు

3.1 సమలంబ చతుర్భుజము (Trapezium)

చతుర్భుజములో ఒక జత ఎదుటి భుజములు ఒకదానికొకటి సమాంతరముగా వుండిన ఆ చతుర్భుజము సమలంబ చతుర్భుజము అగును.



పటము. *3.1*

సమాంతర భుజముల మధ్య వున్న దూరము సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క ఎత్తు అగును. ఇక్కడ AD, BC లు సమాంతరము కావు.

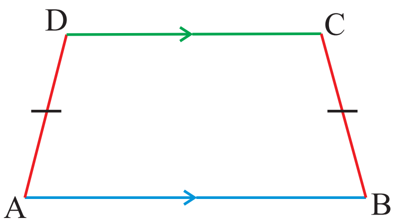
అయితే, AB || DC.

సమలంబ చతుర్భుజములో సమాంతరము కాని భుజములు సమమైన(AD = BC), దానిని సమద్విబాహు సమలంబచతుర్భుజము అని చెప్పవచ్చును

ఇందులో $\angle A = \angle B$; $\angle C = \angle D$

$$AC = BD$$

$$\angle A + \angle D = 180° ; \angle B + \angle C = 180°$$



పటము. *3.2*

సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము (Area of a trapezium)

ABCD అను సమలంబ చతుర్భుజములో AB, DC అనునవి సమాంతర భుజములు. వాటి భుజములు క్రమముగా 'a', 'b' అగును. సమాంతర భుజముల మధ్య వున్న దూరమును 'h'. అని చెప్పవచ్చును. కర్ణము BD సమలంబ చతుర్భుజమును ABD, BCD అను రెండు త్రిభుజములుగా విభజించును.

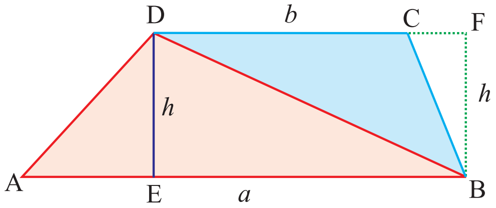
సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము

$= \Delta ABD$ వైశాల్యము $+ \Delta BCD$ వైశాల్యము

$$= \frac{1}{2} \times AB \times h + \frac{1}{2} \times DC \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times h[AB + DC]$$

$= \frac{1}{2} \times h[a + b]$ చ.ప్రమాణములు



పటము. *3.3*

∴ సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times$ ఎత్తు $\times$ (సమాంతర భుజముల మొత్తము) చ.ప్రమాణములు

ఉదాహరణ 3.1

ఒక సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క సమాంతర భుజముల పొడవులు 12 సెం.మీ., 8 సెం.మీ. వాటి మధ్య వుండు లంబదూరము 10 సెం.మీ. సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన :

$h = 10$ సెం.మీ, $a = 12$ సెం.మీ, $b = 8$ సెం.మీ అని ఇవ్వబడినది

సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times 10 \times (12+8) = 5 \times (20)$

$\therefore$ సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము = 100 సెం.మీ^{2}

ఉదాహరణ 3.2

ఒక సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము 100 చ.సెం.మీ. సమాంతర భుజముల పొడవులు 15 సెం.మీ., 10 సెం.మీ. అయిన ఈ భుజముల మధ్య దూరమును కనుగొనుము

సాధన :

$a = 15$ సెం.మీ, $b = 10$ సెం.మీ, వైశాల్యము = 100 చ.సెం.మీ.అని ఇవ్వబడినది

సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము = 100

$$\frac{1}{2}h(a+b) = 100$$

$$\frac{1}{2} \times h \times (15+10) = 100$$

$$h \times 25 = 200$$

$$h = \frac{200}{25} = 8$$

$\therefore$ సమాంతర భుజముల మధ్య దూరము = 8 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 3.3

ఒక సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము 102 చ.సెం.మీ. లంబ దూరము 12 సెం.మీ. సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క సమాంతర భుజములలో ఒక భుజము పొడవు 8 సెం.మీ. అయిన ఇంకొక భుజము పొడవు ఎంత?

సాధన :

వైశాల్యము = 102 సెం.మీ^{2}, $h = 12$ సెం.మీ., $a = 8$ సెం.మీ..అని ఇవ్వబడినది

సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము = 102

$$\frac{1}{2}h(a+b) = 102$$

$$\frac{1}{2} \times 12 \times (8+b) = 102$$

$$6\,(8+b) = 102$$

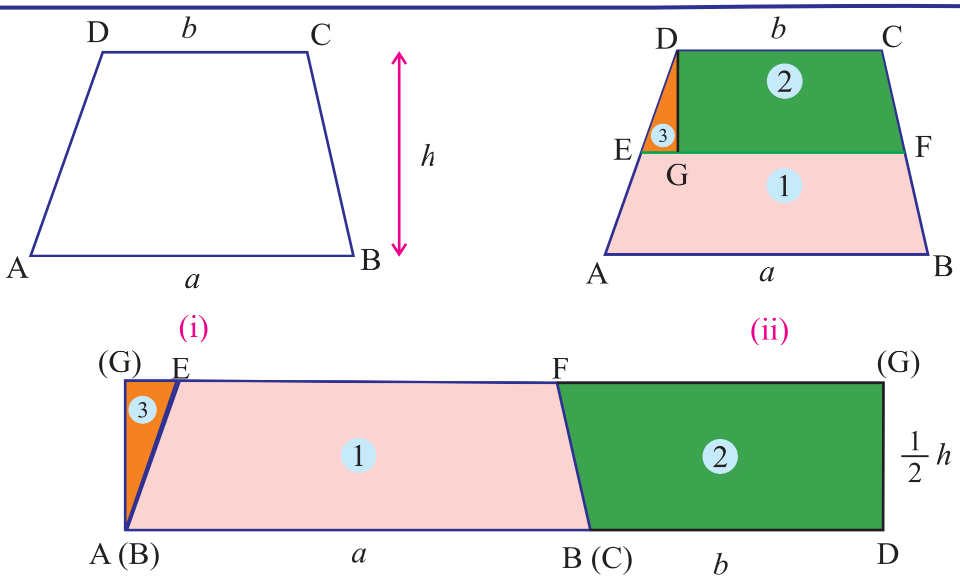
$$8 + b = 17 \quad \Rightarrow \quad b = 17 - 8 = 9$$

$\therefore$ మరియొక భుజము పొడవు = 9 సెం.మీ

ప్రయత్నించుము

కాగితము మడిచే పద్ధతి:

ఏదైన ఒక కొలతతో సమలంబ చతుర్భుజమును ఒక చార్టులో గీయుము. సమలంబ చతుర్భుజమును కత్తిరించి విడిగా తీసుకొనుము. DC అనునది AB పైన వుండునట్లు మధ్యలో మడిచిన EF వచ్చును.



(iii)

పటము. *3.4*

EF అనునది సమలంబ చతుర్భుజమును (పటము 3.4 (ii) లో చూపినట్లు) రెండు భాగములుగా విభజించును.

EF కు లంబముగా D నుంచి DG ను గీయుము. వచ్చు మూడు భాగములను విడివిడిగా కత్తిరించుకొనుము

పటము3. 4(iii)లో చూపినట్లు క్రమముగా వుంచిన దీర్ఘచతురస్రము వచ్చును.

దాని పొడవు AB + CD = $a + b$ మరియు వెడల్పు = $\frac{1}{2}$(సమలంబ చతుర్భుజము ఎత్తు) = $\frac{1}{2}h$

∴ సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము = దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము(పటము 3. 4(iii) లో చూపినట్లు)

= పొడవు × వెడల్పు

= $(a+b)\left(\frac{1}{2}h\right)$

= $\frac{1}{2}h(a+b)$ చ.ప్రమాణములు

అభ్యాసము 3.1

1. సరియైన జవాబును ఎన్నుకొనుము.

i) సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము ______________ చ.ప్రమాణములు

(అ) $h(a+b)$ (ఆ) $\frac{1}{2}$ h (a + b) (ఇ) $h(a-b)$ (D) $\frac{1}{2}$ h $(a-b)$

ii) సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజములో సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క

(అ) సమాంతరముకానిభుజములుసమానము (ఆ) సమాంతరభుజములు సమానము

(ఇ) ఎత్తు = భూమి (ఈ) సమాంతర భుజములు = సమాంతరము కాని భుజములు

iii) ఒక సమలంబ చతుర్భుజములో సమాంతర భుజముల మొత్తము 18 సెం.మీ., లంబపుటెత్తు 15 సెం.మీ. అయిన దాని వైశాల్యము

(అ) 105 సెం.మీ.^{2} (ఆ) 115 సెం.మీ.^{2} (ఇ) 125 సెం.మీ.^{2} (ఈ) 135 సెం.మీ.^{2}

iv) సమాంతర భుజముల మొత్తము 20 సెం.మీ. గల సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము 80 సెం.మీ.^{2} అయిన దాని ఎత్తు

(అ) 2 సెం.మీ. (ఆ) 4 సెం.మీ. (ఇ) 6 సెం.మీ. (ఈ) 8 సెం.మీ.

2. సమలంబ చతుర్భుజ సమాంతర భుజములకు మధ్య వున్న దూరము (ఎత్తు), సమాంతర భుజములు ఇవ్వబడినవి. వాటి వైశాల్యములను కనుగొనుము:
   i) ఎత్తు = 10 సెం.మీ., సమాంతర భుజములు = 4 సెం.మీ., 6 సెం.మీ.
   ii) ఎత్తు = 11 సెం.మీ., సమాంతర భుజములు = 7.5 సెం.మీ., 4.5 సెం.మీ.
   iii) ఎత్తు = 14 సెం.మీ., సమాంతర భుజములు = 8 సెం.మీ., 3.5 సెం.మీ.
3. ఒక సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము 88 సెం.మీ.^{2} లంబ దూరము 8 సెం.మీ. సమలంబ చతుర్భుజ సమాంతర భుజములలో ఒక భుజము పొడవు 10 సెం.మీ. అయిన మరియొక భుజము పొడవును కనుగొనుము.
4. ఒక తోట సమలంబ చతుర్భుజ ఆకారములో వున్నది. తోట సమాంతర భుజములు 40 మీ, 30 మీ. సమాంతర భుజముల మధ్య వున్న దూరము 25 మీ. తోట వైశాల్యమును కనుగొనుము.
5. ఒక సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము 960 చ.సెం.మీ. దాని సమాంతర భుజములు 40 సెం.మీ., 60 సెం.మీ. అయిన వాటి మధ్య వున్న దూరమును కనుగొనుము.

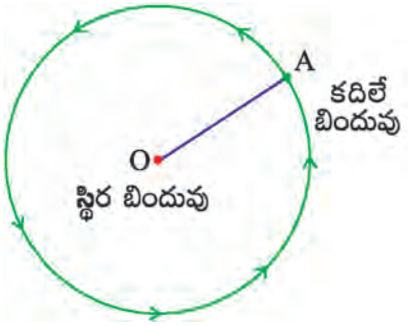
3.2 వృత్తము (Circle)

మన నిత్య జీవితములో చక్రాలు, నాణెములు, రింగులు, గాజులు, రాక్షస చక్రం(giant wheel), కాంపాక్ట్ డిస్క్ (C.D.) లాంటి అనేక వస్తువులను చూస్తున్నాము

అవి ఏ ఆకారములో వున్నవి?

వృత్తాకారము, వృత్తాకారము, వృత్తాకారము

అవును వృత్తాకారము. గణితములో దీనిని వృత్తము అని చెప్పుచున్నారు. ఇప్పుడు వృత్తమును గీయుటకు ప్రయత్నించెదము.



పటము. 3.5

ఏదైన ఒక పొడవు గల దారమును తీసుకొని పటములో చూపినట్లు దాని ఒక కొనను O అను బిందువు వద్ద గట్టిగా పట్టుకొనుము. మరియొక కొనకు పెన్సిల్ (లేక చాక్‌పీసు)ను కట్టి దారమును సాగదీసి A అను బిందువులో వుంచుము. దారమును గట్టిగా పట్టుకొని పెన్సిల్‌ని కదలించుకుంటు రావలెను. పెన్సిల్ తిరిగి A వద్దకు వచ్చిన వెంటనే నిలిపివేయుము. ఇప్పుడు పెన్సిల్‌తో గీచిన బాటను గమనించుము.

పెన్సిల్‌తో గీచిన బాట వృత్తమా? సరళరేఖనా?

'వృత్తం'

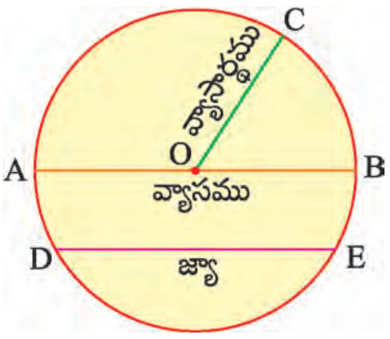
అవును, ఇవ్వబడిన సమతలము పైన, ఒక స్థిరబిందువు నుండి సమాన దూరములో కదిలే బిందువుల బాట ఒక వృత్తము అనబడును.

వృత్తములోని భాగములు (Parts of a Circle)

స్థిర బిందువును వృత్తకేంద్రము అందురు.

స్థిర బిందువునకు, చలించే బిందువునకు మధ్య వుండు స్థిర దూరమును వృత్తవ్యాసార్థమందురు.

అనగా వృత్తకేంద్రమును ఒక అంచుగా, వృత్తము పైన వున్న ఏదైన ఒక బిందువును మరియొక అంచుగా గల రేఖాఖండము వ్యాసార్థము అగును. వ్యాసార్థమును 'r' అని గుర్తించెదరు.



పటము. 3.6

వృత్తము పైన వున్న ఏదైన రెండు బిందువులను కలుపు రేఖాఖండము జ్యా అనబడును

వృత్తకేంద్రము ద్వారా వెళ్ళు జ్యాను వ్యాసము అందురు. వ్యాసమును 'd' అని గుర్తించెదరు.

మిక్కిలి పొడవైన జ్యా వ్యాసమగును(అంటే $d = 2r$)

వ్యాసము వృత్తమును రెండు సమభాగములుగా విభజించును. ఒక్కొక్క భాగము అర్ధవృత్తము అనబడును.

ఆలోచించుము:

ఒక వృత్తము ఎన్ని వ్యాసములను కలిగియుండును

మీకు తెలుసా?

ఒక వృత్తములో ఉన్న అన్ని వ్యాసార్ధములు ఒకే కొలతలో వుండును

వృత్త పరిధి (Circumference of a circle):

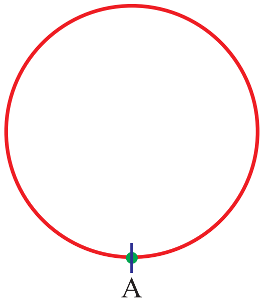
వ్యాయామము చేయు ఒకతను వృత్తాకార బాటలో ఒకసారి పరిగెత్తెను. అతను పరిగెత్తిన మొత్తము దూరమును మీకు కొలుచుటకు వీలగునా?

పటము ***3.7***

బాట వృత్తాకారముగా వుండుట వలన, దూరమును కొలుచుటకు కొలబద్ధను ఉపయోగించలేము.

మనము ఏమి చేయవలెను?

ఒక రూపాయి నాణెమును తీసుకొనుము. నాణెమును కాగితముపైన వుంచి దాని చుట్టూ రేఖను గీసిన తరువాత కాగితము నుంచి నాణెమును తీసివేయుము. గీచిన రేఖలో పటము (3.8)లో చూపినట్లు A అను బిందువును గుర్తించుము.



పటము ***3.8***

ఒక దారమును తీసుకొని ఒక అంచు A వద్ద వుంచుము. గీచిన రేఖపైన దారమును సరిగ్గా పట్టుకొని రావలెను. దారము తిరిగి A వద్ద వచ్చినప్పుడు దారమును కత్తిరించివేయుము. ఇది దారము యొక్క ఇంకొక అంచు అగును.

దారము పొడవు, నాణెము పరిధి అగును.

కాబట్టి,

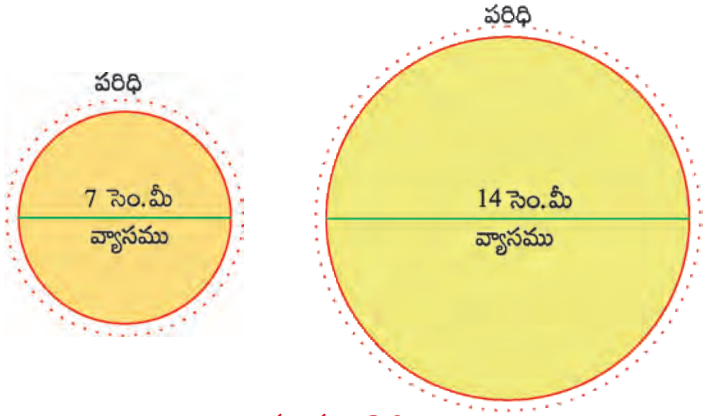
వృత్తమును ఒక సారి చుట్టి వచ్చు దూరము వృత్త పరిధి అనబడును. పరిధిని 'C' తో గుర్తించెదరు. అనగా వృత్త చుట్టుకొలతే పరిధి అగును.

ప్రయత్నించుము

సీసా మూత లేక వృత్తాకారముగా వున్న ఏదైన ఒక వస్తువును తీసుకొని దాని పరిధిని కనుగొనుము. వీలైతే వృత్తపరిధికి, వృత్తవ్యాసమునకు వున్న సంబంధమును కనుగొనుము.

వృత్త పరిధికి, వ్యాసమునకు మధ్య వున్న సంబంధము.
(Relation between diameter and circumference of the circle)

3.5 సెం.మీ., 7 సెం.మీ., 5 సెం.మీ., 10.5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధము గల నాలుగు వృత్తములను (ఉపాధ్యాయుని సహాయముతో) గీయుము. వ్యాసమును కొలబద్ధతో, పరిధిని దారము సహాయముతో (పటము 3.9లో చూపినట్లు) కనుగొనుము.



పటము. *3.9*

వాటిని పట్టిక 3.1లో ప్రతిక్షేపించుము. పరిధికి, వ్యాసమునకు వున్న నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

వృత్తము	వ్యాసార్థము	వ్యాసము (d)	పరిధి(C)	నిష్పత్తి $\left(\frac{C}{d}\right)$
1	3.5 సెం.మీ	7 సెం.మీ	22 సెం.మీ	$\frac{22}{7} = 3.14$
2	7 సెం.మీ	14 సెం.మీ	44 సెం.మీ	$\frac{44}{14} = \frac{22}{7} = 3.14$
3	5 సెం.మీ	10 సెం.మీ	----	----
4	10.5 సెం.మీ	21 సెం.మీ	----	----

పట్టిక *3.1*

పై పట్టిక నుంచి ఏమి తెలుసుకొన్నావు? నిష్పత్తి $\left(\frac{C}{d}\right)$ ఉజ్జాయింపుగా సమానముగా వున్నదా?

అవును !

$$\frac{C}{d} = 3.14 \quad \Rightarrow \quad C = (3.14)d$$

కాబట్టి, వృత్తము యొక్క పరిధి, 3 రెట్లు వ్యాసము కంటే ఎక్కువగా వుండునని చెప్పవచ్చునా?

అవును !

అన్నింటిలోని $\frac{C}{d}$ విలువ ఒక స్థిర సంఖ్య. ఈ స్థిరసంఖ్యను π అను గ్రీకు అక్షరముతో గుర్తించెదము. (దీనిని 'పై' అని చదువుము) దీని ఉజ్జాయింపు విలువ $\frac{22}{7}$ లేక 3.14.

కావున, $\frac{C}{d} = \pi \quad \Rightarrow \quad C = \pi d$ ప్రమాణములు ఇందులో d అనునది వృత్త వ్యాసము అగును. వృత్త వ్యాసము, 2 రెట్లు వ్యాసార్థము అని మనకు తెలియును. అనగా $d = 2r$.

కాబట్టి, పై సూత్రము నుంచి $C = \pi d = \pi(2r) \Rightarrow C = 2\pi r$ ప్రమాణములు

మీకు తెలుసా?

π విలువను అనేక మంది గణిత శాస్త్రవేత్తలు గణించివున్నారు.

బాబిలోనియన్లు : $\pi = 3$ గ్రీకులు : $\pi = \frac{22}{7}$ లేక 3.14

ఆర్కమెడిస్ : $3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}$ ఆర్యభట్ట : $\pi = \frac{62838}{2000}$ (లేక) 3.1416

ఇప్పుడు $\pi = \frac{22}{7}$ (లేక) 3.14 అను విలువను ఉపయోగించెదము

ఉదాహరణ 3.4

21 సెం.మీ. వ్యాసముగా గల వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనుము.

సాధన :

వ్యాసము ఇచ్చినందువలన, వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత $= \pi d$

$= \frac{22}{7} \times 21$ ఇందులో $\pi = \frac{22}{7}$

$= 66$ సెం.మీ

ఉదాహరణ 3.5

3.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగా గల వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనుము.

సాధన :

వ్యాసార్థము ఇచ్చినందువలన, వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత $= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5$

$= 2 \times 22 \times 0.5$

$= 22$ మీ

ఉదాహరణ 3.6

88 సెం.మీ. పొడవు గల ఒక కమ్మీ ఒక వృత్తముగా వంచబడినది. వృత్త వ్యాసార్థమును కనుగొనుము.

సాధన :

కమ్మీ పొడవు = 88 సెం.మీ.

వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత = కమ్మీ పొడవు

$$2\pi r = 88$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 88$$

$$r = \frac{88 \times 7}{2 \times 22} = 14 \text{ సెం.మీ.}$$

$\therefore$ వృత్త వ్యాసార్థము 14 సెం.మీ. అగును.

ఉదాహరణ 3.7

ఒక సైకిల్ చక్రం వ్యాసము 63 సెం.మీ. చక్రం 20 సార్లు భ్రమణము చెందిన, అది పయనించిన దూరమెంత?

సాధన :

చక్రము ఒక పూర్తి భ్రమణము చేసిన,

ఒక పూర్తి భ్రమణమునకు పయనించిన దూరము = చక్రము యొక్క పరిధి

$\therefore$ చక్రము యొక్క పరిధి = πd ప్రమాణములు

$= \frac{22}{7} \times 63$ సెం.మీ.

$= 198$ సెం.మీ.

ఒక పూర్తి భ్రమణమునకు పయనించిన దూరము = 198 సెం.మీ.

$\therefore$ 20 భ్రమణములకు పయనించిన దూరము = 20×198 సెం.మీ.

= 3960 సెం.మీ.

= 39 మీ 60సెం.మీ[100సెం.మీ= 1 మీ.]

ఉదాహరణ 3.8

8800 సెం.మీ. దూరము పయనించవలెనన్న ద్విచక్ర వాహనము యొక్క చక్రం 50 సార్లు భ్రమణము చేయును. చక్రము యొక్క వ్యాసార్థము ఎంత?

సాధన :

పయనించిన దూరము = భ్రమణముల సంఖ్య × చుట్టుకొలత

$$\text{చుట్టుకొలత} = \frac{\text{పయనించిన దూరము}}{\text{భ్రమణముల సంఖ్య}}$$

$$2\pi r = \frac{8800}{50}$$

$$\text{i.e., } 2\pi r = 176$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 176$$

$$r = \frac{176 \times 7}{2 \times 22}$$

$r = 28$ సెం.మీ

$\therefore$ చక్రము యొక్క వ్యాసార్థము = 28 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 3.9

గుర్రపు బండి చక్రము యొక్క వ్యాసార్థము 70 సెం.మీ. అది 132 మీ దూరము పయనించిన చక్రము ఎన్ని భ్రమణములు చేసియుండును

సాధన :

$r = 70$ సెం.మీ, పయనించిన దూరము = 132 మీ అని ఇవ్వబడినది.

$\therefore$ బండి చక్రము యొక్క చుట్టుకొలత $= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 70$

$= 440$ సెం.మీ

పయనించిన దూరము = భ్రమణముల సంఖ్య × వృత్తపరిధి

$\therefore$ భ్రమణముల సంఖ్య $= \dfrac{\text{పయనించిన దూరము}}{\text{వృత్తపరిధి}}$

$= \dfrac{132 \text{ మీ}}{440 \text{ సెం.మీ}}$

$= \dfrac{13200 \text{ సెం.మీ}}{440 \text{ సెం.మీ}}$

$= 30$

$\therefore$ భ్రమణముల సంఖ్య = 30.

(1మీ=100సెం.మీ, 132మీ= 13200 సెం.మీ)

ఉదాహరణ 3.10

వృత్తాకార పొలము పరిధి 44 మీ. పొలము మధ్యగా ఒక ఆవు కట్టబడినది. పొలము మొత్తము తిరిగి గడ్డి మేయునట్లు ఆవును ఒక దారముతో కట్టిన, ఆవును కట్టిన దారము పొడవును కనుగొనుము.

సాధన :

దారము పొడవు = వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థము

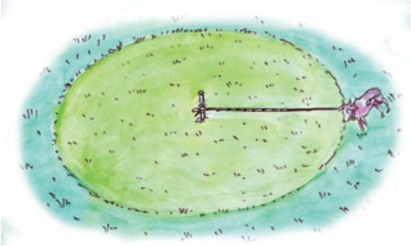
చుట్టుకొలత = 44 మీ (ఇవ్వబడినది)

అనగా $2\pi r = 44$

$2 \times \dfrac{22}{7} \times r = 44$

$r = \dfrac{44 \times 7}{2 \times 22} = 7$ మీ

$\therefore$ ఆవును కట్టిన దారము పొడవు = 7 మీ



పటము. 3.10

ఉదాహరణ 3.11

వృత్తాకార పూలతోట వ్యాసార్థము 56 మీ. ఆ తోటకు కంచె వేయుటకు మీటరుకు ₹.5 ఖర్చు అయిన, ఖర్చు మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన :

కంచె పొడవు = వృత్తాకార పూలతోట చుట్టుకొలత

పూలతోట చుట్టుకొలత = $2\pi r$

$= 2 \times \dfrac{22}{7} \times 56 = 352$ మీ

$\therefore$ కంచె పొడవు = 352 మీ

1 మీటరుకు కంచె వేయుటకు అగు ఖర్చు = ₹10

$\therefore$ 352 మీటర్లకు కంచె వేయుటకు అగు ఖర్చు = ₹10 × 352

= ₹3520

$\therefore$ కంచె వేయుటకు అగు మొత్తము ఖర్చు ₹3520.

ఉదాహరణ 3.12

ఒక వృత్తాకార ఉద్యానవనము చుట్టూ కంచె వేయుటకు ఒక మీటరుకు ₹ 5 చొప్పున అయిన మొత్తము ఖర్చు ₹ 1100. ఉద్యానవనము యొక్క వ్యాసార్థము ఎంత?

సాధన :

కంచె వేయుటకు అగు ఖర్చు = చుట్టుకొలత × ఖర్చు (ఖరీదు)

$$\therefore \text{చుట్టుకొలత} = \frac{\text{కంచె వేయుటకు అగు ఖర్చు}}{\text{ఖరీదు}}$$

$$\text{అనగా } 2\pi r = \frac{1100}{5}$$

$$2\pi r = 220$$

$$\therefore 2 \times \frac{22}{7} \times r = 220$$

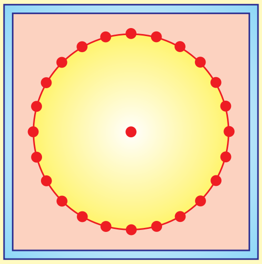
$$r = \frac{220 \times 7}{2 \times 22}$$

$$= 35 \text{ మీ}$$

∴ ఉద్యానవనము యొక్క వ్యాసార్థము = 35 మీ.

కృత్యము – వృత్తాకార జియోబోర్డు

చతురస్రాకార పలకను తీసుకొని దానిలో వృత్తమును గీయుము. వృత్త పరిధిపైన చీలలను కొట్టుము (పటమును చూడుము) రబ్బరు బ్యాండు సహాయముతో అనేక రకములైన, వ్యాసములు, జ్యాలు, వ్యాసార్థములు రూపొందించి వాటి సంబంధమును పోల్చుము.



అభ్యాసము 3.2

1. సరియైన జవాబును ఎన్నుకొనుము :

i) వృత్తకేంద్రమును, వృత్తము పైన వున్న ఏదేని ఒక బిందువును కలుపు రేఖా ఖండము

(అ) వ్యాసము (ఆ) వ్యాసార్థము (ఇ) జ్యా (ఈ) ఏదియు కాదు

ii) వృత్తము పైన వున్న ఏవైన రెండు బిందువులను కలుపు రేఖాఖండము

(అ) వ్యాసము (ఆ) వ్యాసార్థము (ఇ) జ్యా (ఈ) ఏదియు కాదు

iii) వృత్త కేంద్రము ద్వారా వెళ్ళు జ్యా

(అ) వ్యాసము (ఆ) వ్యాసార్థము (ఇ) జ్యా (ఈ) ఏదియు కాదు

iv) వృత్త వ్యాసము 1 మీ అయిన దాని వ్యాసార్థము

(అ) 100 సెం.మీ. (ఆ) 50 సెం.మీ. (ఇ) 20 సెం.మీ. (ఈ) 10 సెం.మీ

v) 14 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగా గల వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత

(అ) 22 సెం.మీ. (ఆ) 44 సెం.మీ. (ఇ) 66 సెం.మీ. (ఈ) 88 సెం.మీ

2. క్రింది పట్టికలో ఖాళీలను పూరింపుము:

	వ్యాసార్ధము (r)	వ్యాసము (d)	చుట్టుకొలత(c)
(i)	35 సెం.మీ	-----	-----
(ii)	-----	56 సెం.మీ	-----
(iii)	-----	-----	30.8 సెం.మీ

3. క్రింది కొలతలను వ్యాసములుగా గల వృత్తముల చుట్టుకొలతలను కనుగొనుము.
   (i) 35 సెం.మీ (ii) 84 సెం.మీ (iii) 119 సెం.మీ (iv) 147 సెం.మీ.
4. క్రింది కొలతలను వ్యాసార్ధములుగా గల వృత్తముల చుట్టుకొలతలను కనుగొనుము.
   (i) 12.6 సెం.మీ (ii) 63 సెం.మీ (iii) 1.4 మీ (iv) 4.2 మీ
5. క్రింది కొలతలను చుట్టుకొలతలుగా గల వృత్తముల వ్యాసార్ధములను కనుగొనుము.
   (i) 110 సెం.మీ (ii) 132 సెం.మీ (iii) 4.4 మీ (iv) 11 మీ
6. బండి చక్రము యొక్క వ్యాసము 2.1 మీ. చక్రము 100 భ్రమణములు చేసిన బండి పయనించిన దూరమును కనుగొనుము.
7. వృత్తాకార ఉద్యానవనము యొక్క వ్యాసము 98 మీ. ఉద్యానవనము చుట్టూ కంచె వేయుటకు ఒక మీటరుకు ₹ 4 ఖర్చు అయిన మొత్తము ఖర్చును కనుగొనుము.
8. ఒక చక్రము 66 మీ. దూరము వెళ్ళుటకు 20 భ్రమణములు చేసిన ఆ చక్రము యొక్క వ్యాసమును కనుగొనుము.
9. ఒక సైకిల్ చక్రము యొక్క వ్యాసార్ధము 35 సెం.మీ. అది 81.40 మీ దూరము వెళ్ళుటకు ఎన్ని భ్రమణములు చేసివుండును.
10. ఒక వృత్తాకార పూలతోట వ్యాసార్ధము 63 మీ. దానికి చుట్టూ కంచె వేయుటకు ఒక మీటరుకు ₹12వ ంతున ఎంత ఖర్చు అగును.

వృత్త వైశాల్యము (Area of a circle)

క్రింది వానిని తీసుకొనుము.

70 మీ వ్యాసార్ధము గల వృత్తాకార పొలమును ఒక వ్యవసాయదారుడు చదును చేసెను. పొలమును చదును చేయుటకు అతనికి అగు ఖర్చు ఎంత?

1.5 మీ వ్యాసార్ధము గల వృత్తాకార బల్ల పై భాగమును రుద్ది, మెరిసేటట్లు చేయుటకు అగు ఖర్చు ఎంత?

ఖర్చును ఎలా కనుగొనవలెను?

ఈ ఖర్చులను కనుగొనుటకు, దేనిని కనుగొనవలెను?

వైశాల్యమా లేక చుట్టుకొలతా?

వైశాల్యము, వైశాల్యము, వైశాల్యము.

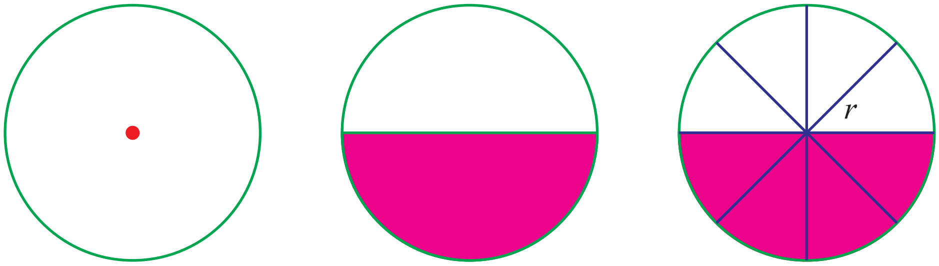
> **మీకు తెలుసా?**
>
> వృత్త పరిధితో మూయబడిన భాగము వృత్తభాగము అగును.

అవును ఇలాంటప్పుడు మనము వృత్త భాగపు వైశాల్యమును కనుగొనవలెను

ఇంతవరకు సరళరేఖలతో ఏర్పడిన త్రిభుజములు, చతుర్భుజములు మొదలగు వాటి వైశాల్యమును కనుగొను సూత్రములను తెలుసుకొన్నాము. వృత్తము అనునది మిగిలిన సమతల పటముల మాదిరిగా కాకుండా వక్రరేఖతో తయారగును.

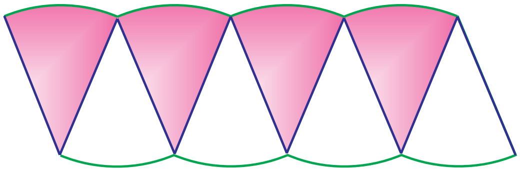
కావున, వృత్తమును సరళరేఖలతో ఏర్పడిన ఆకారముగా మార్చి, వైశాల్యమును కనుగొనుటకు మనము వేరొక క్రొత్త పద్ధతిని కనుగొనవలసియున్నది

చార్టును తీసుకొని దానిపైన ఒక వృత్తమును గీయుము. వృత్తమును కత్తిరించి విడిగా తీసుకొనుము. వృత్త భాగములో సగ భాగమునకు రంగు వేయుము. తరువాత పటము 3.11లో చూపినట్లు వృత్తమును 8 భాగములుగా విభజించి, వాటిని విడివిడిగా కత్తిరించి తీసుకొనుము



పటము. 3.11

కత్తిరించిన భాగములను క్రింది విధముగా అమర్చుము.

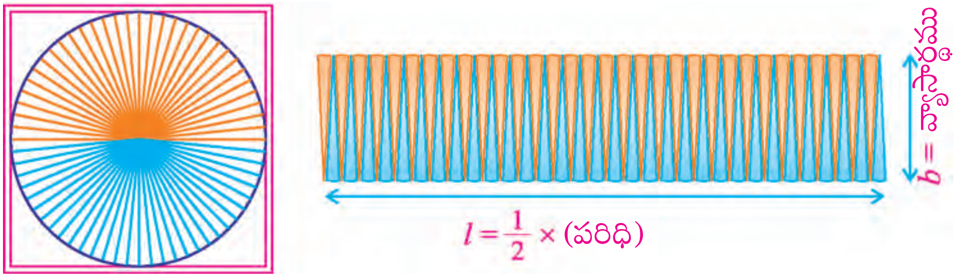


పటము. 3.12

ఇప్పుడు వచ్చిన ఆకారము ఏది?

ఈ ఎనిమిది ముక్కలు ఒక సమాంతర చతుర్భుజము మాదిరిగా రూపొందెను.

ఇదేవిధముగా వృత్త భాగమును 64 భాగములుగా విభజించి, కత్తిరించి అమర్చిన ఒక దీర్ఘ చతురస్రము రూపొందుట చూడవచ్చును. (పటము 3.13 చూడుము)



పటము. 3.13

ఈ దీర్ఘ చతురస్రము వెడల్పు ఎంత?

వృత్త వ్యాసార్ధము దీర్ఘ చతురస్ర వెడల్పు అగును..

అనగా, వెడల్పు $b = r$ ..... (1)

ఈ దీర్ఘ చతురస్ర పొడవు ఎంత?

మొత్తము వృత్త భాగమును 64 భాగములుగా విభజించినందు వలన దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క ఒక్కొక్క పొడవు 32 భాగములను కలిగియుండును. కావున దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క పొడవు 32 భాగముల పొడవు అగును. ఈ 32 భాగముల పొడవు వృత్తపరిధిలో సగము అగును.

$\therefore$ పొడవు $l = \frac{1}{2}$[వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత]

$= \frac{1}{2}[2\pi r] = \pi r$

$\therefore l = \pi r$ ..... (2)

వృత్త వైశాల్యము = దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము (పటము 3.13 నుంచి)

$= l \times b$

$= (\pi r) \times r$ ((1) (2) నుంచి)

$= \pi r^2$ చ.ప్రమాణములు.

$\therefore$ వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$ చ.ప్రమాణములు

ఉదాహరణ 3.13

14 సెం.మీ. వ్యాసముగా గల వృత్త వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన :

వ్యాసము d = 14 సెం.మీ

కావున, వ్యాసార్థము $r = \frac{d}{2} = \frac{14}{2} = 7$ సెం.మీ

వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$

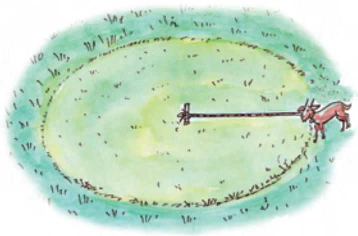
$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

= 154 చ.సెం.మీ.

$\therefore$ వృత్త వైశాల్యము = 154 చ.సెం.మీ.

ఉదాహరణ 3.14

ఒక వృత్తాకార పొలము మధ్యలో ఒక మేక 3.5 మీ పొడవు గల దారముతో కట్టబడినది. ఆ మేక మేయు స్థలము వైశాల్యమును కనుగొనుము



పటము 3.14

సాధన :

వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థము = దారము పొడవు

$\therefore$ వ్యాసార్థము $r = 3.5$ మీ $= \frac{7}{2}$ మీ

మేక మేయు స్థలము వైశాల్యము $= \pi r^2$ చ.ప్రమాణములు

$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$

$= \frac{77}{2} = 38.5$ చ.మీ

$\therefore$ మేక మేయు స్థలము వైశాల్యము = 38.5 చ.మీ.

ఉదాహరణ 3.15

వృత్తాకార ఉద్యానవనము చుట్టుకొలత 176 మీ. ఉద్యానవనము వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన :

చుట్టుకొలత = 176 మీ. (ఇవ్వబడినది)

$$2\pi r = 176$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 176$$

$$r = \frac{176 \times 7}{44}$$

$$\therefore r = 28 \text{ మీ.}$$

ఉద్యానవనము వైశాల్యము $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 28 \times 28$$

$$= 22 \times 4 \times 28$$

$= 2464$ చ.మీ.

ఉదాహరణ 3.16

ఒక వెండి తీగను చతురస్రముగా వంచిన, దానితో ఆక్రమించబడు స్థలము వైశాల్యము 121 చ.సెం.మీ. అదే వెండి తీగ వృత్తముగా వంచబడినది. వృత్త వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన :

చతురస్ర భుజమును a అనుకొనుము.

చతురస్ర వైశాల్యము = 121 చ.సెం.మీ. (ఇవ్వబడినది)

$a^2 = 121 \Rightarrow a = 11$ సెం.మీ. $(11 \times 11 = 121)$

చతురస్రము యొక్క చుట్టుకొలత = $4a$ ప్రమాణములు

$= 4 \times 11$ సెం.మీ.

$= 44$ సెం.మీ.

తీగ పొడవు = చతురస్రము యొక్క చుట్టుకొలత

$= 44$ సెం.మీ.

తీగ వృత్తముగా వంచబడినది.

వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత = తీగ పొడవు

$\therefore$ వృత్త చుట్టుకొలత = 44 సెం.మీ.

$$2\pi r = 44$$

$$\therefore 2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$$

$$r = \frac{44 \times 7}{44}$$

r = 7 సెం.మీ.

$\therefore$ వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 7$ సెం.మీ. $\times 7$ సెం.మీ.

వృత్త వైశాల్యము $= 154$ సెం.మీ.^{2}

ఉదాహరణ 3.17

ఒకతను వృత్తాకార ఇంటిస్థలమును పదిసార్లు తిరిగివచ్చెను. అతను తిరిగిన దూరము 352 మీ అని లెక్కించబడినది. ఇంటిస్థలము వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన :

10 సార్లు తిరిగిన దూరము = 352 మీ.

1 సారి తిరిగిన దూరము $= \frac{352}{10}$ మీ $= 35.2$ మీ

వృత్తాకార ఇంటిస్థలము చుట్టుకొలత = ఒకసారి తిరిగిన దూరము

$\therefore$ చుట్టుకొలత = 35.2 మీ

$$2\pi r = 35.2$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 35.2$$

$$r = \frac{35.2 \times 7}{44}$$

$$= 0.8 \times 7$$

$= 5.6$ మీ

వృత్తాకార ఇంటిస్థలము వైశాల్యము $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 5.6 \times 5.6$$

$$= 22 \times 0.8 \times 5.6$$

$= 98.56$ మీ^{2}

$\therefore$ వృత్తాకార ఇంటిస్థలము వైశాల్యము = 98.56 చ.మీ

ఉదాహరణ 3.18

పొడవు 37 సెం.మీ., వెడల్పు 29 సెం.మీ. గల దీర్ఘ చతురస్రాకార కమ్మీ వృత్తాకారముగా మార్చబడినది. వృత్త వ్యాసార్థము మరియు వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన :

కమ్మీ పొడవు = దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క చుట్టుకొలత

= 2 [పొడవు + వెడల్పు]

= 2 [37 సెం.మీ. + 29 సెం.మీ.] = 2 $\times$ 66 సెం.మీ.

= 132 సెం.మీ.

కమ్మీ వృత్తముగా మార్చబడినది కావున,

వృత్త చుట్టుకొలత = కమ్మీ పొడవు

$\therefore$ వృత్త చుట్టుకొలత = 132

$$2\pi r = 132$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 132$$

$$r = \frac{132 \times 7}{44} = 21$$

∴ వృత్త వ్యాసార్ధము = 21 సెం.మీ.

వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 22 \times 3 \times 21$$

∴ వృత్త వైశాల్యము = 1386 చ.సెం.మీ.

అభ్యాసము 3.3

1. క్రింది కొలతలను వ్యాసములుగా గల వృత్తముల వైశాల్యములను కనుగొనుము:

   (i) 7 సెం.మీ. (ii) 10.5 సెం.మీ. (iii) 4.9 మీ. (iv) 6.3మీ($\pi = \frac{22}{7}$గా తీసుకొనుము)

2. క్రింది కొలతలను వ్యాసార్ధములుగా గల వృత్తముల వైశాల్యములను కనుగొనుము:

   (i) 1.2 సెం.మీ. (ii) 14 సెం.మీ. (iii) 4.2 మీ (iv) 5.6 మీ($\pi = \frac{22}{7}$గా తీసుకొనుమ)

3. వృత్తాకార ఇంటి స్థలము యొక్క వ్యాసము 28 మీ. ఇంటి స్థలమును చదును చేయుటకు ఒక చదరపు మీటరుకు ₹ 3 ఖర్చు అయిన ఖర్చు మొత్తమును కనుగొనుము.

4. ఒక వృత్తాకార పొలము మధ్యలో ఒక మేక 7 మీ. పొడవు గల దారముతో కట్టబడినది. ఆ మేక మేయు స్థలము వైశాల్యమును కనుగొనుము.

5. ఒక వృత్తము, ఒక చతురస్రము 88 మీ.ను చుట్టుకొలతలుగా కలిగియున్నవి. ఏది అధిక వైశాల్యమును కలిగియున్నది?

6. ఒక చక్రము 100 భ్రమణములతో 2200 మీ దూరము వెళ్ళును. చక్రము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

7. ఒక కమ్మీ 28 సెం.మీ. వ్యాసార్ధముతో వృత్తాకారముగా వున్నది. కమ్మీని వంచి చతురస్రముగా మార్చబడినది. చతురస్రము యొక్క చుట్టుకొలత వృత్త పరిధికి సమానము అయిన చతురస్రము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

8. వృత్తాకార ఇంటి స్థలము యొక్క వైశాల్యము 3850 చ.మీ. ఇంటి స్థలము యొక్క వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము. ఇంటి స్థలముకు కంచె వేయుటకు మీటరుకు ₹ 10 చొప్పున ఖర్చు అగును. ఖర్చు మొత్తమును కనుగొనుము.

9. ఒక వృత్తాకార స్థలము వ్యాసార్ధము 70 మీ, ఒక పిల్లవాడు ఆ స్థలమును ఒక చుట్టు చుట్టి వచ్చెను. అతడు నడచిన దూరమెంత?

10. ఒక వృత్తాకార ఆట స్థలము వైశాల్యము 154 చ.మీటర్లు. ఒక క్రీడాకారుడు గంటకు 5 కి.మీ. వేగంతో నడిచిన, రెండుసార్లు ఆ స్థలమును చుట్టి వచ్చుటకు పట్టు సమయము ఎంత?

11. పొడవు 50 సెం.మీ., వెడల్పు 30 సెం.మీ. గల ఒక కాగితము నుండి 7 సెం.మీ. వ్యాసార్ధము గల వృత్తములను ఎన్నింటిని కత్తిరించగలము.

3.3 బాట వైశాల్యము (Area of the path way)

మన నిత్య జీవితములో మనము ఉద్యానవనము, ఆటస్థలము, ఈతకొలను చుట్టూ నడకకు వెళుతుంటాము.

ఉద్యానవనములో వుండే బాటను మీరు గీయగలరా?

ఈ విధమైన బాటల వైశాల్యములను కనుగొని ఆనందించి వున్నారా?

దీర్ఘ చతురస్రాకారపు ఈతకొలను చుట్టూ వుండే బాటకు పోటో ఫ్రేమ్‌లో ఫోటో చుట్టూ వుండే భాగమునకు, సంబంధము వుందా?

ఈ విధమైన ఉదాహరణములను మీరు ఆలోచించగలరా?

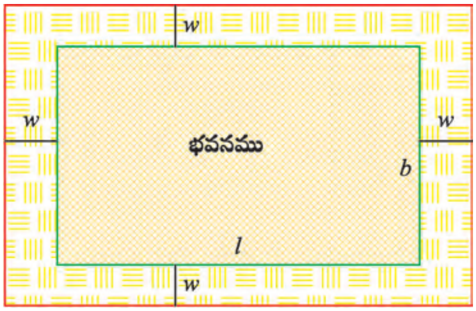
ఈ భాగములో • దీర్ఘ చతురస్రాకారపు బాట వైశాల్యము

• వృత్తాకార బాట వైశాల్యమును కనుగొను సూత్రములను నేర్చుకొనెదము.

దీర్ఘ చతురస్రాకారపు బాట వైశాల్యము (Area of rectangular pathway)

(అ) దీర్ఘ చతురస్రమునకు బాహ్యమున వున్న ఒకే రకమైన బాట వైశాల్యము (Area of uniform pathway outside the rectangle)

దీర్ఘ చతురస్రాకారపు భవనమును తీసుకొనుము. భవనము చుట్టూ ఒకే రకమైన పూలబాట వేయబడినది. పూల బాట వైశాల్యమును కనుగొనుట ఎలా?

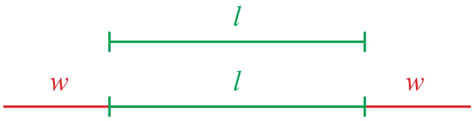


పటము. 3.15

ఒకే రకమైన పూలబాటను, భవనమును కలిపిన వేరొక దీర్ఘ చతురస్రము వచ్చును. దీనిని వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్రము అని అందురు. భవనమును లోపలి దీర్ఘ చతురస్రము అని అందురు

భవనము పొడవు, వెడల్పులు క్రమముగా l, b అనుకొనుము.

$\therefore$ లోపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము $= l\,b$ చ.ప్రమాణములు



పటము. 3.16

బాట వెడల్పు w అనుకొనుము.

వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్రము పొడవు, వెడల్పు ఎంత?

వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్ర పొడవు (L) $= w + l + w = (l + 2w)$ ప్రమాణములు

వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్ర వెడల్పు (B) $= w + b + w = (b + 2w)$ ప్రమాణములు

$\therefore$ వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము $= \mathrm{L} \times \mathrm{B}$

$= (l + 2w)(b + 2w)$ చ.ప్రమాణములు

ఇప్పుడు, పూలబాట వైశాల్యము ఎంత?

ఖచ్చితముగా, పూలబాట వైశాల్యము అనునది రెండు దీర్ఘ చతురస్రముల మధ్య వున్న బాట స్థలము.

$\therefore$ పూలబాట వైశాల్యము = (భవనము, పూలబాటల వైశాల్యము) – భవనము వైశాల్యము.

సాధారణముగా,

బాట వైశాల్యము = (బాహ్య దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము) – (అంతర దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము)

అనగా, బాట వైశాల్యము $= (l + 2w)\,(b + 2w) - lb$.

ఉదాహరణ 3.19

వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము 360 చ.మీ. లోపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము 280 చ.మీ. ఒకే రకమైన బాట ఈ రెండు దీర్ఘ చతురస్రముల మధ్య వున్నది. బాట వైశాల్యము ఎంత?

సాధన :

బాట వైశాల్యము = (వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము) – (లోపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము)

= (360 – 280) మీ^{2} = 80 మీ^{2}

$\therefore$ బాట వైశాల్యము = 80 మీ^{2}

ఉదాహరణ 3.20

ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార భవనము పొడవు 20 మీ, వెడల్పు 10 మీ. భవనమునకు వెలుపల 1 మీ వెడల్పు వున్న బాట వేయబడినది. బాట వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన :

లోపలి దీర్ఘ చతురస్రము (ఇవ్వబడినది)	వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్రము
l = 20 మీ b = 10 మీ వైశాల్యము = $l \times b$ వైశాల్యము = 20 మీ × 10 మీ = 200 మీ^{2}	వెడల్పు, w = 1 మీ L = $l + 2w$ = 20 + 2 = 22 మీ B = $b + 2w$ = 10 + 2 = 12 మీ వైశాల్యము = $(l + 2w)(b + 2w)$ వైశాల్యము = 22 మీ × 12 మీ = 264 మీ^{2}

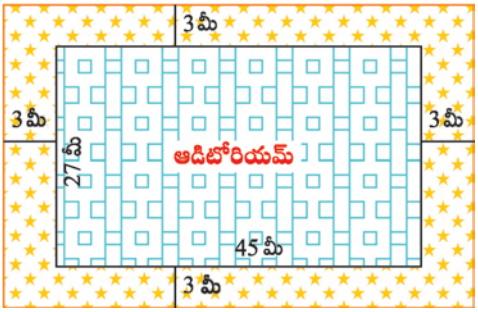
బాట వైశాల్యము = (వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము) – (లోపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము)

= (264 – 200) మీ^{2} = 64 మీ^{2}

$\therefore$ బాట వైశాల్యము = 64 మీ^{2}

ఉదాహరణ 3.21

ఒక పాఠశాలలోని ఆడిటోరియం పొడవు 45మీ, వెడల్పు 27మీ ఆడిటోరియం వెలుపల చుట్టూ 3మీ వెడల్పుతో వరండా వున్నది. వరండా వైశాల్యము ఎంత? వరండాలో బిళ్ళలు(tiles) అంటించుటకు ఒక చదుర మీటరుకు రూ. 100 అయిన ఖర్చు మొత్తమును కనుగొనుము.



పటము. 3.17

సాధన :

లోపలి దీర్ఘ చతురస్రము (ఇవ్వబడినది)	వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్రము
l = 45 మీ b = 27 మీ వైశాల్యము = 45మీ × 27 మీ = 1215 మీ^{2}	వెడల్పు, w = 3 మీ L = $l + 2w$ = 45 + 6 = 51 మీ B = $b + 2w$ = 27 + 6 = 33 మీ వైశాల్యము = 51మీ × 33 మీ = 1683 మీ^{2}

(i)వరండా వైశాల్యము = (వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము) – (లోపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము)

= (1683 – 1215) మీ^{2}

= 468 మీ^{2}

∴ వరండా వైశాల్యము = 468 మీ^{2} (లేక) 468 చ.మీ.

(ii) బిళ్ళలు అంటించుటకు 1 చ.మీ. అగు ఖర్చు = ₹100

బిళ్ళలు అంటించుటకు 468 చ.మీ. అగు ఖర్చు = ₹100 × 468

= ₹46,800

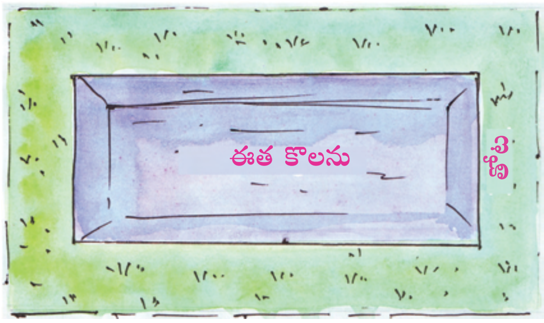
∴వరండాలో బిళ్ళలు అంటించుటకు అగు ఖర్చు = ₹46,800

(ఆ) దీర్ఘ చతురస్రమునకు లోపల ఒకే రకమైన బాట వైశాల్యము (Area of uniform pathway inside a rectangle)

దీర్ఘ చతురస్రాకారపు స్థలము మధ్యలో ఒక ఈతకొలను వున్నది. ఈతకొలను చుట్టూ సిమెంట్ వేయుటకు ఒకే వెడల్పు గల బాట వున్నది.

ఈత కొలనుకు వెలుపల వున్న బాటలో సిమెంట్ వేయబడిన ఖర్చు మొత్తమును ఎలా కనుగొనవలెను

బాట వైశాల్యము, సిమెంటు వేయుటకు ఒక చదరపు మీటరుకు అగు ఖర్చు తెలిసిన, సిమెంటు వేయుటకు అగు మొత్తము ఖర్చును కనుగొనవచ్చును.



పటము. 3.18

ఇక్కడ దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలము వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్రమగును. దీని పొడవు l, వెడల్పు b

∴ స్థలము వైశాల్యము (వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్రము) = $l\,b$ చ.ప్రమాణములు

w అనునది బాట వెడల్పు అయిన ఈతకొలను పొడవు, వెడల్పు ఎంత?

ఈతకొలను పొడవు = $l - w - w$

= $l - 2w$

ఈతకొలను వెడల్పు = $b - w - w$

= $b - 2w$

∴ ఈతకొలను వైశాల్యము (లోపలి దీర్ఘ చతురస్రము) = $(l - 2w)(b - 2w)$ చ.ప్రమాణములు

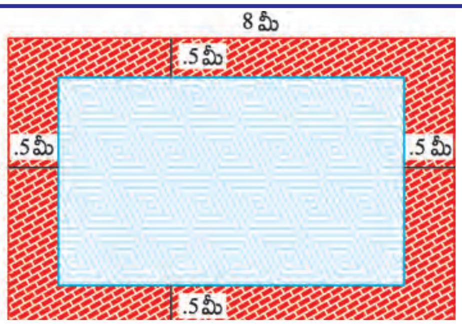
సిమెంట్ వేయబడిన స్థలము వైశాల్యము = స్థలము వైశాల్యము – ఈతకొలను వైశాల్యము.

సాధారణముగా,

బాట వైశాల్యము = (వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము) – (లోపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము)

= $lb - (l - 2w)(b - 2w)$

ఉదాహరణ 3.22



పటము. 3.19

8 మీ. పొడవు, 5 మీ వెడల్పు గల గది లోపల ఎరుపు రంగు బార్డరు 0.5 మీ వెడల్పుతో వేయబడినది. ఎరుపు రంగు బార్డరు వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన :

వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్రము(ఇవ్వబడినది)	లోపలి దీర్ఘ చతురస్రము
l = 8 మీ b = 5 మీ వైశాల్యము = 8మీ $\times$ 5 మీ = 40 మీ^{2}	వెడల్పు, w = 0.5 మీ L = $l - 2w$ = (8 – 1) మీ = 7 మీ B = $b - 2w$ = (5 – 1) మీ = 4 మీ వైశాల్యము = 7మీ $\times$ 4 మీ = 28 మీ^{2}

బాట వైశాల్యము = (వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము) – (లోపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము)

= (40 – 28)మీ^{2} = 12 మీ^{2}

$\therefore$ ఎరుపు రంగు బార్డరు వైశాల్యము = 12 మీ^{2}

ఉదాహరణ 3.23

ఒక కార్పెట్ కొలతలు 3 మీ. $\times$ 2 మీ. అన్ని భుజములలోను 0.25 మీ వెడల్పు గల కార్పెట్‌ను కత్తిరించివేసిన, మిగిలిన కార్పెట్ వైశాల్యమును కనుగొనుము. మరియు కత్తిరించేసిన కార్పెట్ వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన :

వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్రము (కత్తిరించుటకు ముందు వున్న కార్పెట్)	లోపలి దీర్ఘ చతురస్రము (కత్తిరించిన తరువాత మిగిలిన కార్పెట్)
l = 3 మీ b = 2 మీ వైశాల్యము = 3మీ $\times$ 2మీ = 6 మీ^{2}	వెడల్పు, w = 0.25 మీ L = $l - 2w$ = (3 – 0.5) మీ = 2.5 m B = $b - 2w$ = (2 – 0.5) మీ = 1.5 మీ వైశాల్యము = 2.5మీ $\times$ 1.5మీ = 3.75 మీ^{2}

కత్తిరించిన తరువాత మిగిలి వున్న కార్పెట్ వైశాల్యము = 3.75 మీ^{2}

కత్తిరించిన కార్పెట్ వైశాల్యము = (కార్పెట్ వైశాల్యము) –

(కత్తిరించిన తరువాత మిగిలివున్న కార్పెట్ వైశాల్యము)

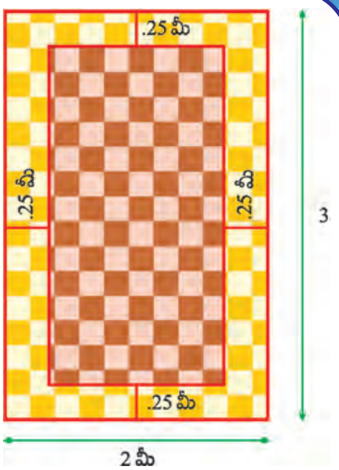
= (6 – 3.75) మీ^{2}

= 2.25 మీ^{2}

∴ కత్తిరించిన కార్పెట్ వైశాల్యము = 2.25 మీ^{2}

గమనిక:లోపలి దీర్ఘ చతురస్ర పొడవు, వెడల్పు ఇవ్వబడిన, వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్ర పొడవు, వెడల్పులు క్రమముగా $l + 2w$, $b + 2w$ అగును. ఇందులో w అనునది బాట వెడల్పు

వెలుపలి దీర్ఘ చతురస్ర పొడవు, వెడల్పు ఇవ్వబడిన, లోపలి దీర్ఘ చతురస్ర పొడవు, వెడల్పులు క్రమముగా $l - 2w$, $b - 2w$ అగును



పటము. 3.20

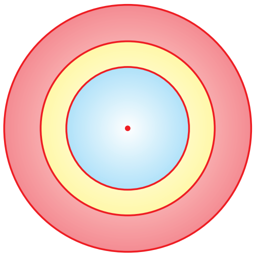
అభ్యాసము 3.4

1. 60 మీ × 40 మీ గల ఆటస్థలము అన్ని వైపుల 3 మీ వెడల్పు పెంచబడినది. పెంచబడిన స్థలము వైశాల్యమును కనుగొనుము.
2. దీర్ఘ చతురస్రాకారములో వున్న ఒక పాఠశాల ఆట స్థలము పొడవు 80 మీ, వెడల్పు 60 మీ. దాని చుట్టూ 2 మీ వెడల్పుతో సిమెంట్ బాట వేయబడినది. సిమెంట్ వేయుటకు ఒక చదరపు మీటరుకు రూ. 20 అయిన, ఖర్చు మొత్తమును కనుగొనుము
3. దీర్ఘ చతురస్రాకారపు తోట కొలతలు 30 మీ × 20 మీ. తోట చుట్టూ 1.5 మీ వెడల్పుతో బాట వేయుటకు ఒక చదరపు మీటరుకు రూ. 10 అయిన ఖర్చు మొత్తమును కనుగొనుము.
4. 50 సెం.మీ పొడవు, 30 సెం.మీ. వెడల్పు గల ఒక చార్టులో బొమ్మ ఒకటి గీయబడినది. చార్టు అంచులో అన్ని వైపుల 2.5 సెం.మీ. వెడల్పు వదలివేయబడినది. అంచులో వదలివేయబడిన భాగము వైశాల్యమును కనుగొనుము.
5. దీర్ఘ చతురస్రాకారపు గది పొడవు 10 మీ, వెడల్పు 7 మీ. గోడ నుంచి అన్ని వైపుల 1 మీ వెడల్పు వదిలేసి మధ్యలో కార్పెట్ వేయబడినది. కార్పెట్ వైశాల్యమును కనుగొనుము. మరియు కార్పెట్‌తో మూసివేయబడని స్థలము వైశాల్యమును కనుగొనుము.
6. ఒక ఫోటో ఫ్రేమ్ వెలుపలి పొడవు, వెడల్పులు క్రమముగా 80 సెం.మీ., 50 సెం.మీ. ఫోటో చుట్టూ వున్న ఫ్రేమ్ 3 సెం.మీ. వెడల్పు వున్నది. ఫోటో కనబడు భాగము వైశాల్యమును కనుగొనుము.

వృత్తాకార బాట (Circular pathway)

ఏక కేంద్రీయ వృత్తములు (Concentric circles)

ఒక సమతలములో ఒక బిందువును ఏక కేంద్రముగా తీసుకొని వేర్వేరు వ్యాసార్థములతో గీయబడిన వృత్తములు 'ఏక కేంద్రీయ వృత్తములు' అనబడును.



పటము. 3.21

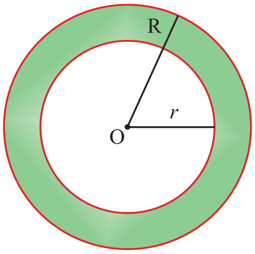
వృత్తాకార బాట

వృత్తాకార ఉద్యానవనములో నడచుటకు వీలుగా ఒకే వెడల్పు గల బాట ఒకటి వేయబడియుండును.

ఆ బాట వైశాల్యమును మీరు కనుగొనుటకు వీలగునా?

వీలగును, రెండు ఏక కేంద్రీయ వృత్తముల మధ్య వుండే వైశాల్యము బాట వైశాల్యమగును. పటము 3.22లో O అనునది రెండు వృత్తములకు ఏక కేంద్రము అగును. బాహ్య వృత్త వ్యాసార్థము R, అంతర వృత్త వ్యాసార్థము r అనుకొనుము.

రంగు వేయబడిన భాగమును వర్తులాకార వలయము లేక వృత్తాకార బాట అందురు. అనగా రెండు ఏక కేంద్రీయ వృత్తములకు మధ్య వున్న భాగము వృత్త బాట అగును.



పటము. 3.22

వృత్తబాట వెడల్పు, $w = R - r$ ప్రమాణములు

అంటే, $w = R - r \Rightarrow R = w + r$ ప్రమాణములు

$r = R - w$ ప్రమాణములు.

వృత్తబాట వైశాల్యము = (బాహ్య వృత్త వైశాల్యము) – (అంతర వృత్త వైశాల్యము)

$= \pi R^2 - \pi r^2$

$= \pi(R^2 - r^2)$ చ.ప్రమాణములు

$\therefore$ వృత్తబాట వైశాల్యము $= \pi(R^2 - r^2)$ చ.ప్రమాణములు

$= \pi(R + r)(R - r)$ చ.ప్రమాణములు

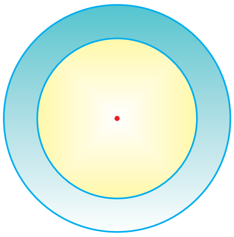
ఉదాహరణ 3.24

ప్రక్కన వున్న పటము రెండు ఏక కేంద్రీయ వృత్తములను చూపుచున్నది. బాహ్యవృత్త వ్యాసార్థము 14 సెం.మీ., అంతర వృత్త వ్యాసార్థము 7 సెం.మీ.

(i) బాహ్య వృత్త వైశాల్యమును కనుగొనుము.

(ii) అంతర వృత్త వైశాల్యమును కనుగొనుము.

(iii) రెండు వృత్తముల మధ్య రంగు వేయబడిన భాగము వైశాల్యమును కనుగొనుము.


పటము. 3.23

సాధన :

i) బాహ్య వృత్తము

$R = 14$

వైశాల్యము $= \pi R^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 22 \times 28$

$= 616$ సెం.మీ^{2}

ii) అంతర వృత్తము

$r = 7$

వైశాల్యము $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 22 \times 7$

$= 154$ సెం.మీ^{2}

iii) ఛాయవేయబడిన భాగము వైశాల్యము

= (బాహ్య వృత్త వైశాల్యము) – (అంతర వృత్త వైశాల్యము)

$= (616 - 154)$ సెం.మీ^{2}

$= 462$ సెం.మీ^{2}

ఉదాహరణ 3.25

5 సెం.మీ.వ్యాసార్థము గల వృత్తాకార కాగితము నుండి,3సెం.మీ.వ్యాసార్థము వున్న ఏక కేంద్రీయ వృత్తమును కత్తిరించి ఎత్తివేయుము. మిగిలిన కాగితపు వైశాల్యమును కనుగొనుము.
(π = 3.14గా తీసుకొనుము)

సాధన :

R = 5 సెం.మీ, r = 3 సెం.మీ అని ఇవ్వబడినది.

మిగిలిన కాగితపు వైశాల్యము $= \pi(R^2 - r^2)$
$= 3.14\ (5^2 - 3^2)$
$= 3.14\ (25 - 9)$
$= 3.14 \times 16$
$= 50.24$ సెం.మీ^{2}

మరియొక పద్ధతి :

బాహ్య వృత్తము	అంతర వృత్తము
R = 5 సెం.మీ వైశాల్యము= πR^2 చ.ప్రమాణములు $= 3.14 \times 5 \times 5$ $= 3.14 \times 25$ = 78.5 సెం.మీ^{2}	r = 3 సెం.మీ వైశాల్యము= πr^2 చ.ప్రమాణములు $= 3.14 \times 3 \times 3$ $= 3.14 \times 9$ = 28.26 సెం.మీ^{2}

మిగిలిన కాగితపు వైశాల్యము = (బాహ్య వృత్త వైశాల్యము) – (అంతర వృత్త వైశాల్యము)
= (78.5 – 28.26) సెం.మీ^{2}
= 50.24 సెం.మీ^{2}

$\therefore$ మిగిలిన కాగితపు వైశాల్యము = 50.24 సెం.మీ^{2}

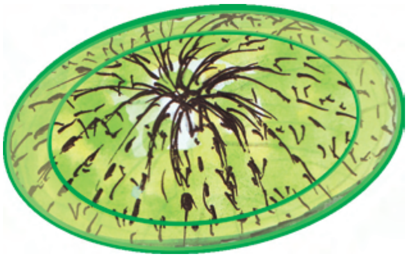
ఉదాహరణ 3.26

వృత్తాకార పూలతోట వైశాల్యము 500 చ.సెం.మీ. వ్యాసార్థము 12 మీ. గల వృత్త భాగమునకు మాత్రము నీరు చల్లునట్లు ఒక పరికరము తోట మధ్యలో వుంచబడినది. తోట మొత్తమునకు పరికరము నీళ్ళు చల్లునా? (π = 3.14 అని తీసుకొనుము)

సాధన :

పూలతోట వైశాల్యము = 500 మీ^{2} అని ఇవ్వబడినది

పరికరము నీళ్ళు చల్లు భాగము వైశాల్యము= πr^2
$= 3.14 \times 12 \times 12$
$= 3.14 \times 144$
= 452 .16 మీ^{2}



పటము. 3.24

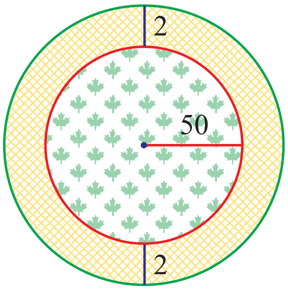
పూలతోట వైశాల్యము కంటే నీళ్ళు చల్లబడు భాగము వైశాల్యము తక్కువగా వున్నందువలన పరికరము తోట మొత్తమునకు నీళ్ళు చల్లదు.

ఉదాహరణ 3.27

50 మీ వ్యాసార్ధముగా గల వృత్తాకార ఉద్యానవనము వెలుపలి భాగములో 2 మీ. వెడల్పుతో వృత్తాకార బాట వేయబడినది. బాటను చదును చేయుటకు ఒక చదరపు మీటరుకు రూ. 5 చొప్పున ఖర్చు అయిన ఖర్చు మొత్తమును కనుగొనుము. (π = 3.14 అని తీసుకొనుము)

సాధన :

r = 50 మీ, w = 2 మీ, R = $r + w$ = 50 + 2 = 52 మీ అని ఇవ్వబడినది



పటము. *3.25*

వృత్తాకార బాట వైశాల్యము $= \pi(R+r)(R-r)$

$= 3.14 \times (52+50)(52-50)$

$= 3.14 \times 102 \times 2 = 3.14 \times 204$

$=$ 640.56 మీ^{2}

1 చదరపు మీటరు బాటను చదును చేయుటకు అగు ఖర్చు = ₹5

640.56 చదరపు మీటర్ల బాటను చదును చేయుటకు అగు ఖర్చు = ₹5 × 640.56

= ₹3202.80

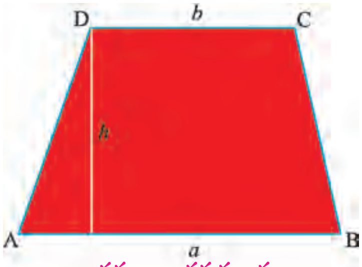
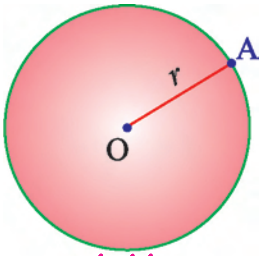
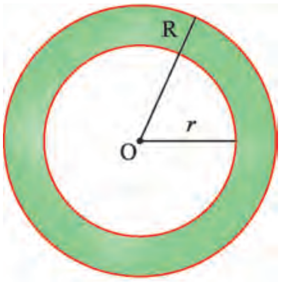
∴ వృత్తాకార బాటను చదును చేయుటకు అగు ఖర్చు = ₹3202.80

అభ్యాసము 3.5

1. సర్కస్ గుడారము వ్యాసార్ధము 50 మీ. కేంద్రము నుండి 20 మీ. వ్యాసార్ధములో కళాకారులు కార్యక్రమములను ప్రదర్శించుటకు ఒక వృత్తవలయము కేటాయించబడినది. ప్రేక్షకులకు కేటాయించబడిన స్థలము వైశాల్యమును కనుగొనుము. (π = 3.14గా తీసుకొనుము)
2. 30 మీ. వ్యాసార్ధముగా గల వృత్తాకార పొలము లోపల 3 మీ. వెడల్పుతో వృత్తాకార బాట వేయబడినది. వృత్తాకార బాట వైశాల్యమును కనుగొనుము(π = 3.14గా తీసుకొనుము)
3. వృత్తవలయ లోహము యొక్క అంతర వృత్త వ్యాసార్ధము 7 సెం.మీ., బాహ్య వృత్త వ్యాసార్ధము 10.5 సెం.మీ. ఒక చదరపు మీటరు లోహమునకు రూ. 5 చొప్పున ఖర్చు అయిన, 25 వలయములను చేయుటకగు ఖర్చును కనుగొనుము.
4. 3 మీ. వ్యాసార్ధము గల వృత్తాకార బావి చుట్టూ 1.5 మీ వెడల్పు గల కట్ట వేయబడినది. కట్ట వైశాల్యమును కనుగొనుము. (π = 3.14 గా తీసుకొనుము)
5. 56 మీ. వ్యాసార్ధము గల వృత్తాకార ఉద్యానవనము చుట్టూ 2.5 మీ. వెడల్పు గల వృత్తాకార బాట వేయబడినది. బాటను చదును చేయుటకు ఒక చదరపు మీటరుకు రూ. 5 ఖర్చు అయిన ఖర్చు మొత్తమును కనుగొనుము. (π = 3.14గా తీసుకొనుము)
6. రెండు ఏక కేంద్ర వృత్తముల వ్యాసార్ధము 56 సెం.మీ. మరియు 49 సెం.మీ. వృత్తాకార బాట వైశాల్యమును కనుగొనుము.
7. ఒక వృత్తాకార బాట వైశాల్యము 88 చ.మీ. బాహ్య వృత్త వ్యాసార్ధము 8 మీ. అంతర వృత్త వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

8. ఒక వృత్తాకార బాటను చదునుచేయుటకు ఒక చ.మీకు రూ.6 వంతున మొత్తము రూ.12012 ఖర్చు అగును. బాట వైశాల్యమును కనుగొనుము.

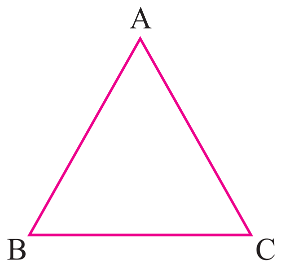
గుర్తుంచుకోవలసిన విషయములు

పటము	వైశాల్యము	సూత్రములు
 సమలంబ చతుర్భుజము	$\frac{1}{2}$ × ఎత్తు × సమాంతర భుజముల మొత్తము	$\frac{1}{2} \times h \times (a + b)$ చ.ప్రమాణములు
 వృత్తము	వృత్త చుట్టుకొలత = 2 × π × వ్యాసార్థము	$2\pi r$ ప్రమాణములు
	వృత్త వైశాల్యము = π × వ్యాసార్థము × వ్యాసార్థము	πr^2 చ.ప్రమాణములు
దీర్ఘ చతురస్రము	బాట వైశాల్యము i) దీర్ఘ చతురస్రాకార బాట వైశాల్యము	బాహ్య దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము – అంతర దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము
 వృత్తాకార బాట	ii) వృత్తాకార బాట వైశాల్యము	బాహ్య వృత్త వైశాల్యము – అంతర వృత్త వైశాల్యము $= \pi (R^2 - r^2)$ చ.ప్రమాణములు $= \pi (R + r)(R - r)$ చ.ప్రమాణములు

4 క్షేత్రగణితము

4.1 త్రిభుజము: పునఃపరిశీలనము (Triangle: Revision)

త్రిభుజము అనునది మూడు రేఖా ఖండములచే మూసిన సమతల ఆకారమగును.



పటము 4.1

పటము 4.1లో AB, BC మరియు CA అను రేఖా ఖండములు మూసిన ఆకారమును ఏర్పరచియున్నవి. ఇది త్రిభుజము అగును. దానిని ΔABC అని గుర్తించవచ్చును. ఈ త్రిభుజమును ΔABC లేక ΔBCA లేక ΔCAB అని పేర్లు పెట్టవచ్చును.

త్రిభుజమును ఏర్పరచిన రేఖాఖండములు, త్రిభుజము యొక్క మూడు భుజములగును. పటము 4.1లో $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ మరియు $\overline{CA}$ అనునవి త్రిభుజము యొక్క మూడు భుజములు అగును.

త్రిభుజము యొక్క మూడు రేఖాఖండములలో ఏవేని రెండు రేఖా ఖండములు ఖండించు బిందువును త్రిభుజము యొక్క శీర్షము అందుము. పటము 4.1లో A, B మరియు C అనునవి త్రిభుజము యొక్క మూడు శీర్షములు అగును.

రెండు రేఖా ఖండములు ఖండించునపుడు ఒక బిందువు వద్ద కోణము ఏర్పడును. పటము 4.1 లో $\overline{AB}$ మరియు $\overline{BC}$ లు B వద్ద ఖండించును మరియు కోణమును శీర్షములో ఏర్పరచుచున్నది. ఈ కోణమును మనము కోణము B లేక $\angle B$ లేక $\angle ABC$ అని చదువవచ్చును. కాబట్టి త్రిభుజమనునది $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ అను మూడు కోణములను కలిగియున్నది.

పటము 4.1 లో ΔABC కు

భుజములు : $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$

కోణములు : $\angle CAB$, $\angle ABC$, $\angle BCA$

శీర్షములు : A, B, C

శీర్షములు A, B, C యొక్క ఎదుటి భుజములు క్రమముగా BC, AC, AB అగును. భుజములు BC, AC, AB ల యొక్క ఎదుటనున్న కోణములు క్రమముగా $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ అగును.

త్రిభుజము అనునది మూడు రేఖా ఖండములచే మూసిన సమతల ఆకారమగును. ఇది మూడు శీర్షములను, మూడు భుజములను, మూడు కోణములను కలిగియున్నది.

4.2 త్రిభుజముల రకములు (Types of Triangles)

భుజముల ఆధారముతో (Based on sides)

సమబాహు త్రిభుజములో త్రిభుజము యొక్క అన్ని భుజములు సమానము.

సమద్విబాహు త్రిభుజములో దాని రెండు భుజములు సమానము.

విషమబాహు త్రిభుజములో దాని అన్ని భుజములు సమానము కావు.

కోణముల ఆధారముతో (Based on angles)

లంబకోణ త్రిభుజము అనగా త్రిభుజము యొక్క ఒక కోణము లంబకోణముగాను మిగిలిన రెండు కోణములు అల్ప (లఘు) కోణములుగాను ఉండును.

అధిక కోణ త్రిభుజము అనగా త్రిభుజము యొక్క ఒక కోణము అధిక (గురు) కోణముగాను మిగిలిన రెండు కోణములు అల్ప (లఘు) కోణములుగాను ఉండును.

అల్పకోణ త్రిభుజము అనగా త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణములు అల్ప(లఘు) కోణములుగా ఉండును.

ఒక త్రిభుజము యొక్క రెండు భుజముల పొడవులు మొత్తము మూడవ భుజము కంటే అధికముగా ఉండును.

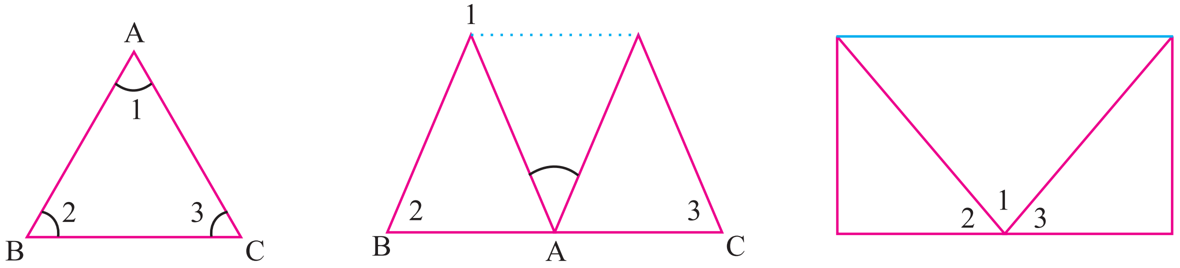
4.3 త్రిభుజము యొక్క కోణ మొత్తముల ధర్మము (Angle sum property of a triangle):

చేసి చూడుము 1:

ప్రయత్నించుము

7 సెం.మీ, 5 సెం.మీ, 13 సెం.మీ గల కొలతలు ఒక త్రిభుజమును ఏర్పరుచునా?

ABC అను ఏదైనా ఒక త్రిభుజమును ఒక కాగితములో గీచి, కోణములు 1, 2 మరియు 3 అనునవి రెండు ప్రక్కలలోను కాగితములో పటము 4.2 (i) లో ఉండునట్లు గుర్తించుము.



(i) (ii) (iii)

పటము 4.2

ABC అను త్రిభుజమును కత్తిరించుము. A అను శీర్షమును BC అను ప్రక్కలో పటము 4.2 (ii) లో ఉండునట్లు మడువుము. శీర్షములు B మరియు C ను పటము 4.2 (iii) లో ఉండునట్లు మడువుము.

ఇప్పుడు మీరు $\angle 1$, $\angle 2$ మరియు $\angle 3$ సరళరేఖలో ఉండుటను చూడవచ్చును. దీని నుండి

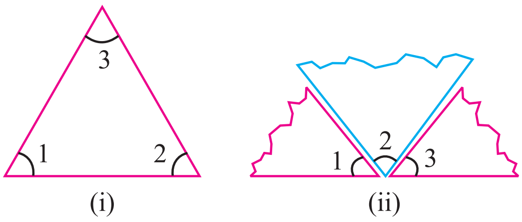
$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

అనునది తెలుసుకొనవచ్చును. ఒక త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణముల మొత్తము 180^0 అగును.

చేసి చూడుము 2:

పటము 4.3 (i) లో ఉండునట్లు ఒక త్రిభుజము గీయుము. దాని మూడు కోణములను కత్తిరించి తీసుకొనుము. వాటిని పటము 4.3 (ii) లోఉండునట్లు అమర్చుము. ఇప్పుడు మీరు మూడు కోణములను చేర్చి ఒక కోణమును ఏర్పరచియున్నది అని తెలుసుకొనవచ్చును. ఈ కోణము సరళ కోణము అగును. అందువలన దాని కొలత 180^0 అగును. ఒక త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణముల మొత్తము 180^0 అగును.



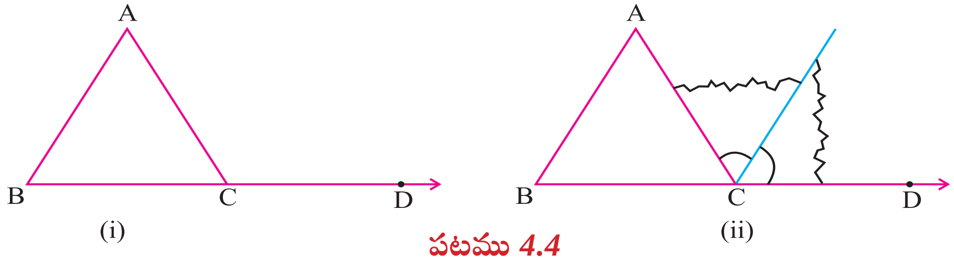
పటము 4.3

ఆలోచించుము:

1. ఒక త్రిభుజములో రెండు కోణములు 60^0 కు తక్కువగా ఉండిన త్రిభుజము ఏర్పరచునా?
2. ఒక త్రిభుజములో రెండు కోణములు లంబ కోణముగా ఉండిన త్రిభుజము ఏర్పరచునా?

త్రిభుజము యొక్క బాహ్యకోణము – ధర్మములు (Exterior angle of a triangle and its property)

చేసి చూడుము 3:



పటము 4.4

త్రిభుజము ABC ను గీచి దానిని ఒక ప్రక్కగా పటము 4.4 (i) లో ఉండునట్లు పొడిగించుము. కోణము ACD, C అను బిందువు వద్ద ఏర్పడుటను చూడవచ్చును.

$\angle BCA$ అనునది $\angle ACD$ యొక్క ఆసన్న కోణము అగును. త్రిభుజము యొక్క మిగిలిన రెండు కోణములు $\angle A$ మరియు $\angle B$ లను త్రిభుజము యొక్క ఎదుటి భుజ అంతరకోణములు అని చెప్పవచ్చును.

ఇప్పుడు $\angle A$ మరియు $\angle B$ ను కత్తిరించి (లేక అదే విధముగా గీచి) పటము 4.4 (ii) లో చూపియున్నట్లు ప్రక్కప్రక్కన ఉంచుము.

మీరు ఈ రెండు ముక్కలను చేరి $\angle ACD$ లో పూర్తిగా జతపడినది గమనించవచ్చును.

దీని నుండి త్రిభుజము యొక్క బాహ్య కోణము దాని ఎదుటి రెండు అంతరకోణముల మొత్తమునకు సమానము అనునది తెలుసుకొనవచ్చును.

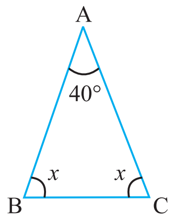
త్రిభుజము యొక్క బాహ్య కోణమునకును దాని రెండు అంతర కోణములకును మధ్యగల సంబంధము త్రిభుజము యొక్క బాహ్య కోణము యొక్క ధర్మము అగును.

ABC అను త్రిభుజమును గీచి పటము 4.4 (i) లో ఉండునట్లు భుజములలో ఒకటైన BC ను పొడిగించుము. $\angle ACD$, C అను బిందువు వద్ద ఏర్పడుచున్నది. ఇప్పుడు కోణమానిని తీసుకొని $\angle ACD$, $\angle A$ మరియు $\angle B$ లను కొలువుము. $\angle A + \angle B$ ను కనుగొని $\angle ACD$ ను కొలిచి దానితో పోల్చి చూడుము మీరు $\angle ACD = \angle A + \angle B$ అనునది తెలుసుకొన్నారా?

ఉదాహరణ 4.1

ఇవ్వబడిన పటము నుండి x విలువను కనుగొనుము.

సాధన:



$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180°$ (ఎందుకనగా త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణముల మొత్తము 180^0)

$40° + x + x = 180°$

$40° + 2x = 180°$

$2x = 180° - 40°$

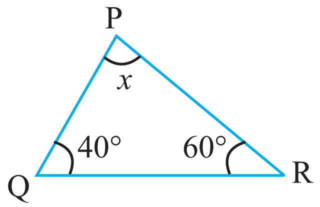
$2x = 140°$

$x = \frac{140}{2} = 70°$

$\therefore x$ విలువ $= 70°$.

ఉదాహరణ 4.2

త్రిభుజము యొక్క రెండు కోణములు 40^0 మరియు 60^0 అయిన మూడవ కోణమును కనుగొనుము.



సాధన:

$\angle RPQ + \angle PQR + \angle QRP = 180°$ (ఎందుకనగా త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణముల మొత్తము 180^0)

$x + 40° + 60° = 180°$

$x + 100° = 180°$

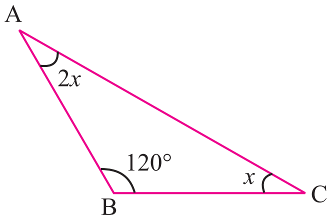
$x = 180° - 100°$

$= 80°$

$\therefore$ మూడవ కోణము $x = 80°$

ఉదాహరణ 4.3

ఇవ్వబడిన పటము నుండి $\angle A$ కొలతను కనుగొనుము.



సాధన:

$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180°$ (ఎందుకనగా త్రిభుజము యొక్క మూడు

$2x + 120° + x = 180°$ కోణముల మొత్తము 180^0)

$3x + 120° = 180°$

$3x = 180° - 120°$

$3x = 60°$

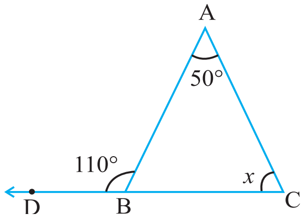
$x = \frac{60}{3}$

$= 20°$

$\therefore \angle A = 2x = 2 \times 20° = 40°$

ఉదాహరణ 4.4

ఇవ్వబడిన పటము నుండి x విలువను కనుగొనుము.



సాధన:

పటములో బాహ్య కోణము $= \angle ABD = 110°$.

రెండు ఎదుటి అంతర కోణముల మొత్తము $= \angle BCA + \angle CAB$

$= x + 50°$

$x + 50° = 110°$ (ఎందుకనగా రెండు ఎదుటి అంతర కోణముల

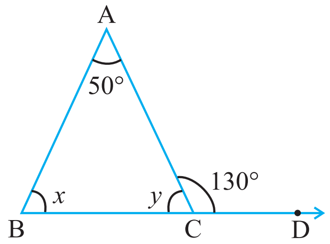
$x = 110° - 50°$ మొత్తము బాహ్య కోణమునకు సమానము)

$= 60°$

$\therefore x$ విలువ $= 60°$.

ఉదాహరణ 4.5

ఇవ్వబడిన పటము నుండి x, y విలువలను కనుగొనుము.



సాధన:

ఇవ్వబడిన పటములో ,

బాహ్య కోణము $= \angle DCA = 130°$

$50° + x = 130°$ (ఎందుకనగా ఒక త్రిభుజము యొక్క బాహ్య

$x = 130° - 50°$ కోణము దాని ఎదుటి రెండు అంతర

$= 80°$ కోణముల మొత్తమునకు సమానము)

ΔABC లో,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$ (ఎందుకనగా త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణముల మొత్తము 180^0)

$$50^\circ + x + y = 180^\circ$$

$$50^\circ + 80^\circ + y = 180^\circ$$

$$130^\circ + y = 180^\circ$$

$$y = 180^\circ - 130^\circ$$

$$= 50^\circ$$

$\therefore x$ విలువ 80°, y విలువ 50°.

మరొక పద్ధతి:

$$\angle ACB + \angle DCA = 180^\circ$$ (ఎందుకనగా ఒక రేఖపై ఏర్పడు ఆసన్న కోణముల మొత్తము 180^0)

$$y + 130^\circ = 180^\circ$$

$$y = 180^\circ - 130^\circ$$

$$= 50^\circ$$

$\Delta\ ABC$ లో,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$ (ఎందుకనగా త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణముల మొత్తము 180^0)

$$50^\circ + x + y = 180^\circ$$

$$50^\circ + x + 50^\circ = 180^\circ$$

$$100^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 100^\circ$$

$$= 80^\circ$$

ఉదాహరణ 4.6

త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణములు $3x + 5^\circ$, $x + 20^\circ$, $x + 25^\circ$. అయిన ఒక్కొక్క కోణము కొలతను కనుగొనుము.

సాధన:

త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణముల మొత్తము $= 180^\circ$

$$3x + 5^\circ + x + 20^\circ + x + 25^\circ = 180^\circ$$

$$5x + 50^\circ = 180^\circ$$

$$5x = 180° - 50°$$

$$5x = 130°$$

$$x = \frac{130}{5}$$

$$= 26°$$

$$3x + 5° = (3 \times 26°) + 5° = 78° + 5° = 83°$$

$$x + 20° = 26° + 20° = 46°$$

$$x + 25° = 26° + 25° = 51°$$

∴ త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణముల కొలతలు 83°, 46° మరియు 51°.

అభ్యాసము 4.1

1. సరైన జవాబును ఎన్నుకొనుము.

i) ఒక త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణముల మొత్తము

(అ)) 90° (ఆ) 180° (ఇ) 270° (ఈ) 360°

ii) ఒక త్రిభుజములో మూడు కోణములు సమానము అయిన ఒక్కొక్క కోణము కొలత

(అ) 30^0 (ఆ) 45^0 (ఇ) 60^0 (ఈ) 90^0

iii) క్రింద ఇవ్వబడిన వాటిలో ఏది త్రిభుజము యొక్క కోణములుగా ఉండుటకు వీలగును.

(అ) $50^0, 30^0, 105^0$ (ఆ) $36^0, 44^0, 90^0$ (ఇ) $70^0, 30^0, 80^0$ (ఈ) $45^0, 45^0 80^0$

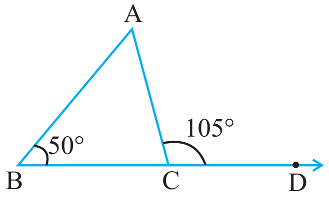
iv) త్రిభుజము యొక్క రెండు కోణములు 40° మరియు 60° అయిన మూడవ కోణము

(అ) 20^0 (ఆ) 40^0 (ఇ) 60^0 (ఈ) 80^0

v) ΔABC లో BC ను D వరకు పొడిగించుము $\angle ABC = 50^0$, $\angle ACD = 105^0$ అయిన $\angle BAC$ యొక్క కొలత

(అ) 75° (ఆ) 15°

(ఇ) 40° (ఈ) 55°



2. క్రింద ఇవ్వబడిన వాటిలో ఏవి త్రిభుజములు అని చెప్పుము.

(i) $\angle A = 25^0$ $\angle B = 35^0$ $\angle C = 120^0$

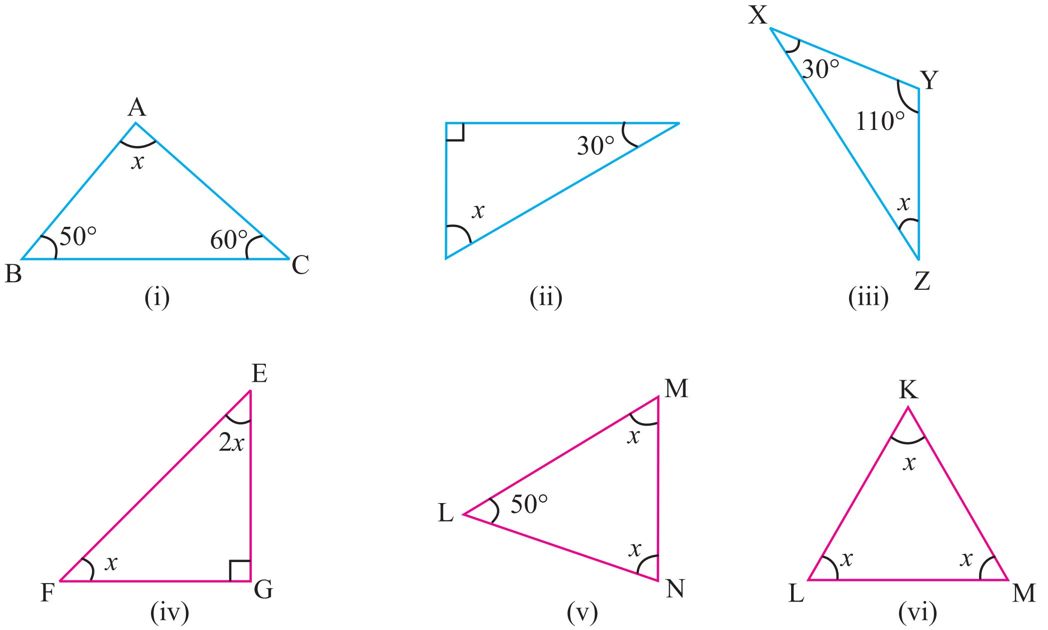
(ii) $\angle P = 90^0$ $\angle Q = 30^0$ $\angle R = 50^0$

(iii) $\angle X = 40^0$ $\angle Y = 70^0$ $\angle Z = 80^0$

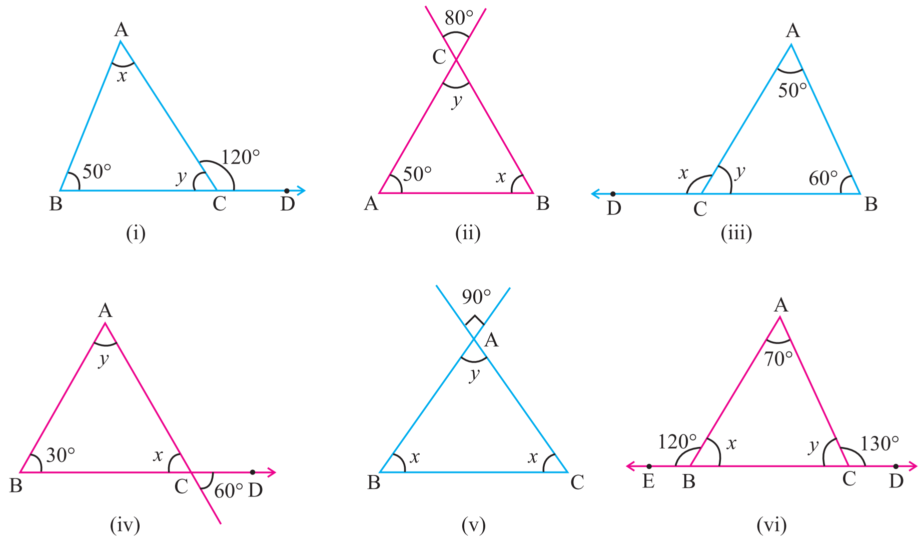
3. త్రిభుజములోని రెండు కోణములు ఇవ్వబడియున్నవి. మూడవ కోణమును కనుగొనుము.

(i) $75^0, 45^0$ (ii) $80^0, 30^0$ (iii) $40^0, 90^0$ (iv) $45^0, 85^0$

4. క్రింద ఇవ్వబడిన పటముల నుండి x విలువను కనుగొనుము.



5. క్రింద ఇవ్వబడిన పటముల నుండి x మరియు y విలువను కనుగొనుము.



6. త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణములు $x + 5°$, $x + 10°$ మరియు $x + 15°$ అయిన x విలువను కనుగొనుము.

గుర్తుంచుకోవలసిన విషయములు

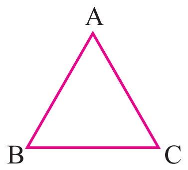
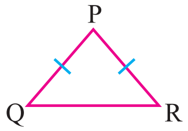
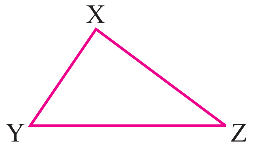
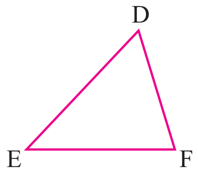
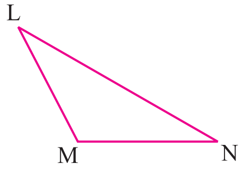
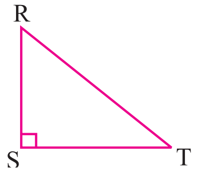
1. ఒక త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణముల మొత్తము 180^0 అగును.
2. ఒక త్రిభుజము యొక్క బాహ్య కోణము దాని ఎదుటి భుజ రెండు అంతర కోణముల మొత్తమునకు సమానము.

5 ప్రయోగాత్మక రేఖాగణితము

5.1 త్రిభుజములను నిర్మించుట: (Construction of triangles)

భుజములు మరియు కోణముల ఆధారముగా అమరిన త్రిభుజముల వర్గీకరణను మనము ముందు తరగతులలో తెలిసికొనియున్నాము. ఇప్పుడు త్రిభుజముల వర్గీకరణను మరియు వాటి ధర్మములను పున:పరిశీలన చేయుదుము.

త్రిభుజముల వర్గీకరణ: (Classification of triangles)

		వ.సం	త్రిభుజము పేరు	పటము	గమనిక
త్రిభుజముల వర్గీకరణ	భుజముల ఆధారముగా	1	సమబాహు త్రిభుజము		మూడు భుజములు సమానము
		2	సమద్విబాహు త్రిభుజము		ఏవేని రెండు భుజములు సమానము
		3	విషమ బాహు త్రిభుజము		భుజములు సమానము కావు
	కోణముల ఆధారముగా	4	లఘుకోణ త్రిభుజము		మూడు కోణములు లఘు కోణములు (90° కు తక్కువ)
		5	గురుకోణ త్రిభుజము		ఏదైన ఒక కోణము గురు కోణము (90° కన్న ఎక్కువ)
		6	లంబ కోణ త్రిభుజము		ఏదైనా ఒక కోణము లంబ కోణము (90°)

త్రిభుజముల కొన్ని ధర్మములు: (Some properties of triangle)

1. ఒక త్రిభుజము యొక్క ఏవేని రెండు భుజముల మొత్తము మూడవ భుజము కంటే ఎక్కువగా వుండును.
2. ఒక త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణముల మొత్తము 180°.

త్రిభుజమును నిర్మించేందుకు కావలసిన మూడు కొలతలలో కనీసము ఒక భుజము యొక్క కొలతను ఖచ్చితముగా ఇవ్వవలెను. ఇవ్వబడిన కొలతకు క్రింద పేర్కొన్నట్లు త్రిభుజములను నిర్మించెదము.

(i) మూడు భుజములు (SSS).

(ii) రెండు భుజములు మరియు వాటి మధ్య వుండు కోణము (SAS).

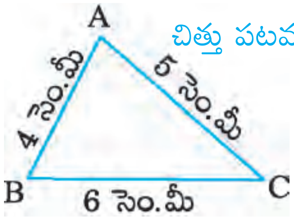
(iii) రెండు కోణములు మరియు వాటి మధ్య వుండు భుజము (ASA).

(i) మూడు భుజములను ఇచ్చినప్పుడు త్రిభుజమును నిర్మించుట: (SSS నియమము)

ఉదాహరణ 5.1

ఇవ్వబడిన AB = 4 సెం.మీ, BC = 6 సెం.మీ మరియు AC = 5 సెం.మీ కొలతలకు త్రిభుజము ABC ను నిర్మించుట.

చిత్తు పటము



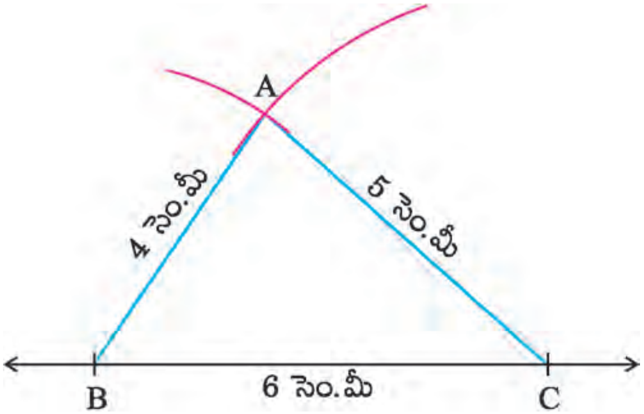
సాధన

ఇవ్వబడిన కొలతలు

AB = 4 సెం.మీ

BC = 6 సెం.మీ

AC = 5 సెం.మీ



నిర్మాణ క్రమము: *(Steps for construction)*

మెట్టు 1 : BC = 6 సెం.మీ కొలత గల రేఖాఖండమును గీయుము.

మెట్టు 2 : 'B' ను కేంద్రముగా తీసుకొని 4 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో BC కి పైన ఒక చాపమును గీయుము.

మెట్టు 3 : 'C' ను కేంద్రముగా తీసుకొని 5 సెం.మీ వ్యాసార్ధమున్న చాపము, ముందు చాపమును 'A' వద్ద ఖండించునట్లు గీయుము.

మెట్టు 4 : AB మరియు AC లను కలుపుము.

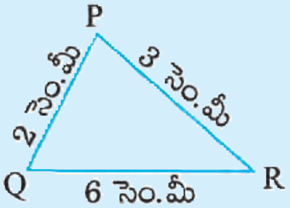
ABC అనునది కావలసిన త్రిభుజము అగును.

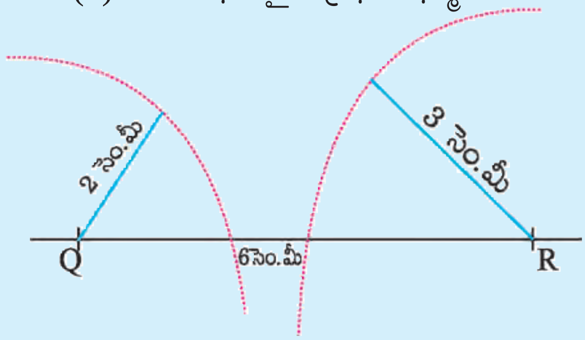
కోణమానిని ఉపయోగించి త్రిభుజము యొక్క అన్ని కోణములను కొలిచి, వాటి మొత్తమును కనుగొనుము.

మీకు తెలుసా?

1. ఒక విద్యార్థి PQ = 2 సెం.మీ, QR = 6 సెం.మీ మరియు PR = 3 సెం.మీ అని ఇవ్వబడిన కొలతలకు ఒక త్రిభుజము నిర్మించుటకు ప్రయత్నించెను. (చిత్తు పటములో ఉండునట్లు) మొదట అతను QR = 6 సెం.మీ గల రేఖా ఖండమును గీచెను. తరువాత P ను కేంద్రముగా తీసుకొని 2 సెం.మీ వ్యాసార్ధమున్న వృత్త చాపమును, R ను కేంద్రముగా తీసుకొని 3 సెం.మీ వ్యాసార్ధమున్న వృత్త చాపమును గీసెను. ఇవి P అను బిందువు వచ్చుటకు ఒకదానినొకటి ఖండించుకొనలేదు. (i) కారణము ఏమి? (ii) దీనికి ఆధారమైన త్రిభుజ ధర్మము ఏది?

చిత్తు పటము





ఒక త్రిభుజము యొక్క ఏవేని రెండు భుజముల మొత్తము మూడవ భుజము కంటే ఎక్కువగా ఉండును.

ఒక త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణములకు కోణ సమద్విఖండన రేఖలను గీయుము. అవి అన్నీ ఒకే బిందువు ద్వారా పోవుచున్నవా అని సరిచూడుము. ఆ బిందువు అంతరవృత్త కేంద్రము అని చెప్పబడును..

(ii) రెండు భుజములు వాటి మధ్య ఒక కోణము ఇచ్చినపుడు త్రిభుజమును నిర్మించుట (SAS నియమము)

ఉదాహరణ 5.2

ఇవ్వబడిన కొలతలు PQ = 4 సెం.మీ, QR = 6.5 సెం.మీ మరియు $\angle PQR = 60^\circ$ వున్న త్రిభుజము PQR ను నిర్మించుము.

సాధన

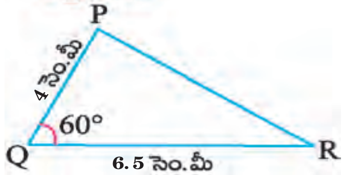
ఇవ్వబడిన కొలతలు

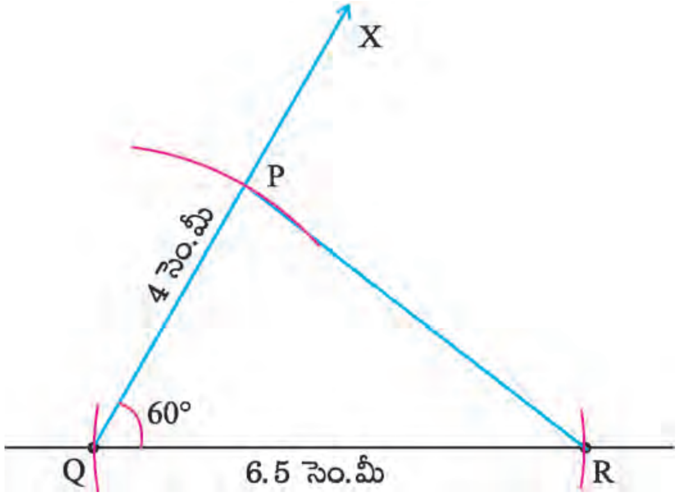
PQ = 4 సెం.మీ

QR = 6.5 సెం.మీ

$\angle PQR = 60^\circ$

చిత్తు పటము





నిర్మాణ క్రమము:

మెట్టు 1 : QR = 6.5 సెం.మీ కొలత గల రేఖా ఖండమును గీయుము.

మెట్టు 2 : Q దగ్గర 60^0 కోణమును గుర్తించి దాని ద్వారా QX అను రేఖా కిరణమును గీయుము.

మెట్టు 3 : 'Q' ను కేంద్రముగా తీసుకొని 4 సెం.మీ వ్యాసార్ధమున్న వృత్త చాపము QX ను 'P' దగ్గర ఖండించునట్లు గీయుము.

మెట్టు 4 : PR లను కలుపుము.

PQR కావలసిన త్రిభుజము.

XY = 6 సెం.మీ, YZ = 6 సెం.మీ మరియు $\angle XYZ = 70°$ కొలతలు గల త్రిభుజమును గీయుము. త్రిభుజము యొక్క సమాన భుజముల ఎదుటవున్న కోణములను కొలిచి చూడుము. నీవు ఏమి గమనించితివి?

(iii) రెండు కోణములు వాటి మధ్య ఒక భుజము ఇచ్చినపుడు త్రిభుజమును నిర్మించుట. (ASA నియమము)

ఉదాహరణ 5.3

XY = 6 సెం.మీ, $\angle ZXY = 30°$ మరియు $\angle XYZ = 100°$ కొలతలు గల త్రిభుజము XYZ ను నిర్మించుము. మూడవ కోణము కొలత 50° వున్నదా అని పరీక్షించుము.

సాధన

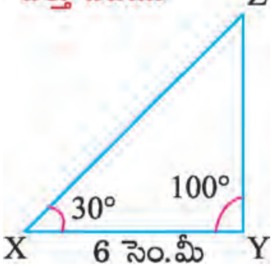
ఇవ్వబడిన కొలతలు

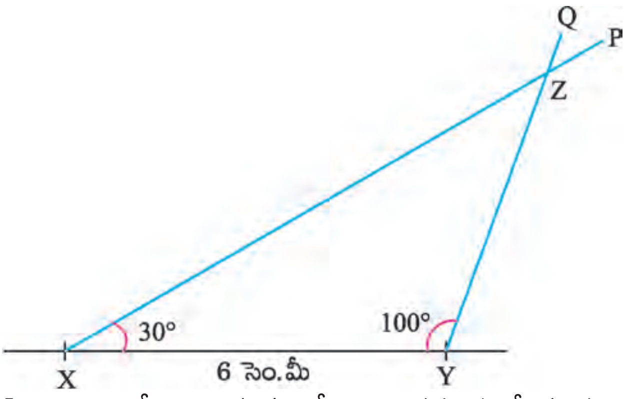
XY = 6 సెం.మీ

$\angle ZXY = 30°$

$\angle XYZ = 100°$

చిత్తు పటము





మెట్టు 1 : XY = 6 సెం.మీ కొలత గల రేఖా ఖండమును గీయుము.

మెట్టు 2 : X దగ్గర 30° కోణము ను గుర్తించి దాని ద్వారా XP అను రేఖాకిరణము గీయుము.

మెట్టు 3 : Y దగ్గర 100° కోణమును గుర్తించి దాని ద్వారా QY అను రేఖాకిరణమును గీయుము. XP మరియు YQ కిరణములు Z వద్ద ఖండించుకొనును.

మెట్టు 4 : XYZ కావలసిన త్రిభుజము అగును. మూడవ కోణము కొలత 50° (అంటే ∠Z = 50°)

PQ = 7 సెం.మీ, ∠Q = 70° మరియు ∠R = 40° అను కొలతలతో వున్న త్రిభుజము PQR ను నిర్మించుము.

గమనిక: త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణముల మొత్తము అను ధర్మమును ఉపయోగించుము.

అభ్యాసము 5.1

I. క్రింద ఇవ్వబడిన కొలతలకు త్రిభుజములను నిర్మించుము.

1. ఇవ్వబడిన కొలతలు PQ = 6 సెం.మీ, QR = 7 సెం.మీ, PR = 5 సెం.మీ వున్న △PQR ను నిర్మించుము.
2. 7 సెం.మీ భుజమున్న సమబాహు త్రిభుజమును నిర్మించుము. కోణమానిని ఉపయోగించి త్రిభుజము యొక్క ఒక్కొక్క కోణమును కొలువుము. అవి సమానముగా వున్నవా?
3. DE = 4.5 సెం.మీ, EF = 5.5 సెం.మీ మరియు DF = 4.5 సెం.మీ కొలతలు గల త్రిభుజము DEF ను నిర్మించుము. ఇది ఎలాంటి త్రిభుజము అని తెలియుచున్నదా? దాని పేరును వ్రాయుము.

II. క్రింద ఇవ్వబడిన కొలతలకు త్రిభుజములను నిర్మించుము.

4. ఇవ్వబడిన కొలతలు YZ = 7 సెం.మీ, ZX = 5 సెం.మీ మరియు ∠Z = 50° వున్న △XYZ ను నిర్మించుము.
5. ఇవ్వబడిన కొలతలు PQ = 7 సెం.మీ, PR = 9 సెం.మీ మరియు ∠P = 100° వున్న △PQR ను నిర్మించుము.
6. ఇవ్వబడిన కొలతలు AB = 6 సెం.మీ, BC = 8 సెం.మీ మరియు ∠B = 90° వున్న △ABC ను నిర్మించుము. AC యొక్క పొడవును కొలువుము.

III. క్రింద ఇవ్వబడిన కొలతలకు త్రిభుజములను నిర్మించుము.

7. ∠X = 50°, ∠Y = 70° మరియు XY = 5 సెం.మీ కొలతలు గల △XYZ ను నిర్మించుము.
8. ∠A = 120°, ∠B = 30° మరియు AB = 7 సెం.మీ కొలతలు గల △ABC ను నిర్మించుము.
9. ఇవ్వబడిన కొలతలు ∠L = 40°, ∠M = 40° మరియు LM = 6 సెం.మీ వున్న △LMN ను నిర్మించుము. ∠L మరియు ∠M ఎదురుగా వున్న భుజముల పొడవులను కొలిచి వ్రాయుము. అవి సమానమైనవా? ఇది ఎలాంటి త్రిభుజము?

6 దత్తాంశమును ఉపయోగించుట

6.1 విభాగపు దత్తాంశమునకు అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకము. (Mean Median, Mode of ungrouped data)

అంకమధ్యమము: (Arithmetic mean)

మనము సరాసరి అను పదమును నిత్య జీవితములో అనేక సార్లు ఉపయోగించుచున్నాము.

పూర్ణిమ రోజులో సరాసరిగా 5 గం॥లు తన చదువుకు కేటాయించుచున్నది.

మే నెలలో చెన్నైలో సరాసరిగా 40 డిగ్రీల సెల్సియస్ ఉష్ణోగ్రత వుండును.

పైన చెప్పబడిన వాక్యాలు మనకు ఏమి చెప్పుచున్నవి?

పూర్ణిమ రోజు సరాసరిగా 5 గం॥లు చదువుచున్నది. కొన్ని రోజులు తక్కువ గంటలు, మిగిలిన రోజులు ఎక్కువ గంటలు చదువుచున్నది.

సరాసరిగా 40 డిగ్రీల సెల్సియస్ ఉష్ణోగ్రత అనునది మే నెలలో చెన్నై ఉష్ణోగ్రత కొన్ని సమయములలో 40 డిగ్రీల సెల్సియస్‌కు తక్కువగా మిగిలిన సమయములలో 40 డిగ్రీల సెల్సియస్‌కు ఎక్కువగా వుండును అని తెలుపుచున్నది.

ఇవ్వబడిన దత్తాంశములో కనిష్ఠ మరియు గరిష్ఠ విలువల మధ్య సరాసరి వుండును.

రోహిత్ అనునతడు వివిధ పాఠ్యాంశములలో క్రింది మార్కులను పొందెను.

62, 84, 92, 98, 74

అతని సరాసరి మార్కులను కనుగొనుము. మొదట అతని అన్ని సబ్జక్టుల మార్కులను కూడవలయును.

$$62 + 84 + 92 + 98 + 74 = 410.$$

తరువాత దానిని మొత్తము పాఠ్యాంశముల సంఖ్యతో భాగించుము. (అంటే 5 తో)

రోహిత్ పొందిన సరాసరి మార్కులు $= \dfrac{410}{5} = 82.$

ఈ విలువ అతనికి చదువులో వున్న సామర్థ్యమును తెలుసుకొనుటకు ఉపయోగపడుచున్నది.

∴ **సరాసరి లేక అంకమధ్యమమును లేక సగటును ఈ క్రింది విధముగా నిర్వచించవచ్చును.**

$$\text{అంకమధ్యమము} = \frac{\text{దత్తాంశముల మొత్తము}}{\text{దత్తాంశముల సంఖ్య}}$$

ఉదాహరణ 6.1

గాయత్రి 3 రోజులలో వరుసగా 4 గంటలు, 5 గంటలు మరియు 3 గంటలు చదివెను. ఆమె సరాసరిగా ఎన్ని గంటలు ఒక రోజుకు చదువుచున్నది.

సాధన:

$$\text{చదివిన సరాసరి గంటలు} = \frac{\text{చదివిన గంటల మొత్తము}}{\text{చదివిన రోజుల సంఖ్య}}$$

$$= \frac{4+5+3}{3} \text{ గంటలు}$$

$$= \frac{12}{3}$$

$$= 4 \text{ గంటలు.}$$

గాయత్రి సరాసరిగా ఒక రోజుకు 4 గంటలు చదువుచున్నది అని చెప్పవచ్చును.

ఉదాహరణ 6.2

ఆరు కుటుంబముల నెలసరి ఆదాయము వరుసగా ₹ 3500, ₹ 2700, ₹ 3000, ₹ 2800, ₹ 3900 మరియు ₹ 2100 అయినపుడు ఆదాయ సరాసరిని కనుగొనుము.

సాధన:

$$\text{నెలసరి ఆదాయము యొక్క సరాసరి} = \frac{\text{ఆరు కుటుంబముల ఆదాయము మొత్తం}}{\text{కుటుంబముల సంఖ్య}}$$

$$= \frac{₹\ 3500 + 2700 + 3000 + 2800 + 3900 + 2100}{6}$$

$$= ₹\ \frac{18000}{6}$$

$$= ₹\ 3{,}000.$$

ఉదాహరణ 6.3

5 కలముల సరాసరి వెల ₹75. 5 కలముల మొత్తము వెల ఎంత?

సాధన:

$$\text{సరాసరి} = \frac{\text{5 కలముల మొత్తము వెల}}{\text{కలముల సంఖ్య}}$$

$$\text{5 కలముల మొత్తము వెల} = \text{సరాసరి} \times \text{కలముల సంఖ్య}$$

$$= ₹\ 75 \times 5$$

$$= ₹\ 375$$

మధ్యగతము: (Median)

11 మంది విద్యార్థుల ఎత్తులు క్రింద ఇవ్వబడినవి.

106, 110, 123, 125, 115, 120, 112, 115, 110, 120, 115.

వ్యాయామ శిక్షణా ఉపాధ్యాయుడు మిస్టర్ గౌతమ్ విద్యార్థులను రెండు వర్గములుగా విడదీయవలెనని భావించెను. రెండు వర్గములలో విద్యార్థుల సంఖ్య సమముగా వుండవలెను. ఆ విధముగా విడదీయుటకు ఒక వర్గములో ఒక గుర్తించిన ఎత్తుకు తక్కువగా వున్న విద్యార్థులను, ఇంకొక వర్గములో ఆ ఎత్తుకు ఎక్కువగా వున్న విద్యార్థులను అమర్చవలెను.

ఇప్పుడు మిస్టర్ గౌతమ్ విద్యార్థులను ఎత్తులననుసరించి ఆరోహణ క్రమములో నిలబెట్టెను.

106, 110, 110, 112, 115, 115,115, 120, 120, 123, 125

ఇవ్వబడిన దత్తాంశము మధ్య విలువ 115. ఈ విలువ విద్యార్థులను 5 మంది విద్యార్థులు గల రెండు వర్గములుగా విభజించును. ఈ విలువనే మధ్యగతము అని చెప్పవచ్చును. మిస్టర్ గౌతమ్ మధ్యలో వున్న విద్యార్థిని ఆటకు మధ్యవర్తిగా వుంచుటకు తీర్మానించెను.

ఆరోహణ క్రమంలోగాని, అవరోహణ క్రమంలోగాని విలువలను వ్రాసినపుడు వాటిలో మధ్య విలువ మధ్యగతము అగును.

క్రింది దత్తాంశమునకు మధ్యగతమును కనుగొనుము.

40, 50, 30, 60, 80, 70

ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు ఆరోహణ క్రమము

30, 40, 50, 60, 70, 80.

మీ పాఠశాలకు, ఇంటికి మధ్య వున్న దూరమును తెలుసుకొని వాటికి మధ్యగా వుండే స్థలమును తెలుసుకో.

దత్తాంశము సంఖ్య 6 అనునది సరిసంఖ్య కావున మూడవ మరియు నాల్గవ పదముల మధ్య విలువ అగును. ఈ రెండు పదముల సరాసరి మధ్యగతము అగును.

అనగా, మధ్యగతము $= \dfrac{50 + 60}{2} = \dfrac{110}{2} = 55.$

(i) **దత్తాంశముల సంఖ్య బేసి సంఖ్యగా వుండిన మధ్య పదము మధ్యగతము అగును.**

(ii) **దత్తాంశముల సంఖ్య సరి సంఖ్యగా వుండిన రెండు మధ్య విలువల సరాసరి మధ్యగతము అగును.**

ఉదాహరణ 6.4

క్రింది దత్తాంశమునకు మధ్యగతమును కనుగొనుము.

3, 4, 5, 3, 6, 7, 2.

సాధన:

ఇవ్వబడిన దత్తాంశమును ఆరోహణ క్రమములో వ్రాయుము.

2, 3, 3, 4, 5, 6, 7

ఇవ్వబడిన దత్తాంశముల సంఖ్య 7. ఇది బేసి సంఖ్య.

∴కావున 4 అనునది మధ్యగతము అగును.

మీకు తెలుసా?

మనం నిత్యం ప్రయాణించే హైవే రోడ్లపై ఉన్న పసుపు రంగు రేఖ రోడ్ల మధ్యగతమును తెలుపుచున్నది.

ఉదాహరణ 6.5

12, 14, 25, 23, 18, 17, 24, 20 అను విలువల మధ్యగతమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడిన విలువలను ఆరోహణ క్రమములో వ్రాయుము.

12, 14, 17, 18, 20, 23, 24, 25.

ఇవ్వబడిన దత్తాంశముల సంఖ్య 8. ఇది సరి సంఖ్య అగును.

∴ కావున మధ్యగతము అనునది రెండు మధ్య విలువలు 18 మరియు 20 ల అంకమధ్యమము అగును.

$$\text{మధ్యగతము} = \frac{18+20}{2} = \frac{38}{2} = 19$$

ఉదాహరణ 6.6

మొదటి 5 ప్రధానాంకముల మధ్యగతమును కనుగొనుము.

సాధన:

మొదటి 5 ప్రధానాంకములు 2, 3, 5, 7, 11

దత్తాంశములోని విలువల సంఖ్య 5. ఇది బేసి సంఖ్య అగును.

∴ కావున మధ్య పదము 5 అనునది మధ్యగతము అగును.

బహుళకము: (Mode)

క్రింది ఉదాహరణను గమనించుము.

మిస్టర్ రాఘవ బట్టల అంగడి యజమాని. అతను తన అంగడిలో 40 సెం.మీ కొలతగల చొక్కాలు ఎక్కువగా అమ్ముడు పోవుచున్నవి అని చెప్పెను.

ఇక్కడ అంగడి యజమాని ఆలోచన వివిధ పరిమాణము గల చొక్కాలు అమ్ముడు పోవుట మీదుగా వున్నది. కాని అతను చెప్పినట్లు 40 సెం.మీ కొలతగల చొక్కాలు అధికముగా అమ్ముడుపోవుచున్నవి. ఉన్న కొలతలలో అధికముగా అమ్ముడు అయ్యే చొక్కాల కొలత 40 సెం.మీ ఈ విలువ కొలతల బహుళకము అగును.

ఇవ్వబడిన దత్తాంశములో తరచుగా వచ్చిన విలువను బహుళకము అందురు.

భారీ దత్తాంశములలో బహుళకము: (Mode of Large data)

దత్తాంశముల సంఖ్య అధికముగా వున్న ఒక పదమును ఒకటిగా వ్రాసి కూడుట సులభము కాదు. ఇలాంటప్పుడు మనము దత్తాంశములకు పట్టిక తయారుచేయవలయును.

ఉదాహరణ 6.7

కాలి బంతి పోటీలలో పాయింట్ల సంఖ్య క్రింద ఇవ్వబడినది.

1, 3, 2, 5, 1, 4, 6, 2, 5, 2, 2, 2, 4, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 3,

1, 1, 2, 3, 2, 6, 4, 3, 2, 1, 1, 4, 2, 1, 5, 3, 4, 2, 1, 2. ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు బహుళకమును కనుగొనుము.

సాధన:

పాయింట్ల సంఖ్య	గణన చిహ్నములు	పోటీల సంఖ్య
1	~~IIII~~ IIII	9
2	~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII	14
3	~~IIII~~ II	7
4	~~IIII~~	5
5	III	3
6	II	2
	మొత్తము	40

పట్టిక 6.1

ఇప్పుడు నీవు వెంటనే '2' అనునది బహుళకము అని చెప్పవచ్చును. ఎందుకనగా 2 అనేక సార్లు వచ్చివున్నది. ఎక్కువ పోటీలు 2 గోల్‌లు వున్నప్పుడు విజయము సాధించివున్నవి.

ఉదాహరణ 6.8

మీ స్థలములలో వాహనముల బాహుళకమును కనుగొనుము.

క్రింది దత్తాంశమునకు బహుళకము కనుగొనుము.

3, 4, 5, 3, 6, 7

సాధన:

3 అనునది ఎక్కువ సార్లు వచ్చియున్నది.

∴ కావున దత్తాంశము బహుళకము 3.

ఉదాహరణ 6.9

ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు బహుళకము కనుగొనుము.

2, 2, 2, 3, 3, 4, 5,5, 5, 6,6, 8

సాధన:

2 మరియు 5 మూడు సార్లు వచ్చియున్నవి.

∴ కావున దత్తాంశము బహుళకము 2 మరియు 5.

పువ్వుల యొక్క బాహుళకమును కనుగొనుము.

ఉదాహరణ 6.10

ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు బహుళకము కనుగొనుము.

90, 40, 68, 94, 50, 60.

సాధన:

ఇక్కడ ఏ సంఖ్య ఎక్కువ సార్లు రాలేదు. కావున ఈ దత్తాంశమునకు బహుళకము లేదు.

ఉదాహరణ 6.11

20 కుటుంబములలో వున్న పిల్లల సంఖ్య 1, 2, 2, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 3

1, 3, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1. బహుళకమును కనుగొనుము.

సాధన:

పిల్లల సంఖ్య	గణన చిహ్నములు	కుటుంబముల సంఖ్య
1	卌 卌 ||	12
2	卌	5
3	|||	3
	మొత్తము	20

పట్టిక 6.2

12 కుటుంబములు ఒక బిడ్డను కలిగియున్నవి. కావున దత్తాంశ బహుళకము 1.

అభ్యాసము 6.1

1. సరియైన జవాబును కనుగొనుము.

i) 1,3,5,7 మరియు 9 ల అంకమధ్యమము.

(అ) 5 (ఆ) 7 (ఇ) 3 (ఈ) 9

ii) 5 మంది విద్యార్థుల సరాసరి మార్కులు 40 అయిన వాళ్ళ మొత్తము మార్కులు

(అ) 20 (ఆ) 200 (ఇ) 8 (ఈ) 4

iii) 30,50,40,10,20 ల మధ్యగతము.

(అ) 40 (ఆ) 20 (ఇ) 30 (ఈ) 10

iv) 2,4,6,8,10,12 ల మధ్యగతము.

(అ) 6 (ఆ) 8 (ఇ) 7 (ఈ) 14

v) 3,4,7,4,3,2,4 ల బహుళకము.

(అ) 3 (ఆ) 4 (ఇ) 7 (ఈ) 2

2. 10 మంది విద్యార్థుల లెక్కల పరీక్షలో మార్కులు

56, 48, 58, 60, 54, 76, 84, 92, 82, 98.

వ్యాప్తి మరియు అంకమధ్యమమును కనుగొనుము.

3. ఐదుగురి బరువులు 72 కి.గ్రా, 48 కి.గ్రా, 51 కి.గ్రా, 69 కి.గ్రా, 67 కి.గ్రా. బరువుల సరాసరి కనుగొనుము.

4. రెండు పాత్రలలో 30 లీటర్లు మరియు 50 లీటర్లు పాలు విడివిడిగా వున్నవి. రెండు పాత్రలలోను పాలు సమానముగా పంచిన రెండు పాత్రల ఘనపరిమాణము ఎంత? (సామర్థ్యము)

5. ఒక గుర్తించిన వారంలో నగరము గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రత 34.8°C, 38.5°C, 33.4°C, 34.7°C, 35.8°C, 32.8°C, 34.3°C గా వుండినది. ఈ వారము సరాసరి ఉష్ణోగ్రతను కనుగొనుము.

6. ఒక క్రికెట్ జట్టులోని 10 మంది విద్యార్థుల యొక్క సరాసరి బరువు 65.6 కి.గ్రా. పది మంది విద్యార్థుల మొత్తము బరువు ఎంత?

7. క్రింది దత్తాంశమునకు మధ్యగతమును కనుగొనుము.

6, 14, 5, 13, 11, 7, 8

8. 7 చాక్‌లెట్ల బరువు గ్రాములలో 131, 132, 125, 127, 130, 129, 133. మధ్యగతమును కనుగొనుము.

9. ఒక బ్యాట్స్‌మెన్ ఐదు ఇన్నింగ్స్‌లలో చేసిన పరుగులు వరుసగా 60,100,78,54,49. మధ్యగతమును కనుగొనుము.

10. మొదటి ఏడు సహజ సంఖ్యల మధ్యగతమును కనుగొనుము.

11. ఏడుగురు విద్యార్థులు తీసుకొనిన డబ్బు క్రింద ఇవ్వబడినది.

₹ 42, ₹ 22, ₹ 40, ₹ 28, ₹ 23, ₹ 26, ₹ 43. మధ్యగతమును కనుగొనుము.

12. ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు బహుళకమును కనుగొనుము.

3, 4, 3, 5, 3, 6, 3, 8, 4.

13. ఒక కోళ్ళఫారమ్ నుంచి సేకరించిన 12 గుడ్డుల బరువులు ఇవ్వబడినవి.

    32 గ్రా, 40 గ్రా, 27 గ్రా, 32 గ్రా, 38 గ్రా, 45 గ్రా,

    40 గ్రా, 32 గ్రా, 39 గ్రా, 40 గ్రా, 30 గ్రా, 31 గ్రా, బహుళకమును కనుగొనుము.

14. క్రింది దత్తాంశమునకు బహుళకమును కనుగొనుము.
    4, 6, 8, 10, 12, 14

15. క్రింది దత్తాంశమునకు బహుళకమును కనుగొనుము.
    12, 14, 12, 16, 15, 13, 14, 18, 19, 12, 14, 15, 16, 15, 16, 16,
    15, 17, 13, 16, 16, 15, 13, 15, 17, 15, 14, 15, 13, 15, 14.

గుర్తుంచుకోవలసిన విషయములు

1. ఇవ్వబడిన దత్తాంశములో కనిష్ఠ మరియు గరిష్ఠ విలువల మధ్య సరాసరి వుండును.
2. అంకమధ్యమము $= \dfrac{\text{దత్తాంశముల మొత్తము}}{\text{దత్తాంశముల సంఖ్య}}$
3. ఆరోహణ క్రమంలోగాని, అవరోహణ క్రమంలోగాని, విలువలను వ్రాసిన వాటిలో మధ్య విలువను మధ్యగతము అందురు.
4. ఇవ్వబడిన దత్తాంశములో తరచుగా వచ్చిన విలువను బహుళకము అందురు.

జవాబులు

అధ్యాయము: 1

అభ్యాసము 1.1

1. (i) ఆ (ii) అ (iii) ఈ (iv) ఇ (v) అ

2. (i) $x + 2y$ (ii) $y - z$ (iii) $xy + 4$

   (iv) $3x - 4y$ (అనగా $3x > 4y$) లేక $4y - 3x$ (అనగా $4y > 3x$)

   (v) $10 + x + y$ (vi) $pq - 5$ (vii) $12 - mn$

   (viii) $ab - (a + b)$ (ix) $3cd + 6$ (x) $\frac{4xy}{3}$

అభ్యాసము 1.2

1. (i) ఆ (ii) అ (iii) ఇ (iv) ఇ (v) ఈ

2. (i) $x = 12$ (ii) $a = 7$ (iii) $y = -6$ (iv) $b = -2$ (v) $x = -5$

   (vi) $x = 7$ (vii) $x = -5$ (viii) $n = 4$ (ix) $m = 11$ (x) $y = 27$

3. (i) $x = 50$ (ii) $l = 14$ (iii) $x = 4$ (iv) $a = 3$ (v) $x = -9$

   (vi) $t = -4$ (vii) $x = -6$ (viii) $m = 3$ (ix) $x = \frac{-1}{2}$ (x) $x = 6$

4. (i) $x = 14$ (ii) $a = 30$ (iii) $n = -24$(iv) $p = -56$ (v) $x = -10$

   (vi) $m = 12$

5. (i) $x = 3$ (ii) $x = -15$ (iii) $z = 5$ (iv) $a = -9$ (v) $x = 3$

   (vi) $x = 5$ (vii) $y = 67$ (viii) $x = 6$ (ix) $y = 3$ (x) $m = 6$

   (xi) $x = 11$ (xii) $m = \frac{1}{2}$ (xiii) $x = 3$ (xiv) $x = -3$ (xv) $t = -1$

6. 15 7. 13 8. 108 9. 12 10. 8

11.37, 38 12. 60 13. 35

అధ్యాయము: 2

అభ్యాసము 2.1

1. (i) 20% (ii) 93% (iii) 11% (iv) 1% (v) 100%

2. (i) 43 : 100 (ii) 75 : 100 (iii) 5 : 100 (iv) 35:200 (v) 100 : 300

3. (i) $\frac{25}{100}$ (ii) $\frac{25}{200}$ (iii) $\frac{33}{100}$ (iv) $\frac{70}{100}$ (v) $\frac{82}{100}$

అభ్యాసము 2.2

1. (i) 625% (ii) 0.03% (iii) 25% (iv) $33\frac{1}{3}$ (v) 50

2. (i) 100% (ii) 18% (iii) 5.25% (iv) 66.67% (v) 45.45%

3. (i) 36% (ii) 3% (iii) 7.1% (iv) 305% (v) 75%

4. 20% 5. 13.89% 6. బాలికలు 46%; బాలురు 54%

7. అతను విజ్ఞానశాస్త్రములో ఎక్కువ మార్కులు తీసెను.

8. పొదుపు 10%; ఖర్చు 90%

అభ్యాసము 2.3

1. (i) $\frac{3}{10}$ (ii) $\frac{1}{200}$ (iii) 0.25 (iv) ₹ 30 (v) ₹ 7.50

2. (i) $\frac{9}{100}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{1}{400}$ (iv) $\frac{1}{40}$ (v) $\frac{2}{3}$

3. (i) 0.07 (ii) 0.64 (iii) 3.75 (iv) 0.0003 (v) 0.005

4. (i) 18 (ii) ₹ 24 (iii) 36 మీ (iv) 108 (v) 3.75 కి.గ్రా

5. ₹ 6250 6. 9 పోటీలు 7. 12,800 పురుషులు; 11,200 పిల్లలు

8. ₹ 38250 9. 3975 చదవనివారు

అభ్యాసము 2.4

1. (i) 50 (ii) 15 (iii) లాభము ₹ 35 (iv) కొన్నధర (v) 10

2. లాభము = ₹ 24, నష్టము = ₹ 21; లాభము = ₹ 35.45, నష్టము = ₹ 3362, లాభము = ₹ 7.50

3. (i) ₹ 530 (ii) ₹ 620 (iii) ₹ 1027.50 (iv) ₹ 336.75 (v) ₹ 943.50

4. 10% లాభము 5. 12% నష్టము 6. 60% లాభము 7. 15% లాభము

అభ్యాసము 2.5

1. (i) ₹ 200 (ii) ₹ 500 (iii) ½ సంవత్సరము (iv) $\frac{4}{5}$ సంవత్సరము (v) ₹ 15,000

2. ₹ 2,500; ₹ 7,500 3. ₹ 450; ₹ 1,650 4. ₹ 2,250

5. ₹ 2,630 6. ₹ 216; ₹ 12,216 7. 5% 8. ₹ 1,000

9. 2 సంవత్సరములు 10. 10% 11. 8 సంవత్సరములు

12. ₹ 5,400 13. ₹ 5,000; 10% 14. వడ్డీ = ₹ 2025, మొత్తము = ₹ 5625 15. ₹ 4000

అధ్యాయము: 3

అభ్యాసము 3.1

1. (i) ఆ (ii) అ (iii) ఈ (iv) ఈ
2. (i) 50 సెం.మీ^{2} (ii) 66 సెం.మీ^{2} (iii) 80.5 సెం.మీ^{2}
3. 12 సెం.మీ
4. 875 మీ^{2}
5. 19.2 సెం.మీ

అభ్యాసము 3.2

1. (i) ఆ (ii) ఇ (iii) అ (iv) ఆ (v) ఈ
2. (i) d = 70 సెం.మీ, c = 220 సెం.మీ

   (ii) r = 28 సెం.మీ, c = 176 సెం.మీ

   (iii) r = 4.9 సెం.మీ, d = 9.8 సెం.మీ
3. (i) 110 సెం.మీ (ii)264 సెం.మీ (iii) 374 సెం.మీ (iv) 462 సెం.మీ
4. (i) 79.2 సెం.మీ (ii) 396 సెం.మీ (iii) 8.8 మీ (iv) 26.4 మీ
5. (i) 17.5 సెం.మీ (ii) 21 సెం.మీ (iii) 0.7 మీ (iv) 1.75 మీ
6. 660 మీ
7. ₹ 1232
8. 1.05 మీ
9. 37
10. ₹ 4752

అభ్యాసము 3.3

1. (i) 38.5 సెం.మీ^{2} (ii) 86.625 సెం.మీ^{2} (iii) 18.865 మీ^{2} (iv) 31.185 మీ^{2}
2. (i) 4.525 సెం.మీ^{2} (ii) 616 సెం.మీ^{2} (iii) 55.44 మీ^{2} (iv) 98.56 మీ^{2}
3. ₹ 1848
4. 154 మీ^{2}
5. వృత్తము
6. 38.5 మీ^{2}
7. 1936 సెం.మీ^{2}
8. r = 35, ₹ 2200
9. 440 మీ
10. 63.36 సెకనులు
11. 10

అభ్యాసము 3.4

1. 636 మీ^{2}
2. ₹ 1152
3. ₹ 1590
4. 375 సెం.మీ^{2}
5. 40 మీ^{2}, 30 మీ^{2}
6. 3256 సెం.మీ^{2}

అభ్యాసము 3.5

1. 6594 మీ^{2} 2. 536.94 మీ^{2} 3. ₹ 24,050 4. 21.195 మీ^{2} 5. ₹ 4494

6. 2310 మీ^{2} 7. 6 మీ 8. 2002 మీ^{2}

అధ్యాయము: 4

అభ్యాసము 4.1

1. (i) ఆ (ii) ఇ (iii) ఇ (iv) ఈ (v) ఈ

2. (i) $\angle A = 25°, \angle B = 35°, \angle C = 120°$

3. (i) 60° (ii) 70° (iii) 50° (iv) 50°

4. (i) 70° (ii) 60° (iii) 40° (iv) 30°

(v) 65°, 65° (vi) 60°, 60°, 60°

5. (i) $y = 60°, x = 70°$ (ii) $y = 80°, x = 50°$ (iii) $y = 70°, x = 110°$

(iv) $x = 60°, y = 90°$ (v) $y = 90°, x = 45°$ (vi) $x = 60°, y = 50°$

6. $x = 50°$.

అధ్యాయము: 6

అభ్యాసము 6.1

1. (i) A (ii) B (iii) ఇ (iv) ఇ (v) B

2. వ్యాప్తి 50; అంకమధ్యమము = 70.8

3. 61.4 కి.గ్రా. 4. 40 లీటర్లు 5. 34.9°C

6. 655.0 కి.గ్రా 7. 8 8. 130 గ్రాములు 9. 60 10. 4 11. ₹ 28

12. 3 13. 32 గ్రాములు మరియు 40 గ్రాములు

14. బహుళకము లేదు 15. 15

‘నేను చేస్తా, నేను చేశా’
('I can, I did')

విద్యార్థుల అభ్యసన కృత్యాల నమోదు పట్టిక

విషయం :

క్ర.సం	తేది	పాఠ్యాంశ సంఖ్య	పాఠ్యభాగం	కృత్యాలు	అభిప్రాయ సూచన