Government of Tamilnadu

ఎనిమిదవ తరగతి

STANDARD EIGHT

TELUGU MEDIUM

విడత 1 Term 1

గణితశాస్త్రము (MATHEMATICS)

విజ్ఞాన శాస్త్రం (SCIENCE)

సాంఘిక శాస్త్రము (SOCIAL SCIENCE)

భాగము 2 Volume 2

Untouchability is Inhuman and a Crime

Department of School Education

© Government of Tamilnadu
First Edition - 2012
Revised Edition - 2013, 2014, 2015, 2016
(Published under Uniform System of School Education scheme in Trimester Pattern)

Textbook preparation and compilation

State Council of Educational Research and Training

College Road, Chennai - 600 006.

Textbook Printing

Tamil Nadu Textbook and Educational Services Corporation

College Road, Chennai - 600 006.

This book has been printed on 80 GSM Maplitho Paper

Price: Rs.

Printed by Web Offset at:

Textbook available at

www.textbooksonline.tn.nic.in

విషయ సూచిక

గణితము - (1-129)

(MATHEMATICS)

అధ్యాయము	పాఠ్యాంశము	పేజి సంఖ్య
1.	వాస్తవ సంఖ్యా వ్యవస్థ	2
2.	కొలతలు	56
3.	రేఖాగణితము	77
4.	ప్రయోగాత్మక రేఖాగణితము	99

విజ్ఞాన శాస్త్రం - (130-240)

(SCIENCE)

అధ్యాయము	పాఠ్యాంశము	పేజి సంఖ్య
1.	పంట ఉత్పత్తి మరియు యాజమాన్యము	131
2.	యౌవన వయస్సును చేరుకొనుట	145
3.	వృక్ష రాజ్యము	161
4.	సూక్ష్మ జీవులు	175
5.	మన చుట్టూగల మూలకములు మరియు సమ్మేళనములు	191
6.	కొలతలు	213
7.	బలము మరియు పీడనము	220

సాంఘిక శాస్త్రము - (241-316)

(SOCIAL SCIENCE)

అధ్యాయము	పాఠ్యాంశము	పేజి సంఖ్య
	చరిత్ర	
1.	మొగలు సామ్రాజ్యము	242
2.	మరాఠాల ఆవిర్భావము	257
3.	ఐరోపా వారి ఆగమనము	265
4.	ఆంగ్లో - ఫ్రెంచి సంఘర్షణలు (కర్ణాటక యుద్ధములు)	271
	భూగోళ శాస్త్రము	
	వనరులు	
1.	వనరులు - వనరులందలి రకములు	278
2.	వనరులు - ఆర్థిక కార్యకలాపములు	286
	ప్రాథమిక రంగము - I	
3.	ప్రాథమిక రంగమునందలి రకములు	290
4.	గనుల త్రవ్వకము	295
	పౌర శాస్త్రము	
1.	జాతీయ సమైక్యత	302
2.	సాంఘిక - ఆర్థిక సమస్యలు	308

గణితశాస్త్రము

MATHEMATICS - TELUGU MEDIUM

ఎనిమిదవతరగతి

STANDARD EIGHT

విడత 1

Term 1

1 వాస్తవ సంఖ్యా వ్యవస్థ

1.1 పరిచయము

1.2 పునర్విమర్శ : సంఖ్యా రేఖపై అకరణీయ సంఖ్యలను సూచించుట

1.3 అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క నాలుగు ధర్మములు

1.4 మూడు కుండలీకరణములను కలిగిన సమాసములను సూక్ష్మీకరించుట

1.5 ఘాతములు : పూర్ణాంకములను ఘాతములుగా గల సంఖ్యలను ఘాతీయ రూపంలో వ్రాయుట

1.6 పూర్ణ ఘాతములతో ఘాత నియమములు

1.7 వర్గములు, వర్గమూలములు, ఘనములు, ఘనమూలములు

1.8 సంఖ్యల యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువ

1.9 సంఖ్యలతో ఆడుకొనుట

పాల్ ఎర్డాస్
[26 మార్చి 1913 - 20 సెప్టెంబర్ 1996]

పాల్ ఎర్డాస్ పేరు ప్రఖ్యాతి పొందిన హంగేరియన్ గణిత శాస్త్రవేత్త చరిత్రలో నూతన నియమములను తక్కిన గణిత శాస్త్రవేత్తల కంటె ఎక్కువ సార్లు ప్రచురించిన ఘనత ఎర్డాస్‌కే చెందును. సంఖ్యా శాస్త్రమే కాక అనేక రంగములకు చెందిన వందల కొలది నిపుణులతో కలసి పని చేసెను.

గణిత శాస్త్రముపై అభిమానమును తన చిన్న వయస్సు అనగా 3 సంవత్సరాల నుండే పెంచుకొనెను. అపుడే ఒక మనిషి జీవించు కాలమును సెకండ్లలలో గణించెను. ఎర్డాస్ తన సంపదను పెద్దగా పట్టించుకొనలేదు. తనకు వచ్చిన సన్మానములు మరియు సంపదలను కష్టములో ఉన్నవారికి మరియు పలు మంచి కార్యములకు దానముగా ఇచ్చెను. ఆయన జీవించి ఉన్నప్పుడే ఈయన జీవిత చరిత్ర *"N is a Number A Portrait of Paul Erdos"* అను సినిమాగా తీయబడినది.

"I know numbers are beautiful. If they aren't beautiful, nothing is." అని ఎర్డాస్ చెప్పెను.

1.1 పరిచయము

మన నిత్యజీవితములో "సంఖ్యలు" ముఖ్యమైన పాత్ర వహించుచున్నవి. సంఖ్యలు దినసరి కార్యక్రమములో ఉపయోగపడుచున్నవి. టెలిఫోన్ సంఖ్యలు, రేషన్ అట్టపైగల సంఖ్యలు బ్యాంక్ ఖాతాసంఖ్యలు లేక పరీక్ష వరుస సంఖ్యలు మొదలగునవి వ్యక్తులను గుర్తించుటకు ఉపయోగిపడును. మానవుడు స్పష్టముగా ఆలోచించుటకు తోడ్పడును.

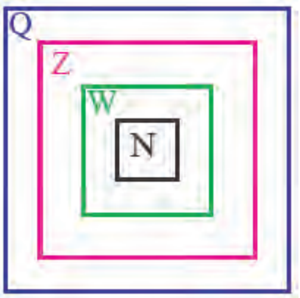
10,000 సంవత్సరములకు మునుపే సంఖ్యలను వ్రాయుపద్ధతి రూపొందించబడినది. ప్రస్తుత సంఖ్యావ్యవస్థ రూపొందుటకు భారతదేశము ఒక ముఖ్య కేంద్రముగా వెలసినది. సంఖ్యావ్యవస్థ పూర్తిగా అభివృద్ధి చెందుటకు 5000 సంవత్సరముల కాలముపట్టెను.

ప్రస్తుతము ఉపయోగించుచున్న అంకెల పద్ధతి హిందు–అరబిక్ అంకెల పద్ధతి అనబడును.

ఈ పద్ధతిలో 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 అను సంఖ్యలను ఉపయోగించెదరు. దీనిని ఆధారము 10 కలిగిన దశాంశ సంఖ్యాపద్ధతి (Numerical System) అని కూడా అందురు) "Decima" అను పదము "Decem" అను లాటిన్ పదము నుండి వచ్చినది. "Decem" అనగా "పది" అని అర్థము.

గణిత శాస్త్రమును "విజ్ఞాన శాస్త్రము యొక్క రాణి" అని, సంఖ్యా శాస్త్రమును "గణిత శాస్త్రము యొక్క రాణి" అని అందురు.

7 వ తరగతిలో సహజ సంఖ్యలు, N = {1, 2, 3, ⋯}, పూర్ణ సంఖ్యలు W = {0, 1, 2, ⋯}, పూర్ణాంకములు Z = {⋯, – 2, – 1, 0, 1, 2 ⋯} మరియు అకరణీయ సంఖ్యలు Q వీటిపై ప్రాథమిక పరిక్రియలను ఉపయోగించుట గూర్చి నేర్చు కొనియున్నాము.

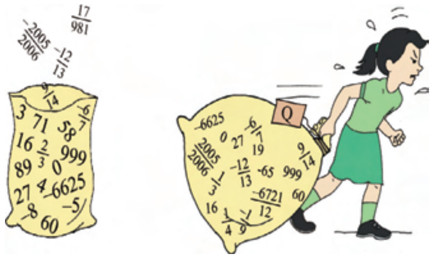


క్రింది వానిలో ఒప్పు లేక తప్పులను తెలుపుము.

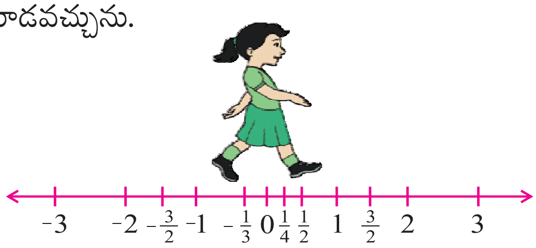
ఎ) అన్ని పూర్ణాంకములు అకరణీయ సంఖ్యలగును.
బి) అన్ని సహజ సంఖ్యలు పూర్ణాంకములగును.
సి) అన్ని పూర్ణాంకములు సహజ సంఖ్యలగును.
డి) అన్ని పూర్ణ సంఖ్యలు సహజ సంఖ్యలగును.
ఇ) అన్ని సహజ సంఖ్యలు పూర్ణ సంఖ్యలగును.
ఎఫ్) అన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు పూర్ణ సంఖ్యలగును.

1.2 పునర్విమర్శ : సంఖ్యా రేఖపై అకరణీయ సంఖ్యలను సూచించుట

అకరణీయ సంఖ్యలు



అకరణీయ సంఖ్యలనగా $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్రాయగల సంఖ్యలు. ఇక్కడ p మరియు q పూర్ణాంకములు మరియు $q \neq 0$, వీటిని Q అని గుర్తించెదరు. $\frac{p}{q}$ ఇక్కడ $q > 0$ అను రూపములో గల సంఖ్యా సమూహమును Q అని గుర్తించెదము. అకరణీయ సంఖ్యలలో సహజ సంఖ్యలు, పూర్ణ సంఖ్యలు, పూర్ణాంకములు, ధనాత్మక భిన్నములు మరియు ఋణాత్మక భిన్నములు ఉండును. ఇచ్చట ఒక బాలిక ఎట్లు అకరణీయ సంఖ్యలను ఒక సంచిలో ప్రోగు చేయుచున్నదో చూడవచ్చును.



అకరణీయ సంఖ్యలను కూడ సంఖ్యారేఖపై సూచించవచ్చును మరియు ఇచ్చట ఒక బాలిక సంఖ్యా రేఖపై నడిచిపోవు పటమును గమనించవచ్చును.

సరియైన సంఖ్యా వ్యవస్థను గుర్తించుము.

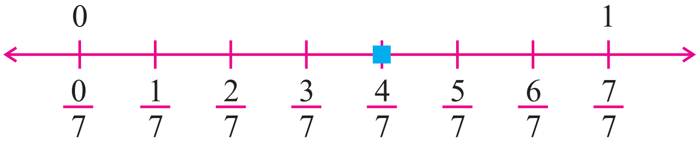
సంఖ్య	సంఖ్యా వ్యవస్థ			
4	N	W	Z	Q
–6	N	W	Z	Q
5/3	N	W	Z	Q
0	N	W	Z	Q
$\sqrt{9}$	N	W	Z	Q
$\sqrt[3]{8}$	N	W	Z	Q
34.7	N	W	Z	Q

అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై ఖచ్చితముగా సూచించుట కొరకు, మొదట ప్రమాణ పొడవును అవసరమైన సమ భాగాలుగా, అకరణీయ సంఖ్య యొక్క హారమునకు సమానముగా విడదీయవలెను. పిదప ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై గుర్తించవలెను.

వివరణ

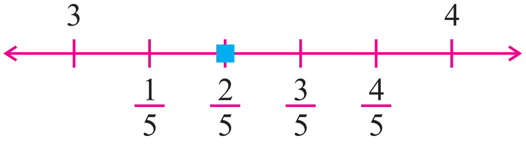
(i) సంఖ్యా రేఖపై $\frac{4}{7}$ ను గుర్తించుట.

0 మరియు 1నకు మధ్య $\frac{4}{7}$ ఉండును.



(ii) $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$

3 మరియు 4నకు మధ్య $\frac{17}{5}$ ఉండును.

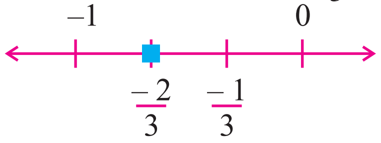


ఆలోచించుము

ప్రతి సహజ సంఖ్య అకరణీయ సంఖ్య అగును. దీని విపర్యయము కూడా నిజముగునా?

(iii) $-\frac{2}{3}$

-1 మరియు 0 నకు మధ్య $-\frac{2}{3}$ ఉండును.



1.3 అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క నాలుగు ధర్మములు

1.3.1 (a) సంకలనము

(i) సంవృత ధర్మము (Closure property)

రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తము ఎల్లప్పుడు ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును. దీనిని అకరణీయ సంఖ్యల సంకలనము యొక్క సంవృత ధర్మము అందురు. Q సంవృత ధర్మమును కలిగియుండును.

$\frac{a}{b}$ మరియు $\frac{c}{d}$ అనునవి ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలైన, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్య అగును

వివరణ: (i) $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

(ii) $5+\frac{1}{3}=\frac{5}{1}+\frac{1}{3}=\frac{15+1}{3}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

(ii) వ్యత్యయ ధర్మము (Commutative property)

రెండు అకరణీయ సంఖ్యల సంకలనము వ్యత్యయ ధర్మమును కలిగియుండును.

$\frac{a}{b}$ మరియు $\frac{c}{d}$ అనునవి ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలైన $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$

వివరణ: $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}$ అనునవి రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5} = \frac{2}{5}+\frac{1}{2}$$

LHS $=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{5+4}{10}=\frac{9}{10}$

RHS $=\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{4+5}{10}=\frac{9}{10}$

$\therefore$ LHS = RHS

సంకలనములో వ్యత్యయ ధర్మము నిజం.

(iii) సహచర్య ధర్మము (Associative property)

అకరణీయ సంఖ్యలో సంకలనము సహచర్య ధర్మమును కలిగియుండును.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ మరియు $\frac{e}{f}$ అనునవి ఏవైనా మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు, $\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$

వివరణ: $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ మరియు 2 అనునవి మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు.

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}+2\right) = \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+2 \text{ అగును.}$$

LHS $=\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}+2\right)$

$=\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{1}\right)$

$=\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{2}\right)=\frac{2}{3}+\frac{5}{2}$

$=\frac{4+15}{6}=\frac{19}{6}=3\frac{1}{6}$

RHS $=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+2$

$=\left(\frac{4}{6}+\frac{3}{6}\right)+2$

$=\frac{7}{6}+2=\frac{7}{6}+\frac{2}{1}$

$=\frac{7+12}{6}=\frac{19}{6}=3\frac{1}{6}$

$\therefore$ LHS = RHS

$\therefore$ సంకలనములో సహచర్య ధర్మము నిజమగును.

(iv) సంకలన తత్సమము (Additive identity) :

సున్న మరియు ఏదైనా ఒక అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తము అదే సంఖ్య అగును.

> $\frac{a}{b}$ ఏదైన ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయిన $\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}=0+\frac{a}{b}$

అకరణీయ సంఖ్యలలో సున్న సంకలన తత్సమము అగును.

వివరణ: (i) $\frac{2}{7}+0=\frac{2}{7}=0+\frac{2}{7}$

(ii) $\left(\frac{-7}{11}\right)+0=\frac{-7}{11}=0+\left(\frac{-7}{11}\right)$

నీకు తెలియునా?

సున్న ఒక ప్రత్యేక అకరణీయ సంఖ్య $0=\frac{0}{q}$ ఇక్కడ $q \neq 0$ అని వ్రాయవచ్చును.

(v) సంకలన విలోమము (Additive inverse) :

$\left(\frac{-a}{b}\right)$ఒక ఋణాత్మకము లేక $\frac{a}{b}$ యొక్క సంకలన విలోమము

> $\frac{a}{b}$ అకరణీయ సంఖ్య అయిన $\left(\frac{-a}{b}\right)$ అను అకరణీయ సంఖ్య వ్యవస్థితంగా ఉండును. కావున $\frac{a}{b}+\left(\frac{-a}{b}\right)=0$

వివరణ: (i) $\frac{3}{5}$ యొక్క సంకలన విలోమము $\frac{-3}{5}$ అగును.

(ii) $\frac{-3}{5}$ యొక్క సంకలన విలోమము $\frac{3}{5}$ అగును.

(iii) 0 యొక్క సంకలన విలోమము 0 అగును.

ప్రయత్నించుము

సంఖ్యలు	సంకలనము		
	సంవృత ధర్మము	వ్యత్యయ ధర్మము	సహచర్య ధర్మము
సహజ సంఖ్యలు			
పూర్ణ సంఖ్యలు			సరి
పూర్ణాంకములు			
అకరణీయ సంఖ్యలు	సరి		

1.3.1 (b) తీసివేత (వ్యవకలనము) (Subtraction)

(i) సంవృత ధర్మము (Closure Property)

ఏవైన రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య భేదము ఎల్లప్పుడు అకరణీయ సంఖ్య అగును. కావున తీసివేతలో Q సంవృత ధర్మమును కలిగియుండును.

$\frac{a}{b}$ మరియు $\frac{c}{d}$ అనునవి ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయిన $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ కూడ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును.

వివరణ: (i) $\frac{4}{7}-\frac{2}{7}=\frac{2}{7}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును.

(ii) $1-\frac{1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును.

(ii) వ్యత్యయ ధర్మము (Commutative Property)

అకరణీయ సంఖ్యలలో తీసివేత వ్యత్యయ ధర్మమును కలిగిఉండదు.

$\frac{a}{b}$ మరియు $\frac{c}{d}$ అనునవి ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయిన $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\neq\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$ అగును.

వివరణ: $\frac{4}{9}$ మరియు $\frac{2}{5}$ అనునవి రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు,

$\frac{4}{9}-\frac{2}{5}\neq\frac{2}{5}-\frac{4}{9}$ అగును.

LHS $=\frac{4}{9}-\frac{2}{5}=\frac{20-18}{45}=\frac{2}{45}$

RHS $=\frac{2}{5}-\frac{4}{9}=\frac{18-20}{45}=\frac{-2}{45}$

$\therefore$ LHS $\neq$ RHS

తీసివేతలో వ్యత్యయ ధర్మము నిజముకాదు.

నీకు తెలియునా?
రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు సమానమైన వాటిపై వ్యత్యయ ధర్మము నిజమగును.

(iii) సహచర్య ధర్మము (Associative property)

అకరణీయ సంఖ్యలో తీసివేత సహచర్య ధర్మమును కలిగిఉండదు.

$\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}$ అనునవి ఏవేని మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు అయిన $\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)\neq\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)-\frac{e}{f}$

వివరణ: $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ మరియు $\frac{1}{4}$ అనునవి మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు.

$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\neq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}$ అగును.

LHS $=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{4-3}{12}\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{12}\right)=\frac{6-1}{12}=\frac{5}{12}$

RHS $=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}=\left(\frac{3-2}{6}\right)-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=\frac{2-3}{12}=\frac{-1}{12}$

$\therefore$ LHS $\neq$ RHS

$\therefore$ తీసివేతలో సహచర్య ధర్మము నిజము కాదు.

ప్రయత్నించుము

సంఖ్యలు	తీసివేత		
	సంవృత ధర్మము	వ్యత్యయ ధర్మము	సహచర్య ధర్మము
సహజ సంఖ్యలు			
పూర్ణ సంఖ్యలు			
పూర్ణాంకములు			
అకరణీయ సంఖ్యలు			కాదు

1.3.1 (c) గుణకారము (Multiplication)

(i) సంవృత ధర్మము (Closure property)

రెండు అకరణీయ సంఖ్యల లబ్దము ఎల్లప్పుడు ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును. గుణకారములో 'Q' సంవృత ధర్మమును కలిగియుండును.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ అనునవి ఏవైన రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయిన $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును

వివరణ: (i) $\frac{1}{3} \times 7 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును.

(ii) $\frac{4}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{20}{27}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును.

(ii) వ్యత్యయ ధర్మము (Commutative property) :

అకరణీయ సంఖ్యల గుణకారము ఒక వ్యత్యయ ధర్మమును కలిగియుండును

$\frac{a}{b}$ మరియు $\frac{c}{d}$ అనునవి ఏవైన రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయిన $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$ అగును

వివరణ: $\frac{3}{5}$ మరియు $\frac{-8}{11}$ అనునవి అకరణీయ సంఖ్యలు

$$\frac{3}{5} \times \left(\frac{-8}{11}\right) = \left(\frac{-8}{11}\right) \times \frac{3}{5} \text{ అగును}$$

$$\text{LHS} = \frac{3}{5} \times \left(\frac{-8}{11}\right) = \frac{-24}{55} \qquad \text{RHS} = \frac{-8}{11} \times \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{-24}{55}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

$\therefore$ గుణకారములో వ్యత్యయ ధర్మము నిజమగును.

(iii) సహచర్య ధర్మము (Associative property)

అకరణీయ సంఖ్యలలో గుణకారము సహచర్య ధర్మమును కలిగియుండును.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ అనునవి ఏవైన మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు అయిన $\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f}$ అగును

వివరణ: $\frac{1}{2}, \left(\frac{-1}{4}\right)$ మరియు $\frac{1}{3}$ అనునవి మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{4}\times\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{4}\right)\right)\times\frac{1}{3} \text{ అగును.}$$

$$\text{LHS} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{12}\right) = \frac{-1}{24} \qquad \text{RHS} = \left(\frac{-1}{8}\right)\times\frac{1}{3} = \frac{-1}{24}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

$\therefore$ గుణకారములో సహచర్య ధర్మము నిజమగును.

(iv) గుణకార తత్సమము (Multiplicative identity)

ఏదైన ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు 1 యొక్క గుణకార లబ్ధము అదే అకరణీయ సంఖ్య అగును. కావున అకరణీయ సంఖ్య యొక్క గుణకార తత్సమము 1 అగును.

> $\frac{a}{b}$ అనునది ఏదైన ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయిన, $\frac{a}{b}\times 1 = \frac{a}{b} = 1\times\frac{a}{b}$ అగును.

వివరణ: (i) $\frac{5}{7}\times 1 = \frac{5}{7}$

(ii) $\left(\frac{-3}{8}\right)\times 1 = \frac{-3}{8}$

ఆలోచించుము

పూర్ణాంకములకు పూర్ణసంఖ్యల యొక్క గుణకార తత్సమము 1 అగునా?

(v) 0 చే గుణకారము

ప్రతి అకరణీయ సంఖ్యను 0 తో గుణించిన 0 వచ్చును.

> $\frac{a}{b}$ ఏదైన అకరణీయ సంఖ్య అయిన, $\frac{a}{b}\times 0 = 0 = 0\times\frac{a}{b}$ అగును.

వివరణ: (i) $-5\times 0 = 0$

(ii) $\left(\frac{-7}{11}\right)\times 0 = 0$

(vi) గుణకార విలోమము లేక వ్యుత్క్రమము

$a \neq 0$, $\frac{a}{b}$ అను ప్రతి అకరణీయ సంఖ్యకు, $\frac{c}{d}$ అను అకరణీయ సంఖ్య వ్యవస్థితంగా ఉండిన $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = 1$ అయిన $\frac{a}{b}$ యొక్క గుణకార విలోమము $\frac{c}{d}$ అగును.

> $\frac{a}{b}$ అనునది అకరణీయ సంఖ్య అయిన, $\frac{b}{a}$ గుణకార విలోమము లేక వ్యుత్క్రమము.

వివరణ: (i) 2 యొక్క వ్యుత్క్రమము $\frac{1}{2}$ అగును.

(ii) $\left(\frac{-3}{5}\right)$ యొక్క గుణక విలోమము $\left(\frac{-5}{3}\right)$ అగును.

నీకు తెలియునా?

i) 0 కు వ్యుత్క్రమము లేదు.

ii) 1, −1 అను అకరణీయ సంఖ్యలు మాత్రము అదే సంఖ్యలను వ్యుత్క్రమములుగా కలిగియుండును.

ఆలోచించుము

$3\frac{1}{3}$? యొక్క వ్యుత్క్రమము 0.3 అగునా?

ప్రయత్నించుము

సంఖ్యలు	గుణకారము		
	సంవృత ధర్మము	వ్యత్యయ ధర్మము	సహచర్య ధర్మము
సహజ సంఖ్యలు			
పూర్ణ సంఖ్యలు		సరి	
పూర్ణాంకములు			సరి
అకరణీయ సంఖ్యలు			

1.3.1 (d) భాగహారము (Division)

(i) సంవృత ధర్మము (Closure property)

సున్నకాని అకరణీయ సంఖ్యల సమూహములో భాగహారము సంవృత ధర్మమును కలిగియుండును.

$\frac{a}{b}$ మరియు $\frac{c}{d}$ అనునవి రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు, $\frac{c}{d} \neq 0$, అయిన $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ ఎల్లప్పుడు ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును.

వివరణ: (i) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{1} = \frac{2}{1} = 2$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును.

(ii) $\frac{4}{5} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును.

(ii) వ్యత్యయ ధర్మము (Commutative property)

అకరణీయ సంఖ్యల భాగహారము వ్యత్యయ ధర్మమును కలిగి ఉండదు.

$\frac{a}{b}$ మరియు $\frac{c}{d}$ అనునవి ఏవైన రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయిన $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \neq \frac{c}{d} \div \frac{a}{b}$ అగును.

వివరణ: $\frac{4}{5}$ మరియు $\frac{3}{8}$ అను రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు

$$\frac{4}{5} \div \frac{3}{8} \neq \frac{3}{8} \div \frac{4}{5} \text{ అగును.}$$

$$\text{LHS} = \frac{4}{5} \times \frac{8}{3} = \frac{32}{15} \quad \Big| \quad \text{RHS} = \frac{3}{8} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{32}$$

$$\text{LHS} \neq \text{RHS}$$

∴ భాగహారములో వ్యత్యయ ధర్మము నిజము కాదు.

(iii) సహచర్య ధర్మము (Associative property)

అకరణీయ సంఖ్యల భాగహారము సహచర్య ధర్మమును కలిగి ఉండదు.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ మరియు $\frac{e}{f}$ అనునవి ఏవైన మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{a}{b} \div \left(\frac{c}{d} \div \frac{e}{f}\right) \neq \left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right) \div \frac{e}{f}$

వివరణ: $\frac{3}{4}$, 5 మరియు $\frac{1}{2}$ అనునవి మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు

$$\left(\frac{3}{4} \div 5\right) \div \frac{1}{2} \neq \frac{3}{4} \div \left(5 \div \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{LHS} = \left(\frac{3}{4} \div 5\right) \div \frac{1}{2} \qquad \text{RHS} = \frac{3}{4} \div \left(5 \div \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{5}\right) \div \frac{1}{2} \qquad = \frac{3}{4} \div \left(\frac{5}{1} \times \frac{2}{1}\right)$$

$$= \frac{3}{20} \times \frac{2}{1} \qquad = \frac{3}{4} \div 10$$

$$= \frac{3}{10} \qquad = \frac{3}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{40}$$

$$\therefore \text{LHS} \neq \text{RHS}$$

భాగహారములో సహచర్య ధర్మము నిజము కాదు.

ప్రయత్నించుము

సంఖ్యలు	భాగహారము		
	సంవృత ధర్మము	వ్యత్యయ ధర్మము	సహచర్య ధర్మము
సహజ సంఖ్యలు			
పూర్ణ సంఖ్యలు			
పూర్ణాంకములు			
అకరణీయ సంఖ్యలు		కాదు	

1.3.1 (e) విభాగ ధర్మము (Distributive Property) :

(i) కూడికపై గుణకారము యొక్క విభాగ ధర్మము

అకరణీయ సంఖ్యల గుణకారము కూడికపై విభాగ ధర్మమును కలిగియున్నది.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ మరియు $\frac{e}{f}$ అనునవి ఏవైన మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$

వివరణ: $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}$ మరియు $\frac{3}{5}$ అనునవి మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{9} + \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \text{ అగును.}$$

$$\text{LHS} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{9} + \frac{3}{5}\right) \qquad \text{RHS} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{2}{3} \times \left(\frac{20 + 27}{45}\right) \qquad = \frac{8}{27} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{47}{45} = \frac{94}{135} \qquad = \frac{40 + 54}{135} = \frac{94}{135}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

$\therefore$ గుణకారము కూడికపై విభాగ ధర్మమును కలిగియుండును.

(ii) తీసివేతపై గుణకారము యొక్క విభాగ ధర్మము

అకరణీయ సంఖ్యల గుణకారము తీసివేతపై విభాగ ధర్మమును కలిగియుండును.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ మరియు $\frac{e}{f}$ అనునవి ఏవైన మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} - \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$

వివరణ: $\frac{3}{7}, \frac{4}{5}$ మరియు $\frac{1}{2}$ అనునవి అకరణీయ సంఖ్యలు అయిన

$$\frac{3}{7}\times\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{7}\times\frac{4}{5}-\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}$$ అగును.

$$\text{LHS} = \frac{3}{7}\times\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{7}\times\left(\frac{8-5}{10}\right) = \frac{3}{7}\times\frac{3}{10} = \frac{9}{70}$$

$$\text{RHS} = \frac{3}{7}\times\frac{4}{5}-\frac{3}{7}\times\frac{1}{2} = \frac{12}{35}-\frac{3}{14} = \frac{24-15}{70} = \frac{9}{70}$$

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$

$\therefore$ గుణకారము తీసివేతపై విభాగ ధర్మమును కలిగియుండును.

అభ్యాసము 1.1

1. సరియైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము.

i) అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క సంకలన తత్సమము ________ .

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2

ii) $\frac{-3}{5}$ యొక్క సంకలన విలోమము ________ .

(A) $\frac{-3}{5}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{-5}{3}$

iii) $\frac{-5}{13}$ యొక్క వ్యుత్క్రమము ________ .

(A) $\frac{5}{13}$ (B) $\frac{-13}{5}$ (C) $\frac{13}{5}$ (D) $\frac{-5}{13}$

iv) -7 యొక్క గుణక విలోమము________ .

(A) 7 (B) $\frac{1}{7}$ (C) -7 (D) $\frac{-1}{7}$

v) ________ కు వ్యుత్క్రమము ఉండదు.

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) $\frac{1}{4}$

2. క్రింద ఇవ్వబడినవి సంకలనములో ఏ ధర్మమును కలిగియున్నవో పేర్కొనుము.

(i) $\left(\frac{-3}{7}\right)+\frac{1}{9} = \frac{1}{9}+\left(\frac{-3}{7}\right)$

(ii) $\frac{4}{9}+\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{9}+\frac{7}{8}\right)+\frac{1}{2}$

(iii) $8+\frac{7}{10} = \frac{7}{10}+8$

(iv) $\left(\frac{-7}{15}\right)+0 = \frac{-7}{15} = 0+\left(\frac{-7}{15}\right)$

(v) $\frac{2}{5}+\left(\frac{-2}{5}\right) = 0$

3. క్రింద ఇవ్వబడిన గుణకారములు ఏ ధర్మమును కలిగియున్నవో పేర్కొనుము.

(i) $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5} = \frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$

(ii) $\left(\frac{-3}{4}\right)\times 1 = \frac{-3}{4} = 1\times\left(\frac{-3}{4}\right)$

(iii) $\left(\frac{-17}{28}\right)\times\left(\frac{-28}{17}\right) = 1$ (iv) $\frac{1}{5}\times\left(\frac{7}{8}\times\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{1}{5}\times\frac{7}{8}\right)\times\frac{4}{3}$

(v) $\frac{2}{7}\times\left(\frac{9}{10}+\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{7}\times\frac{9}{10}+\frac{2}{7}\times\frac{2}{5}$

4. క్రింద ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యల జతలకు కూడిక, తీసివేత, గుణకారము, భాగహారముల యొక్క వ్యత్యయ ధర్మమును సరిచూడుము.

(i) 4 మరియు $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{-3}{4}$ మరియు $\frac{-2}{7}$

5. క్రింద ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యలకు కూడిక, తీసివేత, గుణకారము, భాగహారముల యొక్క సహచర్య ధర్మమును సరిచూడుము.

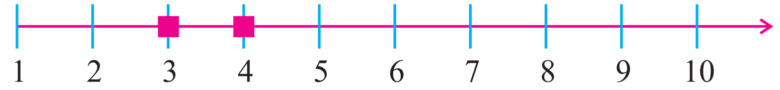
(i) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$ మరియు $\frac{-3}{7}$ (ii) $\frac{2}{3}, \frac{-4}{5}$ మరియు $\frac{9}{10}$

6. అకరణీయ సంఖ్యలను గుణకార విభాగ ధర్మమును ఉపయోగించి సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $\frac{-5}{4}\times\left(\frac{8}{9}+\frac{5}{7}\right)$ (ii) $\frac{2}{7}\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$

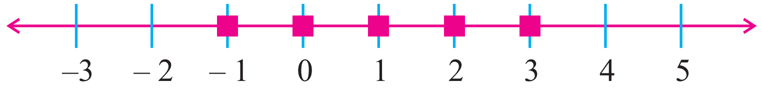
1.3.2 రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుట

2 మరియు 5 మధ్యగల సహజ సంఖ్యలను తెలుపుము?



అవి 3 మరియు 4 అగును.

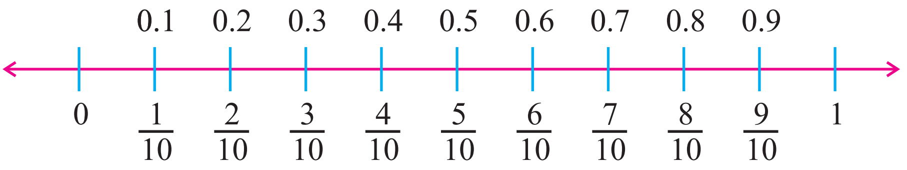
−2 మరియు 4 మధ్యగల పూర్ణాంకములను తెలుపుము.



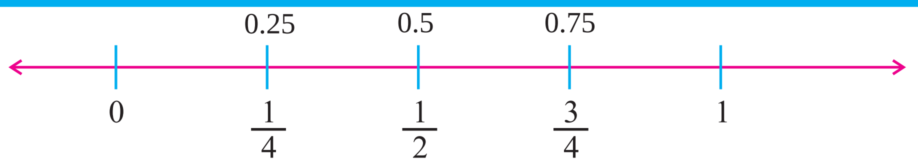
ఆ పూర్ణాంకములు − 1, 0, 1, 2, 3. అగును. రెండు సహజ సంఖ్యలు లేక పూర్ణాంకముల మధ్య పరిమిత సహజ సంఖ్యలు లేక పూర్ణాంకములు కనుగొనవచ్చును.

1 మరియు 2 మధ్య సహజ సంఖ్యలను కనుగొనుట సాధ్యమా? సాధ్యము కాదు.

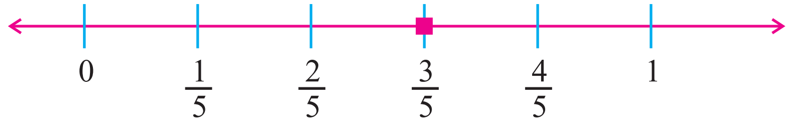
కాని రెండు పూర్ణాంకముల మధ్య అకరణీయ సంఖ్యలు ఉండును. ఉదాహరణమునకు 0 మరియు 1 మధ్య $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \cdots$ అను అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనవచ్చును. వీటిని 0.1, 0.2, 0.3, ⋯ అని కూడా వ్రాయవచ్చును.



ఇదే విధముగా 0 మరియు 1 మధ్య $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ అను అకరణీయ సంఖ్యలు కూడా ఉండునని మనకు తెలియును. ఇట్టి అకరణీయ సంఖ్యలను క్రమముగా 0.25, 0.5, 0.75 అని కూడా వ్రాయవచ్చును.



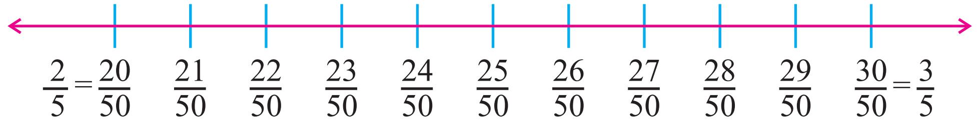
$\frac{2}{5}, \frac{4}{5}$ అను అకరణీయ సంఖ్యలను తీసుకొందాము. $\frac{2}{5}, \frac{4}{5}$ అను అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య ఏదైన ఒక అకరణీయ సంఖ్య ఉండుటకు సాధ్యమున్నదా? ఉన్నది. $\frac{3}{5}$ అను అకరణీయ సంఖ్య కలదు.



ఇదే విధముగా 0 మరియు 1 మధ్య $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ మరియు $\frac{4}{5}$ అను అకరణీయ సంఖ్యలు ఉన్నవని మనకు తెలియును.

$\frac{2}{5}$ మరియు $\frac{3}{5}$ మధ్య ఇంకా ఎక్కువ అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనవచ్చునా?

కనుగొనవచ్చును. $\frac{2}{5}$ ను $\frac{20}{50}$ గా మరియు $\frac{3}{5}$ ను $\frac{30}{50}$ గా వ్రాయవచ్చును. పిదప ఈ రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను మధ్యగల అనేక అకరణీయ సంఖ్యలను వ్రాయవచ్చును.



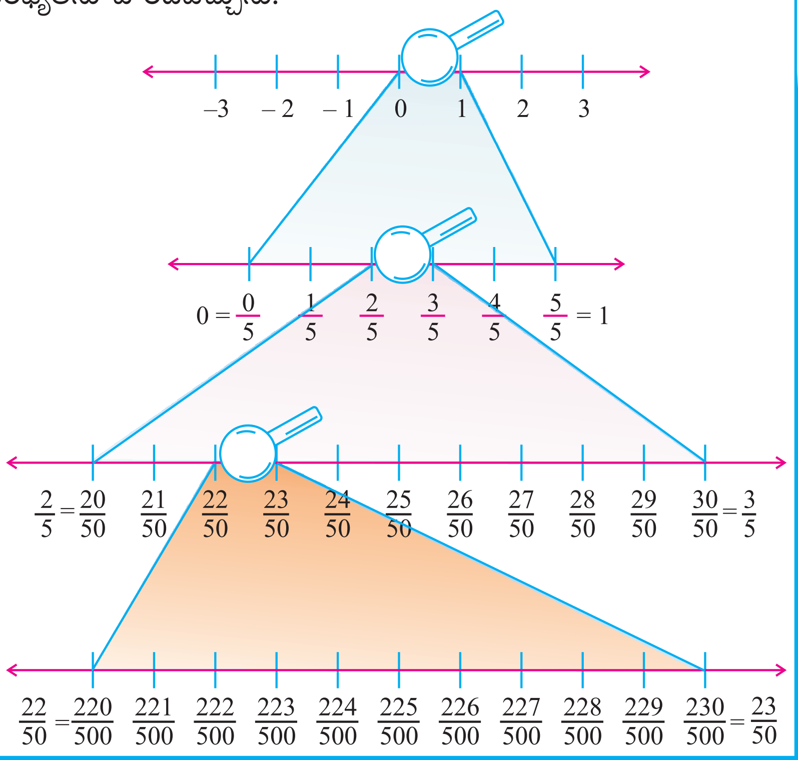
$\frac{21}{50}, \frac{22}{50}, \frac{23}{50}, \frac{24}{50}, \frac{25}{50}, \frac{26}{50}, \frac{27}{50}, \frac{28}{50}, \frac{29}{50}$ అను అకరణీయ సంఖ్యలను వ్రాయవచ్చును.

$\frac{22}{50}, \frac{23}{50}$ మధ్య కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనవలెనన్న $\frac{22}{50}$ ను $\frac{220}{500}$ గా మరియు $\frac{23}{50}$ ను $\frac{230}{500}$ గా వ్రాయవలయును. పిదప $\frac{221}{500}, \frac{222}{500}, \frac{223}{500}, \frac{224}{500}, \frac{225}{500}, \frac{226}{500}, \frac{227}{500}, \frac{228}{500}, \frac{229}{500}$

అను తొమ్మిది అకరణీయ సంఖ్యలను పొందవచ్చును.

ప్రక్కన ఇవ్వబడిన పటము ద్వారా సంఖ్యారేఖ గూర్చి బాగుగా తెలిసికొనవచ్చును.

0 మరియు 1 మధ్యగల సంఖ్యారేఖను పెద్దదిగా చూపగల కటకము ద్వారా పరిశీలించవచ్చును.



ఇదే విధముగా 1 నుండి 2, 2 నుండి 3 ఇట్లు తక్కిన అంతరములలోను అనేక అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించవచ్చును.

ఇదే విధముగా ప్రయత్నించిన, ఏ రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యనైనను అనేక అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనవచ్చును.

సహజ సంఖ్యలు, పూర్ణాంకములు వలే కాకుండ, ఏ రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యనైనను అసంఖ్యాకమైన అకరణీయ సంఖ్యలను వ్రాయవచ్చును.

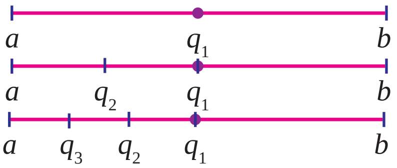
1) సూత్రమును ఉపయోగించు పద్ధతి

'a', 'b' అనునవి ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యలు అనుకొనుము. a, b ల మధ్య అనేక అకరణీయ సంఖ్యలు $q_1, q_2, q_3, \ldots$ కనుగొను పద్ధతి క్రింద ఇవ్వబడినది.

$$q_1 = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$q_2 = \frac{1}{2}(a+q_1)$$

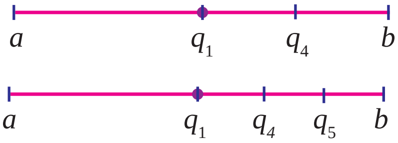
$$q_3 = \frac{1}{2}(a+q_2)$$ ఇట్లు చేస్తూ పోవచ్చును.



q_1 కు ఎడమ వైపున q_2, q_3 సంఖ్యలు అమరియుండును. ఇదే విధముగా 'a', 'b' మధ్య q_4, q_5 అను అకరణీయ సంఖ్యలు q_1 కు కుడివైపున అమరి యుండుట క్రింద ఇవ్వబడియున్నది.

$$q_4 = \frac{1}{2}(q_1+b)$$

$$q_5 = \frac{1}{2}(q_4+b)$$ ఇట్లు చేస్తూ పోవచ్చును.



రెండు సంఖ్యల సరాసరి ఎల్లప్పుడు ఆ సంఖ్యల మధ్య అమరియుండును.

2) వేరొక పద్ధతి

'a' , 'b' అనునవి రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అనుకొనుము.

(i) రెండు భిన్నముల హారములకు క.సా.గు తీయుట ద్వారా సమహారములుగా మార్చుము. ఇప్పుడు హారముల మధ్య ఒక సంఖ్య ఉండిన భిన్నముల మధ్యకూడా ఒక అకరణీయ సంఖ్య ఉండును.

(ii) హారముల మధ్య ఏ సంఖ్యాలేని యెడల రెండు భిన్నముల లవము మరియు హారములను 10తో గుణించుట ద్వారా అకరణీయ సంఖ్యలను పొందవచ్చును. ఇంకను ఎక్కువ సంఖ్యలను పొందుటకు 100, 1000 .... మొదలగు వాటితో గుణించవలెను.

క్రింద ఇవ్వబడిన వేర్వేరు పద్ధతుల ద్వారా 'a', 'b' ల మధ్య వేర్వేరు అకరణీయ సంఖ్యలను పొందవచ్చును. .

ఉదాహరణ 1.1

$\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ మధ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన

సూత్ర పద్ధతి :

ఇవ్వబడినది: $a = \frac{3}{4}, b = \frac{4}{5}$

$\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్యలను q_1 అనుకొనుము.

$$q_1 = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{15+16}{20}\right)$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\times\left(\frac{31}{20}\right) = \frac{31}{40}$$

$\frac{31}{40}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును.

వేరొక పద్ధతి :

ఇవ్వబడినది: $a = \frac{3}{4}, b = \frac{4}{5}$

a , b లను ఇట్లు వ్రాయవచ్చును. $\frac{3}{4}\times\frac{5}{5} = \frac{15}{20}$ మరియు $\frac{4}{5}\times\frac{4}{4} = \frac{16}{20}$

$\frac{15}{20}$, $\frac{16}{20}$ మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుటకు లవము మరియు హారములను 10తో గుణించవలెను. $\frac{15}{20}\times\frac{10}{10} = \frac{150}{200}$, $\frac{16}{20}\times\frac{10}{10} = \frac{160}{200}$

$\therefore$ $\frac{150}{200}$, $\frac{160}{200}$ మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్యలు

$\frac{151}{200}, \frac{152}{200}, \frac{153}{200}, \frac{154}{200}, \frac{155}{200}, \frac{156}{200}, \frac{157}{200}, \frac{158}{200}$ మరియు $\frac{159}{200}$.

ఉదాహరణ 1.2

$\frac{-3}{5}$ మరియు $\frac{1}{2}$ ల మధ్య రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడినది: $a = \frac{-3}{5}, b = \frac{1}{2}$

q_1 , q_2 లు రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అనుకొనుము.

$$q_1 = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-3}{5}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-6+5}{10}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{10}\right) = \frac{-1}{20}$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\ (a+q_1) = = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-3}{5}+\left(\frac{-1}{20}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{-12+(-1)}{20}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-12-1}{20}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-13}{20}\right) = \frac{-13}{40}$$

రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{-1}{20}$ మరియు $\frac{-13}{40}$ అగును.

గమనిక: రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను ఇట్లు వ్రాయవచ్చును $\frac{-3}{5} < \frac{-13}{40} < \frac{-1}{20} < \frac{1}{2}$

అభ్యాసము 1.2

1. క్రింద ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యల జతల మధ్యగల ఒక అకరణీయ సంఖ్యను కనుగొనుము.

   (i) $\frac{4}{3}, \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{-2}{7}, \frac{5}{6}$ (iii) $\frac{5}{11}, \frac{7}{8}$ (iv) $\frac{7}{4}, \frac{8}{3}$

2. క్రింద ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యల జతల మధ్యగల రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

   (i) $\frac{2}{7}, \frac{3}{5}$ (ii) $\frac{6}{5}, \frac{9}{11}$ (iii) $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}$ (iv) $\frac{-1}{6}, \frac{1}{3}$

3. క్రింద ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యల జతల మధ్యగల 3 అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

   (i) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{7}{10}, \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{-1}{3}, \frac{3}{2}$ (iv) $\frac{1}{8}, \frac{1}{12}$

1.4 మూడు కుండలీకరణములో గల సమాసములను సూక్ష్మీకరించుట

కొన్ని ఉదాహరణములను పరిశీలించెదము.

(i) $2 + 3 = 5$ (ii) $5 - 10 = -5$

(iii) $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$ (iv) $4 - 2 \times \frac{1}{2} = ?$

ఉదాహరణము (i), (ii) మరియు (iii) లో ఒకే ఒక ప్రక్రియ కలిగియున్నది. ఉదాహరణ (iv) లో రెండు ప్రక్రియలను కలిగియున్నది.

ఉదాహరణము (iv) లో, ఏ ప్రక్రియను మొదట పరిష్కరించవలయునని తెలియునా?

ఉదాహరణము(iv) లో ఏదో ఒక పద్ధతిని పాటించని యెడల మనకు వేర్వేరు సాధనలు లభించును.

ఉదాహరణకు (i) $(4 - 2) \times \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

(ii) $4 - \left(2 \times \frac{1}{2}\right) = 4 - 1 = 3$ మనము వేరువేరు విలువలు పొందాము.

ఈ తడబాటునుండి బయట పడుటకు ప్రక్రియ క్రమమును అనుసరించటములో ఒక స్పష్టమైన పద్ధతిని పాటించవలెను. ఎడమ నుండి కుడివైపుగా అనుక్రమములో ప్రక్రియలను పరిష్కరించవలసిన క్రమమును **'BODMAS'** అందురు.

B - కుండలీకరణములు, **O** - యొక్క **D** - భాగహారము, **M** - గుణకారము, **A**- కూడిక **S**- తీసివేత

కుండలీకరణములు

కొన్ని వర్గీకరింపబడిన సంకేతములను ఉపయోగించుట ద్వారా ప్రక్రియలను ఒక క్రమములో పరిష్కరించుట ఆవశ్యకమైనది. సామాన్యముగా ఉపయోగించు సంకేతములు క్రింద ఇవ్వబడినవి.

వర్గీకరించబడిన సంకేతములు	పేర్లు
——	వెన్కులమ్ లేక అడ్డు గీత కుండలీకరణము
( )	పెరేన్ తీసిన్ లేక సాధారణ కుండలీకరణనములు
{ }	బ్రేసెన్ లేక బాణపు కుండలీకరణములు
[ ]	బ్రాకెట్ లేక చతురస్ర కుండలీకరణములు

ప్రక్రియ – "యొక్క"

మనము కొన్ని సందర్భములలో "3 యొక్క రెండు రెట్లు", "20 యొక్క నాలుగులో ఒక వంతు". "పది యొక్క సగటు" వంటి సమాసములను గమనించియుందుము. ఈ సమాసములో "యొక్క అనగా" "తో గుణించిన" అని అర్థము

ఉదాహరణమునకు

(i) "3 యొక్క రెండు రెట్లు" ను 2×3 అని వ్రాసెదము.

(ii) "20 యొక్క నాలుగులో ఒక వంతు" ను $\frac{1}{4} \times 20$ అని వ్రాసెదము.

(iii) '10 యొక్క సగము" ను $\frac{1}{2} \times 10$ అని వ్రాసెదము.

ఒకటి కంటె ఎక్కువగా గల సంకేతములను ఉపయోగించవలసినపుడు మిక్కిలిలోపలగా గల సంకేతముతో ప్రక్రియలను మొదట పరిష్కరించి సంకేతమును తొలగించవలయును. పిదప తరువాతి అంతరములో సంకేత ప్రక్రియలను పరిష్కరించవలయును. ఇదే విధముగా తక్కినవి గూడ చేయవలయును.

ఉదాహరణ 1.3

సూక్ష్మీకరించుము : $\left(1\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \times \frac{8}{15}$

సాధన

$$\left(1\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \times \frac{8}{15} = \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right) \times \frac{8}{15}$$

$$= \left(\frac{6}{3} \times \frac{8}{15}\right)$$ [కుండలీకరణమునకు ముఖ్యత్వము ఇవ్వబడెను]

$$= 2 \times \frac{8}{15} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}.$$

ఉదాహరణ 1.4

సూక్ష్మీకరించుము: $5\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ యొక్క $\frac{8}{9}$.

సాధన

$5\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ యొక్క $\frac{8}{9} = \frac{11}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{8}{9}$ ["యొక్క" కు ముఖ్యత్వము ఇవ్వబడును]

$$= \frac{11}{2} + \frac{24}{36} = \frac{11}{2} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{33+4}{6} = \frac{37}{6} = 6\frac{1}{6}.$$

ఉదాహరణ 1.5

సూక్ష్మీకరించుము: $\left(\frac{-1}{3} \times \frac{5}{4}\right) + \left[\frac{3}{5} \div \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\right]$

సాధన

$$= \left(\frac{-1}{3} \times \frac{5}{4}\right) + \left[\frac{3}{5} \div \left(\frac{2-1}{4}\right)\right]$$ [మిక్కిలి లోపలగల కుండలీకరణమునకు ముఖ్యత్వము ఇవ్వబడును]

$$= \left(\frac{-1}{3} \times \frac{5}{4}\right) + \left[\frac{3}{5} \div \frac{1}{4}\right]$$

$$= \left(\frac{-1}{3} \times \frac{5}{4}\right) + \left[\frac{3}{5} \times 4\right] = \frac{-5}{12} + \frac{12}{5}$$

$$= \frac{-25+144}{60} = \frac{119}{60} = 1\frac{59}{60}.$$

ఉదాహరణ 1.6

సూక్ష్మీకరించుము : $\frac{2}{7}-\left\{\left(\frac{1}{4}\div\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{6}\right\}$

సాధన

$$\frac{2}{7}-\left\{\left(\frac{1}{4}\div\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{6}\right\} = \frac{2}{7}-\left\{\left(\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}\right)-\frac{5}{6}\right\}$$

$$= \frac{2}{7}-\left\{\frac{3}{8}-\frac{5}{6}\right\} = \frac{2}{7}-\left\{\frac{9-20}{24}\right\}$$

$$= \frac{2}{7}-\left\{\frac{-11}{24}\right\} = \frac{2}{7}+\frac{11}{24}$$

$$= \frac{48+77}{168} = \frac{125}{168}.$$

అభ్యాసము 1.3

1. సరియైన జవాబును ఎంపిక చేయుము.

(i) $2\times\frac{5}{3}=$ ________

(A) $\frac{10}{3}$ (B) $2\frac{5}{6}$ (C) $\frac{10}{6}$ (D) $\frac{2}{3}$

(ii) $\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}=$ ________

(A) $\frac{14}{20}$ (B) $\frac{8}{35}$ (C) $\frac{20}{14}$ (D) $\frac{35}{8}$

(iii) $\frac{2}{5}+\frac{4}{9}=$ ________

(A) $\frac{10}{23}$ (B) $\frac{8}{45}$ (C) $\frac{38}{45}$ (D) $\frac{6}{13}$

(iv) $\frac{1}{5}\div 2\frac{1}{2}=$ ________

(A) $\frac{2}{25}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{10}{7}$ (D) $\frac{3}{10}$

(v) $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)$

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

2. సూక్ష్మీకరించుము:

(i) $\frac{11}{12}\div\left(\frac{5}{9}\times\frac{18}{25}\right)$ (ii) $\left(2\frac{1}{2}\times\frac{8}{10}\right)\div\left(1\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right)$

(iii) $\frac{15}{16}$ యొక్క $\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)\div\frac{10}{11}$ (iv) $\frac{9}{8}\div\frac{3}{5}$ యొక్క $\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\right)$

(v) $\frac{2}{5}\div\left\{\frac{1}{5}\right.$ యొక్క $\left.\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right]-1\right\}$ (vi) $\left(1\frac{3}{4}\times 3\frac{1}{7}\right)-\left(4\frac{3}{8}\div 5\frac{3}{5}\right)$

(vii) $\left(\frac{1}{6}+2\frac{3}{4}\right.$ యొక్క $\left.1\frac{7}{11}\right)\div 1\frac{1}{6}$ (viii) $\left(\frac{-1}{3}\right)-\left\{1\div\left(\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\right)+8-\left[5-\overline{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\right]\right\}$

1.5 ఘాతములు :

పూర్ణాంకములను ఘాతముగా కలిగిన సంఖ్యలను ఘాతీయ రూపములో వ్రాయుట

ఈ భాగమునందు సంఖ్యలను ఘాతీయ రూపములో ఎట్లు వ్రాయవచ్చునో నేర్చుకొనెదము.

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$, అని వ్రాయవచ్చును. ఇక్కడ ఆధారము 2 మరియు ఘాతము 4.

సాధారణముగా 'a' ను 'a' తో 'n' సార్లు గుణించగా వచ్చు లబ్దము a^n ఇక్కడ 'a' ఏదైన ఒక ధనాత్మక వాస్తవ సంఖ్య మరియు 'n' కూడ ఏదైన ఒక ధనాత్మక వాస్తవ సంఖ్య అగును. 'a' ను ఆధారము మరియు 'n' ను ఘాతము అందురు.

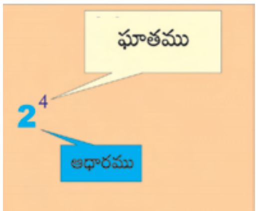
నిర్వచనము

'n' ఒక ధనాత్మక పూర్ణాంకము అయిన x^n అనగా $\underbrace{x.x.x.....x}_{n \text{ కారణాంకములు}}$

i.e, $x^n = \underbrace{x \times x \times x \times ..... \times x}_{n \text{ సార్లు}}$ (ఇక్కడ 'n', 1 కంటె పెద్దది)

గమనిక : $x^1 = x$.

దీనిని చదవడం ఎలా?



7^3 ను 7 యొక్క ఘాతము 3 లేక 7 యొక్క ఘనము అని చదివెదము.

ఇక్కడ ఆధారము 7 అని ఘాతము 3 అని చదివెదము.

దీనిని ఉదాహరణముతో నేర్చుకొనుటకు, క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టికను గమనించుము.

వరుస	ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యలతో గుణకారము	ఘాతీయ రూపము	ఆధారము	ఘాతము
1	2 x 2 x 2 x 2 x 2	2^4	2	4
2	$(-4)\times(-4)\times(-4)$	$(-4)^3$	-4	3
3	$\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^6$	$\frac{2}{3}$	6
4	$a \times a \times a \times ...$ m సార్లు	a^m	a	m

ఉదాహరణ 1.7

క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను 2 యొక్క ఘాతములుగా వ్రాయుము.

(i) 2 (ii) 8 (iii) 32 (iv) 128 (v) 256

సాధన

(i) $2 = 2^1$

(ii) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

(iii) $32 = 2\times2\times2\times2\times2 = 2^5$

(iv) $128 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^7$

(v) $256 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^8$

1.6 పూర్ణాంక ఘాతములతో ఘాత నియమము

పైన ఇవ్వబడిన ధనాత్మక వాస్తవ సంఖ్యలను పూర్ణాంక ఘాత నిర్వచనంతో క్రింద ఇవ్వబడిన "ఘాత నియమము" లు వివరించబడును.

(i) లబ్ధ సూత్రము

నియమము 1	$a^m \times a^n = a^{m+n}$, ఇక్కడ 'a' ఒక వాస్తవ సంఖ్య మరియు m, n పూర్ణాంకములగును.

వివరణ

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+4} = \left(\frac{2}{3}\right)^7$ ($a^m \times a^n = a^{m+n}$ నియమము ఉపయోగింపబడెను.

ఇక్కడ $a = \frac{2}{3}$, $m = 3$, $n = 4$)

(ii) భాగహార సూత్రము

నియమము 2	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ఇక్కడ $a \neq 0$ మరియు m, n ధనాత్మక పూర్ణాంకములు $m > n$

వివరణ

$\frac{6^4}{6^2} = 6^{4-2} = 6^2$ ($\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ అను నియమము ఉపయోగించబడెను. ఇక్కడ $a = 6$, $m = 4$, $n = 2$)

(iii) ఘాత సూత్రము

నియమము 3	$(a^m)^n = a^{m\times n}$, ఇక్కడ m, n ధనాత్మక పూర్ణాంకములు.

వివరణ

$(3^2)^4 = 3^2\times3^2\times3^2\times3^2 = 3^{2+2+2+2} = 3^8$

ఘాతములను గుణించుట ద్వారా అదే ఫలితమును పొందవచ్చును.

i.e, $(3^2)^4 = 3^{2\times4} = 3^8$.

ప్రయత్నించుము

నిరూపించుము: $a^{(x-y)z} \times a^{(y-z)x} \times a^{(z-x)y} = 1$

(iv) సున్న ఘాతముగా గల సంఖ్య

$m \neq o$, అయిన (నియమము 2 ఉపయోగించి)

$m^3 \div m^3 = m^{3-3} = m^0$.

వేరొక పద్ధతి:

$m^3 \div m^3 = \frac{m^3}{m^3} = \frac{m\times m\times m}{m\times m\times m} = 1$

ఈ రెండు పద్ధతులను ఉపయోగించిన $m^3 \div m^3 = m^0 = 1$ అగును.

పైన ఇవ్వబడిన ఉదాహరణముల ద్వారా నాల్గవ ఘాత నియమమును పొందెదము.

నియమము 4	'a' సున్న కాని ఏదైన ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయిన, $a^0 = 1$.

వివరణ

(i) $2^0 = 1$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$ (iii) $25^0 = 1$ (iv) $\left(-\frac{2}{5}\right)^0 = 1$ (v) $(-100)^0 = 1$

(v) వ్యుత్క్రమ నియమము

ఋణాత్మక ఘాతమును కలిగిన సంఖ్య యొక్క విలువను గణించుటకు, ఆ సంఖ్య యొక్క ధనాత్మక ఘాతముగా గల గుణక విలోమమును కనుగొనవలెను.

వివరణ

(i) $4^{-4} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{4 \times 4 \times 4 \times 4} = \frac{1}{256}$

(ii) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{125}$

(iii) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10 \times 10} = \frac{1}{100}$

3 యొక్క వ్యుత్క్రమము $\frac{1}{3} = \frac{3^0}{3^1} = 3^{0-1} = 3^{-1}$.

ఇదే విధముగా 6^2 యొక్క వ్యుత్క్రమము $\frac{1}{6^2} = \frac{6^0}{6^2} = 6^{0-2} = 6^{-2}$

$\left(\frac{8}{3}\right)^3$ యొక్క వ్యుత్క్రమము $= \frac{1}{\left(\frac{8}{3}\right)^3} = \left(\frac{8}{3}\right)^{-3}$.

పైన ఇవ్వబడిన ఉదాహరణముల ద్వారా ఐదవ ఘాత నియమమును పొందెదము.

నియమము 5	a ఒక వాస్తవ సంఖ్య మరియు 'm' ఒక పూర్ణాంకము అయిన $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ అగును.

(vi) ఒకే ఘాతము గల సంఖ్యలను గుణించుట

క్రింది సూక్ష్మీకరణమును గమనించుము,

(i) $4^3 \times 7^3 = (4 \times 4 \times 4) \times (7 \times 7 \times 7) = (4 \times 7) \times (4 \times 7) \times (4 \times 7)$

$= (4 \times 7)^3$

(ii) $5^{-3} \times 4^{-3} = \frac{1}{5^3} \times \frac{1}{4^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3$

$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$

$= \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{20}\right)^3$

$= 20^{-3} = (5 \times 4)^{-3}$

(iii) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}\right)$

$= \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}\right)^2$

> a, b అనునవి ఏవైన రెండు పూర్ణాంకములు అయిన
>
> $a^2 \times b^2 = (a \times b)^2 = (ab)^2$

$\therefore$ లబ్ద సూత్ర ఘాతమును క్రింది విధముగా పొందవచ్చును.

> $(a \times a \times a \times ....m$ సార్లు$) \times (b \times b \times b \times ....m$ సార్లు$) = ab \times ab \times ab \times ......m$ సార్లు $= (ab)^m$
>
> (i.e.,) $a^m \times b^m = (ab)^m$

నియమము 6	$a^m \times b^m = (ab)^m$, ఇక్కడ a, b వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు m పూర్ణాంకము.

వివరణ

(i) $3^x \times 4^x = (3 \times 4)^x = 12^x$

(ii) $7^2 \times 2^2 = (7 \times 2)^2 = 14^2 = 196$

(vii) భాగహార సూత్ర ఘాతము

సూక్ష్మీకరణలను గమనించుము.

(i) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9} = \frac{4^2}{3^2}$ మరియు

(ii) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{3^2}{5^2}\right)} = \frac{5^2}{3^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \quad \left(\because a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right)$

$= \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{5 \times 5}{3 \times 3} = \frac{5^2}{3^2} = 5^2 \times \frac{1}{3^2} = 5^2 \times 3^{-2} = \frac{1}{5^{-2}} \times 3^{-2}$

$= \frac{3^{-2}}{5^{-2}}.$

ఇచ్చుట $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ ను $\frac{a^2}{b^2}$ అని వ్రాయవచ్చును

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots\ldots\ldots m \text{ సార్లు}\right) = \frac{a \times a \times a \ldots\ldots\ldots m \text{ సార్లు}}{b \times b \times b \ldots\ldots\ldots m \text{ సార్లు}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

నియమము 7	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, ఇక్కడ $b \neq 0$, a, b వాస్తవ సంఖ్యలు, m ఒక పూర్ణాంకము.

వివరణ

(i) $\left(\frac{a}{b}\right)^7 = \frac{a^7}{b^7}$ (ii) $\left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{5^3}{3^3} = \frac{125}{27}$

(iii) $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1^4}{4^4} = \frac{1}{256}$

ఉదాహరణ 1.8

సూక్ష్మీకరించుము: (i) $2^5 \times 2^3$ (ii) $10^9 \div 10^6$ (iii) $(x^0)^4$ (iv) $(2^3)^0$

(v) $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ (vi) $(2^5)^2$ (vii) $(2 \times 3)^4$

(viii) $2^p = 32$ అయిన p యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

(i) $2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

(ii) $10^9 \div 10^6 = 10^{9-6} = 10^3$

(iii) $(x^0)^4 = (1)^4 = 1 \quad [\because a^0 = 1]$

(iv) $(2^3)^0 = 8^0 = 1 \quad [\because a^0 = 1]$

(v) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32}$

(vi) $(2^5)^2 = 2^{5\times2} = 2^{10} = 1024$

(vii) $(2\times3)^4 = 6^4 = 1296$

(లేక) $(2\times3)^4 = 2^4\times3^4 = 16\times81 = 1296$

(viii) ఇవ్వబడినవి : $2^p = 32$

$2^p = 2^5$

$\therefore p = 5$ (ఇక్కడ ఇరువైపులా ఆధారము సమానము.)

2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

ఉదాహరణ 1.9

క్రింది వాని విలువలను కనుగొనుము.

(i) $3^4\times3^{-3}$ (ii) $\frac{1}{3^{-4}}$ (iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ (iv) 10^{-3} (v) $\left(\frac{-1}{2}\right)^5$

(vi) $\left(\frac{7}{4}\right)^0\times3$ (vii) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2$ (viii) $\left(\frac{3}{8}\right)^5\times\left(\frac{3}{8}\right)^4\div\left(\frac{3}{8}\right)^9$

సాధన

(i) $3^4\times3^{-3} = 3^{4+(-3)} = 3^{4-3} = 3^1 = 3$

(ii) $\frac{1}{3^{-4}} = 3^4 = 81$

(iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$

(iv) $10^{-3} = \frac{1}{1000}$

(v) $\left(\frac{-1}{2}\right)^5 = = \frac{-1}{32}$

(vi) $\left(\frac{7}{4}\right)^0\times3 = 1\times3 = 3$ $\left[\because\left(\frac{7}{4}\right)^0 = 1\right]$

(vii) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2\times2} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

(viii) $\left(\frac{3}{8}\right)^5\times\left(\frac{3}{8}\right)^4\div\left(\frac{3}{8}\right)^9 = \frac{\left(\frac{3}{8}\right)^{5+4}}{\left(\frac{3}{8}\right)^9} = \frac{\left(\frac{3}{8}\right)^9}{\left(\frac{3}{8}\right)^9} = 1$

(లేక) $\left(\frac{3}{8}\right)^{9-9} = \left(\frac{3}{8}\right)^0 = 1$

ఉదాహరణ 1.10

16^{-2} ను ఆధారము 4 గా గల ఘాతముగా తెలియచేయుము.

సాధన

$16 = 4^2$ అని మనకు తెలియును.

$\therefore 16^{-2} = (4^2)^{-2}$

$= 4^{2\times -2}$

$= 4^{-4}$

ఉదాహరణ 1.11

సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $(2^3)^{-2}\times(3^2)^2$ (ii) $\frac{(2^2)^3}{(3^2)^2}$

సాధన

(i) $(2^3)^{-2}\times(3^2)^2 = 2^{(3\times -2)}\times 3^{(2\times 2)}$

$= 2^{-6}\times 3^4 = \frac{1}{2^6}\times 3^4 = \frac{3^4}{2^6} = \frac{81}{64}$

(ii) $\frac{(2^2)^3}{(3^2)^2} = \frac{2^{2\times 3}}{3^{2\times 2}} = \frac{2^6}{3^4} = \frac{64}{81}$.

ఉదాహరణ 1.12

సాధించుము.

(i) $12^x = 144$ (ii) $\left(\frac{2}{8}\right)^{2x}\times\left(\frac{2}{8}\right)^{x} = \left(\frac{2}{8}\right)^{6}$

సాధన

(i) ఇవ్వబడినది $12^x = 144$

$12^x = 12^2$

$\therefore x = 2$ ($\because$ ఇరువైపులా ఆధారము సమానము)

(ii) $\left(\frac{2}{8}\right)^{2x}\times\left(\frac{2}{8}\right)^{x} = \left(\frac{2}{8}\right)^{6}$

$\left(\frac{2}{8}\right)^{2x+x} = \left(\frac{2}{8}\right)^{6}$ ($\because$ ఇరువైపులా ఆధారము సమానము)

$2x + x = 6$

$3x = 6$

$x = \frac{6}{3} = 2.$

ఉదాహరణ 1.13

సూక్ష్మీకరించుము: $\frac{(3^3)^{-2}\times(2^2)^{-3}}{(2^4)^{-2}\times 3^{-4}\times 4^{-2}}$

సాధన

$\frac{(3^3)^{-2}\times(2^2)^{-3}}{(2^4)^{-2}\times 3^{-4}\times 4^{-2}} = \frac{3^{-6}\times 2^{-6}}{2^{-8}\times 3^{-4}\times 4^{-2}}$

$= 3^{-6+4}\times 2^{-6+8}\times 4^2$

$= 3^{-2}\times 2^2\times 4^2$

$= \frac{1}{3^2}\times 4\times 16 = \frac{4\times 16}{9}$

$= \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}.$

అభ్యాసము 1.4

1. క్రింది వానికి సరియైన జవాబును ఎన్ను కొనుము.

(i) $a^m \times a^n$ కు సమానమైనది

(A) $a^m + a^n$ (B) a^{m-n} (C) a^{m+n} (D) a^{mn}

(ii) p^0 కు సమానమైనది

(A) 0 (B) 1 (C) – 1 (D) p

(iii) 10^2 లో ఘాతము

(A) 2 (B) 1 (C) 10 (D) 100

(iv) 6^{-1} కు సమానమైనది

(A) 6 (B) – 1 (C) $-\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$

(v) 2^{-4} యొక్క గుణక విలోమము

(A) 2 (B) 4 (C) 2^4 (D) – 4

(vi) $(-2)^{-5} \times (-2)^6$ కు సమానమైనది

(A) – 2 (B) 2 (C) – 5 (D) 6

(vii) $(-2)^{2}$ కు సమానమైనది

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{-1}{2}$ (D) $\frac{-1}{4}$

(viii) $(2^0 + 4^{-1}) \times 2^2$ కు సమానమైనది

(A) 2 (B) 5 (C) 4 (D) 3

(ix) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ కు సమానమైనది

(A) 3 (B) 3^4 (C) 1 (D) 3^{-4}

(x) $(-1)^{50}$ కు సమానమైనది

(A) –1 (B) 50 (C) – 50 (D) 1

2. సూక్ష్మీకరించుము:

(i) $(-4)^5 \div (-4)^8$ (ii) $\left(\frac{1}{2^3}\right)^2$ (iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$

(iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2$ (v) $(3^{-7} \div 3^{10}) \times 3^{-5}$ (vi) $\frac{2^6 \times 3^2 \times 2^3 \times 3^7}{2^8 \times 3^6}$

(vii) $y^{a-b} \times y^{b-c} \times y^{c-a}$ (viii) $(4p)^3 \times (2p)^2 \times p^4$ (ix) $9^{5/2} - 3 \times 5^0 - \left(\frac{1}{81}\right)^{-1/2}$

(x) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - 3 \times 8^{2/3} \times 4^0 + \left(\frac{9}{16}\right)^{-1/2}$

3. క్రింద ఇవ్వబడిన వాటి విలువలను కనుగొనుము.

(i) $(3^0 + 4^{-1}) \times 2^2$ (ii) $(2^{-1} \times 4^{-1}) \div 2^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

(iv) $(3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1})^0$ (v) $\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}\right]^2$ (vi) $7^{-20} - 7^{-21}$.

4. m యొక్క విలువను కనుగొనుము.

(i) $5^m \div 5^{-3} = 5^5$ (ii) $4^m = 64$ (iii) $8^{m-3} = 1$

(iv) $(a^3)^m = a^9$ (v) $(5^m)^2 \times (25)^3 \times 125^2 = 1$ (vi) $2m = (8)^{\frac{1}{3}} \div (2^3)^{2/3}$

5. (a) $2^x = 16$, అయిన క్రింది వానిని కనుగొనుము.

(i) x (ii) $2^{\frac{x}{2}}$ (iii) 2^{2x} (iv) 2^{x+2} (v) $\sqrt{2^{-x}}$

(b) $3^x = 81$, అయిన క్రింది వానిని కనుగొనుము.

(i) x (ii) 3^{x+3} (iii) $3^{x/2}$ (iv) 3^{2x} (v) 3^{x-6}

6. నిరూపించుము: (i) $\frac{3^{x+1}}{3^{x(x+1)}} \times \left(\frac{3^x}{3}\right)^{x+1} = 1$, (ii) $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n} . \left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l} . \left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m} = 1$

1.7 వర్గములు, వర్గ మూలములు, ఘనములు మరియు ఘనమూలములు

1.7.1 వర్గములు

ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యచే గుణించగా వచ్చు సంఖ్యను వర్గసంఖ్య అందురు. వీటిని సంఖ్య యొక్క ఘాతము 2 గా సూచించెదరు.

ఉదాహరణము: (i) $3 \times 3 = 3^2 = 9$

(ii) $5 \times 5 = 5^2 = 25$.

ఉదాహరణము (ii) లో 5^2 ను 5 యొక్క ఘాతము 2 లేక 5 యొక్క వర్గము అని చదవబడును. 5 యొక్క వర్గము 25 అగును. ఇదే విధముగా 7 మరియు 9 యొక్క వర్గములు క్రమముగా 49 మరియు 81 అగును.

ఈ భాగములో సంఖ్య యొక్క వర్గము కనుగొను కొన్ని పద్ధతులను గూర్చి నేర్చుకొందుము.

ఖచ్చిత వర్గము

1, 4, 9, 16, 25, అను సంఖ్యలను ఖచ్చిత వర్గములు లేక వర్గ సంఖ్యలు అనెదము. అవి $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$ ఇట్లు అన్ని సంఖ్యలకు వ్రాయవచ్చును.

ఒక సంఖ్యను వర్గ సంఖ్యగా వ్రాయగలిగిన, అట్టి సంఖ్యను ఖచ్చిత వర్గమందురు.

వర్గ సంఖ్య యొక్క ధర్మములు

వర్గ సంఖ్య యొక్క నమూనా ద్వారా వాటి ధర్మములను గ్రహించవచ్చును.

1. వర్గ సంఖ్యల ఒకట్ల స్థానములో గల అంకెలు ఎల్లప్పుడు 0,1,4,5,6 లేక 9 అగును. 2,3,7 లేక 8లను ఒకట్ల స్థానములో గల సంఖ్య ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య కాదు.

2.

i)

సంఖ్య	వర్గము
1	1
9	81
11	121

ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానములో 1 లేక 9 ఉండిన ఆ సంఖ్య యొక్కవర్గములో ఒకట్ల స్థానములో 1 ఉండును.

ii)

సంఖ్య	వర్గము
2	4
8	64
12	144

ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానములో 2 లేక 8 ఉండిన ఆ సంఖ్య యొక్క వర్గములో ఒకట్ల స్థానములో 4 ఉండును.

iii)

సంఖ్య	వర్గము
3	9
7	49
13	169

ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానములో 3 లేక 7 ఉండిన ఆ సంఖ్య యొక్కవర్గములో ఒకట్ల స్థానములో 9 ఉండును.

iv)

సంఖ్య	వర్గము
4	16
6	36
14	196

ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానములో 4 లేక 6 ఉండిన ఆ సంఖ్య యొక్కవర్గములో ఒకట్ల స్థానములో 6 ఉండును.

v)

సంఖ్య	వర్గము
5	25
15	225
25	625

ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 5 ఉండిన ఆ సంఖ్య యొక్క వర్గము 5 తో అంతమగును.

3. క్రింద ఇవ్వబడిన వర్గ సంఖ్యలను గమనించుము

ఒక సున్నకలదు

10^2 100
20^2 400
30^2 900

రెండు సున్నాలు కలవు

రెండు సున్నాలు కలవు

100^2 10000
200^2 40000
700^2 490000

నాలుగు సున్నాలు కలవు

ఫలితము

(i) ఒక సంఖ్య 'సున్న' తో ముగిసిన దాని వర్గము రెండు సున్నలతో అంతమగును.

(ii) ఒక సంఖ్య బేసి సంఖ్యల 'సున్న'లతో ముగిసిన, అది ఖచ్చిత వర్గము కాదు.

4. క్రింది వానిని గమనించుము:

(i) $100 = 10^2$

(సున్నలు సరి సంఖ్యలో ఉన్నవి)

$\therefore$ 100 ఒక ఖచ్చిత వర్గమగును.

(ii) 81,000 $= 81 \times 100 \times 10$

(సున్నలు బేసి సంఖ్యలో ఉన్నవి)

$= 9^2 \times 10^2 \times 10$ $\therefore$ 81,000 ఒక ఖచ్చిత వర్గము కాదు.

5. క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టికను గమనించుము:

సరి సంఖ్యల యొక్క వర్గము

సంఖ్య	వర్గము
2	4
4	16
6	36
8	64
10	100
⋮	⋮

బేసి సంఖ్యల యొక్క వర్గము

సంఖ్య	వర్గము
1	1
3	9
5	25
7	49
9	81
⋮	⋮

పైన ఇవ్వబడిన పట్టిక నుండి మనము గ్రహించినవి

ఫలితము

(i) సరి సంఖ్య యొక్క వర్గము ఒక సరి సంఖ్య అగును

(ii) బేసి సంఖ్య యొక్క వర్గము ఒక బేసి సంఖ్య అగును

ఉదాహరణ 1.14

క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యల మధ్యగల ఖచ్చిత వర్గములను కనుగొనుము.

(i) 10 , 20 (ii) 50 , 60 (iii) 80 , 90.

సాధన

(i) 10, 20 ల మధ్యగల ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య 16 అగును.

(ii) 50, 60ల మధ్య ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య లేదు.

(iii) 80, 90ల మధ్యగల ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య 81 అగును.

ఉదాహరణ 1.15

ఒకట్ల స్థానములను పరిశీలించుట ద్వారా ఇవ్వబడిన సంఖ్యలు 3136, 867 మరియు 4413 లలో ఏ సంఖ్య ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య కాదో కనుగొనుము?

సాధన

3136 లో ఒకట్ల స్థానములో 6 కలదు. కావున ఆ సంఖ్య ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య అగుటకు అవకాశము కలదు. 867 మరియు 4413లలో ఒకట్ల స్థానములో 7 మరియు 3 ఉండుటవలన అవి ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్యలు కావు.

ఉదాహరణ 1.16

క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యల వర్గ సంఖ్యలలో ఒకట్ల స్థానములో గల అంకెలను వ్రాయుము:

(i) 24 (ii) 78 (iii) 35

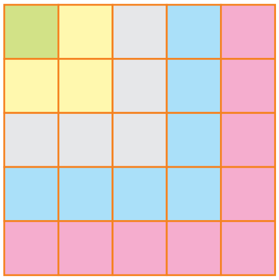
సాధన

(i) 24 యొక్క వర్గము $= 24 \times 24$, ఇచ్చట ఒకట్ల స్థానములో 4 కలదు. కావున $4 \times 4 = 16$. అగును.

$\therefore$ 24 యొక్క వర్గములో ఒకట్ల స్థానము 6 అగును.

(ii) 78 యొక్క వర్గము = 78×78. ఇచ్చట ఒకట్ల స్థానములో 8 కలదు. కావున 8 × 8 = 64 అగును.
∴ 78 యొక్క వర్గములో ఒకట్ల స్థానము 4 అగును.

(iii) 35 యొక్క వర్గము = 35×35 ఇచ్చట ఒకట్ల స్థానములో 5 కలదు. కావున 5×5 = 25 అగును.
∴ 35 యొక్క వర్గములో ఒకట్ల స్థానము 5 అగును.



వర్గ సంఖ్యలలో కొన్ని ఉపయోగకరమైన పద్ధతులు

(i) వరుసగా ఉన్న బేసి సంఖ్యల కూడిక:

$$1 = 1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + n = n^2$ (మొదటి 'n' బేసి సంఖ్యల మొత్తము పైన ఇవ్వబడిన పటము ఈ ఫలితమును వివరించుచు.)

$\frac{a}{b}$ అను అకరణీయ సంఖ్య యొక్క వర్గమును కనుగొనుట

$$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{\text{లవము యొక్క వర్గము}}{\text{హారము యొక్క వర్గము}}$$

నీకు తెలియునా?

(i) $45^2 = 2025 = (20+25)^2$
(ii) $55^2 = 3025 = (30 + 25)^2$
45, 55 క్రెకర్ సంఖ్యలు.

వివరణ

(i) $$\left(\frac{-3}{7}\right) \times \left(\frac{-3}{7}\right) = \left(\frac{-3}{7}\right)^2$$
$$= \frac{(-3)\times(-3)}{7\times 7} = \frac{9}{49}$$

(ii) $$\frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}.$$

అభ్యాసము 1.5

1. క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యల ఒకట్ల స్థానములో గల అంకెలను పరిశీలించి ఏ సంఖ్య ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య కాదో పేర్కొనుము.

(i) 3136 (ii) 3722 (iii) 9348 (iv) 2304 (v) 8343

2. క్రింద ఇవ్వబడి వానిలో ఒకట్ల స్థానములో గల అంకెలను వ్రాయుము.

(i) 78^2 (ii) 27^2 (iii) 41^2 (iv) 35^2 (v) 42^2

3. క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను కూడకుండ వాటి యొక్క మొత్తమును కనుగొనుము.

(i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15

(ii) 1 + 3 + 5 + 7

(iii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17

4. క్రింద ఇవ్వబడిన విలువలను 1 నుండి వరుసగా గల బేసి సంఖ్యల మొత్తముగా వ్రాయుము.

(i) 7^2 (ii) 9^2 (iii) 5^2 (iv) 11^2

5. క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యల యొక్క వర్గమును కనుగొనుము.

(i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{7}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{2}{3}$ (v) $\frac{31}{40}$

6. క్రింద ఇవ్వబడిన వాటి యొక్క విలువలను కనుగొనుము.

(i) $(-3)^2$ (ii) $(-7)^2$ (iii) $(-0.3)^2$ (iv) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ (v) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$ (vi) $(-0.6)^2$

7. క్రింద ఇవ్వబడిన పద్ధతి ఉపయోగించి, వదిలివేయబడిన సంఖ్యలను కనుగొనుము.

a) $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$,

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + ___ = 21^2$

$5^2 + ___ + 30^2 = 31^2$

$6^2 + 7^2 + ___ = ___$

b) $11^2 = 121$

$101^2 = 10201$

$1001^2 = 1002001$

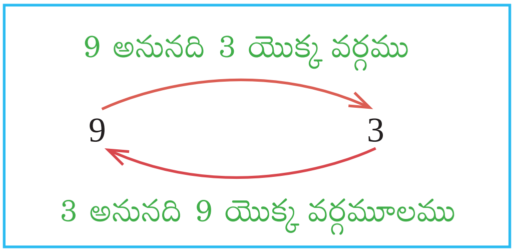
$100001^2 = 1____2____1$

$10000001^2 = __________$

1.7.2 వర్గమూలములు

నిర్వచనం

ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యతో గుణించగా వచ్చు గుణకార లబ్ధమును ఆ సంఖ్య యొక్క వర్గము అందురు. ఆ సంఖ్యను గుణకార లబ్ధము యొక్క వర్గమూలము అందురు.



ఉదాహరణము:

(i) $3 \times 3 = 3^2 = 9$

(ii) $(-3) \times (-3) = (-3)^2 = 9$

ఇచ్చట 9 యొక్క వర్గమూలములు 3 మరియు (−3) అగును.

వర్గమూలమునకు ఉపయోగింపబడు సంకేతము $\sqrt{\ }$.

$\therefore \sqrt{9} = \pm 3$ (ధనాత్మక సంఖ్య 3 లేక ఋణాత్మక సంఖ్య 3)

ధనాత్మక మూలమును మాత్రము తీసికొనెదము, కావున $\sqrt{9} = 3$ అగును.

గమనిక: x యొక్క వర్గమును $\sqrt{x}$ లేక $x^{\frac{1}{2}}$ అని వ్రాయవచ్చును.

కనుక $\sqrt{4} = (4)^{\frac{1}{2}}$ మరియు $\sqrt{100} = (100)^{\frac{1}{2}}$

ఈ భాగములో, సహజ సంఖ్యల యొక్క ధనాత్మక విలువలను మాత్రము తీసికొనెదము. క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టికను గమనించుము:

పట్టిక 1

ఖచ్చిత వర్గము	వర్గమూలము	
1 16 36 81	1 4 6 9	ఏక లేక రెండు అంకెల సంఖ్యకు వర్గమూలము ఏక అంకె సంఖ్యగా ఉండును.
100 225 2025 7396 9801	10 15 45 86 99	3 లేక 4 అంకెల సంఖ్యకు వర్గమూలము 2 అంకెల సంఖ్యగా ఉండును.
10,000 14,641 2,97,025 9,98,001	100 121 545 999	5 లేక 6 అంకెల సంఖ్యకు వర్గమూలము 3 అంకెల సంఖ్యగా ఉండును.
10,00,000 15,00,625 7,89,96,544 999,80,001	1000 1225 8888 9999	7 లేక 8 అంకెల సంఖ్యకు వర్గమూలము 4 అంకెల సంఖ్యగా ఉండును.

పైన ఇవ్వబడిన పట్టిక నుండి మనము ఇంకా నేర్చు కున్నవి

(i) ఖచ్చిత వర్గములో 'n' అంకెలు, ఇక్కడ 'n' ఒక సరి సంఖ్యగా ఉండిన, వర్గమూలములో $\frac{n}{2}$ అంకెలు ఉండును.

(ii) ఖచ్చిత వర్గములో 'n' అంకెలు, ఇక్కడ 'n' ఒక బేసి సంఖ్యగా ఉండిన, వర్గమూలములో $\frac{n+1}{2}$ అంకెలు ఉండును.

ఒక సంఖ్య యొక్క వర్గమూలము కనుగొనుటకు, క్రింద ఇవ్వబడిన రెండు పద్ధతులు కలవు.

(i) కారణాంక పద్ధతి

(ii) భాగహార పద్ధతి

(i) కారణాంక పద్ధతి

ఒక ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకములను కనుగొని వాటిని జతలుగా చేర్చుట ద్వారా ఆ ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 1.17

64 యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

సాధన

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$$64 = \underbrace{2\times 2}\times\underbrace{2\times 2}\times\underbrace{2\times 2} = 2^2\times 2^2\times 2^2$$

$$\sqrt{64} = \sqrt{2^2\times 2^2\times 2^2} = 2\times 2\times 2 = 8$$

$$\sqrt{64} = 8$$

ఉదాహరణ 1.18

169 యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

$$\begin{array}{r|l} 13 & 169 \\ \hline 13 & 13 \\ \hline & 1 \end{array}$$

సాధన

$$169 = \underbrace{13 \times 13} = 13^2$$

$$\sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13$$

ఉదాహరణ 1.19

12.25 యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

$$\begin{array}{r|l} 5 & 1225 \\ \hline 5 & 225 \\ \hline 7 & 49 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline & 1 \end{array}$$

సాధన

$$\sqrt{12.25} = \sqrt{\frac{12.25 \times 100}{100}}$$

$$= \frac{\sqrt{1225}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{5^2 \times 7^2}}{\sqrt{10^2}} = \frac{5 \times 7}{10}$$

$$\sqrt{12.25} = \frac{35}{10} = 3.5$$

ఉదాహరణ 1.20

5929 యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

$$\begin{array}{r|l} 7 & 5929 \\ \hline 7 & 847 \\ \hline 11 & 121 \\ \hline 11 & 11 \\ \hline & 1 \end{array}$$

సాధన

$$5929 = \underbrace{7 \times 7} \times \underbrace{11 \times 11} = 7^2 \times 11^2$$

$$\sqrt{5929} = \sqrt{7^2 \times 11^2} = 7 \times 11$$

$$\therefore \sqrt{5929} = 77$$

ఉదాహరణ 1.21

200 ను ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యతో గుణించగా అది ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్యగా మారునో కనుగొనుము.

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

$$\begin{array}{r|l} 2 & 200 \\ \hline 2 & 100 \\ \hline 2 & 50 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

సాధన

$$200 = 2 \times \underbrace{2 \times 2} \times \underbrace{5 \times 5}$$

'2' కు జత లేదు

కావున 200 ను 2తో గుణించగా అది ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్యగా మారును.

ఉదాహరణ 1.22

384 ను ఏ కనిష్ట సంఖ్యతో భాగించగా అది ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్యగా మారునో కనుగొనుము.

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

$$\begin{array}{r|l} 3 & 384 \\ \hline 2 & 128 \\ \hline 2 & 64 \\ \hline 2 & 32 \\ \hline 2 & 16 \\ \hline 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

సాధన

$$384 = 3 \times \underbrace{2 \times 2} \times \underbrace{2 \times 2} \times \underbrace{2 \times 2} \times 2$$

3 మరియు 2 కు జతలేదు.

384 ను 6తో భాగించిన ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్యగా మారును.

(ii) దీర్ఘ భాగహార పద్ధతి

కారణాంక పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలమును కనుగొనుటను నేర్చుకొన్నాము. కాని పెద్ద సంఖ్యలకు కారణాంకము కనుగొనుట అంత సులభమైన పనికాదు. కావున దీర్ఘ భాగహార పద్ధతిని ఉపయోగించవచ్చును.

ఈ పద్ధతి ఉపయోగించి దశాంశ సంఖ్యల యొక్క వర్గమూలము కూడా కనుగొనవచ్చును. ఈ పద్ధతిని గణించబడిన ఉదాహరణం ద్వారా వివరించబడును.

ఉదాహరణ 1.23

దీర్ఘ భాగహార పద్ధతి ఉపయోగించి 529 యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

సాధన

మెట్టు 1 : 529 ను $5\ \overline{29}$ గా కుడివైపు చివరి నుండి సంఖ్యలను జతలుగా తీసికొని వ్రాయవలెను. (అనగా ఒకట్ల స్థానము నుండి)

మెట్టు 2 : 5 కు తక్కువగా లేక సమానమైన వర్గసంఖ్యను కనుగొనవలయును ఇచ్చట ఆ సంఖ్య 2 అగును.

$$2\,\big|\ 5\ \overline{29}$$

మెట్టు 3 : 2ను పై భాగమున మరియు 2ను భాజకముగా ప్రక్కన చూపబడిన విధముగా వ్రాయవలెను.

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & 5\ \overline{29} \\ & 4 \\ \hline & 1 \end{array}$$

మెట్టు 4 : పై భాగమున గల 2ను భాజకముగా గల 2తో గుణించగా వచ్చు 4 ను 5 క్రింద వ్రాసి తీసివేయవలెను. శేషము 1 అగును.

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & 5\ \overline{29} \\ & 4\ \downarrow \\ \hline & 1\ 29 \end{array}$$

మెట్టు 5 : జత 29 ను క్రిందకు దింపి శేషము 1 తో కలిపి వ్రాసిన వచ్చు విలువ 129 అగును.

మెట్టు 6 : 2ను రెండింతలుగా చేసిన వచ్చు విలువ 4. 'n' యొక్క విలువ 129 కు తక్కువగా లేక సమానముగా ఉండునట్లుగా గల $4n \times n$ విలువను కనుగొనుము.

ఉదాహరణమునకు : $42 \times 2 = 84$; మరియు $43 \times 3 = 129$

కావున $n = 3$ అగును

$$\begin{array}{r|l} & 2\ \ 3 \\ \hline 2 & 5\ \overline{29} \\ & 4\ \downarrow \\ \hline 43 & 1\ 29 \\ & 1\ 29 \\ \hline & \ \ \ 0 \end{array}$$

మెట్టు 7 : 43ను తరువాతి భాజకముగా మరియు 3ను పై భాగమున గల 2తో కలిపి వ్రాయవలెను. గుణకార లబ్దము $43 \times 3 = 129$ క్రింద వ్రాసి తీసివేయుము. శేషము '0' కావున భాగహారము పూర్తియైనది.

కావున $\sqrt{529} = 23$.

ఉదాహరణ 1.24

దీర్ఘ భాగహార పద్ధతి ఉపయోగించి $\sqrt{3969}$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

మెట్టు 1 : 3969 ను $\overline{39}\ \overline{69}$గా కుడివైపు చివరినుండి సంఖ్యలను జతలుగా తీసుకొని వ్రాయవలెను.

మెట్టు 2 : 39 కు తక్కువగా లేక సమానమైన వర్గ సంఖ్యను కనుగొనవలయును. ఇచ్చట ఆ సంఖ్య 6 అగును. .

మెట్టు 3 : 6ను పై భాగమున మరియు 6ను భాజకముగా ప్రక్కన చూపబడిన విధముగా వ్రాయువలయను.

```
   6
6 | 39 69
```

మెట్టు 4 : పై భాగమున గల 6ను భాజకముగా గల 6తో గుణించగా వచ్చు 36ను 39 క్రింద వ్రాసి తీసివేయవలయును. శేషము 3 అగును.

```
   6
6 | 39 69
  | 36
  |  3
```

మెట్టు 5 : జత 69ను క్రిందకు దింపి శేషము 3 తో కలిపి వ్రాసిన వచ్చు విలువ 369 అగును.

```
   6
6 | 39 69
  | 36 ↓
  |  3 69
```

మెట్టు 6 : 6ను రెండింతలుగా చేసిన వచ్చు విలువ 12. $12n \times n$ యొక్క విలువ 369 కు తక్కువగా లేక సమానముగా ఉండునట్లుగా గల 'n' విలువను కనుగొనుము.

కావున $122 \times 2 = 244$; $123 \times 3 = 369$, $n = 3$

```
      6  3
  6 | 39 69
    | 36 ↓
123 |  3 69
    |  3 69
    |     0
```

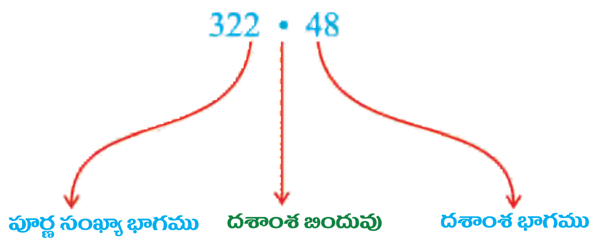
మెట్టు 7 : 123ను తరువాతి భాజకముగా మరియు 3ను పై భాగమున గల 6తో కలిపి వ్రాయవలయును. గుణకార లబ్దము $123 \times 3 = 369$ ను 369 క్రింద వ్రాసి తీసివేయుము. శేషము '0' కావున భాగహారము పూర్తియైనది.

కావున $\sqrt{3969} = 63$ అగును.

1.7.2 (a) దశాంశ సంఖ్యల వర్గమూలము

దీర్ఘ భాగహార పద్ధతి ఉపయోగించ వలయుననిన ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క పూర్ణాంక భాగములో గల అంకెలను. జతలుగా మునుపటివలె వ్రాసి, దశాంశ భాగములో గల అంకెలను దశాంశ బిందువు తరువాత ఎడమ నుండి కుడివైపుగా జతలుగా వ్రాయవలయును.

ఉదాహరణకు, 322.48 ను ఇట్లు వ్రాసిన



వర్గమూలములో దశాంశ బిందువు ఎట్లు గుర్తించవలయుననుట మనకు తెలియవలయును. సంఖ్యలో 1 లేక 2 అంకెలు ఉండిన వాటి యొక్క వర్గమూలము ఏక అంకెగా ఉండును.

ఉదాహరణ 1.25

6.0516 యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

సాధన

6.0516ను $6.\overline{05}\,\overline{16}$ వ్రాసిన పూర్ణాంక భాగములో గల సంఖ్యల అంకె 1 అగును. కావున వర్గమూలములో పూర్ణాంక భాగములో గల అంకె 1 అగును. 60516 మొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుటకు అనుసరించిన అదే విధానమును ఇక్కడ కూడా పాటించవలయును.

	2. 4 6
2	6.$\overline{05}$ $\overline{16}$
	4 ↓
44	2 05
	1 76 ↓
486	29 16
	29 16
	0

$$\sqrt{6.0516} = 2.46 \text{ అగును}$$

ఉదాహరణ 1.26

3250 నుండి ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యను తీసివేసిన అది ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య అగునో కనుగొనుము.

సాధన

	5 7
5	$\overline{32}$ $\overline{50}$
	25 ↓
107	7 50
	7 49
	1

57^2, 3250 కంటే 1 తక్కువ కావున, సంఖ్య నుండి శేషమును తీసివేసిన అది ఖచ్చిత వర్గమగును. తీసి వేయవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్య 1 అగును.

ఉదాహరణ 1.27

1825 కు ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యను కూడిన అది ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య అగునో కనుగొనుము.

సాధన

	4 2
4	$\overline{18}$ $\overline{25}$
	16 ↓
82	2 25
	1 64
	61

$42^2 < 1825$ అని తెలియును.

42^2 తరువాత వచ్చు ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య $43^2 = 1849$.

కావున కూడవలసిన సంఖ్య $43^2 - 1825 = 1849 - 1825$

$= 24.$

ఉదాహరణ 1.28

$\sqrt{0.182329}$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$\begin{array}{r|l} & 0.4\ \ 2\ \ 7 \\ \hline 4 & 0.\overline{18}\ \overline{23}\ \overline{29} \\ & \ \ 16 \\ \hline 82 & \ \ \ 2\ 23 \\ & \ \ \ 1\ 64 \\ \hline 847 & \ \ \ \ 59\ 29 \\ & \ \ \ \ 59\ 29 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

0.182329 ను $0.\overline{18}\ \overline{23}\ \overline{29}$ అని వ్రాయవచ్చును. సంఖ్యలో పూర్ణ సంఖ్య భాగము లేదు. కావున వర్గమూలములో కూడా పూర్ణ సంఖ్య భాగము ఉండదు. 182329 యొక్క వర్గమూలము ఎట్లు కనుగొనెదెమో అదే పద్ధతిని ఇక్కడ అనుసరించెదము.

$\sqrt{0.182329} = 0.427$

గమనిక: రేడికంట్ యొక్క పూర్ణ సంఖ్య భాగము '0' కావున వర్గమూలము యొక్క పూర్ణసంఖ్యా భాగము '0' అగును.

ఉదాహరణ 1.29

121.4404 యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

సాధన

$$\begin{array}{r|l} & 1\ \ 1\ .\ \ 0\ \ 2 \\ \hline 1 & 1\ \overline{21}.\ \overline{44}\ \overline{04} \\ & 1 \\ \hline 21 & 0\ 21 \\ & \ \ \ 21 \\ \hline 2202 & \ \ \ \ 0\ \ 44\ 04 \\ & \ \ \ \ \ \ \ 44\ 04 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

$\sqrt{121.4404} = 11.02$

ఉదాహరణ 1.30

0.005184 యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

సాధన

$$\begin{array}{r|l} & 0.\ \ 0\ \ 7\ \ 2 \\ \hline 7 & 0.\ \overline{00}\ \overline{51}\ \overline{84} \\ & \ \ \ \ \ \ 49 \\ \hline 142 & \ \ \ \ \ \ \ 2\ 84 \\ & \ \ \ \ \ \ \ 2\ 84 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

$\sqrt{0.005184} = 0.072$

గమనిక: రేడికంట్ యొక్క పూర్ణ సంఖ్యా భాగము '0' కావున భాగఫలములో దశాంశ బిందువునకు ముందు భాగములో '0' వ్రాయబడెను. రేడికంట్‌లో దశాంశ బిందువు తరువాత '00' ఉండుటవలన భాగఫలములో దశాంశ బిందువు తరువాత ఒక '0' వ్రాయబడెను.

1.7.2 (b) అసంపూర్ణ వర్గ సంఖ్య యొక్క వర్గమూలము

అసంపూర్ణ వర్గ సంఖ్య అనునది ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్యకాని సంఖ్య అగును. ఉదాహరణమునకు 2, 3, 5, 7, 13,... అనునవి అన్నియు అసంపూర్ణ వర్గ సంఖ్య లగును. ఇట్టి సంఖ్యల యొక్క వర్గమూలము కనుగొనుటకు దీర్ఘ భాగహార పద్ధతిని ఉపయోగించెదము.

కావలసిన వర్గమూలమును 'n' దశాంశ స్థానములకు సవరించవలయుననిన, వర్గమూలములను n+1 దశాంశ స్థానములకు గణించిన పిదప 'n' దశాంశ స్థానములకు సవరించవలయును. దీని ప్రకారము, రేడికంట్ యొక్క దశాంశ స్థానములో సున్నలను కలుపు కొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 1.31

3 యొక్క వర్గమూలమును కనుగొని దానిని రెండు దశాంశ స్థానములకు సవరించి వ్రాయుము

సాధన

	1. 7 3 2
1	3. $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$
	1
27	2 00
	1 89
343	11 00
	10 29
3462	71 00
	69 24
	1 76

రెండు దశాంశ స్థానములకు సవరించుటకొరకు వర్గమూలమును మూడు దశాంశ స్థానముల వరకు గణించవలయును. అందువలన 6 సున్నలను దశాంశ బిందువుకు కుడివైపు కలుపవలయును.

$\therefore \sqrt{3}$ = 1.732 మూడు దశాంశ స్థానముల వరకు.

$\sqrt{3}$ = 1.73 రెండు దశాంశ స్థానములకు సవరించబడినది.

ఉదాహరణ 1.32

$10\frac{2}{3}$ యొక్క వర్గమూలమును కనుగొని రెండు దశాంశ స్థానములకు సవరించి వ్రాయుము

సాధన

$10\frac{2}{3} = \frac{32}{3} = 10.66\ 66\ 66$ ....

వర్గమూలమును రెండు దశాంశ స్థానములకు సవరించుటకొరకు వర్గమూలమును మూడు స్థానముల వరకు కనుగొనవలెను. కావున $\frac{2}{3}$ ను ఆరు దశాంశ స్థానములకు సవరించి వ్రాయవలెను.

	3. 2 6 5
3	10. $\overline{66}$ $\overline{66}$ $\overline{67}$
	9
62	1 66
	1 24
646	42 66
	38 76
6525	3 90 67
	3 26 25
	64 42

$\sqrt{10\frac{2}{3}}$ = 3.265 (ఉజ్జాయింపుగా)

= 3.27 (రెండు దశాంశ స్థానములకు సవరించబడినది)

అభ్యాసము 1.6

1. క్రింద ఇవ్వబడిన సమాసముల యొక్క వర్గమూలము కనుగొనుము.

(i) $3 \times 3 \times 4 \times 4$ (ii) $2 \times 2 \times 5 \times 5$

(iii) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ (iv) $5 \times 5 \times 11 \times 11 \times 7 \times 7$

2. క్రింద ఇవ్వబడిన వాని యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

(i) $\frac{9}{64}$ (ii) $\frac{1}{16}$ (iii) 49 (iv) 16

3. భాగహార పద్ధతి ఉపయోగించి క్రింద ఇవ్వబడిన వాని యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

(i) 2304 (ii) 4489 (iii) 3481 (iv) 529 (v) 3249

(vi) 1369 (vii) 5776 (viii) 7921 (ix) 576 (x) 3136

4. ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ఉపయోగించి క్రింద ఇవ్వబడిన వాని యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

(i) 729 (ii) 400 (iii) 1764 (iv) 4096 (v) 7744

(vi) 9604 (vii) 5929 (viii) 9216 (ix) 529 (x) 8100

5. క్రింద ఇవ్వబడిన దశాంశ సంఖ్యల యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

(i) 2.56 (ii) 7.29 (iii) 51.84 (iv) 42.25 (v) 31.36

(vi) 0.2916 (vii) 11.56 (viii) 0.001849

6. క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలు ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యతో తీసివేసిన అది ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య అగునో కనుగొనుము.

(i) 402 (ii) 1989 (iii) 3250 (iv) 825 (v) 4000

7. క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలు ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యతో కూడిన అది ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య అగునో కనుగొనుము.

(i) 525 (ii) 1750 (iii) 252 (iv) 1825 (v) 6412

8. క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యల యొక్క వర్గమూలము కనుగొని దానిని రెండు దశాంశ స్థానములకు సవరించి వ్రాయుము.

(i) 2 (ii) 5 (iii) 0.016 (iv) $\frac{7}{8}$ (v) $1\frac{1}{12}$

9. ఒక చతురస్రము యొక్క వైశాల్యము 441 మీ^{2} అయిన భుజము యొక్క పొడవును కనుగొనుము.

10. క్రింది వాని యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

(i) $\frac{225}{3136}$ (ii) $\frac{2116}{3481}$ (iii) $\frac{529}{1764}$ (iv) $\frac{7921}{5776}$

1.7.3 ఘనము

పరిచయము

గొప్ప గణిత శాస్త్ర మేధావి S. రామానుజం గూర్చిన సంఘటన. గణిత శాస్త్రవేత్త G.H. హార్డీ రామానుజం ను చూచుటకు 1729 సంఖ్యను కలిగిన టాక్సీలో వచ్చెను. హార్డీ 1729ను ఒక ముఖ్యత్వంలేని సంఖ్యగా వివరించెను. రామానుజం వెంటనే 1729ను ముఖ్యమైన సంఖ్య అని సూచించెను. ఈ సంఖ్యను రెండు ఘనముల మొత్తముగా రెండు వేర్వేరు సంఖ్యలతో వ్రాయగల కనిష్ఠ సంఖ్య అగుననెను.

శ్రీనివాస రామానుజం
(1887 -1920)

రామానుజం భారతదేశ గణిత శాస్త్రవేత్త అతను ఈరోడ్‌లో జన్మించెను. సంఖ్యా శాస్త్రములో అతని సాధనలచే ప్రపంచ ప్రఖ్యాతిని పొందెను అతని జీవిత కాలము తక్కువైనను సుమారు 3900 ఫలితములను సాధించెను.

$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$

మరియు $1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$

1729 ను రామానుజం సంఖ్య పేర్కొంటారు.

ఇట్లు ఘనము, ఘనమూలములలో అనేక ఆసక్తికరమైన పద్ధతులు మరియు వాటికి సంబంధించినవి ఉన్నవి.

నీకు తెలియునా?

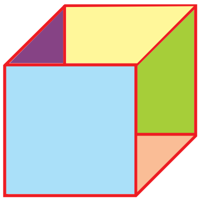
1729 అనునది కనిష్ఠ రామానుజ సంఖ్య. అంతము లేని అట్టి సంఖ్యలు కలవు. కొన్ని ఈ విధమైన సంఖ్యలు
4104 (2, 16, 9, 15),
13832 (18, 20, 2, 24).

ఘనము

ఘనము అను పదము రేఖా గణితములో ఉపయోగించెడి పదము అని మనకు తెలిసినదే. ఘనము ఒక ఘనాకృతి. వాటిలో అన్ని భుజములు సమానము.

ప్రక్కన ఇవ్వబడిన పటములో ఘనము యొక్క భుజము 'a' ప్రమాణములు అయిన వాటి ఘనపరిమాణము $= a \times a \times a$

$= a^3$ ఘన ప్రమాణములు.



a^3 ను "**a** యొక్క ఘనము లేక **a** యొక్క ఘాతము 3" అని పేర్కొందురు.

1, 8, 27, 64, 125, ⋯ అను సంఖ్యలను గమనించెదము.
వాటిని ఖచ్చిత ఘనము లేక ఘన సంఖ్య అందురు.

ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యతో మూడు సార్లు గుణించుట ద్వారా ఘన సంఖ్యలను పొందవచ్చును.

ఉదాహరణములు: $1 \times 1 \times 1 = 1^3$, $2 \times 2 \times 2 = 2^3$, $3 \times 3 \times 3 = 3^3$, $5 \times 5 \times 5 = 5^3$

ఉదాహరణ 1.33

క్రింది వాని విలువలను కనుగొనుము.

(i) 15^3 (ii) $(-4)^3$ (iii) $(1.2)^3$ (iv) $\left(\frac{-3}{4}\right)^3$

సాధన

(i) $15^3 = 15 \times 15 \times 15 = 3375$

(ii) $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$

(iii) $(1.2)^3 = 1.2 \times 1.2 \times 1.2 = 1.728$

(iv) $\left(\frac{-3}{4}\right)^3 = \frac{(-3)\times(-3)\times(-3)}{4\times4\times4} = \frac{-27}{64}$

(ii) వ ప్రశ్న యొక్క జవాబును గమనించుము ఇక్కడ (ii) $(-4)^3 = -64$.

గమనిక: ఋణాత్మక సంఖ్యను అదే సంఖ్యతో ఒక సరి సంఖ్య సార్లు గుణించిన, గుణకార లబ్దము ధనాత్మకముగా మారును. ఋణాత్మక సంఖ్యను అదే సంఖ్యతో ఒక బేసి సంఖ్య సార్లు గుణించిన, గుణ కార లబ్దము ఋణాత్మకముగా ఉండును. ie $(-1)^n = \begin{cases} -1, n & \text{బేసి సంఖ్య} \\ +1, n & \text{సరి సంఖ్య} \end{cases}$

1 నుండి 20 వరకు గల సంఖ్యల యొక్క ఘనము క్రింద ఇవ్వబడినది.

సంఖ్యలు	ఘనములు
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000

సరి సంఖ్యలు కావున ఘనములు సరిసంఖ్య అగును.

బేసి సంఖ్యలు కావున ఘనము బేసిసంఖ్య అగును.

సంఖ్యలు	ఘనములు
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

పట్టిక 2

ఘనము యొక్క ధర్మములు

పైన ఇవ్వబడిన పట్టికనుండి మనము ఘనముల యొక్క ధర్మములు గమనించెదము:

1. సంఖ్యల యొక్క ఒకట్ల స్థానములో అంకె 1 అయిన వాటి ఘనముల యొక్క ఒకట్ల స్థానము కూడా 1 అగును.
   ఉదాహరణమునకు: $1^3 = 1; 11^3 = 1331; 21^3 = 9261; 31^3 = 29791$.
2. సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానములో అంకె 1,4,5,6,9 మరియు '0' అయిన వాటి ఘనములు అదే అంకెను ఒకట్ల స్థానముల అంకెగా కలిగియుండును.
   ఉదాహరణమునకు: $14^3 = 2744; 15^3 = 3375; 16^3 = 4096; 20^3 = 8000$.
3. సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానములో అంకె 2 అయిన వాటి ఘనముల ఒకట్ల స్థానములో అంకె 8 గా ఉండును. సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానములో అంకె 8 అయిన వాటి ఘనముల ఒకట్ల స్థానములో అంకె 2 గా ఉండును.
   ఉదాహరణమునకు: $(12)^3 = 1728; (18)^3 = 5832$.
4. సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానములో అంకె 3 అయిన వాటి ఘనముల ఒకట్ల స్థానములో అంకె 7ను కలిగియుండును. సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానము అంకె 7 అయిన వాటి ఘనములో ఒకట్ల స్థానములో అంకె 3గా ఉండును.
   ఉదాహరణమునకు: $(13)^3 = 2197; (27)^3 = 19683$.
5. సరి సంఖ్య యొక్క ఘనము, సరి సంఖ్య అగును. బేసి సంఖ్య యొక్క ఘనము, బేసి సంఖ్య అగును.

వరుసగా వచ్చు బేసి సంఖ్య యొక్క కూడిక

క్రింద ఇవ్వబడిన బేసి సంఖ్యల యొక్క మొత్తముల నమూనా గమనించెదము.

$1 = 1 = 1^3$

తరువాత వచ్చు 2 బేసి సంఖ్యలు $3 + 5 = 8 = 2^3$

తరువాత వచ్చు 3 బేసి సంఖ్యలు $7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$

తరువాత వచ్చు 4 బేసి సంఖ్యలు $13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$

తరువాత వచ్చు 5 బేసి సంఖ్యలు $21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$

ఇది ఆసక్తికరముగా ఉన్నదా?

ఉదాహరణ 1.34

64 ఖచ్చిత ఘనమగునా?

సాధన

$$64 = \underbrace{2\times2\times2}\times\underbrace{2\times2\times2}$$
$$= 2^3\times2^3 = (2\times2)^3 = 4^3$$

$\therefore$ 64 ఖచ్చిత ఘనమగును.

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

ఉదాహరణ 1.35

500 ఖచ్చిత ఘనమగునా?

సాధన

$$500 = 2\times2\times\underbrace{5\times5\times5}$$

గుణకార లబ్ధములో మూడు 5లు కలవు. కాని రెండు 2లు మాత్రము కలవు.

500 ఖచ్చిత ఘనము కాదు.

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

2	500
2	250
5	125
5	25
5	5
	1

ఉదాహరణ 1.36

243 ఒక ఖచ్చిత ఘనమగునా? కాదనిన ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యతో 243ను గుణించిన ఖచ్చిత ఘన సంఖ్యను పొందవచ్చును.

సాధన

$$243 = \underbrace{3\times3\times3}\times3\times3$$

పైన చేయబడిన కారణాంక విభజనలో సంఖ్యలు 3ను త్రికముగా వ్రాయునప్పుడు 3×3 మాత్రము మిగులును. $\therefore$ 243 ఒక ఖచ్చిత ఘనము కాదు.

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

ఖచ్చిత ఘనముగా పొందుటకు 3తో గుణించవలయును.

$$243\times3 = \underbrace{3\times3\times3}\times\underbrace{3\times3\times3}$$
$$729 = 3^3\times3^3 = (3\times3)^3$$
$$729 = 9^3$$

$\therefore$ 729 ఖచ్చిత ఘనమగును.

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

1.7.4 ఘనమూలములు

ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము 125 సెం.మీ^{3} అయిన ఘనము యొక్క భుజ పొడవు ఏద్దై యుండును. ఘనము యొక్క భుజ పొడవును తెలిసికొనుటకు 125 ఏ సంఖ్య యొక్క ఘనము అని తెలిసికొనవలెను. ఘనమూలమును కనుగొనుటకు, ఘనము యొక్క విలోమ ప్రక్రియను ఉపయోగించవలయును.

ఉదాహరణమునకు

సంకేతము

> $\sqrt[3]{\ }$ ఘనమూలమును సూచించును

$2^3 = 8$, అని మనకు తెలియును,

8 యొక్క ఘన మూలము 2 అగును.

$\sqrt[3]{8} = (8)^{1/3} = (2^3)^{1/3} = 2^{3/3} = 2$ అని గణిత శాస్త్రపరంగా వ్రాయవచ్చును.

కొన్ని ఉదాహణములు:

(i) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = (5^3)^{1/3} = 5^{3/3} = 5^1 = 5$

(ii) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = (4^3)^{1/3} = 4^{3/3} = 4^1 = 4$

(iii) $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = (10^3)^{1/3} = 10^{3/3} = 10^1 = 10$

ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ద్వారా ఘనమూలము కనుగొనుట

సంఖ్య యొక్క ఘనమూలమును కనుగొను పద్ధతి.

మెట్టు 1 : ఇచ్చిన సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట.

మెట్టు 2 : ఈ కారణాంకములను త్రికముగా వ్రాయవలెను. ప్రతి త్రికము మూడు సమ కారణాంకములుగా ఉండవలెను.

మెట్టు 3 : కారణాంకముల గుణకార లబ్ధములో ప్రతి త్రికము నుండి ఒక కారణాంకము తీసి గుణించిన ఘనమూలమువచ్చును.

ఉదాహరణ 1.37

512 యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.

సాధన

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$$\sqrt[3]{512} = (512)^{\frac{1}{3}}$$
$$= ((2\times2\times2)\times(2\times2\times2)\times(2\times2\times2))^{\frac{1}{3}}$$
$$= (2^3\times2^3\times2^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(2^9\right)^{\frac{1}{3}} = 2^3$$
$$\sqrt[3]{512} = 8.$$

ఉదాహరణ 1.38

27×64 యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.

సాధన

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

3	27
3	9
3	3
	1

27 మరియు 64 లను ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

$$\sqrt[3]{27} = (3\times3\times3)^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$$\sqrt[3]{64} = (2\times2\times2\times2\times2\times2)^{\frac{1}{3}}$$
$$= (2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^2 = 4$$
$$\sqrt[3]{64} = 4$$
$$\sqrt[3]{27\times64} = \sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{64}$$
$$= 3\times4$$
$$\sqrt[3]{27\times64} = 12$$

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

ఉదాహరణ 1.39

250 ఒక ఖచ్చిత ఘనమగునా? కాని యెడల ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యతో 250ను భాగించగా వచ్చు భాగఫలము ఖచ్చిత ఘనమూలమగును?

సాధన

$$250 = 2\times\underbrace{5\times5\times5}$$

ప్రధాన కారణాంకము 2 త్రికముగా లేదు. కావున 250 ఖచ్చిత ఘనము కాదు. .

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

2	250
5	125
5	25
5	5
	1

కారణాంకములో ఒకే ఒక 2 మాత్రము కలదు. 250ను 2తో భాగించగా వచ్చు భాగఫలములో 2 గుణకముగా ఉండదు. మిగిలిన సంఖ్యను ఘనముగా వ్రాయవచ్చును.

$$\therefore 250 \div 2 = 125$$
$$= 5\times5\times5 = 5^3.$$

$\therefore$ 250ను కనిష్ఠ సంఖ్య 2తో భాగించగా ఖచ్చిత ఘనమూలమును పొందవచ్చును. .

భిన్నము యొక్క ఘనమూలము

$$\text{భిన్నము యొక్క ఘనమూలము} = \frac{\text{లవము యొక్క ఘనమూలము}}{\text{హారము యొక్క ఘనమూలము}}$$

(i.e.) $$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(a)^{\frac{1}{3}}}{(b)^{\frac{1}{3}}}$$

ఉదాహరణ 1.40

$\frac{125}{216}$. యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.

సాధన

125 మరియు 216 ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

5	125
5	25
5	5
	1

$$125 = \underbrace{5\times5\times5}$$
$$\sqrt[3]{125} = 5$$

$$216 = \underbrace{2\times2\times2}\times\underbrace{3\times3\times3}$$

$$\therefore \sqrt[3]{216} = 2\times3$$

$$\therefore \sqrt[3]{216} = 6$$

$$\therefore \sqrt[3]{\frac{125}{216}} = \frac{5}{6}.$$

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

ఉదాహరణ 1.41

$\frac{-512}{1000}$ యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.

సాధన

$$-512 = \underbrace{-8\times-8\times-8}$$

$$\sqrt[3]{-512} = -8$$

$$1000 = 5\times5\times5\times2\times2\times2$$

$$\sqrt[3]{1000} = 10$$

$$\sqrt[3]{\frac{-512}{1000}} = \frac{-8}{10}$$

$$\sqrt[3]{\frac{-512}{1000}} = \frac{-4}{5}$$

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

5	1000
5	200
5	40
2	8
2	4
2	2
	1

ఉదాహరణ 1.42

0.027 యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.

సాధన

$$\sqrt[3]{0.027} = \sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3\times3\times3}{10\times10\times10}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{10^3}} = \frac{3}{10}$$

$$\sqrt[3]{0.027} = 0.3$$

ఆలోచించుము

$$\sqrt[3]{-x^3} = \sqrt[3]{(-x)\times(-x)\times(-x)}$$

$$= -x.$$

ఉదాహరణ 1.43

విలువను కనుగొనుము: $\frac{\sqrt[3]{729}-\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{512}+\sqrt[3]{343}}$

సాధన

$$\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = 9$$

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

3	27
3	9
3	3
	1

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

7	343
7	49
7	7
	1

$$\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{8^3} = 8$$

$$\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$$

$$\therefore \frac{\sqrt[3]{729} - \sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{512} + \sqrt[3]{343}} = \frac{9-3}{8+7}$$

$$= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించుట

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

అభ్యాసము 1.7

1. క్రింద ఇవ్వబడిన వానికి సరియైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము.

(i) క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలో ఏ సంఖ్య ఖచ్చిత ఘనమగును?

(A) 125 (B) 36 (C) 75 (D) 100

(ii) క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలో ఏ సంఖ్య ఖచ్చిత ఘనముకాదు?

(A) 1331 (B) 512 (C) 343 (D) 100

(iii) బేసి సహజ సంఖ్య యొక్క ఘనము ఒక

(A) సరి సంఖ్య (B) బేసి సంఖ్య

(C) సరిలేక బేసి సంఖ్య (D) ప్రధానాంకము

(iv) ఘన సంఖ్య 1000 యొక్క ఘనమూలములో గల సున్నలు

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(v) 50 యొక్క ఘనములో గల ఒకట్ల స్థానములో గల అంకె

(A) 1 (B) 0 (C) 5 (D) 4

(vi) 100 యొక్క ఘనములో గల సున్నలు

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6

(vii) 108ను ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యతో గుణించిన ఖచ్చిత ఘనము వచ్చును

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

(viii) 88ను ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యతో భాగించిన ఖచ్చిత ఘనము వచ్చును

(A) 11 (B) 5 (C) 7 (D) 9

(ix) ఒక ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము 64 సెం.మీ^{3} అయిన ఆ ఘనము యొక్క భుజము

(A) 4 సెం.మీ (B) 8 సెం.మీ (C) 16 సెం.మీ (D) 6 సెం.మీ

(x) క్రింద ఇవ్వబడిన వాటిలో ఏవి తప్పు?

(A) బేసి సంఖ్య యొక్క ఘనము ఒక బేసి సంఖ్య .

(B) ఒక ఖచ్చిత ఘనము రెండు సున్నలతో అంతమవదు.

(C) ఏక అంకె గల సంఖ్య యొక్క ఘనము ఏక అంకె సంఖ్యగా ఉండును. .

(D) ఏ ఖచ్చిత ఘన సంఖ్య 8తో అంతమవదు.

2. క్రింద ఇవ్వబడిన వానిలో ఖచ్చిత ఘనములను కనుగొనుము?

(i) 400 (ii) 216 (iii) 729 (iv) 250

(v) 1000 (vi) 900

3. క్రింద ఇవ్వబడిన వాటిలో ఖచ్చిత ఘనములు కానివి కనుగొనుము?

(i) 128 (ii) 100 (iii) 64 (iv) 125

(v) 72 (vi) 625

4. క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను ఏ కనిష్ట సంఖ్యతో భాగించిన ఖచ్చిత ఘనము వచ్చునో కనుగొనుము.

(i) 81 (ii) 128 (iii) 135 (iv) 192

(v) 704 (vi) 625

5. క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యతో గుణించిన ఖచ్చిత ఘనము వచ్చునో కనుగొనుము.

(i) 243 (ii) 256 (iii) 72 (iv) 675

(v) 100

6. ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ఉపయోగించి ఇచ్చిన సంఖ్యల యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.

(i) 729 (ii) 343 (iii) 512 (iv) 0.064

(v) 0.216 (vi) $5\frac{23}{64}$ (vii) – 1.331 (viii) – 27000

7. ఘనాకారములో గల పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణము 19.683 ఘన. సెం.మీ. పెట్టె యొక్క భుజము పొడవును కనుగొనుము.

1.8 సంఖ్యల యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువలు

నిత్య జీవితములో ఉజ్జాయింపు విలువలు లేక కొలతలు గూర్చి తెలుసుకొనుట అవశ్యమై ఉన్నది.

బెంజిమన్ రూ.59876 లకు లాప్‌టాప్‌ను కొనెను. ఈ ధరను ఇతరులకు చెప్పుటకుగాను, తాను రూ.60,000/– కొనినట్లుగా చెప్పెను. దీని ఉజ్జాయింపు విలువ వేలలో ఇవ్వబడినది.

వసంత్ ఒక జత చెప్పులను రూ.599.75 కొనెను. ఈ మొత్తమును రూ.600/– గా తీసికొనవచ్చును.

ఒక ఫోటోఫ్రేమ్ యొక్క పరిమాణము 35.23 సెం.మీ. పొడవు మరియు 25.91 సెం.మీ. వెడల్పు కలిగియున్నది. సాధారణ కొలబద్ద ఉపయోగించి కొలతలను సరిచూచుటకు ప్రయత్నించిన, కొలతలను ఖచ్చితముగా కొలుచుటకు వీలుకాదు. ఎందువలననగా సాధారణ కొలబద్దలో కొలతలు సెంటిమీటర్లుగా గుర్తించబడియుండును.

ఇటువంటి సందర్భములలో ఫోటోఫ్రేమ్ యొక్క పొడవు 35.2 సెం.మీ.లను దగ్గరి పదవస్థానమునకు లేదా 35 సెం.మీ. లను దగ్గరి పూర్ణాంక విలువకు పరిశీలింపవచ్చును.

పై సందర్భములో మన అనుకూలము కొరకు ఉజ్జాయింపు విలువలు తీసుకొనబడినవి. ఈ విధముగా దగ్గరి విలువను తీసుకొను పద్ధతిని "అంకెల సవరణ" అనబడెను. కాబట్టి ఉజ్జాయింపు విలువ అనగా కావలసిన సంఖ్యకు సవరించుట దీనిని "అంకెల సవరణ" అని అందురు.

కొన్ని సమయములో ఉజ్జాయింపు విలువలను మాత్రము ఇచ్చుటకు సాధ్యమగును. ఎందువలననగా

(a) ఒక నగరము యొక్క జనాభాను చెప్పాలనునప్పుడు ఉజ్జాయింపు విలువలుగా అనగా 30 లక్షలు లేక 25 లక్షలు అని మనము తెలియచేసెదము.

(b) రెండు నగరముల మధ్య దూరము చెప్పాలనునప్పుడు 352.15 కి.మీ లను సవరించిన సంఖ్య 350 కి. మీటర్లుగా తెలియచేసెదము.

సంఖ్యలను సవరించునప్పుడు మనము క్రింది ధర్మములను పాటించవలెను.

(i) సవరించవలసిన స్థానమునకు తరువాత గల సంఖ్య 5 కంటే తక్కువగా ఉన్నయెడల సవరణ స్థానము వరకు గల సంఖ్యను అలాగే వ్రాయవలెను. .

(ii) సవరించవలసిన స్థానమునకు తరువాత గల సంఖ్య 5 లేక 5 కంటే ఎక్కువగా ఉన్న యెడల, సవరణ స్థానమున గల సంఖ్యకు 1ని కూడి ఆ సంఖ్యను వ్రాయవలెను.

ఉజ్జాయింపు విలువ యొక్క సంకేతమును సాధారణముగా $\simeq$ అని గుర్తించెదము.

కృత్యము

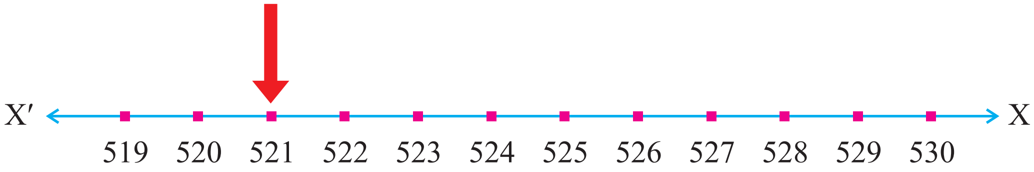
A_4 కాగితము తీసుకొనుము. పొడవు మరియు వెడల్పును కొలువుము. సెం.మీ. లలో ఉజ్జాయింపుగా ఎట్లు వ్రాయవచ్చును.

ఇవ్వబడిన సంఖ్య యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువను కనుగొనుటను కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా చర్చించెదము. సంఖ్య 521 తీసికొనెదము.

పదులకు దగ్గరగా గల ఉజ్జాయింపు విలువ

వివరణ:

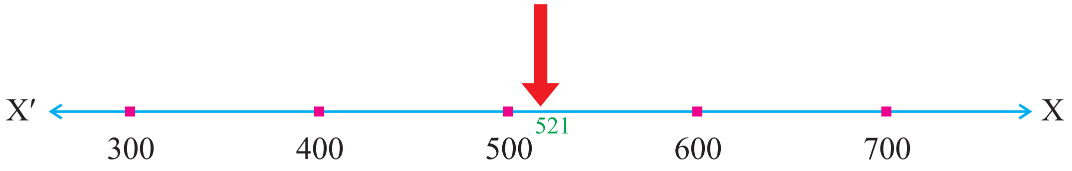
521కు ముందు, వెనుకగల పదుల యొక్క గుణకము తీసికొనుము (i.e 520 మరియు 530)
530 కంటె 520, 521 కు దగ్గరగా ఉన్నది.



$\therefore$ 521 యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువ 520.

వందలకు దగ్గరగా గల ఉజ్జాయింపు విలువ

(i) 521కు ముందు, వెనుక గల వందల యొక్క గుణకము తీసికొనుము. (i.e. 500 మరియు 600)

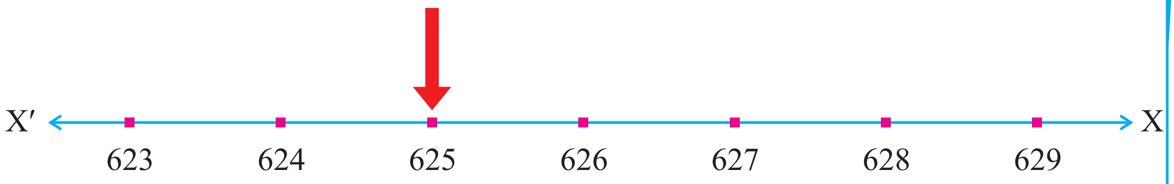


600 కంటె 500, 521 కు దగ్గరగా ఉన్నది. ఈ సందర్భములో 521 యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువ 500 అగును.

మరియొక ఉదాహరణమును పరిశీలించెదము.

(ii) సంఖ్య 625 ను తీసికొనెదము.

సంఖ్యా రేఖలో ఏక ప్రమాణములుగా తీసికొనెదము



ఇక్కడ, 624 లేక 626 కు దగ్గరగా 625 ఉండునట్లు చెప్పలేము ఎందుకనగా 624, 626 మధ్య భాగములో 625 ఉండును. కాని మన అనుకూలము కొరకు 626 దగ్గర విలువ చెప్పవచ్చును. కావున ఉజ్జాయింపు విలువ 626 గా తీసికొనబడును.

100 గుణకములుగా తీసికొని, 625 యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువ 600 అగును కాని 700 కాదు..

ఇంకా కొన్ని ఉదాహరణములు

47,618 ను తీసికొనిన

(a) పదుల స్థానమునకు సవరింపబడిన ఉజ్జాయింపు విలువ = 47,620

(b) వందల స్థానమునకు సవరించబడిన ఉజ్జాయింపు విలువ = 47,600

(c) వేల స్థానమునకు సవరించబడిన ఉజ్జాయింపు విలువ = 48,000

(d) పదివేల స్థానమునకు సవరించబడిన ఉజ్జాయింపు విలువ = 50,000

దశాంశ ఉజ్జాయింపు విలువ

వివరణ:

దశాంశ సంఖ్య 36.729 తీసికొనెదము.

(a) రెండు దశాంశ స్థానములకు సవరించిన, 36.73 అగును. (చివరి అంకె $9>5$ కావున 2కు 1 కూడిన 3 అగును)

$\therefore 36.729 \simeq 36.73$ (రెండు స్థానములకు సవరించిన)

(b) 36.729లో రెండవ దశాంశ స్థానము గమనించిన, 2, 5 కంటె చిన్న సంఖ్య కావున 7 ను వదలివేయబడెను.

$\therefore 36.729 \simeq 36.7$ (ఒక స్థానమునకు సవరించిన)

వివరణ:

దశాంశ సంఖ్య 36.745 తీసికొనెదము.

(a) రెండు దశాంశ స్థానములకు సవరింపబడిన ఉజ్జాయింపు విలువ 36.75 చివరి అంకె 5 కావున 4కు 1 కూడిన 5 వచ్చును.

(b) ఒక దశాంశ స్థానమునకు సవరించబడిన ఉజ్జాయింపు విలువ 36.7 రెండవ దశాంశ స్థానము4. ఇది 5 కంటె చిన్న సంఖ్య కావున 7ను అట్లే వ్రాసెదము.

$\therefore 36.745 \simeq 36.7$

వివరణ:

దశాంశ సంఖ్య 2.14829 తీసికొనెదము

(i) ఒక దశాంశ స్థానమునకు సవరించబడిన ఉజ్జాయింపు విలువ 2.1 అగును

(ii) రెండు దశాంశ స్థానములకు సవరించబడిన ఉజ్జాయింపు విలువ 2.15 అగును.

(iii) మూడు దశాంశ స్థానములకు సవరించబడిన ఉజ్జాయింపు విలువ 2.148 అగును.

(iv) నాలుగు దశాంశ స్థానములకు సవరించబడిన ఉజ్జాయింపు విలువ 2.1483 అగును.

రవి వద్ద క్రింది అంకెలు గల కార్డులున్నవి.

2	3	1	5	9

20,000లకు దగ్గరగా గల ఉజ్జాయింపు విలువ రాబట్టుటకు అతనికి సహాయపడుము.

ఉజ్జాయింపు పద్ధతిని ఉపయోగించి అతి పెద్ద సంఖ్యను కనుగొనుము.

a. $201120112011 + \frac{7}{18}$

b. $201120112011 - \frac{7}{18}$

c. $201120112011 \times \frac{7}{18}$

d. $201120112011 \div \frac{7}{18}$

ఉదాహరణ 1.44

క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను దగ్గరగా నుండు పూర్ణాంకములకు సవరించుము. :

(a) 288.29 (b) 3998.37 (c) 4856.795 (d) 4999.96

సాధన

(a) $288.29 \simeq 288$ (b) $3998.37 \simeq 3998$

(మొదటి దశాంశ స్థానములో గల సంఖ్య 5 కంటె తక్కువ. కావున పూర్ణ భాగములో మార్పు లేదు)

(c) $4856.795 \simeq 4857$ (d) $4999.96 \simeq 5000$

[మొదటి దశాంశ స్థానములో గల సంఖ్య 5 కంటె ఎక్కువ. కావున పూర్ణ భాగములో విలువలందు 1 ఎక్కువగును]

అభ్యాసము 1.8

1. క్రింద ఇవ్వబడిన వానిని రెండు దశాంశ స్థానములకు సవరించుము:

   (i) 12.568 (ii) 25.416 కి.మీ (iii) 39.927 మీ.

   (iv) 56.596 మీ. (v) 41.056 మీ. (vi) 729.943 కి.మీ

2. క్రింద ఇవ్వబడిన వానిని మూడు దశాంశ స్థానములకు సవరించుము:

   (i) 0.0518 మీ. (ii) 3.5327 కి.మీ (iii) 58.2936 లీ

   (iv) 0.1327 గ్రా (v) 365.3006 (vi) 100.1234

3. క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలకు ఇచ్చిన విధముగా ఉజ్జాయింపు విలువలను వ్రాయుము:

   (i) 247ను పదవ స్థానమునకు దగ్గరగా. (ii) 152ను పదవ స్థానమునకు దగ్గరగా

   (iii) 6848ను వందల స్థానమునకు దగ్గరగా. (iv) 14276ను పదివేల స్థానమునకు దగ్గరగా.

   (v) 3576274ను లక్షల స్థానమునకు దగ్గరగా (vi) 1043567809ను కోట్ల స్థానమునకు దగ్గరగా

4. క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను దగ్గరగా నుండు పూర్ణాంకములకు సవరించుము:

   (i) 22.266 (ii) 777.43 (iii) 402.06

   (iv) 305.85 (v) 299.77 (vi) 9999.9567

1.9. సంఖ్యలతో ఆడుకొనుట

వినోదము, ఇంద్రజాలము మరియు అద్భుతములుగల పాఠ్యభాగము గణిత శాస్త్రము. ఈ భాగమునందు ఉత్సాహము కలిగించు అద్భుతమైన విషయములను నేర్చుకోబోతున్నాము.

(a) సాధారణ రూపంలో సంఖ్యలు

సంఖ్య 42ను ఇట్లు వ్రాయవచ్చును.

$$42 = 40 + 2 = 10 \times 4 + 2$$

ఇదే విధముగా సంఖ్య 27ను కూడా వ్రాయవచ్చును.

$$27 = 20 + 7 = 10 \times 2 + 7$$

సాధారణముగా ***ab*** అను అంకెలతో రెండు అంకెల సంఖ్య **'*a*', '*b*'** ను ఇట్లు వ్రాయవచ్చును.

$$ab = 10 \times a + b = 10a + b$$
$$ba = 10 \times b + a = 10b + a$$

ఇచ్చట ab అనునది రెండు అంకెల సంఖ్య $a \times b$ కాదు.

351 అను సంఖ్యను తీసికొనుము.

ఇది మూడు అంకెల సంఖ్య అగును. ఈ సంఖ్యను ఇట్లు కూడ వ్రాయవచ్చును.

$$351 = 300 + 50 + 1 = 100 \times 3 + 10 \times 5 + 1 \times 1$$

సాదారణముగా *abc* అను అంకెలతో మూడు అంకెల సంఖ్య *a, b, c* ను ఇట్లు వ్రాయవచ్చును.

$$abc = 100 \times a + 10 \times b + 1 \times c$$
$$= 100a + 10b + 1c$$

ఇదే విధముగా మూడు అంకెల సంఖ్య *cab* మరియు *bca* ను వ్రాయవచ్చును.

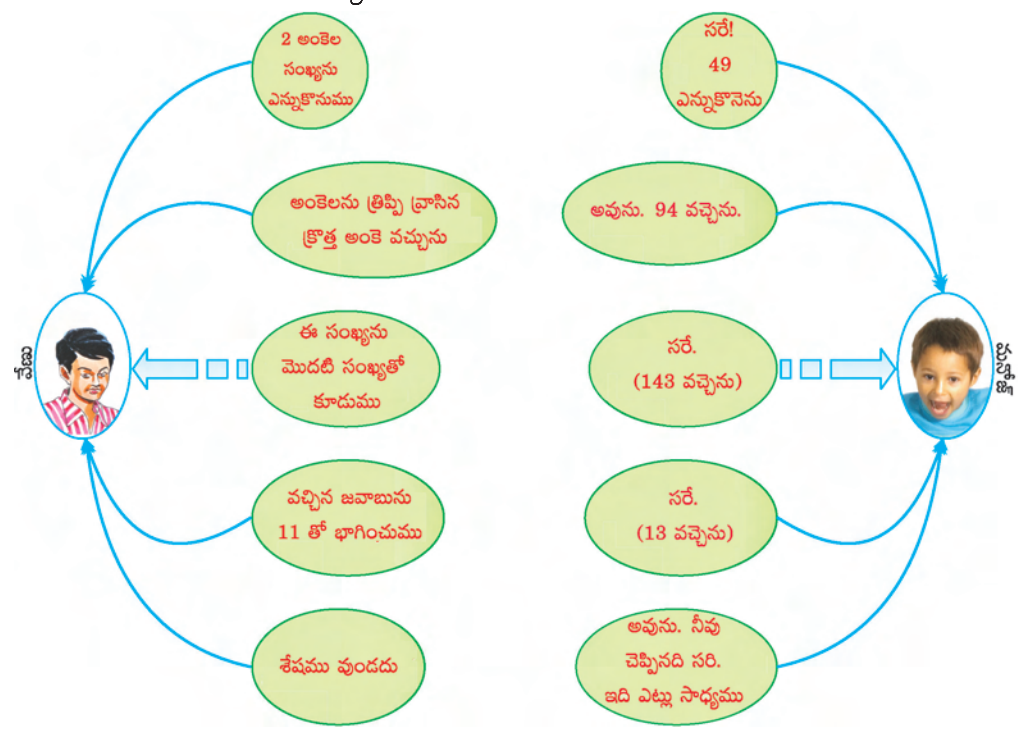
$$cab = 100c + 10a + b$$
$$bca = 100b + 10c + a$$

(b) సంఖ్యలతో ఆటలు

(i) రెండు అంకెల సంఖ్యలను త్రిప్పి వ్రాయుట

వేణు, మనోజ్‌ను రెండంకెల సంఖ్యను గుర్తు పెట్టు కొనమనెను. పిదప తాను చెప్పినట్లుగా చేయమనెను. వారి సంభాషణలు ఈ క్రింది పటములో వివరించబడెను. పటమును జాగ్రత్తగా చూసి, చదువుము.

వేణు మరియు మనోజ్ మధ్య సంభాషణలు:



వేణు యొక్క యుక్తిని గూర్చి వివరించెదము. మనోజ్ ab అను సంఖ్యను ఎన్నుకొనెను. ఈ సంఖ్య $10a + b$. అను రెండు అంకెల సంఖ్య యొక్క సూక్ష్మరూపం ఈ అంకెను త్రిప్పి వ్రాసిన క్రొత్త సంఖ్య $ba = 10b + a$. వచ్చును. ఈ రెండు సంఖ్యలను కూడిన :

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$$
$$= 11(a + b)$$

వేణు చెప్పినట్లుగా మొత్తము ఎల్లప్పుడు 11 యొక్క గుణకముగా ఉండును. వచ్చిన జవాబును 11తో భాగించగా $(a + b)$ ను పొందవచ్చును.

(i.e.) సంఖ్య యొక్క రెండు అంకెల మొత్తము వచ్చును.

(c) ఇవ్వబడిన పద్ధతిని గుర్తించుము. తరువాత వచ్చు మూడు పదములు కనుగొనుము.

ఒక క్రమములో పద్ధతులను నేర్చుకొనుట.

(i) 3, 9, 15, 21, (ప్రతి పదము ముందున్న పదము కంటె 6 ఎక్కువ)

ఈ పద్ధతిని పొడిగించిన తరువాత వచ్చు మూడు పదములు___ , ___ , ___ అగును.

(ii) 100, 96, 92, 88, ___ , ___ , ___ . (ప్రతి పదము ముందున్న పదము కంటె 4 తక్కువ)

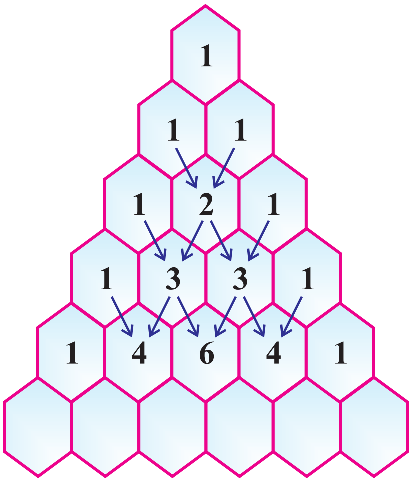
(iii) 7, 14, 21, 28, ___ , ___ , ___ . (7యొక్క గుణకములు)

(iv) 1000, 500, 250, ___ , ___,___. (ప్రతి పదము ముందున్న పదములో సగము)

(v) 1, 4, 9, 16, ___ , ___ , ___ . (సహజ సంఖ్యల యొక్క వర్గములు)

(d) పాస్కల్ త్రిభుజ సంఖ్యా పద్ధతి

క్రింది ఇవ్వబడిన త్రిభుజ ఆకారములో గల సంఖ్యా పద్ధతిని పాస్కల్ త్రిభుజము అందురు.



కృత్యము

పాస్కల్ త్రిభుజ సంఖ్యా పద్ధతిని గుర్తించి 6వ అడ్డువరుసను పూరించుము.

3 × 3 మేజిక్ చతురస్రము (Magic Square)

ప్రక్కన ఉన్న పట్టికను గమనించుము దీనిని 3x3 మేజిక్ చతురస్రము అందురు. మేజిక్ చతురస్రములో ప్రతి అడ్డు వరుసల, నిలువ వరుసల మరియు కర్ణములలోగల సంఖ్యల మొత్తము సమానము.

6	11	10
13	9	5
8	7	12

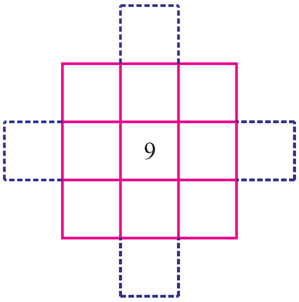
ఈ మేజిక్ చతురస్రములో, మేజిక్ మొత్తము 27 అగును. మధ్య పెట్టెలో గల సంఖ్యను గమనించుము. మేజిక్ మొత్తము మధ్య సంఖ్యకు మూడు రెట్లు అగును. మధ్య పెట్టెలో 9ను నింపుము. ఇంకను 8 పెట్టెలను నింపవలసిఉన్నది. 9కి క్రింది భాగమున నాలుగు పెట్టెలు మరియు 9కి పై భాగమున నాలుగు పెట్టెలు ఉన్నవి. అవి

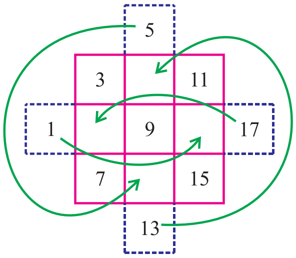
(a) 5,6,7,8 మరియు 10,11,12,13 వీటి మధ్యగల తేడ 1 అగును.

(b) 1,3,5,7 మరియు 11,13,15,17 వీటి మధ్యగల తేడ 2 అగును లేక సమాన భేదములుగల ఏ వరుస సంఖ్యలైన −11,−6,−14 మరియు 14,19,24,29 వంటివి ఉపయోగించవచ్చును. వీటి మధ్యగల తేడా 5 అగును.

ఏ సంఖ్యను ఉపయోగించవలెనో ముందుగా నిర్ణయించవలెను. ఉదాహరణమునకు 1,3,5,7 మరియు 11,13,15,17. క్రింద ఇవ్వబడిన పటమువలె చతురస్రమునకు వెలుపల నాలుగు వైపుల పొడిగించిన పెట్టెలను గీయవలయును. కర్ణము పద్ధతిలో సంఖ్యలను వరుసగా నింపవలయును.

పొడిగించిన పెట్టెలో గల సంఖ్యలను వాటికి ఎదురుగా గల ఖాళీ పెట్టెలోనికి మార్చవలెను.





3	13	11
17	9	1
7	5	15

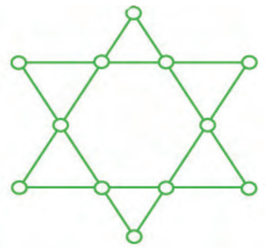
కృత్యము

మేజిక్ చతురస్రము

8		6
	5	
		2

మురుగన్ వద్ద 1 నుండి 9 బంగారు నాణెముల విలువ గల 9 ముత్యములు కలవు. వాటిని తన ముగ్గురు కుమార్తెలకు సమానముగా పంచుటకు నీవు సహాయ పడగలవా?

మేజిక్ నక్షత్రము



ప్రక్క పటములోని వృత్తములలో 1 నుండి 12 వరకు ఉపయోగించి ప్రతి రేఖపైన గల సంఖ్యల మొత్తము 26 వచ్చునట్లుగా అమర్చుము. ప్రతి సంఖ్యను రెండు సార్లు కంటే ఎక్కువగా ఉపయోగించరాదు.

సు డొ కు

1 నుండి 9 వరకు గల అన్ని అంకెలను ఉపయోగించి అడ్డు, నిలువ వరుసలను వివిధ రంగులు గల చతురస్రములను నింపుము. ఉపయోగించిన అంకెలను మళ్ళీ ఉపయోగించరాదు.

3	1	2		9	5		7	6
5		9	1		7		8	2
4		7	2	6	3	5		
9			7			2	4	
	2	8		1			9	3
	3		9	8	2		5	7
	4	5	6				3	1
1	7		3	5	8	9		4
8		3	4	2		7		5

ఒక కారు గుర్తింపు సంఖ్య మూడంకెల వర్గసంఖ్య. ఆ సంఖ్యను త్రిప్పి వ్రాసిన అది మరొక కారు సంఖ్య మరియు వర్గ సంఖ్య అగును. ఆ రెండు కార్ల గుర్తింపు సంఖ్యలను కనుగొనుము?

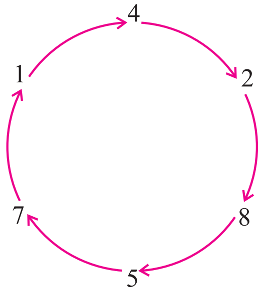
వలయాకారంలో భ్రమించు సంఖ్యలు

1 4 2 8 5 7

సంఖ్యలను వృత్తాకారములో గుర్తించుము.

142857 ను 1 నుండి 6 వరకు సంఖ్యలతో గుణించుము.

$$142857 \times 1 = 142857 \qquad 142857 \times 2 = 285714 \qquad 142857 \times 3 = 428571$$



$$142857 \times 4 = 571428 \qquad 142857 \times 5 = 714285 \qquad 142857 \times 6 = 857142$$

సంఖ్యలు వేర్వేరు సంయోగములో అదే వరుస అంకెలలో వృత్తాకారములో వేర్వేరు బిందువులనుండి పరిభ్రమణము చేయుటను గమనించవచ్చును.

అభ్యాసము 1.9

1. క్రింద ఇవ్వబడిన పద్ధతిలో పూరింపుము:

   (i) 40, 35, 30, ___ , ___ , ___ .

   (ii) 1, 2, 4, ___ , ___ , ___ .

   (iii) 84, 77, 70, ___ , ___ , ___ .

   (iv) 4.4, 5.5, 6.6, ___ , ___ , ___ .

   (v) 1, 3, 6, 10, ___ , ___ , ___ .

   (vi) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ___ , ___ , ___ .

   (ఈ అనుక్రమమును ఫిబనాసి (FIBONACCI) అనుక్రమము అందురు.)

   (vii) 1, 8, 27, 64, ___ , ___ , ___ .

కృత్యము

* ఒక సంఖ్యను అనుకొనుము.
* దానికి 9 కూడుము
* జవాబును రెట్టింపు చేయుము.
* దానికి 3 కూడుము.
* ఫలితమును 3చే గుణించుము.
* దాని నుండి 3 తీసివేయుము.
* మిగిలిన దానిని 6చే భాగించుము.
* జవాబు నుండి నీవు అనుకొనిన సంఖ్యను తీసివేయుము.
* మిగిలిన సంఖ్య ఎంత?

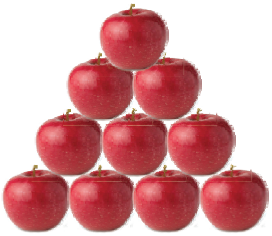
జవాబు: పది

2. నీటి తొట్టెలో మెట్లు కలవు. ఒక కోతి పై భాగమున గల మొదటి మెట్టుపై కూర్చుండెను. నీటి మట్టము తొమ్మిదవ మెట్టు వరకు కలదు.

   (a) కోతి 3 మెట్లు క్రింది వైపునకు పిదప రెండు మెట్లు పై వైపునకు దూకును. ఇట్లు ఎన్ని సార్లు దూకిన నీటి మట్టమునకు చేరును ?

   (b) నీటిని త్రాగిన తరువాత వెనుకకు పోవలెననుకొనెను. దానికొరకు 4 మెట్లు పైవైపునకు పిదప 2 మెట్లు క్రింది వైపునకు దూకును. ఇట్లు ఎన్ని సార్లు దూకిన పై భాగములో గల మొదటి మెట్టునకు పోయి చేరును ?

3. ఒక వ్యాపారి ఆపిల్ పండ్లను క్రింద ఇవ్వబడిన పద్ధతిలో అమర్చెను.



   (a) పది వరుసలలో ఆపిల్ పండ్లను ఉంచెను. వాటిని లెక్కించ కుండా మొత్తము ఎన్ని ఆపిల్ పండ్లు ఉన్నవో కనుగొనుము.

   (b) 20 అడ్డ వరుసలు ఉండిన, ఎన్ని ఆపిల్ పండ్లు ఉన్నవో కనుగొనుము. మొత్తము ఎన్ని ఆపిల్ పండ్లు ఉన్నవో తెలిసికొనుటకు గల పద్ధతిని గుర్తించితివా? క్రింది వానిని పూరింపుము.

అడ్డ వరుస	1	2	3	4	5	6	7	8	9
మొత్తము ఆపిల్ పండ్లు	1	3	6	10	15				

పాఠ్యభాగ సారాంశము

- అకరణీయ సంఖ్యలలో ప్రక్రియలు కూడిక తీసివేత, గుణకారములు సంవృత ధర్మమును కలిగియుండును.
- సున్నకాని అకరణీయ సంఖ్యలలో భాగహారము సంవృత ధర్మమును కలిగియుండును.
- అకరణీయ సంఖ్యలలో ప్రక్రియలు కూడిక మరియు గుణకారములు వ్యత్యయము మరియు సహచర్య ధర్మములను కలిగియుండును.
- అకరణీయ సంఖ్యలో కూడిక తత్సమము '0' అగును.
- అకరణీయ సంఖ్యలో గుణకార తత్సమము '1' అగును.
- అకరణీయ సంఖ్యల గుణకారము, కూడిక మరియు తీసివేతలపై విభాగ ధర్మము కలిగియుండును.
- $\frac{a}{b}$ యొక్క కూడిక విలోమము $\frac{-a}{b}$ అదే విధంగా $\frac{a}{b}$ యొక్క కూడిన విలోమము $\frac{-a}{b}$ అగును.
- $\frac{a}{b}$ యొక్క గుణకార విలోమము $\frac{b}{a}$ అగును.
- రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అసంఖ్యాకమైన అకరణీయ సంఖ్యలు కలవు.
- ఘాతము యొక్క ఏడు నియమములు:

  a , b వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు m, n పూర్ణాంకములు

  (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

  (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, ఇక్కడ $a \neq 0$

  (iii) $a^0 = 1$, ఇక్కడ $a \neq 0$

  (iv) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, ఇక్కడ $a \neq 0$

  (v) $(a^m)^n = a^{mn}$

  (vi) $a^m \times b^m = (ab)^m$

  (vii) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ ఇక్కడ $b \neq 0$

- తక్కిన సంఖ్యల నుండి సమానదూరములో గల సంఖ్య యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువ ఎల్లప్పుడు ఇవ్వబడిన సంఖ్యల కంటే పెద్దదిగా లేక దగ్గరగా వుండును.

2

కొలతలు

2.1 పరిచయము

2.2 అర్థవృత్తములు మరియు పావు వృత్తములు

2.3 సంయుక్త చిత్రములు

2.1 పరిచయము

కొలుచుట అనునది ఒక ప్రావీణ్యము. ఆమె/అతడు నిత్య జీవితములో ఏదైన ఒక దానిని కొలుచుదురు. మనలో ప్రతి ఒక్కరు మన దైనందిన జీవితములో దేనినో ఒక దానిని కొలుస్తుంటాము. ఉదాహరణకు మనము కొలిచిన

పటము *2.1*

(i) బావి నుండి నీరు తోడుటకు కావలసిన దారము పొడవు.

(ii) తలుపులు, కిటికీలకు పరదాలు కట్టుటకు కావలసిన గుడ్డ పొడవు.

(iii) సిమెంటు పూత పూయుటకు గది నేల యొక్క పరిమాణము (size)

(iv) పాఠశాల యూనిఫామ్ (school uniform) కొరకు కావలసిన గుడ్డ కొలతలు.

"కొలతలు" అనునవి పైన పేర్కొన్న సందర్భముల నుండి గ్రహించ వచ్చును.

పొడవులు, కోణములు, వైశాల్యములు, తలముల చుట్టుకొలతల ఘన రూప వస్తువుల సంపూర్ణతల వైశాల్యము, ఘన పరిమాణములను గూర్చి తెలుపు గణిత శాస్త్రము యొక్క శాఖనే "కొలతలు మరియు గణనము" అందురు.

గుర్తు చేసుకొందాము

7వ తరగతిలో మనము నేర్చుకొన్న క్రింద ఇవ్వబడిన నిర్వచనములను గుర్తు చేసుకొందాము.

(i) వైశాల్యము

ఒక సమతలము నందు ఒక సంవృత పటము (closed figure) ఆక్రమించు భాగమును వైశాల్యము అందురు.

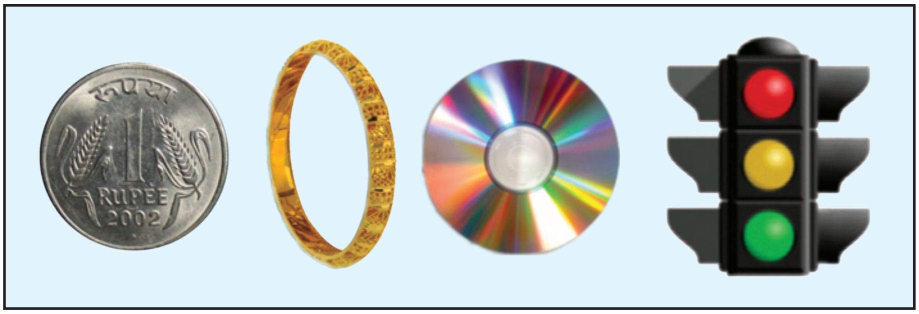
'గ్రీకు నందు '**peri**' అనగా చుట్టు '**meter**'అనగా కొలుచుట.

(ii) చుట్టుకొలత

ఒక సంవృత పటము యొక్క హద్దుల కొలతల మొత్తమును చుట్టుకొలత అందురు.

పటమును చుట్టి కొలుచుట (లేక) వక్రము వెంబడి కొలుచుటను చుట్టుకొలత అందురు. .

క్రింది వస్తువుల ఆకారమును గుర్తించగలవా?

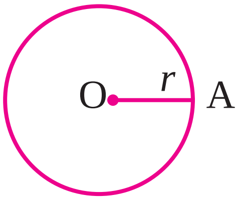


పటము *2.2*

పై వస్తువుల ఆకారము ఒక "వృత్తము"

(iii) వృత్తము

'O' అనునది వృత్తము యొక్క మధ్య బిందువు 'r' అనునది వ్యాసార్థము $(\overline{OA})$



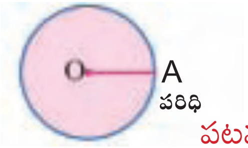
పటము *2.3*

వృత్తము యొక్క వైశాల్యము $A= \pi r^2$ చ.ప్రమాణము.

వృత్త పరిధి లేక చుట్టుకొలత

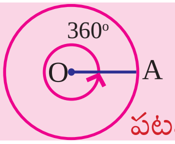
$P= 2\pi r$ ప్రమాణములు,

$\pi = \frac{22}{7}$ లేక 3.147 అగును.



పటము *2.4*

గమనిక: ఒక వృత్త కేంద్రము వద్ద కోణము 360^0



పటము*2.5*

కృత్యము

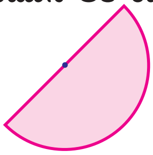
ఒక అట్టపెట్టెను తీసికొని వివిధ వ్యాసార్థములతో వృత్తములను కత్తిరించి వాటి యొక్క చుట్టు కొలతలను మరియు వైశాల్యములను కనుగొనుము

వ.సం.	వ్యాసార్థము	వైశాల్యము	పరిధి
1.			
2.			
3.			

2.2 అర్ధ వృత్తము మరియు పావు వృత్తము

2.2.1 అర్ధ వృత్తము

అమావాస్య తరువాత 7వ రోజు నీవు రాత్రి సమయమున ఆకాశములో చంద్రుని గమనించితివా? చంద్రుని ఆకారము ఎట్లుండును?



ఇది పటము 2.6 ఆకారములో వుండును.
దీనిని నీవు ఏమని పిలుస్తావు?

పటము *2.6*

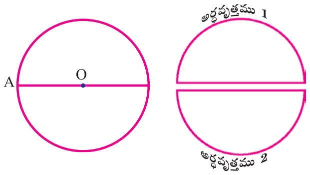
దీనినే అర్ధ వృత్త మందురు. (వృత్తములో అర్ధ భాగము)

వృత్తమును వ్యాసముచే రెండు సమభాగములుగా చేసిన వచ్చు భాగమును అర్ధ వృత్తము అందురు.

కృత్యము

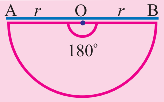
ఒక వృత్తము నుండి ఎట్లు అర్ధవృత్తమును నీవు పొందగలవు?

ఒక వృత్త ఆకారములో వున్న అట్టముక్కను వ్యాసము $\overline{AB}$ ఆధారముగా కత్తిరించుము.



(a) పటము 2.7 *(b)*

గమనిక: అర్ధ వృత్తము యొక్క కేంద్ర కోణము = 180°.



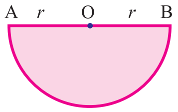
పటము *2.8*

(a) అర్ధ వృత్త చుట్టుకొలత

చుట్టుకొలత, P $= \frac{1}{2} \times$ (వృత్తపరిధి) $+ 2 \times r$ ప్రమాణములు

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r + 2r$

P $= \pi r + 2r = (\pi + 2)\, r$ ప్రమాణములు



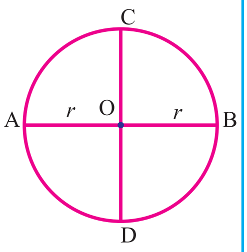
పటము *2.9*

(b) అర్ధ వృత్త వైశాల్యము

వైశాల్యము, A $= \frac{1}{2} \times$ (వృత్త వైశాల్యము)

$= \frac{1}{2} \times \pi r^2$

A $= \frac{\pi r^2}{2}$ చ. ప్రమాణములు.

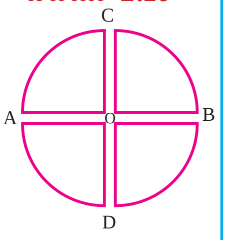


పటము *2.10*

2.2.2 పావు వృత్తము

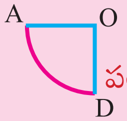
వృత్తము నందు రెండు వ్యాసములను ఒక దానికొకటి లంబముగా వుండునట్లు కత్తిరించుము. ఇప్పుడు మనకు నాలుగు సమభాగములు వచ్చును. ప్రతి భాగమును పావు వృత్తము అందురు.

పటము 2.11 లో చూపినట్లు వృత్తమును కత్తిరించిన OCA, OAD, ODB, OBC అనే నాలుగు పావు వృత్తములు వచ్చును.



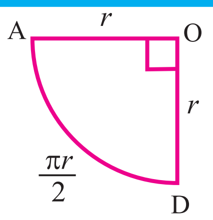
పటము *2.11*

గమనిక: పావు వృత్తమునందు కేంద్ర కోణము = 90°.



పటము*2.12*

(a) పావు వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత



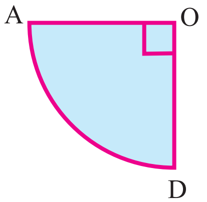
పటము *2.13*

చుట్టుకొలత, P $= \frac{1}{4} \times$(వృత్తపరిధి) $+ 2r$ ప్రమాణములు

$= \frac{1}{4} \times 2\pi r + 2r$

P $= \frac{\pi r}{2} + 2r = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) r$ ప్రమాణములు

(b) పావు వృత్తము యొక్క వైశాల్యము



పటము *2.14*

వైశాల్యము, A $= \frac{1}{4} \times$(వృత్త వైశాల్యము)

A $= \frac{1}{4} \times \pi r^2$ చ. ప్రమాణములు

ఉదాహరణ 2.1

ఒక అర్థ వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థము 14 సెం.మీ. అయిన చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యమును కనుగొనుము.

పటము *2.15*

సాధన

అర్థ వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థము r = 14 సెం.మీ.

అర్థ వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత, P $= (\pi + 2)\, r$ ప్రమాణములు

$\therefore$ P $= \left(\frac{22}{7} + 2\right) \times 14$

$= \left(\frac{22+14}{7}\right) \times 14 = \frac{36}{7} \times 14 = 72$

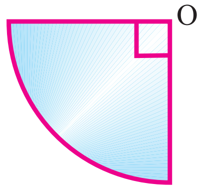
అర్థ వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత = 72 సెం.మీ.

అర్థ వృత్తము యొక్క వైశాల్యము, A $= \frac{\pi r^2}{2}$ చ. ప్రమాణములు

$\therefore$ A $= \frac{22}{7} \times \frac{14 \times 14}{2} = 308$ చ.సెం.మీ

ఉదాహరణ 2.2

పావు వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థము 21 సెం.మీ. అయిన చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యమును కనుగొనుము.



పటము *2.16*

సాధన

పావు వృత్తము వ్యాసార్థము, r = 21 సెం.మీ.

పావు వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత, P $= \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) r$ ప్రమాణములు

$= \left(\frac{22}{7 \times 2} + 2\right) \times 21 = \left(\frac{22}{14} + 2\right) \times 21$

P $= \left(\frac{22+28}{14}\right) \times 21 = \frac{50}{14} \times 21$

= 75 సెం.మీ.

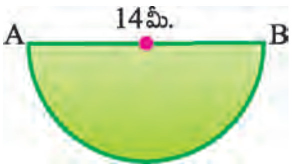
పావువృత్త వైశాల్యము, A $= \frac{\pi r^2}{4}$ చ.ప్రమాణములు

A $= \frac{22}{7} \times \frac{21 \times 21}{4}$

= 346.5 చ.సెం.మీ.

ఉదాహరణ 2.3

ఒక అర్ధవృత్తాకార పచ్చిక స్థలము యొక్క వ్యాసము 14 మీ. ఆ స్థలమునకు చుట్టు కంచె వేయుటకు ఒక మీ.కు రూ. 10 వంతున అగు ఖర్చును కనుగొనుము.



పటము *2.17*

సాధన

వ్యాసము : $d = 14$ మీ

$\therefore$ స్థల వ్యాసార్ధము, $r = \frac{14}{2} = 7$ మీ.

అర్ధ వృత్తాకార స్థలమునకు చుట్టు కంచె వేయుటకు మనము వృత్త పరిధిని కనుగొనవలయును.

అర్ధ వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత, $P = (\pi + 2) \times r$ ప్రమాణములు

$$= \left(\frac{22}{7} + 2\right) \times 7$$

$$= \left(\frac{22+14}{7}\right) \times 7$$

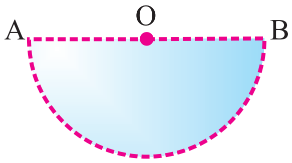
$P = 36$ మీ.

ఒక మీ. కు కంచె వేయుటకు అగు ఖర్చు = రూ. 10

$\therefore$ 36 మీ వేయుటకు అగు ఖర్చు = 36×10 = రూ. 360

ఉదాహరణ 2.4

ఒక అర్ధ వృత్తాకారపు తోటకు 36మీ. తీగతో కంచె వేయబడినది. తోట యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.



పటము *2.18*

సాధన

కంచె యొక్క పొడవు = అర్ధ వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత

$\therefore (\pi + 2)r = 36$ మీ.

$\left(\frac{22}{7} + 2\right) \times r = 36$ మీ.

$\left(\frac{22+14}{7}\right) \times r = 36$ మీ.

$\frac{36}{7} \times r = 36 \implies r = 7$ మీ.

తోట యొక్క వైశాల్యము = అర్ధ వృత్తము యొక్క వైశాల్యము

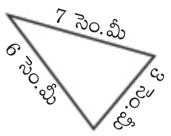
$A = \frac{\pi r^2}{2}$ చ. ప్రమాణములు

$= \frac{22}{7} \times \frac{7 \times 7}{2} = 77$ మీ^{2}

$\therefore$ తోట యొక్క వైశాల్యము. = 77 మీ^{2}.

కృత్యము

ఒక ఇనుప కమ్మీ పటములో చూపిన విధముగా త్రిభుజాకారములో వంచబడినది. అదే కమ్మీని చతురస్రాకారముగా మార్చిన చతురస్ర భుజము పొడవు కనుగొనుము.



అభ్యాసము 2.1

1. సరియైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము

(i) అర్ధవృత్తము యొక్క వైశాల్యము ఒక వృత్త వైశాల్యమునకు .... రెట్లుండును.
(A) రెండు (B) నాలుగు (C) ఒక-అర్ధభాగము (D) ఒక పావుభాగము

(ii) అర్ధ వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత ....

(A) $\left(\frac{\pi+2}{2}\right) r$ ప్రమాణములు (B) $(\pi+2)\ r$ ప్రమాణములు

(C) $2r$ ప్రమాణములు (D) $(\pi+4)$r ప్రమాణములు

(iii) ఒక వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థము 7 సెం.మీ. అయిన అర్ధ వృత్త వైశాల్యము ....
(A) 77 మీ^{2} (B) 44 మీ^{2} (C) 88 మీ^{2} (D) 154 మీ^{2}

(iv) వృత్తము యొక్క వైశాల్యము 144 చ.సెం.మీ. అయిన పావు వృత్తము యొక్క వైశాల్యము ....
(A) 144 చ.సెం.మీ. (B) 12 చ.సెం.మీ. (C) 72 చ.సెం.మీ. (D) 36 చ.సెం.మీ.

(v) పావు వృత్తము యొక్క వ్యాసము 84 సెం.మీ. అయిన చుట్టు కొలత ....
(A) 150 సెం.మీ. (B) 120 సెం.మీ. (C) 21 సెం.మీ. (D) 42 సెం.మీ.

(vi) ఒక వృత్తములో.................... పావు వృత్తములు కలవు
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(vii) పావు వృత్తము .... వ వంతు ఉండును.
(A) అర్ధభాగము (B) నాలుగింట ఒకవంతు (C) మూడింట ఒకవంతు(D) మూడులో రెండవ వంతు

(viii) అర్ధ వృత్తము నందు కేంద్ర కోణము __________
(A) 90° (B) 270° (C) 180° (D) 360°

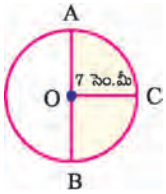
(ix) పావు వృత్తము నందు కేంద్ర కోణము ________
(A) 90° (B) 180° (C) 270° (D) 0°

(x) అర్ధ వృత్తము యొక్క వైశాల్యము 84 చ.సెం.మీ. అయిన వృత్తము యొక్క వైశాల్యము ....
(A) 144 చ.సెం.మీ. (B) 42 చ.సెం.మీ. (C) 168 చ.సెం.మీ. (D) 288 చ.సెం.మీ.

2. క్రింది వ్యాసార్థములతో అర్ధవృత్త వైశాల్యము, చుట్టుకొలతలను కనుగొనుము.
(i) 35 సెం.మీ. (ii) 10.5 సెం.మీ. (iii) 6.3 మీ. (iv) 4.9 మీ.

3. క్రింది వ్యాసములతో అర్ధవృత్త వైశాల్యమును, చుట్టుకొలతలను కనుగొనుము.
(i) 2.8 సెం.మీ. (ii) 56 సెం.మీ. (iii) 84 సెం.మీ. (iv) 112 మీ.

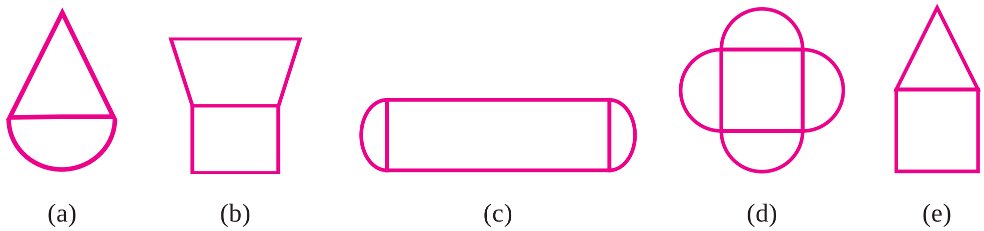
4. క్రింది వ్యాసార్థములతో పావు వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత, వైశాల్యమును కనుగొనుము.
(i) 98 సెం.మీ. (ii) 70 సెం.మీ. (iii) 42 మీ. (iv)28 మీ.



5. పటము నుండి అర్ధ వృత్తము ACB మరియు పావు వృత్తము BOC యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము. .

6. 21 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో ఒక అర్ధవృత్తాకార తోట కలదు. దాని చుట్టుకంచె వేయుటకు ఒక మీటరుకు రూ. 5 చొప్పున ఎంత ఖర్చు అగును?

2.3 సంయుక్త చిత్రములు



పటము *2.19*

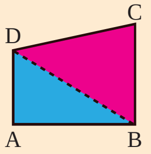
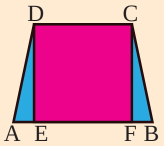
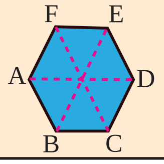
పై ఆకారముల నుండి నీవు ఏమి గమనించితివి?

పటము 2.19లో (a), అర్ధవృత్తముపైన త్రిభుజము అమరియున్నది. పటము 2.19 (b), లో చతురస్రముపైన సమలంబ సమాంతర చతుర్భుజము (trapezium) అమరియున్నది.

సమతలములో కలిగిన చిత్రములు ఆసన్నముగా వుంచిన వాటి ప్రక్క పొడవు యింకొక ప్రక్కవాటికి సమానముగా వుండును. దీనిని **Juxtaposition** అందురు.

రెండు లేక మూడు తలములను ఆసన్నముగా చేర్చిన కొత్త చిత్రములు ఏర్పడు వాటినే సంయుక్త చిత్రము అందురు. మనకు తెలిసిన త్రిభుజము, దీర్ఘ చతురస్రము అర్ధవృత్తములు మొదలగు వాటితో ఏర్పడు సంయుక్త చిత్రములు అంటించి(Juxtaposition) వుంచబడినవి.

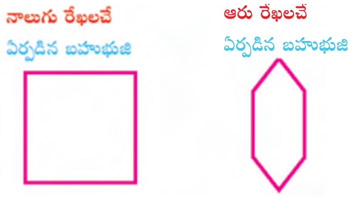
కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దామా?

వరుస సంఖ్య	సమతల ఆకారములు	అంటించు పటములు	
1.	రెండు విషమ బాహు త్రిభుజములు	చతుర్భుజము (Quadrilateral)	
2.	రెండు లంబకోణ త్రిభుజములు మరియు ఒక దీర్ఘ చతురస్రము	సమలంబ సమాంతర చతుర్భుజము (Trapezium)	
3.	ఆరు సమబాహు త్రిభుజములు	క్రమ షడ్భుజి (Hexagon)	

(a) బహుభుజి

'*n*' రేఖా ఖండములచే ఏర్పడిన ఒక సంవృత పటమును బహుభుజి అందురు.

సరళ రేఖా ఖండములచే ఏర్పడిన సమతల పటములను సరళరేఖీయ చిత్రము అందురు.



పటము. *2.20*

మూడు భుజములు గల సరళ రేఖీయ చిత్రమును త్రిభుజము అనియు, మరియు నాలుగు భుజములుగల సరళ రేఖీయ చిత్రమును చతుర్భుజము అని అందురు

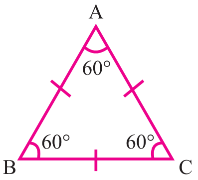
బహుభుజి అనగా మూడు లేక అంతకంటె ఎక్కువ భుజములు గల సరళరేఖీయ చిత్రము అని అర్థము

(b) క్రమ బహుభుజి (Regular polygon)

బహుభుజిలో అన్ని భుజములు మరియు కోణములు సమానమైన అట్టి బహుభుజిని క్రమ బహుభుజి అందురు,

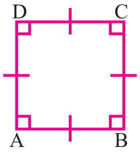
ఉదాహరణమునకు

(i) ఒక సమభుజ త్రిభుజము, మూడు భుజములు గల క్రమ బహుభుజి అగును.



పటము 2.21

(ii) నాలుగు భుజములు గల క్రమ బహుభుజి ఒక చతురస్రమగును.



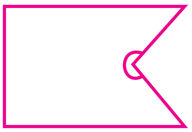
పటము 2.22

(c) అక్రమ బహుభుజి (Irregular polygon)

క్రమ రేఖా రూపం లేని బహుభుజిని అక్రమబహుభుజి అందురు.

(d) పుటాకార బహుభుజి (Concave polygon)

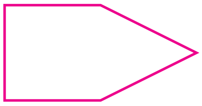
కనీసము ఒక కోణము 180° కంటె ఎక్కువగా గల బహుభుజిని పుటాకార బహుభుజి అందురు.



పటము 2.23

(e) కుంభాకార బహుభుజి (Convex polygon)

ప్రతి అంతరకోణము 180° కంటె తక్కువగా గల బహుభుజిని కుంభాకార బహుభుజి అందురు.



పటము 2.24

బహుభుజిలను ఇలా విడదీయవచ్చును.

భుజముల సంఖ్య	బహుభుజి పేరు
3	త్రిభుజము
4	చతుర్భుజి
5	పంచభుజి
6	షడ్భుజి
7	సప్తభుజి
8	అష్టభుజి
9	నవభుజి
10	దశభుజి

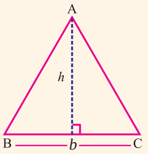
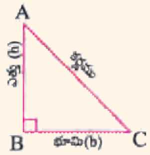
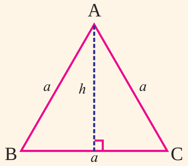
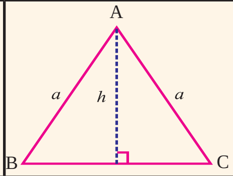
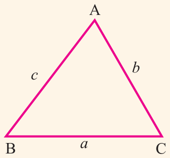
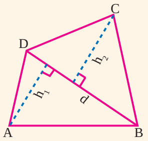
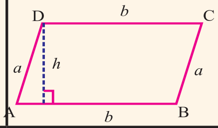
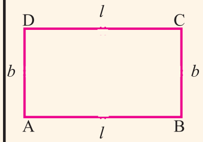
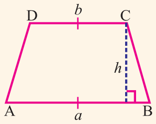
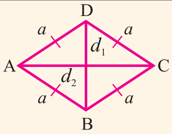
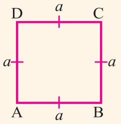
విజయ్ తన పొలమునకు 44మీ పొడవు గల ముళ్ళ తీగతో కంచె వేసెను. పొలము క్రింది ఏ ఆకారములో ఉండిన ఎక్కువ వైశాల్యమును ఆక్రమించును.

ఎ) వృత్తము బి) చతురస్రము

సి) 2మీ×20మీ గల దీర్ఘ చతురస్రము

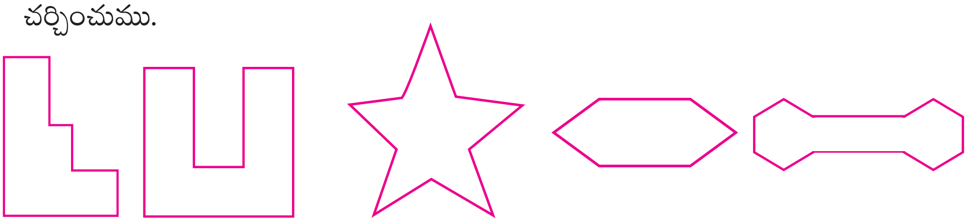
డి) 7మీ×15మీ గల దీర్ఘచతురస్రము

చాలావరకు సంయుక్త చిత్రములన్నియు అక్రమ బహుభుజులుగా ఉండును. మనము వాటిని మనకు తెలిసిన సమతల పటములుగా విభజింపవలెను. వాటి యొక్క వైశాల్యము మరియు చుట్టుకొలతలను మనం 7వ తరగతిలో నేర్చుకొన్న సూత్రముల ప్రకారము కనుగొన వచ్చును. ఇవి క్రింది పట్టికలో యివ్వబడినవి.

వ.సం	పేరు	బొమ్మ	వైశాల్యము (A) (చ.ప్రమాణములు)	చుట్టుకొలత(P) (ప్రమాణములు)
1.	త్రిభుజము		$\frac{1}{2} \times b \times h$	AB + BC + CA
2.	లంబకోణ త్రిభుజము		$\frac{1}{2} \times b \times h$	(భూమి+ఎత్తు+కర్ణము)
3.	సమబాహు త్రిభుజము (Equilateral triangle)		$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ($\sqrt{3} \simeq 1.732$)	AB+BC+CA = 3a ; ఎత్తు, $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ప్రమాణములు
4.	సమద్విబాహు త్రిభుజము (Isosceles triangle)		$h \times \sqrt{a^2 - h^2}$	$2a + 2\sqrt{a^2 - h^2}$
5.	విషమబాహు త్రిభుజము (Scalene triangle)		$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $s = \frac{a+b+c}{2}$	$= (a+b+c)$
6.	చతుర్భుజము (Quadrilateral)		$\frac{1}{2} \times d \times (h_1 + h_2)$	AB + BC + CD + DA
7.	సమాంతర చతుర్భుజము (Parallelogram)		$b \times h$	$2 \times (a + b)$
8.	దీర్ఘ చతురస్రము (Rectangle)		$l \times b$	$2 \times (l + b)$
9.	సమలంబ సమాంతర చతుర్భుజము (Trapezium)		$\frac{1}{2} \times h \times (a+b)$	AB + BC + CD + DA
10.	రాంబస్(Rhombus)		$\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$. d_1, d_2 కర్ణములు.	4a
11.	చతురస్రము (Square)		a^2	4a

కృత్యము

క్రింది బొమ్మలను నీకు నచ్చిన సమతల ఆకారములలోనికి విభజించి వాటిని గూర్చి చర్చించుము.

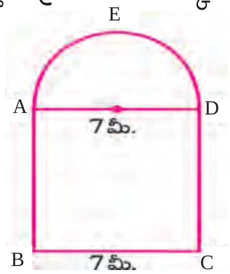


పటము *2.25*

ఉదాహరణ 2.5

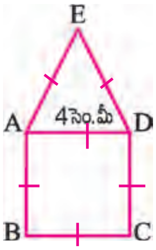
క్రింది సంయుక్త చిత్రముల యొక్క చుట్టుకొలతలను కనుగొనుము.

(i)



పటము *2.26*

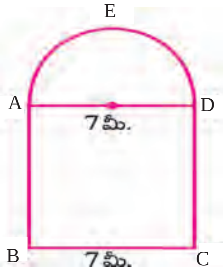
(ii)



పటము *2.27*

సాధన

(i) పటము నందు ABCD ఒక చతురస్రము DEA ఒక అర్థ వృత్తముగా వున్నది. $\overparen{DEA}$ చాపము వృత్తపరిధిలో సగమైన వృత్త వ్యాసము AD అగును.



చతురస్ర భుజము = 7 సెం.మీ.

$\therefore$ అర్థ వృత్తం యొక్క వ్యాసము = 7 సెం.మీ.

$\therefore$ అర్థ వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థము, $r = \dfrac{7}{2}$ సెం.మీ.

చతురస్ర చుట్టుకొలత $= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overparen{DEA}$

$P = 7 + 7 + 7 + \frac{1}{2} \times$ (వృత్తపరిధి)

$= 21 + \frac{1}{2} \times 2\pi r = 21 + \frac{22}{7} \times \frac{7}{2}$

$P = 21 + 11 = 33$ సెం.మీ.

$\therefore$ పటము యొక్క చుట్టుకొలత = 33 సెం.మీ.

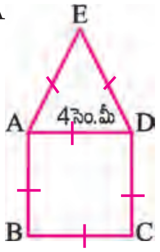
మొత్తం వైశాల్యము = అర్థగోళ వైశాల్యము + చతురస్ర వైశాల్యము

$A = \dfrac{\pi r^2}{2} + a^2$

$= \dfrac{22}{7 \times 2} \times \dfrac{7 \times 7}{2 \times 2} + 7^2 = \dfrac{77}{4} + 49$

$\therefore$ సంయుక్తచిత్ర మొత్తం వైశాల్యము $= 19.25 + 49 = 68.25$ చ.సెం.మీ.

(ii) పైన యివ్వబడిన సంయుక్త చిత్రములో ABCD చతురస్రము మరియు DEA సమబాహు త్రిభుజము.



చతురస్రము యొక్క భుజము = 4 సెం.మీ.

∴ సంయుక్త చిత్రము యొక్క చుట్టుకొలత = AB + BC + CD + DE + EA

= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20 సెం.మీ.

∴ సంయుక్త చిత్రము యొక్క చుట్టుకొలత = 20 సెం.మీ..

సంయుక్త చిత్రము యొక్క వైశాల్యము = చతురస్ర వైశాల్యము + సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యము

$= a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \qquad (\sqrt{3} = 1.732)$

$= 4 \times 4 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times 4$

$= 16 + 1.732 \times 4$

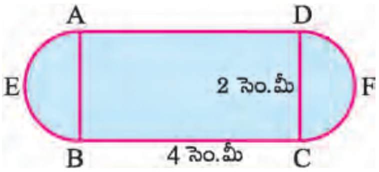
సంయుక్త చిత్ర మొత్తం వైశాల్యము = 16 + 6.928 = 22.928

సంయుక్త చిత్రవైశాల్యము $\simeq$ 22. 93 సెం.మీ^{2}.

ఉదాహరణ 2.6

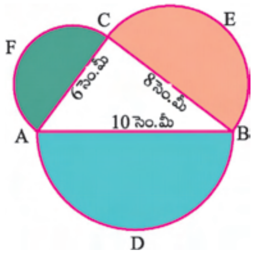
క్రింద ఛాయ వేసిన భాగము యొక్క చుట్టుకొలతలను వైశాల్యములను కనుగొనుము.

(i)



పటము *2.28*

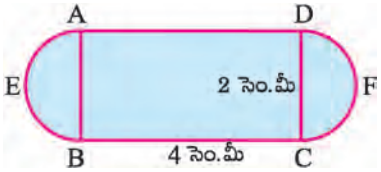
(ii)



పటము *2.29*

సాధన

(i) ఇచ్చిన పటము ఒక దీర్ఘ చతురస్రము, సమానమైన వైశాల్యముగల రెండు అర్ధవృత్తములను కలిగియున్నది.



దీర్ఘ చతురస్ర పొడవు, l = 4 సెం.మీ.

దీర్ఘచతురస్ర వెడల్పు, b = 2 సెం.మీ.

అర్ధవృత్త వ్యాసము = 2 సెం.మీ.

∴ అర్ధవృత్త వ్యాసార్ధము, r = $\frac{2}{2}$ = 1 సెం.మీ.

∴ సంయుక్త చిత్రము యొక్క చుట్టుకొలత = AD+BC+ $\overset{\frown}{AEB}$ + $\overset{\frown}{DFC}$

= 4+ 4+ $2 \times \frac{1}{2} \times$ (వృత్త చుట్టుకొలత)

$= 8 + 2 \times \frac{1}{2} \times 2\pi r$

$= 8 + 2 \times \frac{22}{7} \times 1$

$= 8 + 2 \times 3.14$

= 8 + 6. 28

$\therefore$ చిత్రము యొక్క చుట్టుకొలత = 14.28 సెం.మీ..

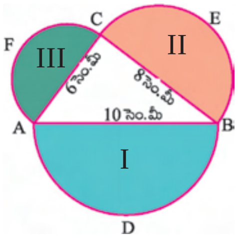
చిత్రము యొక్క వైశాల్యము = ABCD దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము + 2 $\times$ అర్ధ వృత్త వైశాల్యము

$$= l \times b + 2 \times \frac{\pi r^2}{2}$$

$$= 4 \times 2 + 2 \times \frac{22 \times 1 \times 1}{7 \times 2}$$

$\therefore$ మొత్తం వైశాల్యము = $8 + 3.14 = 11.14$ సెం.మీ^{2}.

(ii) ADB, BEC మరియు CFA అనునది మూడు వేర్వేరు అర్ధ వృత్తములను వరుసగ I, II,III గా అనుకొనుము.



అర్ధ వృత్తముI యొక్క వ్యాసార్ధము $r_1 = \frac{10}{2} = 5$ సెం.మీ.

అర్ధ వృత్తముII యొక్క వ్యాసార్ధము $r_2 = \frac{8}{2} = 4$ సెం.మీ.

అర్ధ వృత్తముIII యొక్క వ్యాసార్ధము $r_3 = \frac{6}{2} = 3$ సెం.మీ.

ఛాయ వేసిన భాగపు చుట్టు కొలత = అర్ధ వృత్తము I చుట్టు కొలత + అర్ధ వృత్తము II చుట్టు కొలత + అర్ధ వృత్తము III చుట్టు కొలత +

$$= (\pi + 2) \times 5 + (\pi + 2) \times 4 + (\pi + 2) \times 3$$

$$= (\pi + 2)(5 + 4 + 3) = (\pi + 2) \times 12$$

$$= \left(\frac{22 + 14}{7}\right) \times 12 = \frac{36}{7} \times 12 = 61.714$$

ఛాయ చేసిన భాగపు చుట్టుకొలత $\simeq$ 61.71సెం.మీ. .

ఛాయ చేసిన భాగపు వైశాల్యము, A =అర్ధ వృత్తముI వైశాల్యము+ అర్ధ వృత్తముII వైశాల్యము + అర్ధ వృత్తము III వైశాల్యము

$$A = \frac{\pi r_1^2}{2} + \frac{\pi r_2^2}{2} + \frac{\pi r_3^2}{2}$$

$$= \frac{22}{7 \times 2} \times 5 \times 5 + \frac{22}{7 \times 2} \times 4 \times 4 + \frac{22}{7 \times 2} \times 3 \times 3$$

$$A = \frac{275}{7} + \frac{176}{7} + \frac{99}{7} = \frac{550}{7} = 78.571 \text{ సెం.మీ}^2$$

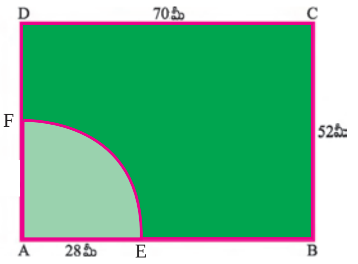
ఛాయ వేసిన భాగపు వైశాల్యము $\simeq$ 78.57 సెం.మీ.^{2}

పై ఉదాహరణ నుండి మనము గమనించగా,

BEC అర్ధ వృత్త వైశాల్యము + CFA అర్ధవృత్త వైశాల్యము = ADB అర్ధవృత్త వైశాల్యము

ఉదాహరణ 2.7

70 మీ. పొడవు 52 మీ. వెడల్పు గల ఒక దీర్ఘ చతురస్రకార స్థలములో ఒక గుఱ్ఱమును ఒక మూల 28మీ. పొడవు గల దారముతో పచ్చిక మేయుటకు కట్టివేయబడినది. గుఱ్ఱము మేసిన స్థలమెంత? వదిలివేయబడిన స్థలమెంత?



పటము 2.30

సాధన

దీర్ఘ చతురస్ర పొడవు, l = 70 మీ.

దీర్ఘ చతురస్ర వెడల్పు, b = 52 మీ.

దారము యొక్క పొడవు = 28 మీ.

ఛాయ వేసిన భాగము AEF గుఱ్ఱము పచ్చిక మేసిన చోటును తెలియజేయును. దీనిని బట్టి అది ఒక పావు వృత్తమని మనము స్పష్టంగా తెలుసుకొనవచ్చును. పావు వృత్త వ్యాసార్థము , r = 28 మీ.

AEF పావువృత్త వైశాల్యము = $\frac{1}{4}\times\pi r^2$ చ.ప్రమాణములు

= $\frac{1}{4}\times\frac{22}{7}\times 28\times 28$ = 616 మీ^{2}

∴ పచ్చిక మేసిన స్థల వైశాల్యము = 616 మీ^{2}.

మిగిలిన స్థలము = ABCD దీర్ఘ చతురస్రవైశాల్యము – AEF పావు వృత్త వైశాల్యము

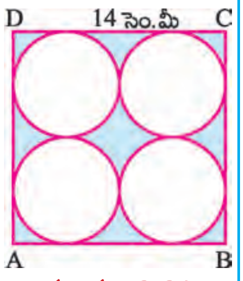
దీర్ఘ చతురస్ర ABCD వైశాల్యము = $l \times b$ చ.ప్రమాణములు

= $70\times 52 = 3640$ మీ^{2}

∴ వదిలి వేయబడిన స్థల వైశాల్యము = $3640 - 616 = 3024$ మీ^{2}.

ఉదాహరణ 2.8

క్రింద ఇవ్వబడిన పటములో ABCD 14 సెం.మీ. భుజము కలిగిన ఒక చతురస్రము. ఇందులో ఛాయ వేసిన భాగపు వైశాల్యమును కనుగొనుము. .



పటము 2.31

సాధన

చతురస్ర భుజము, a = 14 సెం.మీ.

వృత్తముల వ్యాసార్థము, r = $\frac{7}{2}$ సెం.మీ.

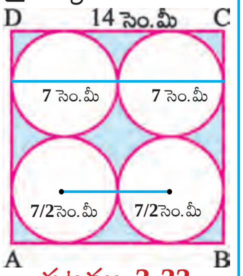
ఛాయ వేసిన భాగపు వైశాల్యము = చతురస్ర వైశాల్యము – 4 × వృత్త వైశాల్యము

= $a^2 - 4(\pi r^2)$

= $14\times 14 - 4\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}$

= $196 - 154$

∴ ఛాయ వేసిన భాగపు వైశాల్యము = 42 చ.సెం.మీ.



పటము 2.32

ఉదాహరణ 2.9

35 సెం.మీ. వ్యాసార్ధము గల ఒక రాగి కమ్మి వృత్తాకారములో చుట్టబడినది. దానిని ఒక చతురస్రముగా మలిచిన భుజమును కనుగొనుము.

పటము 2.33

సాధన

వృత్త వ్యాసార్ధము, r = 35 సెం.మీ.

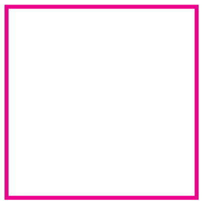
అదే రాగి కమ్మి చతురస్రముగా మలచబడినది.

వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత = చతురస్రము యొక్క చుట్టు కొలత

వృత్తము చుట్టుకొలత = $2\pi r$ ప్రమాణములు

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 35$ సెం.మీ.

P = 220 సెం.మీ.



పటము 2.34

చతురస్ర భుజము 'a' అయిన

చతురస్ర చుట్టుకొలత = 4a ప్రమాణములు

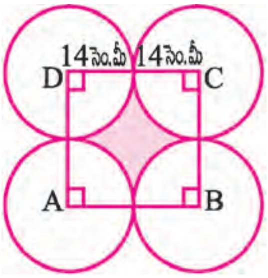
$4a$ = 220

a = 55 సెం.మీ.

∴ చతురస్ర భుజము = 55 సెం.మీ..

ఉదాహరణ 2.10

ఒక చతురస్రము యొక్క నాలుగు మూలలపై గీచిన ABCD కేంద్రములుగా గల నాలుగు వృత్తములు బాహ్యముగా స్పృశించుచున్నవి. ఛాయ వేసిన భాగపు వైశాల్యమును కనుగొనుము. చతురస్ర భుజము కొలత 28 సెం.మీ. అగును.



పటము 2.35

సాధన

క్రింద యివ్వబడిన ABCD చతురస్ర భుజము

∴ a = 28 సెం.మీ.

∴ వృత్త వ్యాసార్ధము, r = $\frac{28}{2}$

= 14 సెం.మీ.

ఛాయ వేసిన భాగపు వైశాల్యము = చతురస్ర వైశాల్యము − 4 × పావు వృత్త వైశాల్యము

$= a^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times \pi r^2$

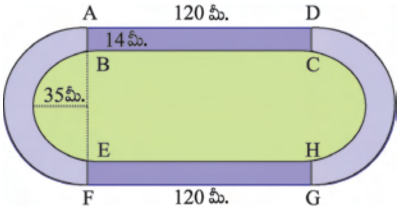
$= 28 \times 28 - 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 784 - 616$

∴ ఛాయ వేసిన భాగపు వైశాల్యము = 168 సెం.మీ^{2}.

ఉదాహరణ 4.11

ఒక క్రీడా మైదానము (athletic track) యొక్క వెడల్పు 14 మీ పొడవు 120 మీ కలదు. దానికి ఇరువైపుల 35మీ వ్యాసార్ధముగల రెండు అర్ధ వృత్తాకారములు ఉన్నవి. మైదానము యొక్క వైశాల్యము కనుగొనుము.



పటము *2.36*

సాధన

అంతర వృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధము, r = 35 మీ.

మైదానము వెడల్పు = 14 మీ.

వెలుపలి వృత్త వ్యాసార్ధము, R = 35 + 14 = 49 మీ.

R = 49 మీ.

మొత్తము మైదానము యొక్క వైశాల్యము రెండు అర్ధ వృత్త మైదానములు మరియు దీర్ఘ చతురస్ర మైదానము వైశాల్యము అగును.

ABCD మరియు EFGH దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము = $2 \times (l \times b)$

= $2 \times 14 \times 120 = 3360$ మీ^{2}.

అర్ధ వృత్త మైదానము వైశాల్యము = 2 × (వెలుపలి వృత్త వైశాల్యము – లోపలి వృత్త వైశాల్యము)

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi r^2\right)$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \pi (R^2 - r^2)$$

$$= \frac{22}{7} \times (49^2 - 35^2)$$

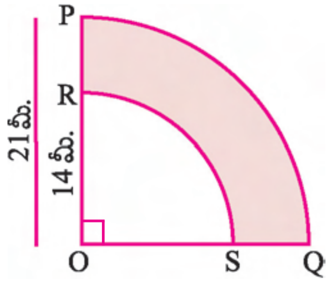
$$= \frac{22}{7}(49 + 35)(49 - 35)$$

$$= \frac{22}{7} \times 84 \times 14 = 3696 \text{ మీ}^2$$

∴ మైదానము యొక్క వైశాల్యము = 3360 + 3696 = 7056 మీ^{2}.

ఉదాహరణ 2.12

పటము 2.37 నుండి PQSR అనునది ఒక పూల రాశి (flower bed). OP = 21 మీ., OR = 14సెం.మీ. అయిన ఛాయ వేసిన భాగపు వైశాల్యము కనుగొనుము. .



పటము *2.37*

సాధన

OP = 21 మీ. మరియు OR = 14 మీ.

పూల రాశి వైశాల్యము = OQP పావు వృత్త వైశాల్యము – OSR పావు వృత్త వైశాల్యము

$$= \frac{1}{4}\pi \times OP^2 - \frac{1}{4}\pi \times OR^2$$

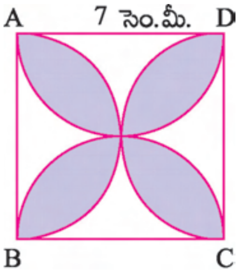
$$= \frac{1}{4}\times\pi\times21^2 - \frac{1}{4}\times\pi\times14^2$$

$$= \frac{1}{4}\times\pi\times(21^2 - 14^2)$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{22}{7}\times(21+14)\times(21-14)$$

$\therefore$ పూల రాశి వైశాల్యము $= \frac{1}{4}\times\frac{22}{7}\times35\times7 = 192.5$ మీ.^{2}.

ఉదాహరణ 2.13



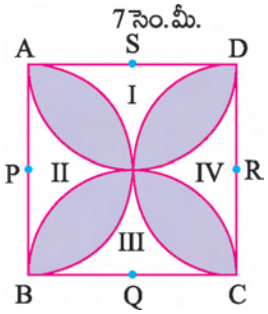
పటము 2.38

పటము 2.38 నుండి ఛాయ వేసిన భాగపు వైశాల్యమును కనుగొనుము. ABCD చతురస్ర భుజము కొలత 7 సెం.మీ అగును.

సాధన

ఛాయ చేయని భాగములను I,II,III,IV అని పటము 2.39లో గుర్తించుము.

P,Q,R మరియు S అనునవి వరుసగా AB, BC,CD మరియు DA లకు మధ్య బిందువులు.



పటము 2.39

చతురస్ర భుజము , a = 7 సెం.మీ

అర్థ వృత్త వ్యాసార్థము, r = $\frac{7}{2}$ సెం.మీ

I యొక్క వైశాల్యము+IIIయొక్క వైశాల్యము=ABCD చతురస్ర వైశాల్యము – P R కేంద్రముగా కలిగిన రెండు అర్థ వృత్త వైశాల్యములు

$$= a^2 - 2\times\frac{1}{2}\times\pi r^2$$

$$= 7\times7 - 2\times\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}$$

$\therefore$ I వైశాల్యము + IIIవైశాల్యము$= \left(49 - \frac{77}{2}\right)$ cm^2 $= \frac{21}{2}$ cm^2.

ఇదే విధముగా

II యొక్క వైశాల్యము + IV యొక్కవైశాల్యము $= \left(49 - \frac{77}{2}\right)$ cm^2 $= \frac{21}{2}$ cm^2.

ఛాయ చేసిన భాగపు వైశాల్యము = ABCD చతురస్ర వైశాల్యము – (I స్థల వైశాల్యము + II స్థల వైశాల్యము+III స్థల వైశాల్యము + IV స్థల వైశాల్యము)

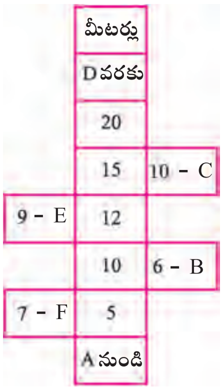
$$= 49 - \left(\frac{21}{2} + \frac{21}{2}\right)$$

$= 49 - 21 = 28$ సెం.మీ^{2}

$\therefore$ ఛాయ చేసిన భాగపు వైశాల్యము = 28 సెం.మీ^{2}

ఉదాహరణ 2.14

ఒక సర్వేయర్ క్రింది విధముగా ఒక స్థలమును కొలిచెను. స్థల వైశాల్యము కనుగొనుము.

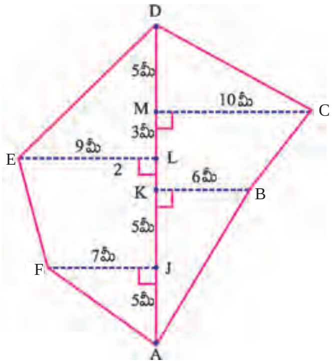


పటము 2.40

సాధన

J, K, L, M అనునవి A నుండి D మధ్య గీసిన సర్వేయర్ గుర్తులు.

యివ్వబడినవి : AJ = 5 మీ., JF = 7 మీ.,
KB = 6 మీ., LE = 9 మీ. , MC = 10 మీ.,
AK = 10 మీ., AL = 12 మీ.,
AM = 15 మీ. మరియు AD = 20 మీ..



ఇవ్వబడిన పొలము ట్రెపిజియమ్ KBCM, LEFJ మరియు ABK, MCD, DEL JFA అను లంబకోణ త్రిభుజముల కలయికతో అమరివున్నది.

ట్రెపిజియమ్ KBCM.యొక్క వైశాల్యము A_1

$$A_1 = \frac{1}{2}\times(KB+MC)\times KM$$
$$= \frac{1}{2}\times(6+10)\times 5$$
$$A_1 = \frac{1}{2}\times 16\times 5 = 40 \text{ మీ}^2.$$

($\because$ KB, MC సమాంతర భుజములు ఎత్తు= KM
KB = 6 మీ, MC = 10 మీ,
KM = AM – AK
= 15 – 10 = 5 మీ.)

LEFJ. ట్రెపిజియమ్ వైశాల్యము A_2

$$A_2 = \frac{1}{2}\times(JF+LE)\times JL$$
$$= \frac{1}{2}\times(7+9)\times 7$$
$$A_2 = \frac{1}{2}\times 16\times 7 = 56 \text{ మీ}^2.$$

($\because$ LE, JF సమాంతర భుజములు JL ఎత్తు
JF = 7 మీ., LE = 9 మీ.,
JL = AL – AJ
= 12 – 5 = 7 మీ.)

లంబకోణ త్రిభుజము ABK వైశాల్యము A_3

$$A_3 = \frac{1}{2}\times AK\times KB$$
$$A_3 = \frac{1}{2}\times 10\times 6 = 30 \text{ మీ}^2.$$

లంబ కోణ త్రిభుజము MCD = A_4 యొక్క వైశాల్యము

$$A_4 = \frac{1}{2}\times MC\times MD.$$
$$= \frac{1}{2}\times 10\times 5$$
$$A_4 = \frac{50}{2} = 25 \text{ మీ}^2.$$

లంబ కోణ త్రిభుజము DEL = A_5 యొక్క వైశాల్యము

$$A_5 = \frac{1}{2}\times DL\times LE$$
$$= \frac{1}{2}\times(AD-AL)\times LE$$
$$= \frac{1}{2}(20-12)\times 9$$
$$A_5 = \frac{1}{2}\times 8\times 9 = 36 \text{ మీ}^2.$$

లంబ కోణ త్రిభుజము JFA = A_6 యొక్క వైశాల్యము

$$A_6 = \frac{1}{2} \times AJ \times JF$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 7 = \frac{35}{2} = 17.5 \text{ మీ}^2.$$

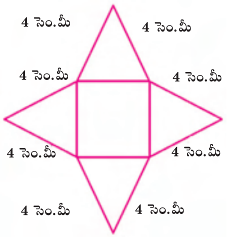
పొలము యొక్క మొత్తం వైశాల్యము $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$

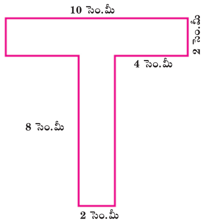
$= 40 + 56 + 30 + 25 + 36 + 17.5$

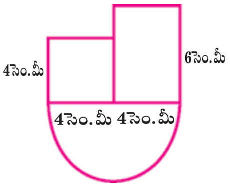
∴ మొత్తం వైశాల్యము $= 204.5$ మీ^{2}.

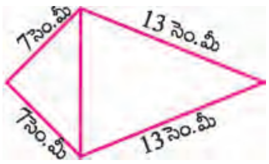
అభ్యాసము 2.2

1. క్రింది యివ్వబడిన పటముల చుట్టుకొలతలను కనుగొనుము.

(i) 

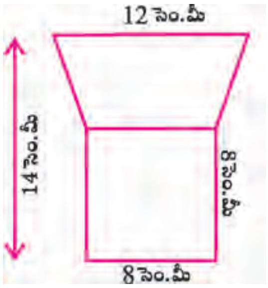
(ii) 

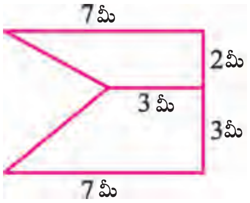
(iii) 

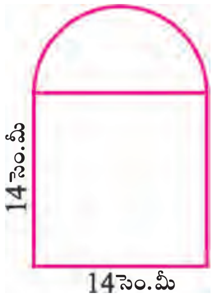
(iv) 

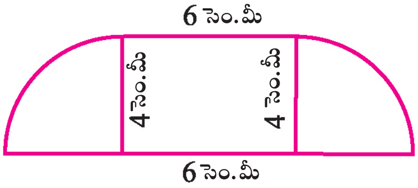
(v)

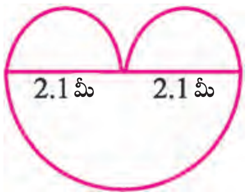
2. క్రింది యివ్వబడిన పటముల యొక్క వైశాల్యము కనుగొనుము.

(i) 

(ii) 

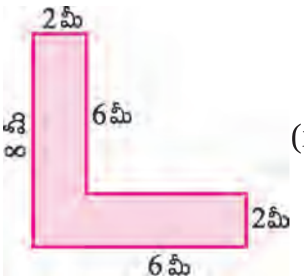
(iii) 

(iv) 

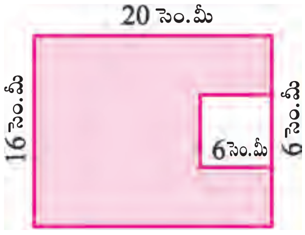
(v) 

3. క్రింద యివ్వబడిన పటముల ఛాయ చేసిన భాగముల వైశాల్యములను కనుగొనుము

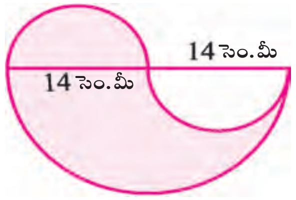
(i)



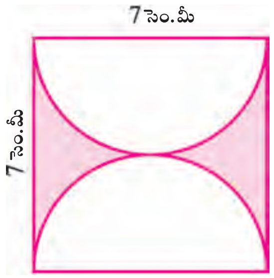
(ii)



(iii)

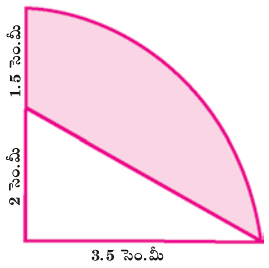


(iv)

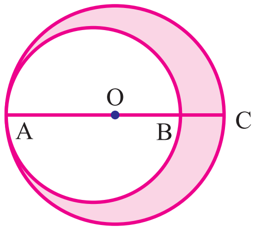


(v)

(vi)

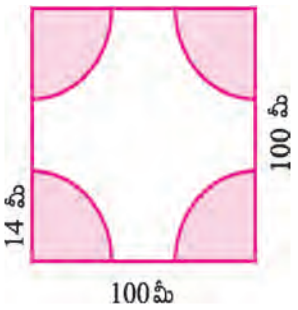


4. ఇవ్వబడిన పటములో AC = 54 సెం.మీ., BC = 10 సెం.మీ., మరియు 'O' పెద్ద వృత్తము యొక్క కేంద్రమయినచో ఛాయ వేసిన భాగపు వైశాల్యమును కనుగొనుము.

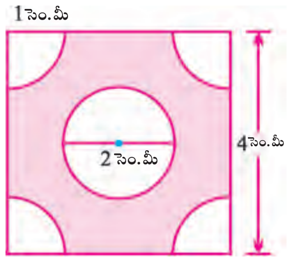


5. 40 మీ × 36 మీ కొలతలు గల దీర్ఘ చతురస్రాకార పొలములో ఒక మూల యందు 14మీ. పొడవు గల దారముతో ఒక ఆవును కట్టినచో ఆవు మేయని భాగ వైశాల్యమును కనుగొనుము.

6. ప్రక్క పటములో 100 మీ కొలత గల ఒక చతురస్రాకార పొలములో ఒక్కొక్క మూల యందు 14మీ. వ్యాసార్థము గల పావువృత్తాకార పూలతోట వున్నచో మిగిలిన భాగపు వైశాల్యమును కనుగొనుము.

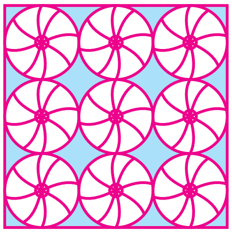


7. ప్రక్క పటములో నాలుగు మూలలు పావు వృత్తాకారములో ఉన్నవి. మధ్యలో 2 సెం.మీ. వ్యాసముతో ఒక వృత్తము కలదు. ఛాయవేసిన భాగపు వైశాల్యము కనుగొనుము.



8. AB = 20 సెం.మీ., BC = 14 సెం.మీ. కొలతలు గల ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార కాగితము నుండి BC కొలత వ్యాసముగా గల ఒక అర్థ వృత్తము కత్తిరించబడిన, మిగిలిన భాగపు వైశాల్యమును కనుగొనుము. .

9. ఒక చతురస్రకార చేతి రుమాలు నుండి 7 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో తొమ్మిది వృత్తాకార భాగములు కత్తిరించబడినచో మిగిలిన భాగపు వైశాల్యమును కనుగొనుము.



10. ఒక పొలము యొక్క కొలతలు సర్వేయర్ పుస్తకము నందు క్రింది విధముగా ఇవ్వబడినవి. ఆ కొలతలకు పటము గీచి వైశాల్యము కనుగొనుము.

(i)

	మీటర్లు	
	D వరకు	
	240	
	210	30 C
40	170	
60	130	
	70	50 B
	A నుండి	

(ii)

	J వరకు	
	1000 K	
300 M	600 I	
	300 H	800 L
	G నుండి	

కృత్యము

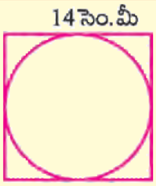
చీమకు సహాయము చేయగలవా?

వివిధ ఆకారములు గల ఆహార పదార్థములు నేల మీద చెల్లాచెదురుగా వేయబడినవి. ఒక చీమకు ఆ ఆహార పదార్థములను చుట్టి వచ్చుటకు దేనికి తక్కువ సమయము, దేనికి ఎక్కువ సమయము పట్టును?

దీనిలో ఎన్ని త్రిభుజములు కలవు?

ప్రయత్నించుము

చతురస్రము చుట్టుకొలత (లేదా) దానిలో అమరిన వృత్తము చుట్టుకొలతలలో దేని కొలత చిన్నది?



ఈ పటములలో ఏది చుట్టుకొలతను కలిగి ఉన్నది?

(ఎ) (బి)

పాఠ్యభాగ సారాంశము

- వృత్తము యొక్క కేంద్ర కోణము 360°.
- అర్ధ వృత్తపు చుట్టుకొలత $= (\pi + 2) \times r$ ప్రమాణములు
- అర్ధ వృత్తపు వైశాల్యము $= \frac{\pi r^2}{2}$ చదరపు ప్రమాణములు
- అర్ధ వృత్తపు కేంద్ర కోణము 180°.
- పావు వృత్తపు చుట్టుకొలత $= \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) \times r$ ప్రమాణములు .
- పావు వృత్తపు వైశాల్యము $= \frac{\pi r^2}{4}$ చదరపు ప్రమాణములు .
- పావు వృత్త కేంద్ర కోణము 90°.
- సంయుక్త పటము చుట్టుకొలత దాని ఎల్లల యొక్క పొడవే అగును.
- 'n' రేఖా ఖండములచే ఏర్పడిన ఒక సంవృత పటమును బహుభుజి అందురు.
- అన్ని భుజములు మరియు కోణములు సమానమైన బహుభుజిని క్రమ బహుభుజి అందురు.
- క్రమ రేఖా రూపంలేని బహుభుజిని అక్రమ బహుభుజి అందురు.

రేఖా గణితము

3

3.1 పరిచయము

3.2 త్రిభుజముల లక్షణములు

3.3 త్రిభుజముల సర్వసమానత్వము

3.1 పరిచయము

నైలునది వరదలవలన చెదిరిపోయిన భూమి గుర్తులను గుర్తించుటకు క్రీ.పూ. 1000 సం॥లకు ముందే ఈజిప్టువారు రేఖాగణితమును అభివృద్ధి చేశారు. అయితే గ్రీకులు దీనిని తర్క పద్ధతిలో అవసరమైన నిరూపణలతో సిద్ధాంతములుగాను లేక సత్య ప్రవచనములుగాను సంగ్రహించారు.

రేఖాగణితము మన జీవితములో అనేక విధాలుగా ముఖ్య పాత్ర పోషిస్తున్నది. ప్రకృతిలో మనము బహుభుజ రూపములైన తేనెతుట్టెలు, గోళాకార బంతులు, దీర్ఘచతురస్ర నీటితొట్టెలు, స్థూపాకార బావులు మొదలగు వాటిని గమనిస్తున్నాము. రేఖా గణితమును ప్రయోగాత్మకంగా ఉపయోగించుకొనుటకు పిరమిడ్‌ల నిర్మాణము ఒక అద్భుత ఉదాహరణ. రేఖాగణితము వివిధ రంగాలలో అనగా భౌతిక శాస్త్రము, రసాయన శాస్త్రము, ఇంజనీరింగ్, నిర్మాణ రంగము మరియు నేర పరిశోధన శాస్త్రము మొదలగు వాటిలో ప్రత్యక్షముగా ఉపయోగపడుచున్నది.

రేఖాగణితము అను పదము రెండు గ్రీకు పదములైన 'జియో' అనగా భూమి మరియు 'మెట్రో' అనగా "కొలుచుట" ల నుండి ఏర్పడినది. గణితములో ఒక భాగమైన "రేఖాగణితము" ఆకారములు, కొలతలు, సాధనలు మరియు వస్తువుల లక్షణములను గురించి చర్చించును.

7వ తరగతిలో మనము సమాంతర రేఖలు, తిర్యగ్రేఖలు, ఖండన రేఖలలో కోణములు, ఆసన్న కోణములు, ఏకాంతర కోణములను గురించి తెలుసుకొన్నాము. అంతేకాకుండా మనము త్రిభుజ కోణముల మొత్తము అను లక్షణములను కూడా నేర్చుకొని ఉన్నాము.

యూక్లిడ్,
రేఖాగణిత పిత

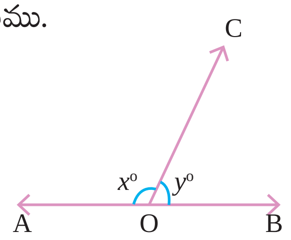
సుమారు క్రీ.పూ. 300 సం॥ రేఖాగణితములో తర్కరీతిలో ఆలోచించు పద్ధతిని రూపొందించిన "యూక్లిడ్" ఒక గొప్ప గణిత శాస్త్రవేత్త. సుమారు క్రీ.పూ. 300 సం॥ కాలములో యూక్లిడ్ రేఖాగణితముపై ఎంతో సమాచారమును సేకరించి, దానిని సక్రమపద్ధతిలో 13 పుస్తకములుగా ప్రచురించెను. ఈ పుస్తకములను "యూక్లిడ్ ఎలిమెంట్స్" అని అంటారు.

"ఒక వస్తువు యొక్క పూర్తి భాగము దానిలోని ఏ భాగముకంటె కూడా పెద్దదిగా ఉండును అని యూక్లిడ్ తెలిపెను".

క్రింది అభ్యాసములో గతంలో నేర్చుకొన్న వాటి ఫలితాలను గుర్తుచేసుకుందాము.

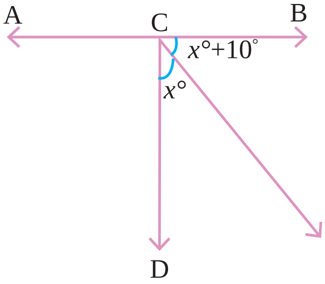
పునర్విమర్శ అభ్యాసము

1. పటము 3.1 లో $x^\circ = 128^\circ$ అయిన y° కనుగొనుము.



పటము *3.1*

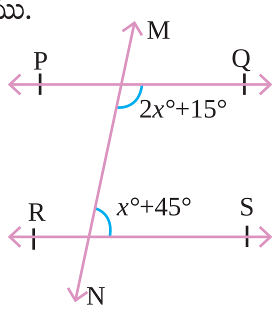
2. పటము 3.2 లో $\angle ACD = 90^\circ$ అయిన $\angle BCE$ మరియు $\angle ECD$ లను కనుగొనుము.



పటము *3.2*

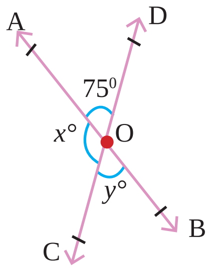
3. ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు 43°మరియు 27° అయిన మూడవ కోణమును కనుగొనుము.

4. పటము 3.3లో $PQ \parallel RS$ అయిన x° కనుకొనుము.



పటము *3.3*

5. పటము 3.4లో AB మరియు CD రేఖలు 'O' వద్ద ఖండించుకొనును. x° మరియు y° లను కనుగొనుము.



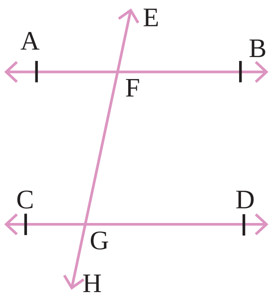
పటము *3.4*

6. పటము 3.5లో $AB \parallel CD$ అయిన క్రింది ఖాళీలను పూరించుము.

(i) $\angle EFB$ మరియు $\angle FGD$ లు .... కోణములు.

(ii) $\angle AFG$ మరియు $\angle FGD$ లు .... కోణములు.

(iii) $\angle AFE$ మరియు $\angle FGC$ లు .... కోణములు.



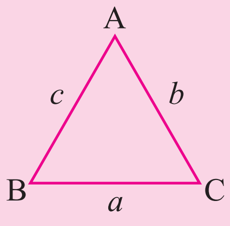
పటము *3.5*

3.2 త్రిభుజముల లక్షణములు (Properties of triangles)

ఒక తలమునందు మూడు రేఖా ఖండములచే మూయబడిన పటమును 'త్రిభుజము' అందురు.

త్రిభుజమును '$\triangle$' అను సంకేతముతో గుర్తించెదరు.

ABC అను ఏదైనా త్రిభుజము నందు A,B,C శీర్షములకు ఎదురుగానున్న భుజములను వరుసగా a, b, c లతో గుర్తించెదరు.



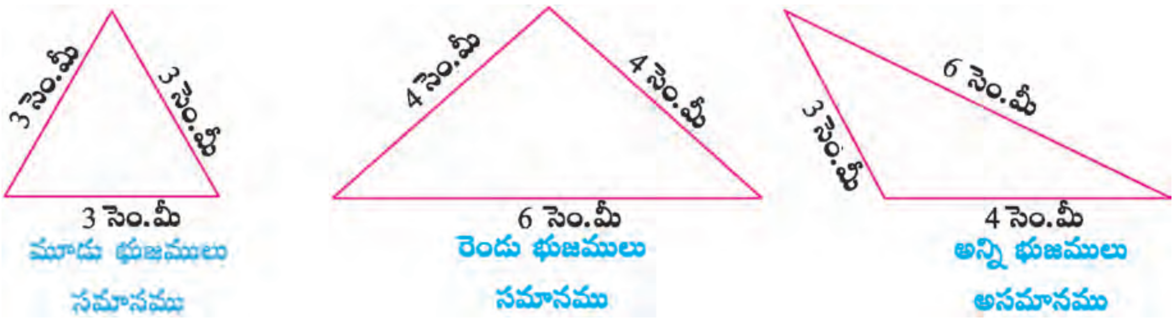
పటము *3.6*

3.2.1. త్రిభుజముల రకములు

త్రిభుజములను వాటి భుజములు, కోణముల ఆధారముగా రెండు రకములుగా విభజించెదరు.

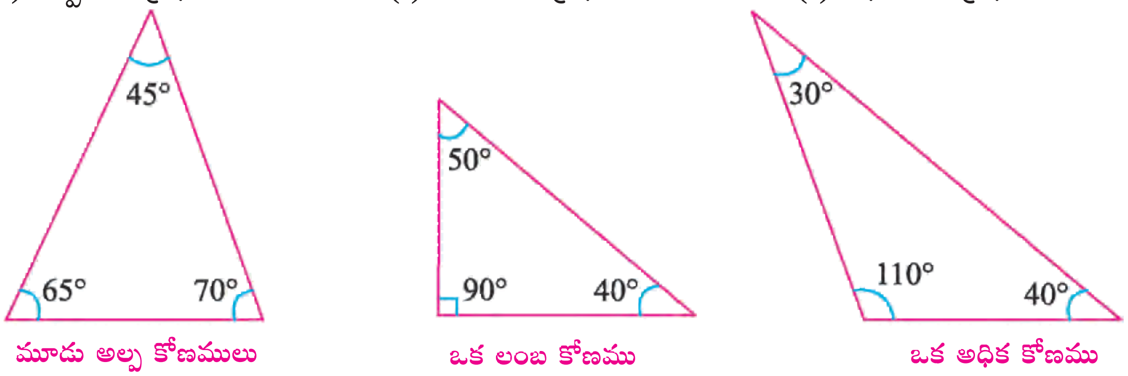
భుజముల ఆధారంగా త్రిభుజ రకములు :

(a) సమభుజ త్రిభుజము (b) సమద్విభుజ త్రిభుజము (c) విషమభుజ త్రిభుజము

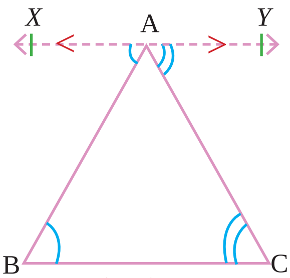


కోణముల ఆధారంగా త్రిభుజ రకములు:

(d) అల్పకోణ త్రిభుజము (e) లంబకోణ త్రిభుజము (f) అధికకోణ త్రిభుజము.



3.2.2 త్రిభుజ కోణముల మొత్తము యొక్క ధర్మము



పటము 3.7

సిద్ధాంతము 1

> ఒక త్రిభుజములోని మూడు కోణముల మొత్తము **180°.**

దత్తాంశము : ABC ఒక త్రిభుజము.

సారాంశము : $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^o$

నిర్మాణము : A శీర్షము ద్వారా BC కు సమాంతరముగా XY ను గీయుము.

నిరూపణ :

ఉపపత్తి	కారణము
(i) BC ∥ XY మరియు AB ఒక తిర్యగ్రేఖ $\therefore \angle ABC = \angle XAB$	ఏకాంతర కోణాలు
(ii) మరియు $\angle BCA = \angle YAC$	ఏకాంతర కోణాలు
(iii) $\angle ABC + \angle BCA = \angle XAB + \angle YAC$	(i), (ii) ను కూడుము
(iv) $(\angle ABC + \angle BCA) + \angle CAB =$ $(\angle XAB + \angle YAC) + \angle CAB$	$\angle BAC$ ను రెండు వైపులా కూడుము
(v) $\therefore \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$	సరళరేఖ కోణము 180°.

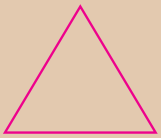
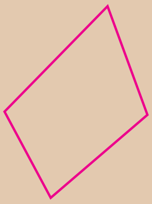
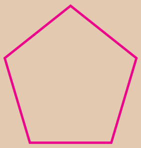
ఫలితములు

(i) మూడు భుజములు గల బహుభుజినే త్రిభుజము అంటారు.

(ii) ఏ బహుభుజినైనా కర్ణములు కలుపుట ద్వారా త్రిభుజములుగా విభజించ వచ్చును.

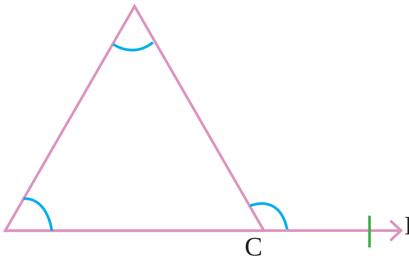
(iii) ఒక బహుభుజిలోని అంతరకోణముల మొత్తమును $(n-2)\ 180^\circ$ అని సూత్రీకరించవచ్చు. ఇక్కడ n అనునది భుజముల సంఖ్య.

కృత్యము

పటము			
భుజముల సంఖ్య	3	4	5
వర్గీకరణ	త్రిభుజము	చతుర్భుజము	పంచభుజి
కోణముల మొత్తము			

సిద్ధాంతము 2

ఒక త్రిభుజమునందు ఒక భుజమును పొడిగించినపుడు ఏర్పడు బాహ్యకోణము దానికి అభిముఖముగా నున్న రెండు అంతర కోణముల మొత్తమునకు సమానము.



పటము *3.8*

దత్తాంశము : ABC ఒక త్రిభుజము.

BC, D వరకు పొడిగించబడినది.

సారాంశము : $\angle ACD = \angle ABC + \angle CAB$

నిరూపణ :

ఉపపత్తి	కారణము
(i) ΔABC, లో $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^0$	త్రిభుజ కోణముల మొత్తము
(ii) $\angle BCA + \angle ACD = 180^0$	ఒక సరళ రేఖపై ఉన్న ఆసన్నకోణముల మొత్తము
(iii) $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle BCA + \angle ACD$	(i), (ii) లను సమానము చేయగా
(iv) $\therefore \angle ABC + \angle CAB = \angle ACD$	(iii)నుండి $\angle BCA$ ను రెండు వైపులా తీసివేయగా
(v) బాహ్యకోణము $\angle ACD$ అనునది అంతర కోణములైన $\angle ABC$, $\angle CAB$ ల మొత్తమునకు సమానము.	నిరూపించబడినది.

ఫలితములు

(i) ఒక త్రిభుజములో సమాన భుజములకు ఎదురుగా నున్న కోణములు సమానము.

(ii) అతి పొడవైన భుజమునకు ఎదురుగా గల కోణము అతిపెద్ద కోణము.

ఉదాహరణ 3.1

ΔABC లో $\angle A = 75^0$, $\angle B = 65^0$ అయిన $\angle C$ కనుగొనుము.

సాధన

ΔABC లో

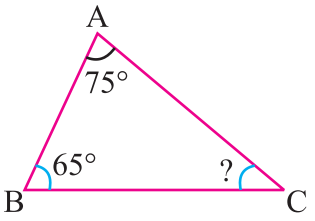
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \text{ అని మనకు తెలుసు}$$

$$75^\circ + 65^\circ + \angle C = 180^\circ$$

$$140^\circ + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 140^\circ$$

$$\therefore \angle C = 40^\circ.$$



పటము *3.9*

ఉదాహరణ 3.2

ΔABC, త్రిభుజములో $\angle A = 70^\circ$ మరియు $AB = AC$. ΔABC లోని మిగిలిన కోణములను కనుగొనుము.

సాధన

$\angle B = x^\circ$ మరియు $\angle C = y^\circ$ అనుకొనుము.

దత్తాంశం నుండి, ΔABC ఒక సమద్విభుజ త్రిభుజము

$$AC = AB$$

$$\angle B = \angle C$$ [సమాన భుజములకు ఎదురుగానున్న కోణములు సమానము.]

$$x^o = y^o$$

ΔABC లో $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

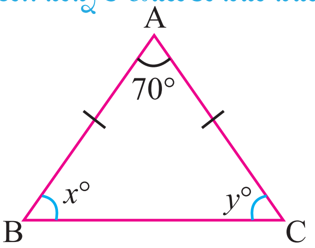
$$70^o + x^o + y^o = 180^\circ$$

$$70^o + x^o + x^o = 180^\circ \quad (\because x^0 = y^0)$$

$$2x^\circ = 180^\circ - 70^\circ$$

$$2x^\circ = 110^\circ$$

$$x^\circ = \frac{110^o}{2} = 55^\circ.$$ కావున $\angle B = 55^\circ$ మరియు $\angle C = 55^\circ$.



పటము *3.10*

ఉదాహరణ 3.3

ఒక త్రిభుజములోని కోణముల కొలతలు 5 : 4 : 3 నిష్పత్తిలో ఉన్నవి. ఆ త్రిభుజములోని కోణములను కనుగొనుము.

సాధన

దత్తాంశం నుండి ΔABC, $\angle A : \angle B : \angle C = 5 : 4 : 3$.

త్రిభుజములో ఇచ్చిన కోణములను $5x^\circ$, $4x^\circ$ మరియు $3x^\circ$ అనుకొనుము.

త్రిభుజములోని కోణముల మొత్తము 180° అని మనకు తెలుసు .

$$5x^\circ + 4x^\circ + 3x^\circ = 12x^\circ = 180^\circ$$

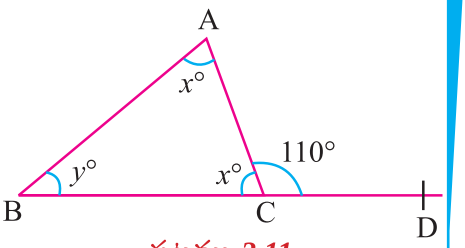
$$x^\circ = \frac{180^0}{12} = 15^\circ$$

కావున, త్రిభుజములోని కోణములు 75°,60° మరియు 45°.

ఉదాహరణ 3.4

ఇచ్చిన పటము 3.11 లోని ABC త్రిభుజ కోణములను కనుగొనుము.

సాధన



పటము *3.11*

BD ఒక సరళరేఖ

సరళరేఖ పైన కోణము 180° అని మనకు తెలుసు.

$$x^\circ + 110^\circ = 180^\circ$$

$$x^\circ = 180^\circ - 110^\circ$$

$$x^\circ = 70^\circ$$

త్రిభుజములోని బాహ్యకోణము, దాని రెండు అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తమునకు సమానము అని మనకు తెలుసు.

$$x^\circ + y^\circ = 110^\circ$$

$$70^\circ + y^\circ = 110^\circ$$

$$y^\circ = 110^\circ - 70^\circ = 40^\circ$$

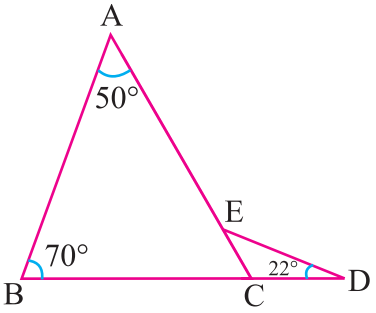
కావున , $x^\circ = 70^\circ$

మరియు $y^\circ = 40^\circ$.

ఉదాహరణ 3.5

ఇచ్చిన పటము 3.12లో $\angle DEC$ విలువ కనుగొనుము

సాధన



పటము *3.12*

ఏ త్రిభుజములోనైనా, బాహ్యకోణము, దానికి అభిముఖముగా నున్న అంతర కోణముల మొత్తమునకు సమానము అని మనకు తెలుసు.

ΔABC, లో $\angle ACD = \angle ABC + \angle CAB$

$\therefore \angle ACD = 70^0 + 50^0 = 120^0$.

అదేవిధంగా, $\angle ACD = \angle ECD = 120^0$.

ΔECD, నందు

$\angle ECD + \angle CDE + \angle DEC = 180^0$ [త్రిభుజములోని కోణముల మొత్తము]

$120^0 + 22^0 + \angle DEC = 180^0$

$\angle DEC = 180^0 - 142^0$

$\angle DEC = 38^0$

కృత్యము

T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 మరియు T_6 అను త్రిభుజములను నిర్మించుము. వాటిని ABC త్రిభుజములుగా పేర్కొనుము. A, B, C శీర్షములకు ఎదురుగా గల భుజములను వరుసగా a, b, c అని గుర్తించుము.

భుజములను కొలిచి, వాటి వివరములను క్రింది పట్టికలో పొందుపరుచుము.

Δ ల వ.సం.	a (సెం.మీ.)	b (సెం.మీ.)	c (సెం.మీ.)	$(c+a) > b$ ఒప్పు/తప్పు	$(a + b) > c$ ఒప్పు/తప్పు	$(b + c) > a$ ఒప్పు/తప్పు
T_1						
T_2						
T_3						
T_4						
T_5						
T_6						

పై పట్టిక నుండి నీవు ఏమి గమనించావు?

సిద్ధాంతము 3

ఒక త్రిభుజములోని రెండు భుజముల మొత్తము, మూడవ భుజము కంటె ఎక్కువగా వుండును

(దీనిని త్రిభుజముల అసమీకరణము అందురు. (Triangle Inequality))

సరిచూచుట

ABC త్రిభుజము నందు BC = 12సెం.మీ., AB = 8సెం.మీ., AC = 9సెం.మీ..

(i) AB = 8 సెం.మీ., AB + BC = 20 సెం.మీ.

(ii) BC = 12 సెం.మీ., BC + CA = 21 సెం.మీ.

(iii) CA = 9 సెం.మీ., CA + AB = 17 సెం.మీ.

ఇప్పుడు స్పష్టముగా,

(i) AB + BC > CA

(ii) BC + CA > AB

(iii) CA + AB > BC

కృత్యము

3సెం.మీ, 4సెం.మీ మరియు 5సెం.మీ కొలతలు గల స్కేలుతో త్రిభుజము నిర్మించుము. అదే విధముగా క్రింది కొలతలతో త్రిభుజములను నిర్మించుము.

ఎ) 5సెం.మీ, 7సెం.మీ, 11 సెం.మీ

బి) 5సెం.మీ, 7సెం.మీ, 14 సెం.మీ

సి) 5సెం.మీ, 7సెం.మీ 12సెం.మీ

మీరు కనుగొన్న విషయములను తెలుపుము.

అన్ని సందర్భములలోను, త్రిభుజములోని ఏ రెండు భుజముల మొత్తమైనను, మూడవ భుజము కంటె ఎక్కువగా ఉండునని మనము కనుగొన్నాము.

ఉదాహరణ 3.6

క్రింది వానిలో త్రిభుజమును ఏర్పరచు భుజములు ఏవి?

(i) 23సెం.మీ., 17సెం.మీ., 8సెం.మీ. (ii) 12సెం.మీ., 10సెం.మీ., 25సెం.మీ.
(iii) 9సెం.మీ., 7సెం.మీ., 16సెం.మీ.

సాధన

(i) ఇచ్చిన కొలతలు 23సెం.మీ., 17సెం.మీ., 8సెం.మీ.

ఇక్కడ 23 + 17 > 8, 17 + 8 > 23 మరియు 23 + 8 > 17.

23సెం.మీ., 17సెం.మీ., 8సెం.మీ. కొలతలు ఒక త్రిభుజమును ఏర్పరుచును.

(ii) ఇచ్చిన కొలతలు 12సెం.మీ., 10సెం.మీ., 25సెం.మీ.

ఇక్కడ 12 + 10 అనునది 25 కంటె పెద్దది కాదు. ie, [$12 + 10 \ngtr 25$]

∴ 12సెం.మీ.,10సెం.మీ.,25సెం.మీ. భుజములు త్రిభుజమును ఏర్పరచలేవు.

(iii) ఇచ్చిన కొలతలు 9సెం.మీ., 7సెం.మీ., 16సెం.మీ. 9 + 7 అనునది 16 కంటె పెద్దది కాదు. ie, [$9 + 7 = 16,\ 9 + 7 \ngtr 16$]

∴9సెం.మీ., 7సెం.మీ. మరియు 16సెం.మీ. భుజములు త్రిభుజమును ఏర్పచలేవు.

ఫలితములు

(i) $c + a > b \implies b < c + a \implies b - c < a$

(ii) $b + c > a \implies a < b + c \implies a - b < c$

(iii) $a + b > c \implies c < a + b \implies c - a < b$

పై ఫలితములను గమనించిన ఏ త్రిభుజములోనైనను రెండు భుజముల వ్యత్యాసము మూడవ భుజము కంటె తక్కువగా ఉండును.

అభ్యాసము 3.1

1. సరైన జవాబును కనుగొనుము :

(i) క్రింది వానిలో త్రిభుజకోణములుగా ఉన్నవి ఏవి?

(A) 35°, 45°, 90° (B) 26°, 58°, 96°

(C) 38°, 56°, 96° (D) 30°, 55°, 90°

(ii) క్రింది వానిలో ఏది సత్యము?

(A) సమభుజ త్రిభుజము సమాన కోణములు కలిగి ఉండును.

(B) సమద్విభుజ త్రిభుజము సమాన కోణములు కలిగి ఉండును.

(C) సమకోణములు కలిగి ఉన్న త్రిభుజము సమభుజ త్రిభుజముకాదు

(D) విషమ భుజ త్రిభుజము సమాన కోణములు కలిగి ఉండును.

(iii) ఒక త్రిభుజములోని రెండు బాహ్యకోణములు 130°, 140°, $x°$ అయిన $x°$ =................

(A) 90° (B) 100° (C) 110° (D) 120°

(iv) క్రింది కొలతలలో ఏవి త్రిభుజమును ఏర్పరచును?

(A) 11 సెం.మీ., 4 సెం.మీ., 6 సెం.మీ. (B) 13 సెం.మీ., 14 సెం.మీ., 25 సెం.మీ.

(C) 8 సెం.మీ., 4 సెం.మీ., 3 సెం.మీ. (D) 5 సెం.మీ., 16 సెం.మీ., 5 సెం.మీ.

(v) ఇచ్చిన రెండు కోణములను గమనించి, ఏది లంబకోణ త్రిభుజమును ఏర్పరుచునో కనుగొనుము

(A) 24°,66° (B) 36°,64° (C) 62°,48° (D) 68°,32°

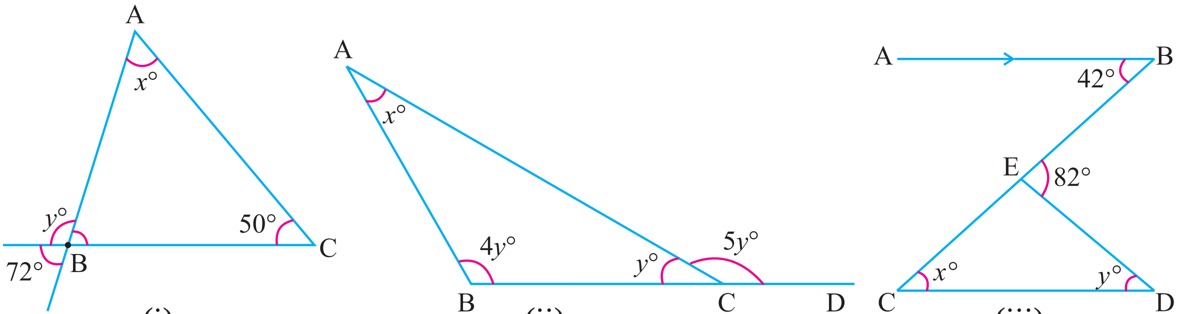
2. క్రింది వానిని సాధించుము.

ఒక త్రిభుజములోని కోణములు $(x - 35)°$,$(x - 20)°$ మరియు $(x + 40)°$ అయిన మూడు కోణములను కనుగొనుము.

3. ΔABC నందు, ∠A కొలత∠B కొలత కంటె 24° ఎక్కువగా ఉన్నది. బాహ్యకోణము ∠C = 108° అయిన ΔABC కోణములు కనుగొనుము.

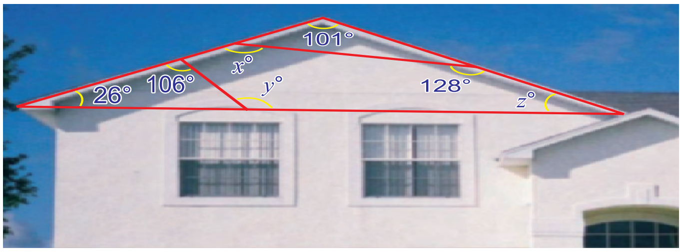
4. ΔABC నందు $\angle B$ మరియు $\angle C$ ల కోణ సమద్విఖండన రేఖలు O వద్ద ఖండించుకొనును. $\angle BOC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$ అని నిరూపించుము

5. క్రింది పటములలో x° మరియు y° ల విలువలను కనుగొనుము.



(i) (ii) (iii)

6. పటము నందు x°, y°మరియు z° కోణములను కనుగొనుము.



3.3 త్రిభుజముల సర్వసమానత్వము

రేఖా గణితములో ముఖ్యమైన "సర్వసమానత్వము" అనే విషయమును గురించి మనము తెలుసుకోబోవుచున్నాము.

సర్వసమానత్వమును గురించి తెలుసుకొనుటకు మనము క్రింది కృత్యమును చేద్దాము.

కృత్యము

పదిరూపాయలనోట్లు '2' తీసుకొనుము. వాటిని ఒక దానిపై ఒకటి ఉంచుము. నీవు ఏమి గమనించావు?

ఒకనోటు, మరొకదానిని పూర్తిగా కప్పివేయుచున్నది.

పై కృత్యము నుండి రెండు చిత్రాలు ఒకే ఆకారము మరియు ఒకే కొలత కలిగి ఉన్నవని మనము గమనించాము.

సాధారణంగా, రెండు రేఖా గణిత చిత్రాలు ఒకే ఆకారము, ఒకే కొలత కలిగి ఉంటే వాటిని "సర్వసమానము" అంటారు.

కృత్యము

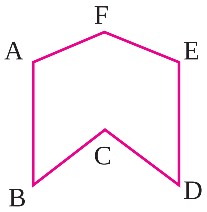
క్రింది వస్తువులు సర్వసమానమా? కాదా? అని పరిశీలించుము :

(a) ఒకే విలువ కలిగిన తపాలా బిళ్ళలు.

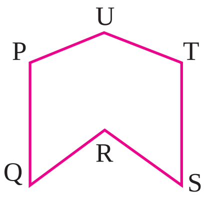
(b) ఒకే కట్టలోని బిస్కెట్లు.

(c) ఒకే బ్రాండులోని షేవింగ్ బ్లేడ్లు.

ఇపుడు మనము క్రింది తలములోని చిత్రములను గమనించెదము.



పటము *3.13*



పటము *3.14*

పై రెండు పటములను గమనించుము. అవి సర్వసమానములా? ఎట్లు సరిచూడగలము?

ఒక పటముపై మరొక పటమును ఉంచు పద్ధతి **(Superposition)** ని ఉపయోగించెదము..

మెట్టు 1 : పటము 3.13 ను ట్రేస్ పేపరుపై తీసుకొనుము. కార్బన్ పేపర్‌ను కూడా ఉపయోగించవచ్చును.

మెట్టు 2 : ఆ పటమును 3.14 పై వంకరలు లేకుండా, సాగ తీయకుండా ఉంచుము.

మెట్టు 3 : 3.13 పటము 3.14 పటమును పూర్తిగా కప్పివేసినది. కావున పై రెండు పటములు సర్వసమానములు.

సర్వసమానము: ఒక తలములోని రెండు పటములను, ఒకదానిపై ఒకటి ఉంచినపుడు అది పూర్తిగా కప్పబడినచో వాటిని సర్వ సమానములు అంటారు. దీనిని "≡" గుర్తుచే సూచించెదము.

3.3.1 (a) రేఖా ఖండములలో సర్వసమానత్వము

రెండు రేఖా ఖండములు ఒకే పొడవును కలిగి ఉన్నచో వాటిని "సర్వసమానములు" అంటారు.

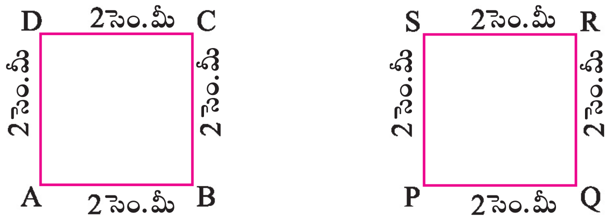
ఇక్కడ, AB పొడవు = CD పొడవు. కావున $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$

(b) కోణముల సర్వసమానత్వము

రెండు కోణములు ఒకే కొలత కలిగి ఉన్నచో వాటిని సర్వసమాన కోణములు అంటారు.

ఇక్కడ కోణ కొలతలు సమానము. కావున $\angle MON \equiv \angle PQR$.

(c) చతురస్రముల సర్వసమానత్వము



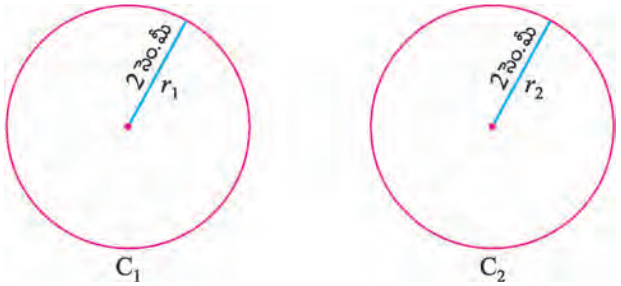
భుజముల కొలతలు సమానముగా ఉన్న రెండు చతురస్రములు సర్వసమానము.

ఇక్కడ, *ABCD* చతురస్ర భుజము = *PQRS* చతురస్ర భుజము పొడవు,

$\therefore$ *ABCD* చతురస్రము $\equiv$ *PQRS* చతురస్రము

(d) వృత్తముల సర్వసమానత్వము

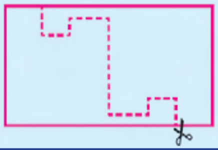
ఒకే వ్యాసార్థము కలిగిన రెండు వృత్తములు సర్వసమానములు.



ఇచ్చిన పటములో, C_1 వృత్త వ్యాసార్థము = C_2 వృత్త వ్యాసార్థము

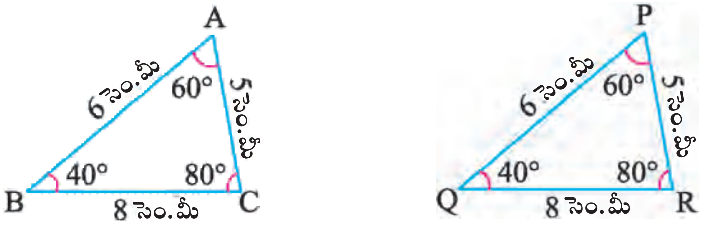
$\therefore$ వృత్తము $C_1 \equiv$ వృత్తము C_2

ప్రక్క పటమును అట్టముక్కపై గీచి చుక్కల ఆధారంగా రెండు ముక్కలుగా చేయుము. వీటి నుండి నీవేమి అర్థము చేసుకొంటివి.



పై నాలుగు సర్వసమానత్వములు తెలుసుకొన్న పిదప మనకు త్రిభుజముల సర్వసమానత్వములను గురించి తెలుసుకోవాలనిపిస్తుంది కదా?

క్రింది రెండు త్రిభుజములను గమనించుము.



ΔABC ని ΔPQR పై అనగా A ని P పైన, B ని Q పైన మరియు C ని R పైన ఉండునట్లు ఒక దానిపై ఒకటి ఉంచినచో, వాటి శీర్షములు, భుజములు, కోణములు ఒక దానిని ఒకటి ఖచ్చితముగా కప్పివేయును.

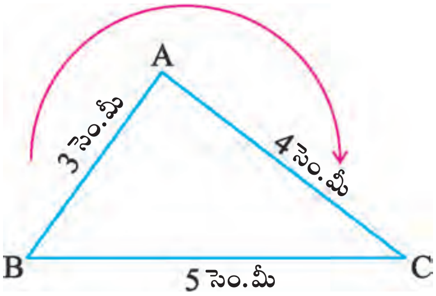
సంబంధిత భాగములను మనము ఇలా జత పరచవచ్చును.

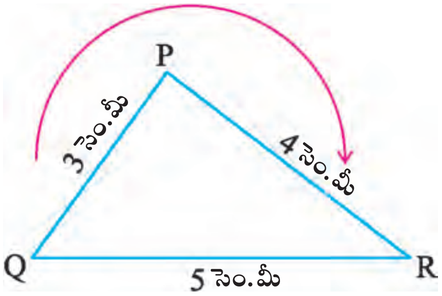
అనురూప శీర్షములు	అనురూప భుజములు	అనురూప కోణములు
A $\longleftrightarrow$ P	AB = PQ	$\angle$A = $\angle$P
B $\longleftrightarrow$ Q	BC = QR	$\angle$B = $\angle$Q
C $\longleftrightarrow$ R	CA = RP	$\angle$C = $\angle$R

3.3.2. త్రిభుజముల సర్వసమానత్వము

ఒక త్రిభుజములోని మూడు భుజములు, మూడు కోణములు వరుసగా, మరొక త్రిభుజములోని మూడు భుజములు మూడు కోణములకు సమానముగా ఉన్నచో వాటిని సర్వసమాన త్రిభుజములు అందురు.

గమనిక: రెండు త్రిభుజముల మధ్య సర్వసమానత్వ నియమమును, వాటి శీర్షముల ప్రాముఖ్య క్రమముగా వ్రాయవలెను.





$\Delta ABC \equiv \Delta PQR$, అయిన, సర్వసమానత్వమును $\Delta BAC \equiv \Delta QPR$, $\Delta CBA \equiv \Delta RQP$ ఇలా వివిధ రకములుగా వ్రాయవచ్చును. వీటిని త్రిప్పి (Anti clock wise) కూడ వ్రాయవచ్చును. .

3.3.3. త్రిభుజముల సర్వసమానత్వమునకు నియమములు

రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానమైన, వాటి 6 అనురూప భాగముల జతలు (3 భుజముల జతలు, 3 కోణముల జతలు) సమానము అని మనకు తెలుసును.

అయితే కొన్ని సందర్భములలో రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానమా? కాదా?అని తెలుసుకొనుటకు ఆ త్రిభుజముల మూడు భాగములు పరిశీలిస్తే చాలును. వీటినే సత్యప్రవచనములుగా ఇవ్వడం జరిగినది.

అటువంటి మూలాధారమైన నాలుగు సత్యప్రవచనములు వివిధ అనురూప భాగములు, కూర్పులతో జతపరచబడి ఉన్నవి. ఈ ప్రవచనములు త్రిభుజముల సరూపములను గుర్తించుటకు మనకు ఉపయోగపడును.

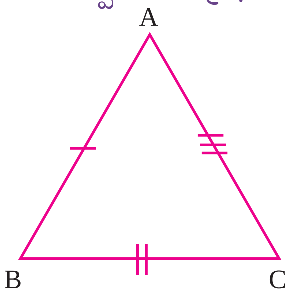
> **సత్య ప్రవచనం:** నిరూపణ లేకపోయినను సత్యము అని అంగీకరించుటకు వీలగు కొన్ని సాధారణ ధర్మములు.

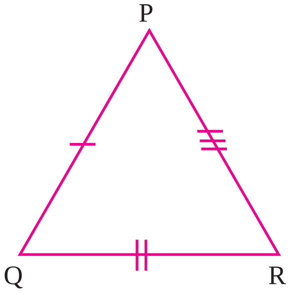
'S' అనునది భుజములను, 'A' అనునది కోణములను, 'R' అనునది లంబకోణమును, 'H' అనునది కర్ణమును సూచించిన, సత్యప్రవచనములను, క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

(i) భు.భు.భు. (SSS) సత్యప్రవచనము
(ii) భు.కో.భు. (SAS) సత్యప్రవచనము
(iii) కో.భు.కో. (ASA) సత్యప్రవచనము
(iv) లంబ.క.భు. (RHS) సత్యప్రవచనము

(i) భు-భు-భు. సత్యప్రవచనము (భుజము-భుజము-భుజము సత్యప్రవచనము)

ఒక త్రిభుజములోని మూడు భుజములు వరుసగా, మరొక త్రిభుజములోని మూడు భుజములకు సమానమైన వాటిని సర్వసమాన త్రిభుజములు అందురు.





ABC మరియు PQR లు రెండు త్రిభుజములైన,

AB = PQ, BC = QR మరియు CA= RP.

ΔABC ని ట్రేస్ పేపరుపై గుర్తించి, దానిని ΔPQR పై ఉంచిన,

అనగా AB పైన PQ , BC పైన QR మరియు AC పైన PR ఉండునట్లు కప్పి ఉంచుము.

AB = PQ $\Rightarrow$ P పైన A ఉండును Q పైన B ఉండును.

అదేవిధంగా BC = QR $\Rightarrow$ R పైన C ఉండును.

ఇపుడు, రెండు త్రిభుజములు ఒకదానిని ఒకటి పూర్తిగా కప్పి ఉన్నవి.

$\therefore \Delta ABC \equiv \Delta PQR$

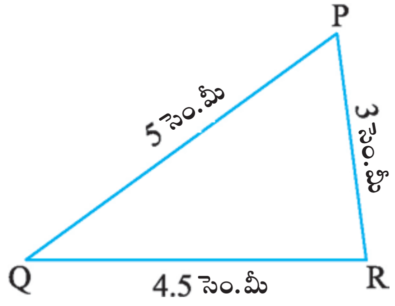
నిష్పత్తి '1' కి సమానము కానియెడల ఏమగును?

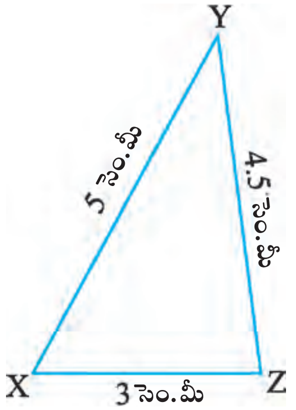
ఇక్కడ AB = PQ , BC = QR , CA = RP అని గమనించుము.

దీనినే $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = 1$ అని వ్రాయవచ్చును.

ఉదాహరణ 3.7

క్రింది పటములలో, ఇచ్చిన త్రిభుజములు భు.భు.భు. సత్య ప్రవచనం ద్వారా సర్వ సమానము అగునా? తెలుపుము.





సాధన

ΔPQR మరియు ΔXYZ ల భుజములను పోల్చుము.

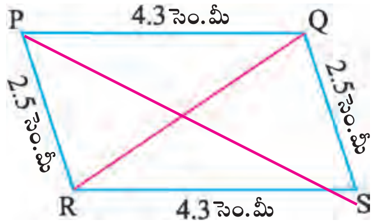
PQ = XY = 5సెం.మీ., QR = YZ = 4.5సెం.మీ. మరియు RP = ZX = 3సెం.మీ..

ΔPQR ను ΔXYZ పై ఉంచుము.

P ను X పైన Q ను Y పైన R ను Z పైన ఉంచిన ΔPQR , ΔXYZ ను పూర్తిగా ఆక్రమించును.

$\therefore \Delta PQR \equiv \Delta XYZ$ (భు.భు.భు. ద్వారా).

ఉదాహరణ 3.8



ప్రక్కపటంలో PQSR ఒక సమాంతర చతుర్భుజము.PQ =4.3 సెం.మీ. PR = 2.5 సెం.మీ. అయిన $\Delta PQR = \Delta PSR$ అగునా?

సాధన

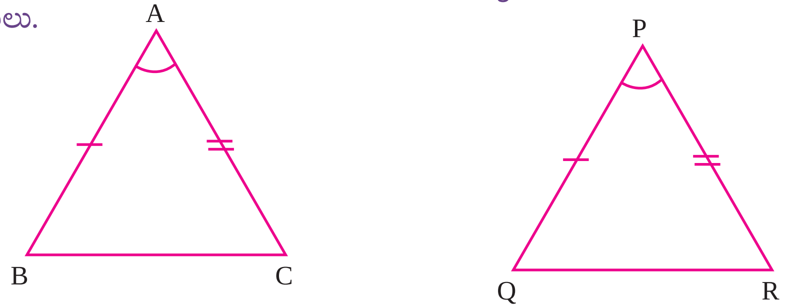
ΔPQR మరియు ΔPSR లు రెండు త్రిభుజములైన, PQ = SR = 4.3సెం.మీ మరియు, PR =QS = 2.5సెం.మీ. PR = PR (ఉమ్మడి భుజము)

$\therefore \Delta PQR \equiv \Delta RSP$ (భు.భు.భు.)

$\therefore \Delta PQR \not\equiv \Delta PSR$ (ΔRSP మరియు ΔPSR లు వేరే క్రమములో ఉన్నవి)

(ii) భు-కో-భు సత్య ప్రవచనము

ఒక త్రిభుజములోని ఏవేని రెండు భుజములు మరియు వాటి మధ్య కోణము మరియొక త్రిభుజములోని ఏవైన రెండు భుజములు మరియు వాటి మధ్య కోణమునకు సమానమైన, ఆ త్రిభుజములు సర్వసమానములు.



ΔABC మరియు ΔPQR అను రెండు త్రిభుజములను మనము తీసుకొందాము. వాటిలో $AB = PQ$, $AC = PR$ మరియు వాటి మధ్యకోణము $\angle BAC =$ వాటి మధ్యకోణం $\angle QPR$. ΔABC ని ట్రేస్ పేపరునందు గీచి, ΔPQR పై AB ను PQ పైన AC ను PR పైన ఉండునట్లు పొందుపరచుము.

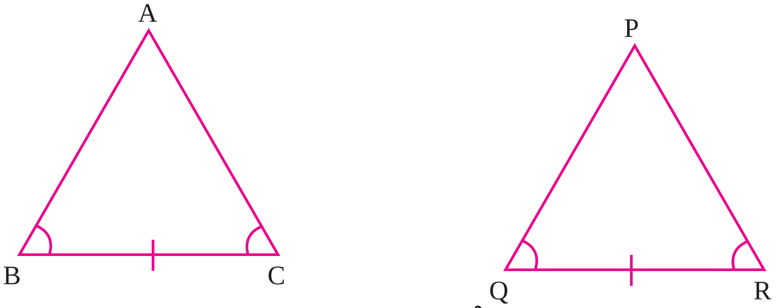
B శీర్షము Q శీర్షముపైన, C శీర్షము R శీర్షముపైన, BC భుజము QR భుజముపైన సరిగ్గా సరిపోవును.

$\therefore \Delta ABC$, ΔPQR పై ఖచ్చితముగా కప్పివేయబడినది.

కావున $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$

(iii) కో-భు-కో సత్య ప్రవచనం (కోణము-భుజము-కోణము)

ఒక త్రిభుజము యొక్క రెండు కోణములు మరియు ఒక భుజము, మరొక త్రిభుజమునందలి రెండు కోణములు మరియు అనురూప భుజమునకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానములు.



ΔABC మరియు ΔPQR అను త్రిభుజములను తీసుకొనుము.

ఇక్కడ $BC = QR, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$

ఒకదానిపై ఒకటి పొందుపరచు పద్ధతిలో $\angle ABC$, $\angle PQR$ ను $\angle BCA$, $\angle QRP$ లపై సరిగ్గా పొందుపరచబడును.

ఇప్పుడు B శీర్షము Q శీర్షముపైన, C శీర్షము R శీర్షముపైన ఉండును. కావున A శీర్షము, P శీర్షము పైన ఉండును.

$\therefore \Delta ABC$, ΔPQR పై సరిగ్గా సరిపోయినది. కావున $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$.

త్రిభుజములు సర్వసమానము, కావున, మిగిలిన భాగములు కూడా సమానము.

(i.e.) $AB = PQ$, $AC = PR$ మరియు $\angle A = \angle P$

కృత్యము

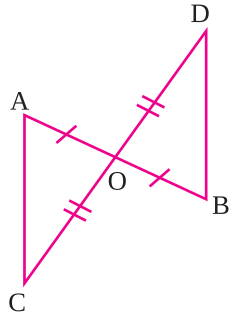
కత్తిరించిన కాగితపు ముక్కల ద్వారా క్రింది సత్యప్రవచనములను నిరూపించుము.

ఎ) భు-భు-భు సత్యప్రవచనము.

బి) కో-భు-కో సత్యప్రవచనము.

సూచించుట: సర్వసమాన త్రిభుజములలోని అనురూప భుజములు సర్వసమములు. దీనినే క్లుప్తముగా c.p.c.t.c. అని వ్రాస్తాము. ఇక ముందు సమస్యల సాధనలో ఈ సంకేతమును ఉపయోగిస్తాము.

ఉదాహరణ 3.9



AB మరియు CD లు 'O' వద్ద సమద్వి ఖండన చేసుకొనుచున్నవి. AC = BD అని నిరూపించుము.

సాధన

దత్తాంశము : AB, CD ల మధ్యబిందువు 'O'.

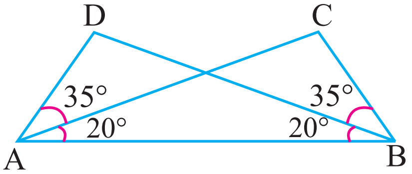
$\therefore$ AO = OB మరియు CO = OD.

సారాంశము : AC = BD

నిరూపణ : ΔAOC మరియు ΔBOD లు రెండు త్రిభుజములు అనుకొనుము.

AO = OB	(దత్తాంశము)
CO = OD	(దత్తాంశము)
$\angle AOC = \angle BOD$	(శీర్షాభిముఖ కోణములు)
$\Delta AOC \equiv \Delta BOD$	(భు–కో–భు– ప్రమాణము)
AC = BD	(c.p.c.t.c.)

ఉదాహరణ 3.10



పటము *3.13*

ప్రక్కపటములో ΔDAB మరియు ΔCAB లు ఒకే ఆధారము AB పై ఉన్నవి. $\Delta DAB \equiv \Delta CAB$ అని నిరూపించుము.

సాధన

ΔDAB మరియు ΔCAB త్రిభుజములను తీసుకొనుము.

$\angle DAB = 35^\circ + 20^\circ = 55^\circ = \angle CBA$ (ఇవ్వబడినది)

$\angle DBA = \angle CAB = 20^\circ$ (ఇవ్వబడినది)

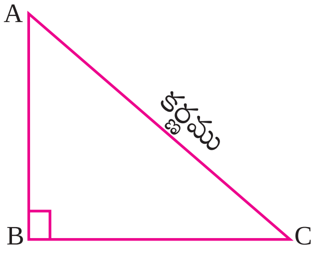
AB రెండు త్రిభుజముల ఉమ్మడి భుజము.

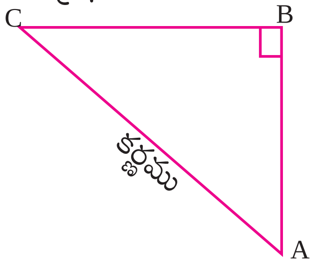
$\therefore \Delta DBA \equiv \Delta CAB$ (కో.భు.కో ప్రమాణము)

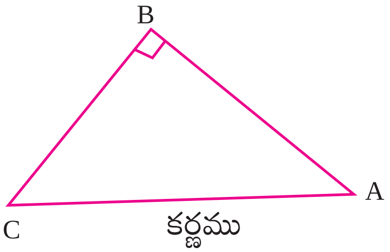
కర్ణము

కర్ణము అనగా అర్థము ఏమిటో నీకు తెలుసా?

'కర్ణము' అనునది లంబకోణ త్రిభుజమునకు సంబంధించిన ఒక పదము.



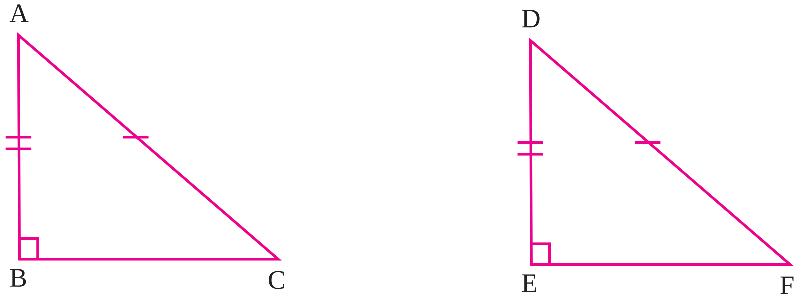




ABC లంబ కోణ త్రిభుజమును తీసుకొనుము. $\angle$B ఒక లంబకోణము. లంబకోణమునకు ఎదురుగానున్న భుజమును కర్ణము అందురు. ఇక్కడ AC ఒక కర్ణము.

(iv) లంబకోణ-క-భు (లంబకోణము-కర్ణము-భుజము)

ఒక లంబకోణ త్రిభుజములోని కర్ణము, ఒక భుజము, మరొక లంబకోణ త్రిభుజములోని కర్ణము మరియు భుజమునకు సమానమైన, ఆ రెండు త్రిభుజములను సర్వసమానములు అందురు.



ΔABC, ΔDEF లు రెండు త్రిభుజములు అనుకొనిన, ఇక్కడ $\angle B = \angle E = 90^\circ$

కర్ణము AC = కర్ణము DF (దత్తాంశం)

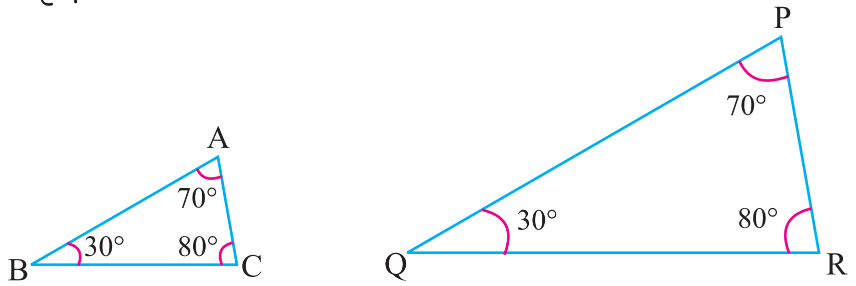
భుజము AB = భుజము DE (దత్తాంశం)

ఒక దానిపై ఒకటి పొందుపరచు పద్ధతిలో $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ లు సర్వసమానము అని గమనించగలము.

3.3.4 సర్వసమాన త్రిభుజములు అని చెప్పుటకు చాలని (not sufficient) నియమములు.

(i) కో-కో-కో (కోణము-కోణము-కోణము)

రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానము అని చెప్పుటకు ఈ ప్రమాణము చాలదు. ఎందుకు? క్రింది త్రిభుజముల నుండి మనము కారణము కనుగొందాము.



పై పటములలో,

$$\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q \text{ మరియు } \angle C = \angle R$$

అయితే ΔABC, ΔPQR కంటె చిన్నదిగా ఉన్నది.

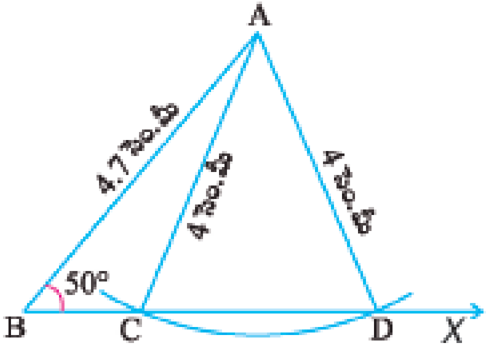
$\therefore$ ΔABC ని ΔPQR పై ఉంచిన అది పూర్తిగా కప్పబడలేదు. $\therefore \Delta ABC \not\equiv \Delta PQR$.

(ii) భు-భు-కో (భుజము-భుజము-కోణము)

మనము ఒక విషయమును ఇలా వివరిస్తాము.

ΔABC లో $\angle B = 50^\circ$, AB = 4.7 సెం.మీ. మరియు AC = 4 సెం.మీ. కొలతలు ఉండునట్లు త్రిభుజమును నిర్మించుము. BC ని X వరకు పొడిగించుము. A కేంద్రముగా ACవ్యాసార్ధము 4సెం.మీ. తో ఒక చాపము గీయుము. ఇది BX ను, C మరియు D ల వద్ద ఖండించును.

∴ AD కూడా 4సెం.మీ. [∵AC మరియు AD లు ఒకే వృత్త వ్యాసార్థములు]



ΔABC, ΔABD అను రెండు త్రిభుజముల నుండి

∠B ఉమ్మడి కోణము.

AB ఉమ్మడి భుజము

మరియు AC=AD =4 సెం.మీ. (నిర్మాణము)

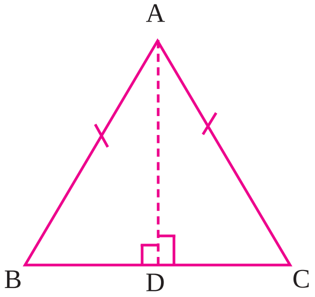
ΔABC లో AC భుజము, AB భుజము మరియు ∠B, ΔABD లో AD భుజము, AB భుజము, ∠B లు వరుసగా సర్వసమానములు. అయితే BC, BD లు సమానముకాదు.

∴ Δ ABC ≢ Δ ABD.

ఉదాహరణ 3.11

ఒక త్రిభుజములోని సమాన భుజములకు ఎదురుగాగల కోణములు సమానము అని నిరూపించుము.

సాధన



దత్తాంశము : ABC త్రిభుజములో AB = AC.

సారాంశము : AB కి అభిముఖ కోణము=AC కి అభిముఖ కోణము

(i.e.) ∠C = ∠B.

నిర్మాణము : BCకి AD అనే లంబమును గీయుము.

∴ ∠ADB = ∠ADC = 90°

నిరూపణ:

ΔABD మరియు ΔACD రెండు త్రిభుజముల నుండి,

AD ఉమ్మడి భుజము.

AB = AC		[△ABC ఒక సమద్విభుజ త్రిభుజము]
∠ADB = ∠ADC = 90°		[నిర్మాణము]
∴ ΔADB ≡ ΔADC		[లంబ-క-భు ప్రవచనము]
కావున	∠ABD = ∠ACD	[c.p.c.t.c]
(లేక)	∠ABC = ∠ACB.	
	∠B = ∠C. నిరూపించబడినది.	

దీనిని సమద్విభుజ త్రిభుజ సిద్ధాంతము అందురు.

ఉదాహరణ 3.12

ఒక త్రిభుజములోని సమాన కోణములకు ఎదురుగా గల భుజములు సమానము అని నిరూపించుము.

సాధన

దత్తాంశము : ΔABC నందు ∠B = ∠C.

సారాంశము : AB = AC.

నిర్మాణము : BC కి AD అనే లంబమును గీయుము

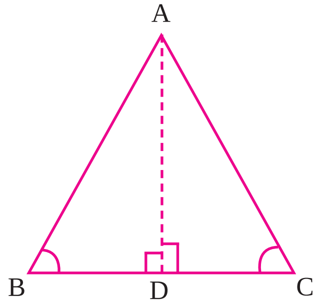
నిరూపణ:

$\angle ADB = \angle ADC = 90°$ [నిర్మాణము]

$\angle B = \angle C$ [దత్తాంశము]

AD ఉమ్మడి భుజము

$\therefore \Delta ADB \equiv \Delta ADC$ (కో.కో.భు. ప్రవచనము)



అందువలన, AB = AC. [c.p.c.t.c]

కావున ఒక త్రిభుజములో సమాన కోణములకు ఎదురుగా గల భుజములు సమానము.

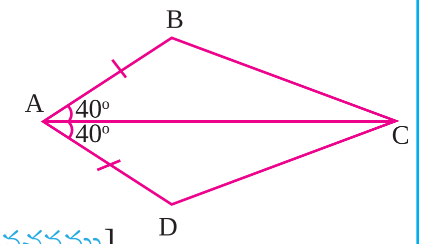
ఇది సమద్విభుజ త్రిభుజ సిద్ధాంతమునకు విపర్యము.

ఉదాహరణ 3.13

ఇచ్చిన పటమునందు $AB = AD$ మరియు $\angle BAC = \angle DAC$. $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$?అగునా? అయినచో, వాని అనురూప భాగముల మిగిలిన జతలను తెలుపుము.

సాధన

ΔABC మరియు ΔADC, లందు AC ఉమ్మడి భుజము



$\angle BAC = \angle DAC$ [దత్తాంశము]

$AB = AD$ [దత్తాంశము]

$\therefore \Delta ABC \equiv \Delta ADC$ [భు.కో.భు ప్రవచనము]

మిగిలిన అనురూప భాగముల జతలు

$BC = DC$, $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle ACB = \angle ACD$. [by c.p.c.t.c]

ఉదాహరణ 3.14

ΔPQR ఒక సమద్విభుజ త్రిభుజము. $PQ = PR$, QP 'S' వరకు పొడిగించబడినది. మరియు PT, బాహ్యకోణము గా ఏర్పడిన $2x°$ కోణమును సమద్విఖండన చేయుచున్నది. అయిన $\angle Q = x°$ మరియు $PT \parallel QR$ అని నిరూపించుము.

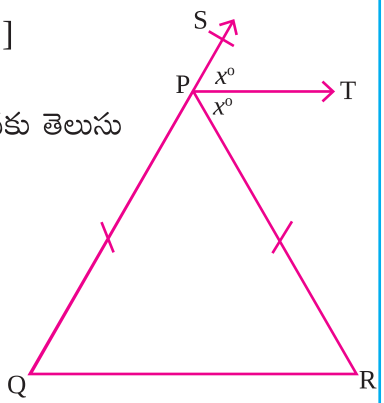
సాధన

దత్తాంశము: ΔPQR ఒక సమద్విభుజ త్రిభుజము $PQ = PR$.

నిరూపణ : బాహ్యకోణము $\angle SPR$ ను PT సమద్విఖండనము చేయుచున్నది.

కావున $\angle SPT = \angle TPR = x°$.

$\therefore \angle Q = \angle R$. [సమద్విభుజ త్రిభుజ విపర్యము]



అంతేకాకుండా, ఏ త్రిభుజములోనైనా

బాహ్యకోణము = అంతరాభిముఖ కోణముల మొత్తము–అని మనకు తెలుసు

ΔPQR నందు, బాహ్యకోణము $\angle SPR = \angle PQR + \angle PRQ$

$$2x° = \angle Q + \angle R$$

$$= \angle Q + \angle Q$$

$$2x° = 2\angle Q$$

$$x° = \angle Q$$

కావున $\angle Q = x°$.

$PT \parallel QR$ అని నిరూపించుటకు,

PT, QR రేఖలు తిర్యగ్రేఖ SQచే ఖండించబడుచున్నది $\angle SPT = x^o$.

$\angle Q = x^o$ అని మనము ముందే నిరూపించాము.

కావున $\angle SPT$ మరియు $\angle PQR$ లు అనురూపకోణములు.

$\therefore\ PT \parallel QR$

అభ్యాసము 3.2

1. సరైన జవాబును సూచించుము.

(i) ΔXYZ, అను సమద్విభుజ త్రిభుజము నందు $XY = YZ$ అయిన, క్రింది వానిలో ఏ కోణములు సమానము?

(A) $\angle X$ మరియు $\angle Y$ (B) $\angle Y$ మరియు $\angle Z$

(C) $\angle Z$ మరియు $\angle X$ (D) $\angle X$ $\angle Y$ మరియు $\angle Z$

(ii) ΔABC మరియు ΔDEF, $\angle B = \angle E$, $AB = DE$, $BC = EF$. ఈ రెండు త్రిభుజములు .... ప్రవచనము ద్వారా సర్వసమానములు అగును.

(A) భు.భు.భు (B) కో.కో.కో (C) భు.కో.భు (D) కో.భు.కో

(iii) ఒక తలము నందుగల రెండు చిత్రములు సర్వసమానములని చెప్పుటకు .....కలిగి ఉండవలెను.

(A) ఒకే కొలతలు (B) ఒకే రూపములు

(C) ఒకే రూపము మరియు ఒకే కొలతలు (D) ఒకే కొలత, వేరే రూపము

(iv) ABC త్రిభుజము నందు $\angle A = 60^\circ$, $AB = AC$, అయిన ABC ఒక ------ త్రిభుజము.

(A) ఒక లంబకోణ (B) ఒక సమ భుజ (C) ఒక సమద్విభుజ (D) ఒక విషమభుజ

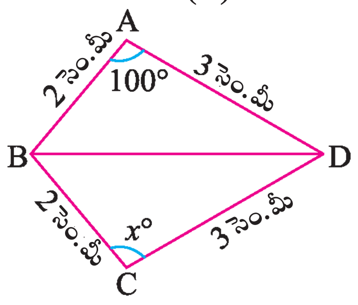
(v) ABC త్రిభుజము నందు $\angle A = 90^\circ$ అయిన కర్ణము ....

(A) AB (B)BC (C) CA (D) ఏదీకాదు.

(vi) ΔPQR నందు PQ, PR ల మధ్య ఏర్పడుకోణము

(A) $\angle P$ (B) $\angle Q$

(C) $\angle R$ (D) ఏదీకాదు.

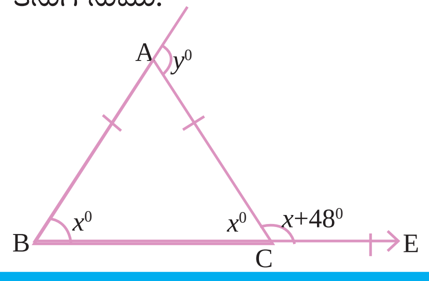


(vii) ప్రక్కపటమునందు x^o విలువ ----------

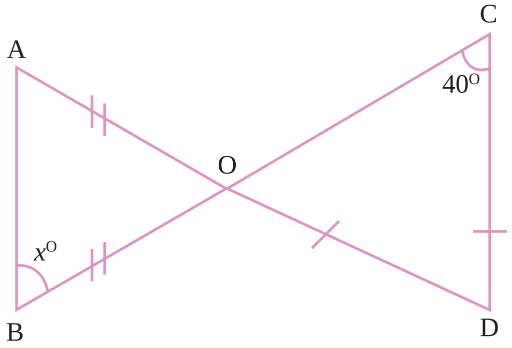
(A) 80° (B) 100°

(C) 120° (D) 200°

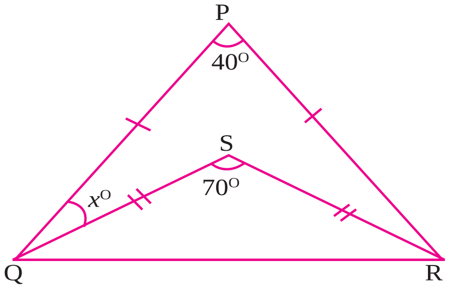
2. పటము ABC త్రిభుజము నందు $AB=AC$ అయిన x^o మరియు y^o లను కనుగొనుము.



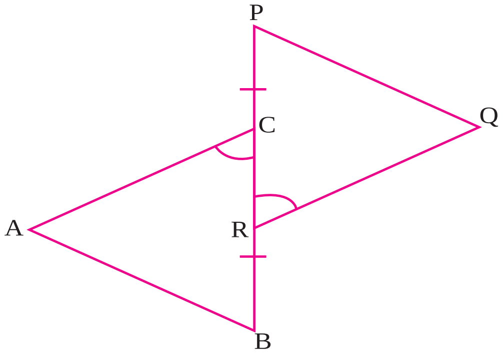
3. పటమునందు x^o ను కనుగొనుము.



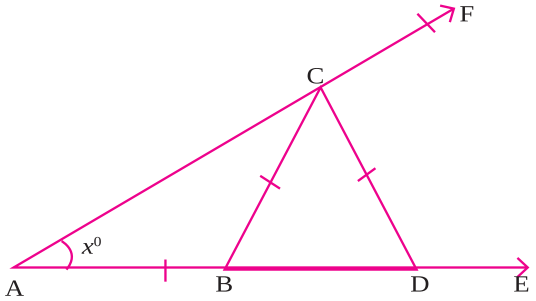
4. క్రింది పటమునందు ΔPQR మరియు ΔSQR లు సమద్విభుజ త్రిభుజములు అయిన x° కనుగొనుము.



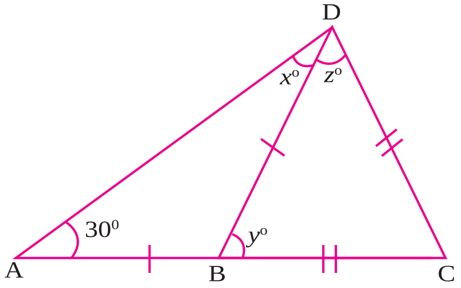
5. క్రింది పటమునందు BR = PC $\angle ACB = \angle QRP$ మరియు $AB \parallel PQ$. అయిన AC= QR అని నిరూపించుము.



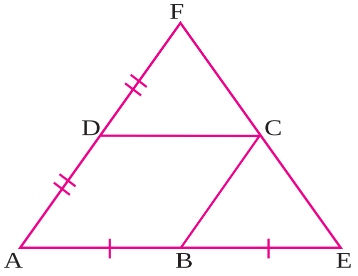
6. క్రింది పటమునందు AB = BC = CD, $\angle A = x^{\circ}$. అయిన $\angle DCF = 3\angle A$ అని నిరూపించుము.



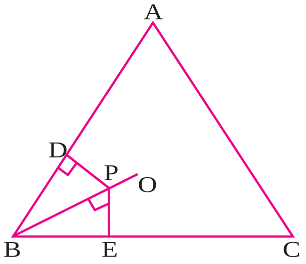
7. క్రింది పటము నందు AB = BD, BC=DC మరియు $\angle DAC = 30^{\circ}$ అయిన $x^{\circ}, y^{\circ}, z^{\circ}$ లను కనుగొనుము.



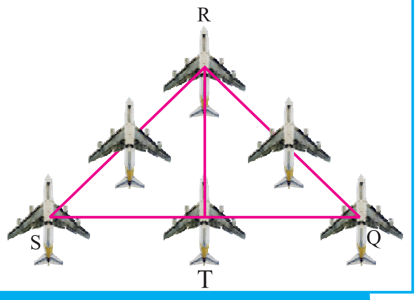
8. క్రింది పటమునందు ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము. AB, E వరకు పొడిగించబడినది కావున AB = BE, AD, F వరకు పొడిగించబడినది. కావున AD=DF. $\Delta FDC \equiv \Delta CBE$ అని నిరూపించుము.



9. క్రింది పటమునందు ΔABC లోని $\angle ABC$ కోణమును BO సమద్విఖండనచేయుచున్నది. BO పైన P బిందువు కలదు. P నుండి BA మరియు BC లకు గీచిన లంబములు సమానము అని నిరూపించుము.



10. ఆకాశంలో ఎగురుచున్న భారత వాయుసేన విమానములు ఉమ్మడి భుజము గల రెండు త్రిభుజములుగా కనిపించుచున్నవి. SQ మరియు SR ల మధ్యబిందువు T, మరియు SR= RQ అయిన $\triangle SRT \equiv \triangle QRT$ అని నిరూపించుము.



పాఠ్యభాగ సారాంశము

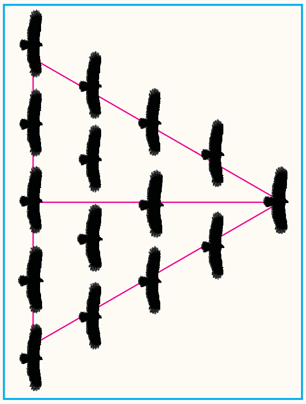
- ఒక త్రిభుజములోని మూడు కోణముల మొత్తము 180°.
- ఒక త్రిభుజములోని భుజమును పొడిగించినపుడు ఏర్పడు బాహ్యకోణము దాని రెండు అంతరాభిముఖ కోణముల మొత్తమునకు సమానమగును.
- త్రిభుజములోని ఏదేని రెండు భుజముల మొత్తము మూడవ భుజముకంటె పెద్దదిగా ఉండును.
- ఒక తలములోని రెండు పటములు, ఒక దానిపై ఒకటి పొందుపరచినపుడు సరిగ్గా సరిపోయినచో వాటిని సర్వసమాన పటములు (Congruent) అంటారు. దీనిని "≡" గుర్తుచే గుర్తిస్తారు.
- ఒక త్రిభుజములోని మూడు భుజములు, మూడు కోణములు, మరొక త్రిభుజములోని మూడు భుజములు, మూడు కోణములకు సమానమైన, ఆ త్రిభుజములను సర్వసమాన త్రిభుజములు అంటారు.
- **భు.భు.భు. సత్య ప్రవచనము** : ఒక త్రిభుజములోని మూడు భుజములు, వరుసగా మరొక త్రిభుజములోని మూడు భుజములకు సమానమైన ఆ త్రిభుజములను సర్వసమానములు అంటారు.
- భు.కో.భు. సత్య ప్రవచనము : ఒక త్రిభుజములోని రెండు భుజములు వాటి మధ్యకోణము, వరుసగా మరొక త్రిభుజములోని రెండు భుజములు వాటి మధ్య కోణమునకు సమానమైన, ఆ త్రిభుజములను సర్వసమానములు అందురు.
- కో-భు-కో సత్య ప్రవచనము: ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు ఒక భుజము వరుసగా, మరొక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు, ఒక భుజమునకు సమానమైన, ఆ త్రిభుజములు సర్వసమానములు.
- లంబ-క-భు సత్య ప్రవచనము: ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము, ఒక భుజము వరుసగా మరొక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము, ఒక భుజమునకు సమానమైన ఆ త్రిభుజములు సర్వసమానములు. .

గణిత సంఘ కృత్యము

సర్వసమానముల ముఖ్యత్వము

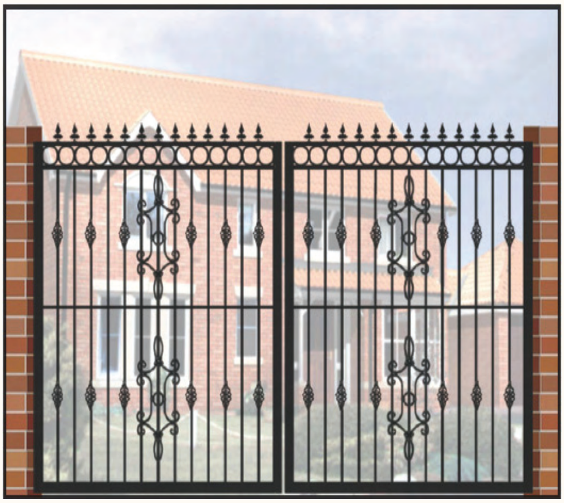
ప్రియ విద్యార్థులారా!

సర్వసమానత్వము అనే భావనను మన నిత్య జీవితములో చాలా విషయములలో ఉపయోగిస్తున్నాము. మన ఇంటిలో ఉపయోగించే "రెండు తలుపుల" ద్వారములో రెండు తలుపులు సర్వసమానముగా ఉండును. పక్షి రెక్కలు ఒక దాని కొకటి సర్వసమానముగా ఉండును. ఈ విధంగా చాలా ఉదాహరణలు చెప్పగలము.



ఆకాశములో ఎగిరే పక్షులు, త్రిభుజాకారంలో రూపొంది ఎగురును. ముందుగా ఎగిరే పక్షి ద్వారా ఒక మధ్యగతము గీచినచో నీవు సర్వ సమానత్వమును చూడగలవు. ఆ సర్వ సమానత్వము లేక పోయినచో, ఆ వరుసలో చివరగా వచ్చు పక్షులు స్థిరత్వము కోల్పోయి, ఎగుర జాలవు.

ఇపుడు, ప్రకృతిలోను, నీ నిజ జీవితములోను చూడగల సర్వసమాన రూపములను గుర్తించుము.



ప్రయోగాత్మక రేఖాగణితము

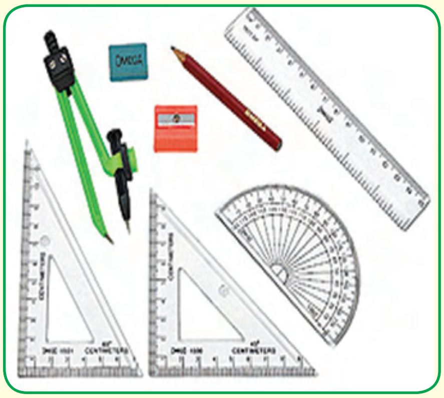
4

4.1 పరిచయము

4.2 చతుర్భుజము

4.3 సమలంబ చతుర్భుజము

4.4 సమాంతర చతుర్భుజము



గాస్

[క్రీ.శ 1777-1855]

గాస్ ఒక జర్మన్ గణిత శాస్త్రవేత్త. గాస్ తన పదిహేడవ వయస్సులో సమ p భుజి (p భుజములుగల బహుభుజి) ను నిర్మించుటను పరిశీలించెను. ఇందులో p ఒక ప్రధానాంకమగును. అప్పట్లో $p = 3$ మరియు $p= 5$ నకు మాత్రము సాధ్యమైనది. సమ p భుజి నిర్మించబడుననిన p ఒక ప్రధానాంకము "ఫెరమెట్ సంఖ్య" (i.e.) $p = 2^{2n} + 1$ అదే విధముగా దాని విపర్యము కూడా అని కనుగొనినది గాస్ అగును.

4.1 పరిచయము

పూర్వ కాలములో ఈజిప్టులు తమ రేఖా గణితము యొక్క ప్రయోగాత్మక నైపుణ్యమును వారి పథక నిర్మాణములలోను, పరిమాణములను కొలుచుటలోను ఉపయోగించియున్నారు. వారి నాగరికతలో కూడా ప్రయోగాత్మక రేఖా గణితమును ఉపయోగించియున్నారు. అనేక గొప్ప నిర్మాణములను వారు కొలబద్దలు మరియు వృత్త లేఖిని సహాయముతో నిర్మించినారు.

గణిత శాస్త్రము యొక్క తొలి శాఖలలో ఒకటి రేఖా గణితము. రేఖా గణితము, సిద్ధాంత రేఖా గణితము మరియు ప్రయోగత్మక రేఖా గణితముగా వర్గీకరింపబడెను. రేఖా గణిత సిద్ధాంతములను చూచాయగా గీయబడిన పటము యొక్క నిర్మాణ క్రమముతో సిద్ధాంత రేఖా గణితములో వివరించబడును. రేఖా గణిత ఉపకరణములను ఉపయోగించి సరియైన పటమును గీచి వాటి నిర్మాణ క్రమముతో ప్రయోగాత్మక రేఖా గణితము వివరించబడును.

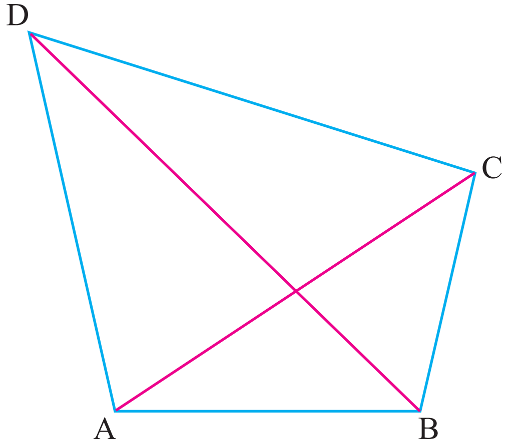
కొన్ని సమతల రేఖా చిత్రముల నిర్మాణము, ధర్మములు మరియు వాటి వైశాల్యమును కనుగొను సూత్రములను క్రింది తరగతులలో నేర్చుకొని యున్నాము. ఈ భాగమునందు కొన్ని ప్రత్యేక సమతల రేఖాగణిత చిత్రములను రేఖాగణిత పరికరములను ఉపయోగించి నిర్మించుటను నేర్చుకొనెదము.

4.2 చతుర్భుజము

4.2.1 పరిచయము

చతుర్భుజము, చతుర్భుజముల యొక్క ధర్మములను గూర్చి 7వ తరగతిలో నేర్చుకొనియున్నాము. వాటిని ఒక సారి గుర్తు తెచ్చుకొనుము.

పటము 4.1 లో A, B, C, D అను బిందువులు ఒకే తలములో అమరియున్నవి. ఏ మూడు బిందువులు ఒకే రేఖపై లేవు.



పటము 4.1

$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ లు శీర్షము వద్ద మాత్రము ఖండించు కొనును. చతుర్భుజము నాలుగు భుజములుగల సమతల పటము అని నేర్చుకొని యున్నాము. చతుర్భుజముల యొక్క నాలుగు కోణముల మొత్తము 360° అని మనకు తెలియును.

నాలుగు రేఖా ఖండములచే మూయబడిన సమతల పటమును చతుర్భుజము అందుము. $(\overline{AB}, \overline{AD})$, $(\overline{AB}, \overline{BC})$, $(\overline{BC}, \overline{CD})$, $(\overline{CD}, \overline{DA})$ అనునవి ఆసన్న భుజములు. $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ లు కర్ణములు అగును.

చతుర్భుజము ABCD లో $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ మరియు $\angle D$ (లేక $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$) లు కోణములు అగును.

కోణముల మొత్తము $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

గమనిక : (i) చతుర్భుజమును చక్రీయముగా ABCD లేక BCDA అని పేర్కొనవచ్చును.

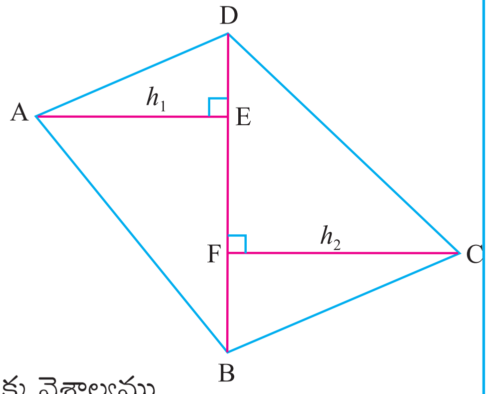
(ii) చతురస్రము, దీర్ఘ చతురస్రము, సమబాహు చతుర్భుజము, సమాంతర చతుర్భుజము, సమలంబ చతుర్భుజము అనునవి కూడ చతుర్భుజములగును.

(iii) ఒక చతుర్భుజమునందు నాలుగు శీర్షములు, నాలుగు భుజములు, నాలుగు కోణములు మరియు రెండు కర్ణములు ఉండును.

4.2.2 చతుర్భుజ వైశాల్యము

ABCD అను చతుర్భుజములో $\overline{BD}$ ఒక కర్ణము అగును.

$\overline{AE}$ మరియు $\overline{FC}$ అనునవి శీర్షములు A మరియు C నుండి కర్ణము $\overline{BD}$ నకు గీయబడిన లంబములు.



పటము 4.2

పటము 4.2 లో

చతుర్భుము ABCD యొక్క వైశాల్యము

$= \triangle ABD$ యొక్క వైశాల్యము $+ \triangle BCD$ యొక్క వైశాల్యము.

$$= \frac{1}{2} \times BD \times AE + \frac{1}{2} \times BD \times CF$$

$$= \frac{1}{2} \times BD \times (AE + CF) = \frac{1}{2} \times d \times (h_1 + h_2)$$ చ. ప్రమాణాలు

ఇక్కడ $BD = d$, $AE = h_1$ మరియు $CF = h_2$.

చతుర్భుజ వైశాల్యమనునది ఎదుటి శీర్షముల నుండి కర్ణమునకు గీయబడు లంబపుటెత్తుల కూడిక మొత్తము కర్ణముల అర్ధ గుణక లబ్ధమగును.

$A = \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$ చదరపు ప్రమాణములు ఇక్కడ 'd' అనునది కర్ణము, 'h_1' మరియు h_2 అనునది ఎదుటి శీర్షముల నుండి కర్ణమునకు గీయబడిన లంబపుటెత్తులగును.

కృత్యము

కాగితమును మడుచు విధానము ద్వారా $A = \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$ను సరిచూడుము

4.2.3 చతుర్భుజ నిర్మాణము

చతుర్భుజ నిర్మాణమును గూర్చి నేర్చుకొనెదము.

చతుర్భుజమును నిర్మించుటకు ఇవ్వబడిన వివరముల నుండి ముందుగా త్రిభుజమును నిర్మించి పిదప నాల్గవ శీర్షమును కనుగొనవచ్చును. త్రిభుజమును నిర్మించుటకు మూడు స్వతంత్ర కొలతలు అవసరము. నాల్గవ శీర్షమును గుర్తించుటకు ఇంకను రెండు కొలతలు అవసరము. అనగా చతుర్భుజమును నిర్మించుటకు ఐదు స్వతంత్ర కొలతలు అవసరము.

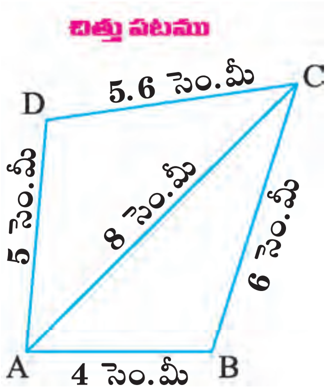
క్రింది ఇవ్వబడిన విధములుగా కొలతలు ఇచ్చిన, ఒక చతుర్భుజమును నిర్మించవచ్చును.

(i) నాలుగు భుజములు మరియు ఒక కర్ణము.
(ii) నాలుగు భుజములు మరియు ఒక కోణము
(iii) మూడు భుజములు, ఒక కర్ణము మరియు ఒక కోణము
(iv) మూడు భుజములు మరియు రెండు కోణములు
(v) రెండు భుజములు మరియు మూడు కోణములు

4.2.4 ఇవ్వబడిన నాలుగు భుజములు మరియు ఒక కర్ణముతో చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 4.1

క్రింది కొలతలతో ABCD అను చతుర్భుజమును నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము. AB = 4 సెం.మీ., BC = 6 సెం.మీ., CD = 5.6 సెం.మీ., DA = 5 సెం.మీ. మరియు AC = 8 సెం.మీ.



పటము 4.3

సాధన

ఇవ్వబడినది: AB = 4 సెం.మీ., BC = 6 సెం.మీ., CD = 5.6 సెం.మీ.
DA = 5 సెం.మీ. మరియు AC = 8 సెం.మీ..

చతుర్భుజ నిర్మాణము

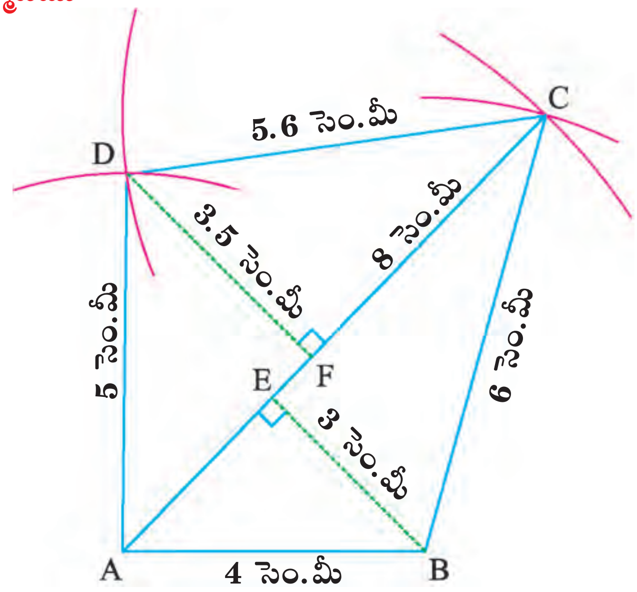
నిర్మాణ క్రమము

దశ 1 : చిత్తు పటమును గీచి ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తించుము

దశ 2 : AB = 4 సెం.మీ.ల రేఖా ఖండమును గీయుము.

దశ 3 : A మరియు B లను కేంద్రములుగా తీసుకొని 8 సెం.మీ. 6 సెం.మీ.ల వ్యాసార్థములతో రెండు చాపములను గీయుము. అవి C వద్ద ఖండించుకొనును.

చతుర్భుజ నిర్మాణము



పటము 4.4

దశ 4 : $\overline{AC}$ మరియు $\overline{BC}$ లను గీయుము.

దశ 5 : A మరియు C లను కేంద్రములుగా తీసుకొని 5 సెం.మీ., 5.6 సెం.మీ. వ్యాసార్ధములతో రెండు చాపములను గీయుము, అవి D వద్ద ఖండించుకొనును.

దశ 6 : $\overline{AD}$ మరియు $\overline{CD}$ లను గీయుము.
ABCD కావలసిన చతుర్భుజము.

దశ 7 : B నుండి $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ మరియు D నుండి $\overline{DF} \perp \overline{AC}$ లను గీయుము. వాటి యొక్క పొడవును కొలువుము. BE = h_1 = 3 సెం.మీ., DF = h_2 = 3.5 సెం.మీ. AC = d = 8 సెం.మీ.

వైశాల్యమును లెక్కించుట

చతుర్భుజము ABCD లో d = 8 సెం.మీ., h_1 = 3 సెం.మీ. మరియు h_2 = 3.5 సెం.మీ..

చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యము $= \frac{1}{2} d\,(h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2}(8)(3 + 3.5)$

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 6.5$

= 26 సెం.మీ^{2}.

4.2.5 ఇవ్వబడిన నాలుగు భుజములు మరియు ఒక కోణముతో చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 4.2

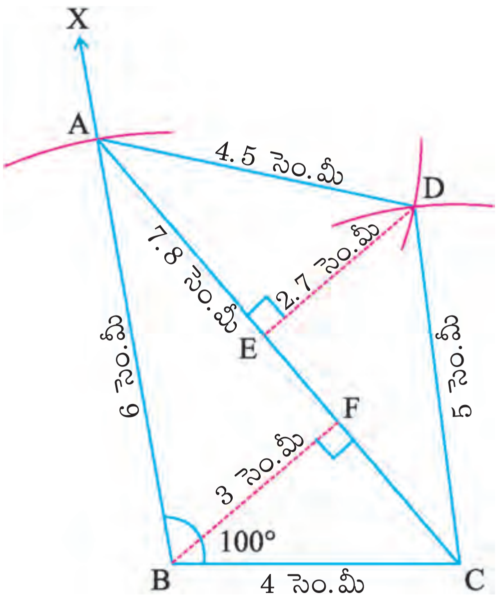
AB=6 సెం.మీ., BC=4 సెం.మీ., CD=5 సెం.మీ., DA= 4.5 సెం.మీ., $\angle ABC = 100^\circ$ అను కొలతలతో చతుర్భుజము ABCD నిర్మించి వాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన

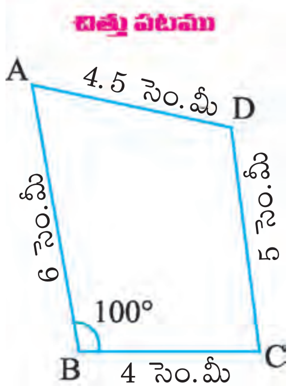
ఇవ్వబడినవి:

AB = 6 సెం.మీ., BC = 4 సెం.మీ., CD = 5 సెం.మీ., DA = 4.5 సెం.మీ. $\angle ABC = 100^\circ$.

చతుర్భుజ నిర్మాణము



పటము 4.6



పటము 4.5

నిర్మాణ క్రమములు

దశ 1 : చిత్తు పటమును గీచి ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తించుము.

దశ 2 : BC = 4 సెం.మీ. రేఖా ఖండమును గీయుము.

దశ 3 : $\overline{BC}$ మీదగా B వద్ద $\angle CBX = 100^\circ$ ఉండునట్లుగా కోణమును గుర్తించుము.

దశ 4 : B ను కేంద్రముగా తీసికొని 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో ఒక చాపమును గీయుము. ఇది $\overline{BC}$ ను A వద్ద ఖండించును.

దశ 5 : C మరియు A లను కేంద్రములుగా తీసుకొని 5 సెం.మీ. మరియు 4.5సెం.మీ. వ్యాసార్థములతో రెండు చాపములను గీయుము. అవి D వద్ద ఖండించుకొనును.

దశ 6 : $\overline{CD}$ మరియు $\overline{AD}$ లను గీయుము.

ABCD కావలసిన చతుర్భుజము

దశ 7 : B నుండి $\overline{BF} \perp \overline{AC}$ మరియు D నుండి $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ లను గీయుము BF, DE ల పొడవును కొలువుము.

$BF = h_1 = 3$ సెం.మీ., $DE = h_2 = 2.7$ సెం.మీ., $AC = d = 7.8$ సెం.మీ..

వైశాల్యమును లెక్కించుట

చతుర్భుజము ABCD, లో $d = 7.8$ సెం.మీ., $h_1 = 3$ సెం.మీ. , $h_2 = 2.7$ సెం.మీ..

చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యము $= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$

$$= \frac{1}{2}(7.8)(3+2.7)$$

$$= \frac{1}{2} \times 7.8 \times 5.7$$

$= 22.23$ సెం.మీ^{2}.

4.2.6 ఇవ్వబడిన మూడు భుజములు, ఒక కర్ణము మరియు ఒక కోణముతో చతుర్భుజమును నిర్మించుట

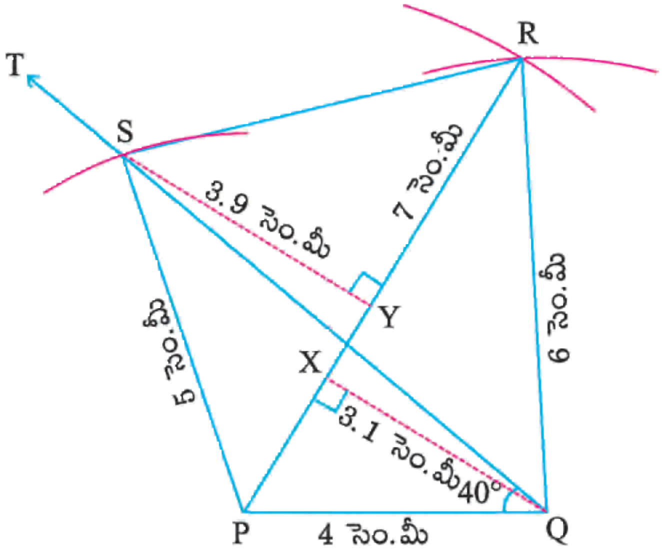
ఉదాహరణ 4.3

PQ = 4 సెం.మీ., QR = 6 సెం.మీ., PR = 7 సెం.మీ., PS = 5 సెం.మీ. , ∠PQS = 40° కొలతలతో చతుర్భుజము PQRS నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

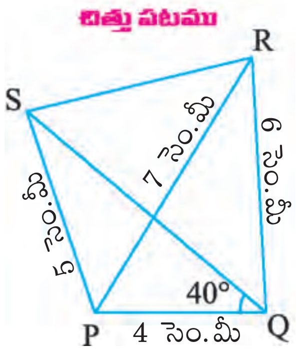
సాధన

ఇవ్వబడినవి: PQ = 4 సెం.మీ., QR = 6 సెం.మీ., PR= 7 సెం.మీ., PS= 5 సెం.మీ. మరియు ∠PQS = 40°.

చతుర్భుజ నిర్మాణము



పటము 4.8



పటము 4.7

నిర్మాణ క్రమము

దశ 1 : చిత్తు పటమును గీచి ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తించుము.

దశ 2 : PQ = 4 సెం.మీ. రేఖా ఖండమును గీయుము

దశ 3 : P మరియు Q లను కేంద్రముగా తీసుకొని 7 సెం.మీ. మరియు 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థములతో రెండు చాపములను గీయుము. అవి R వద్ద ఖండించుకొనెను.

దశ 4 : $\overline{PR}$ మరియు $\overline{QR}$ లను గీయుము

దశ 5 : $\overline{PQ}$ మీదగా Q వద్ద $\angle PQT = 40^\circ$. ఉండునట్లుగా కోణమును గీయుము.

దశ 6 : P ను కేంద్రముగా తీసుకొని 5 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో ఒక చాపమును గీయుము. ఇది $\overrightarrow{QT}$ ను S వద్ద ఖండించును.

దశ 7 : $\overline{PS}$ గీయుము. కావలసిన చతుర్భుజము PQRS అగును.

దశ 8 : Q నుండి $\overline{QX} \perp \overline{PR}$ మరియు S నుండి $\overline{SY} \perp \overline{PR}$ లను గీయుము QX, SY ల పొడవును కొలువుము. QX = h_1 = 3.1 సెం.మీ., SY = h_2 = 3.9 సెం.మీ. PR = d = 7 సెం.మీ.

వైశాల్యమును లెక్కించుట

చతుర్భుజము PQRS లో , $d = 7$ సెం.మీ. , $h_1 = 3.1$ సెం.మీ. , $h_2 = 3.9$ సెం.మీ.

చతుర్భుజము PQRS యొక్క వైశాల్యము $= \frac{1}{2} d\,(h_1 + h_2)$

$$= \frac{1}{2}(7)\,(3.1 + 3.9)$$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \times 7$$

$= 24.5$ సెం.మీ^{2}.

4.2.7 ఇవ్వబడిన మూడు భుజములు మరియు రెండు కోణములతో చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 4.4

AB = 6.5 సెం.మీ., AD = 5 సెం.మీ., CD = 5 సెం.మీ., ∠BAC = 40° మరియు ∠ABC = 50° కొలతలతో చతుర్భుజము ABCD నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

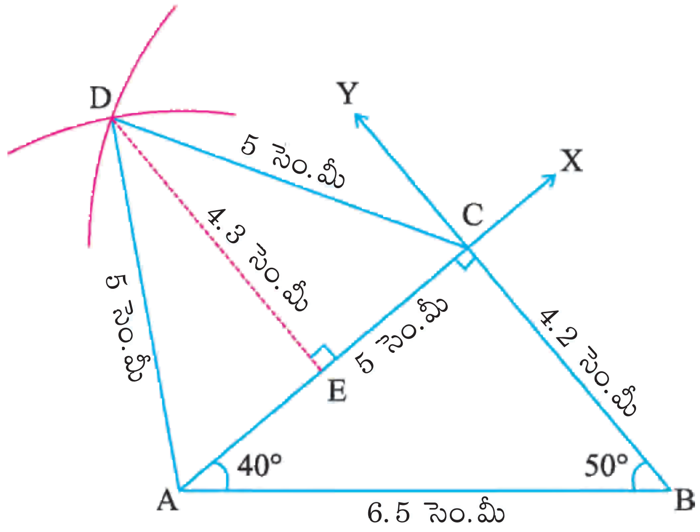
సాధన

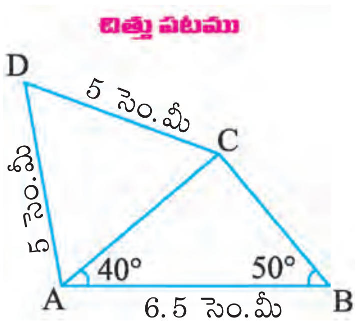
ఇవ్వబడినవి:

AB = 6.5 సెం.మీ. , AD = 5 సెం.మీ. , CD = 5 సెం.మీ. ,

∠BAC = 40° మరియు ∠ABC = 50°.

చతుర్భుజ నిర్మాణము





పటము 4.9

పటము 4.10

నిర్మాణ క్రమము

దశ 1 : చిత్తుపటమును గీచి ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తించుము.

దశ 2 : AB = 6.5 సెం.మీ. రేఖా ఖండమును గీయుము.

దశ 3 : $\overline{AB}$ మీదగా A వద్ద ∠BAX =40° మరియు $\overline{AB}$ మీదగా B వద్ద ∠ABY =50° ఉండునట్లు కోణములు గుర్తించిన అవి C వద్ద ఖండించుకొనును.

దశ 4 : A మరియు C లను కేంద్రముగా తీసికొని 5 సెం.మీ. మరియు 5 సెం.మీ. వ్యాసార్థములతో రెండు చాపములను గీయుము. అవి D వద్ద ఖండించుకొనును.

దశ 5 : $\overline{AD}$ మరియు $\overline{CD}$ లను గీయుము

ABCD కావలసిన చతుర్భుజము అగును.

దశ 6 : D నుండి $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ మరియు B నుండి $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ లను గీయుము. BC, DE కొలతలను కొలువుము.

BC = h_1 = 4.2 సెం.మీ. , DE = h_2 = 4.3 సెం.మీ. AC = d = 5 సెం.మీ.

వైశాల్యమును లెక్కించుట

చతుర్భుజము ABCD లో d = 5 సెం.మీ., BC = h_1 = 4.2 సెం.మీ. , h_2 = 4.3 సెం.మీ.

చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యము $= \frac{1}{2} d\,(h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2}(5)(4.2 + 4.3)$

$= \frac{1}{2} \times 5 \times 8.5$ = 21.25 సెం.మీ^{2}.

4.2.8 ఇవ్వబడిన రెండు భుజములు మరియు మూడు కోణములతో చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 4.5

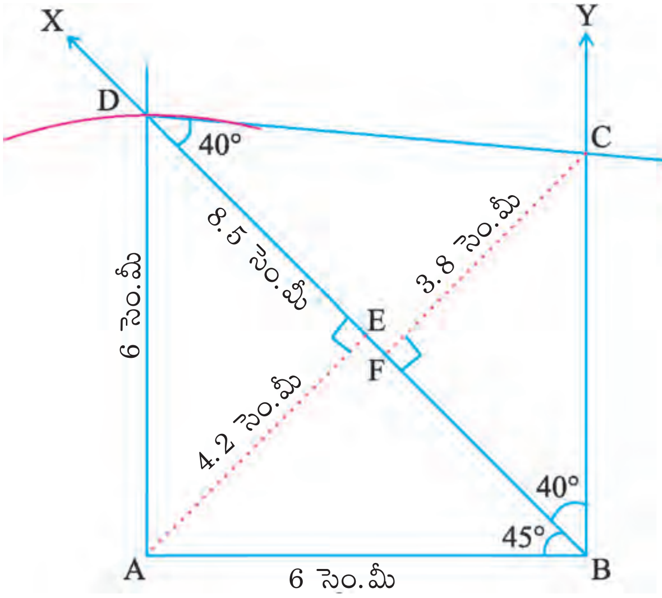
AB = 6 సెం.మీ., AD = 6 సెం.మీ., ∠ ABD = 45°, ∠ BDC = 40° మరియు ∠ DBC = 40° కొలతలుగల చతుర్భుజము ABCD నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన

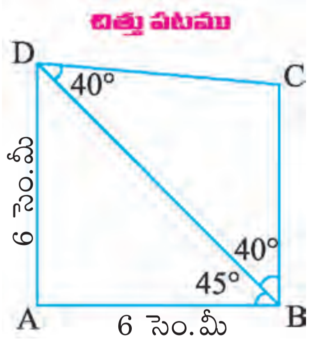
ఇవ్వబడినది: AB = 6 సెం.మీ., AD = 6 సెం.మీ.,

∠ABD=45°, ∠BDC = 40° మరియు ∠DBC = 40°.

చతుర్భుజ నిర్మాణము



పటము 4.12



పటము 4.11

నిర్మాణ క్రమము

దశ 1 : చిత్తుపటమును గీచి ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తించుము.

దశ 2 : AB = 6 సెం.మీ. రేఖా ఖండమును గీయుము.

దశ 3 : $\overline{AB}$ మీదగా B వద్ద $\angle ABX = 45^{\circ}$ ఉండునట్లు కోణమును గుర్తించుము.

దశ 4 : A ను కేంద్రముగా 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో ఒక చాపము గీయుము. ఇది $\overrightarrow{BX}$ ను D వద్ద ఖండించును.

దశ 5 : $\overline{AD}$ గీయుము.

దశ 6 : $\overline{BD}$ మీదుగా B వద్ద $\angle DBY = 40^{\circ}$ ఉండునట్లు కోణము గుర్తించుము.

దశ 7 : $\overline{BD}$ మీదుగా D వద్ద $\angle BDZ = 40^{\circ}$ ఉండునట్లు కోణము గుర్తించుము.

దశ 8 : $\overrightarrow{BY}$ మరియు $\overrightarrow{DZ}$, C వద్ద ఖండించుకొనును.

ABCD కావలసిన చతుర్భుజము

దశ 9 : A నుండి $\overline{AE} \perp \overline{BD}$ మరియు C నుండి $\overline{CF} \perp \overline{BD}$ లను గీయుము. AE, CF పొడవును కొలువుము.

AE = h_1 = 4.2 సెం.మీ., CF = h_2 = 3.8 సెం.మీ. , BD = d = 8.5 సెం.మీ.

వైశాల్యమును లెక్కించుట

చతుర్భుజము ABCD లో d = 8.5 సెం.మీ., h_1 = 4.2 సెం.మీ. మరియు h_2 = 3.8 సెం.మీ.

చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యము $= \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$

$$= \frac{1}{2}(8.5)(4.2 + 3.8)$$

$$= \frac{1}{2} \times 8.5 \times 8 = 34 \text{ సెం.మీ.}^2.$$

అభ్యాసము 4.1

క్రింది కొలతలతో చతుర్భుజమును నిర్మించి వాటి వైశాల్యమును కనుగొనుము.

1. AB = 5 సెం.మీ, BC = 6 సెం.మీ, CD = 4 సెం.మీ., DA= 5.5 సెం.మీ. AC = 7 సెం.మీ.
2. AB = 7 సెం.మీ., BC = 6.5 సెం.మీ, AC = 8 సెం.మీ, CD= 6 సెం.మీ. DA = 4.5సెం.మీ.
3. AB = 8 సెం.మీ, BC = 6.8 సెం.మీ, CD = 6 సెం.మీ, AD= 6.4 సెం.మీ, $\angle$ B = 50°.
4. AB = 6 సెం.మీ, BC = 7 సెం.మీ, AD = 6 సెం.మీ, CD= 5 సెం.మీ, $\angle$ BAC = 45°.
5. AB = 5.5 సెం.మీ, BC = 6.5 సెం.మీ, BD = 7 సెం.మీ, AD= 5 సెం.మీ, $\angle$ BAC= 50°.
6. AB = 7సెం.మీ, BC = 5సెం.మీ, AC = 6సెం.మీ, CD= 4సెం.మీ, , $\angle$ ACD = 45°.
7. AB = 5.5సెం.మీ, BC = 4.5సెం.మీ, AC = 6.5సెం.మీ, $\angle$ CAD = 80° ,$\angle$ ACD = 40°.
8. AB = 5సెం.మీ, BD = 7సెం.మీ, BC = 4సెం.మీ, $\angle$ BAD = 100°, $\angle$ DBC = 60.
9. AB = 4సెం.మీ, AC = 8సెం.మీ, $\angle$ ABC = 100°, $\angle$ ABD = 50°, $\angle$ CAD = 40°.
10. AB = 6సెం.మీ, BC = 6సెం.మీ, $\angle$ BAC = 50°, $\angle$ ACD = 30° , $\angle$ CAD = 100°.

4.3 సమలంబ చతుర్భుజము (Trapezium)

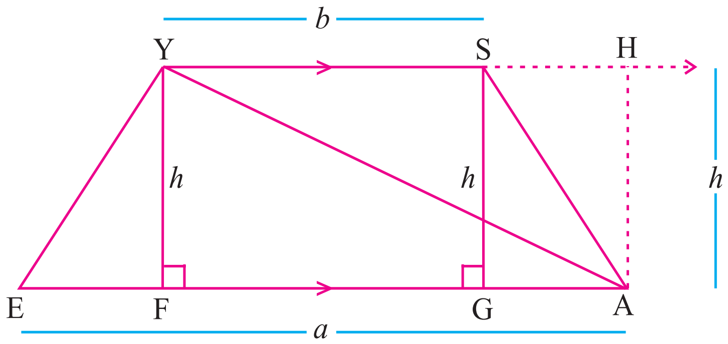
4.3.1 పరిచయము

ప్రత్యేక చతుర్భుజములగు సమలంబ చతుర్భుజము మరియు సమద్విబాహు చతుర్భుజములను గూర్చి 7వ తరగతిలో నేర్చుకొని యున్నాము. వాటి యొక్క ధర్మములను గూర్చి కూడా నేర్చుకొనియున్నాము. సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క నిర్వచనము మరియు వాటి ధర్మములను గుర్తు తెచ్చుకొనుము.

ఒక జత ఎదుటి భుజములు సమాంతరముగా నుండు చతుర్భుజమును సమలంబ చతుర్భుజము అని అందురు.

4.3.2 సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము

సమలంబ చతుర్భుజము EASY ను తీసుకొనుము.



పటము 4.13

పైన ఇవ్వబడిన సమలంబ చతుర్భుజములో $\overline{YA}$ ను కర్ణముగా గీయుట ద్వారా రెండు త్రిభుజములుగా విభజించవచ్చును.

ఒక త్రిభుజమునకు ఆధారము $\overline{EA}$ (EA = a ప్రమాణములు)

మరియొక్క త్రిభుజమునకు ఆధారము $\overline{YS}$ (YS = b ప్రమాణములు)

$\overline{EA} \parallel \overline{YS}$ అని మనకు తెలియును

$YF = HA = h$ ప్రమాణములు

$\triangle$ EAY యొక్క వైశాల్యము $\frac{1}{2}ah$. చ.ప్ర. $\triangle$ YAS యొక్క వైశాల్యము $\frac{1}{2}bh$ చ.ప్ర.

సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము

= $\triangle$ EAY యొక్క వైశాల్యము + $\triangle$ YAS యొక్క వైశాల్యము

$$= \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh$$

$$= \frac{1}{2}h(a+b) \text{ చ.ప్ర.}$$

$= \frac{1}{2}$ × ఎత్తు × (సమాంతర భుజముల మొత్తము) చ.ప్ర.

సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము

$A = \frac{1}{2}h(a+b)$ చ.ప్ర. ఇక్కడ 'a' మరియు 'b' అనునది సమాంతర భుజముల పొడవులు. 'h' అనునది సమాంతర భుజముల మధ్యగల లంబ దూరమగును.

4.3.3 సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మించుట

సాధారణముగా సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మించునపుడు, సమాంతర భుజములలోని పొడవైన భుజమును ఆధారముగా చేసుకొని, ఇవ్వబడిన కొలతలతో దాని మీద త్రిభుజమును నిర్మించెదము. అనగా త్రిభుజము, రెండు సమాంతర భుజముల మధ్య అమరియుండును. త్రిభుజము యొక్క ఆధారమునకు ఎదురుగా అమరియున్న శీర్షము, సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క ఆధార భుజమునకు ఎదురుగా నున్న సమాంతర భుజమునందు అమరియున్నది. శీర్షమునుండి ఆధారమునకు సమాంతరముగా ఒక రేఖను గీచెదము. సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క నాల్గవ శీర్షము ఈ రేఖా ఖండము నందు అమరియున్నది. ఇవ్వబడిన కొలతలలోని తక్కిన కొలతల ద్వారా నాల్గవ శీర్షము గుర్తించబడుచున్నది, పిదప కావలసిన శీర్షములను కలుపుట వలన మనము సమలంబ చతుర్భుజమును పొందెదము.

సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మించుటకు నాలుగు స్వతంత్ర కొలతలు కావలయును.

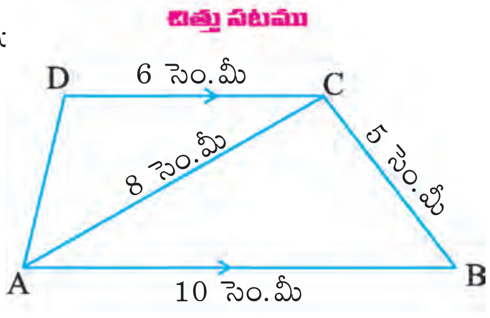
క్రింద ఇవ్వబడిన సమాచారములను ఉపయోగించి సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మించుట:

(i) మూడు భుజములు మరియు ఒక కర్ణము
(ii) మూడు భుజములు మరియు ఒక కోణము
(iii) రెండు భుజములు మరియు రెండు కోణములు
(iv) నాలుగు భుజములు

4.3.4 ఇవ్వబడిన మూడు భుజములు మరియు ఒక కర్ణముతో సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 4.6

$\overline{AB}$, $\overline{DC}$ కు సమాంతరము AB = 10 సెం.మీ, BC = 5 సెం.మీ, AC = 8 సెం.మీ, CD = 6 సెం.మీ. కొలతలతో సమలంబ చతుర్భుజము ABCD నిర్మించి వాటి వైశాల్యమును కనుగొనుము.



పటము **4.14**

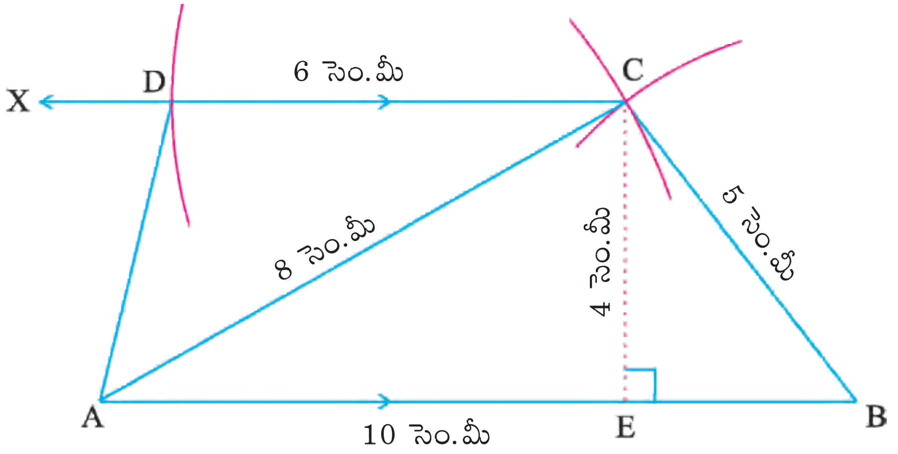
సాధన

ఇవ్వబడినది:

$\overline{AB}$, $\overline{DC}$ కు సమాంతరము AB = 10 సెం.మీ,

BC = 5 సెం.మీ, AC = 8 సెం.మీ, CD=6సెం.మీ.

సమలంబ చతుర్భుజ నిర్మాణము



పటము **4.15**

నిర్మాణ క్రమము

దశ 1 : చిత్తు పటమును గీచి ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తించుము.

దశ 2 : AB = 10 సెం.మీ. రేఖా ఖండమును గీయుము.

దశ 3 : A మరియు B కేంద్రములుగా తీసుకొని రెండు చాపములను గీయుము. అవి C వద్ద ఖండించుకొనును.

దశ 4 : $\overline{AC}$ మరియు $\overline{BC}$ లను గీయుము.

దశ 5 : $\overline{BA}$ కు సమాంతరముగా $\overrightarrow{CX}$ ను గీయుము.

దశ 6 : C ను కేంద్రముగా తీసికొని 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో గీసిన అది $\overrightarrow{CX}$ ను D వద్ద ఖండించును.

దశ 7 : $\overline{AD}$ గీయుము. ABCD కావలసిన సమలంబ చతుర్భుజమగును.

దశ 8 : C నుండి $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ ను గీచి CE యొక్క పొడవును కొలువుము.

CE = h = 4 సెం.మీ.

AB = a = 10 సెం.మీ, DC = b = 6 సెం.మీ.

వైశాల్యమును లెక్కించుట

సమలంబ చతుర్భుజము ABCD లో, a = 10 సెం.మీ, b = 6 సెం.మీ మరియు h = 4 సెం.మీ.

సమలంబ చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యము $= \frac{1}{2} h (a + b)$

$= \frac{1}{2}(4)(10 + 6)$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 16$

= 32 సెం.మీ^{2}.

4.3.5 ఇవ్వబడిన మూడు భుజములు మరియు ఒక కోణముతో సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 4.7

$\overline{PQ}$, $\overline{SR}$ కు సమాంతరము PQ = 8 సెం.మీ $\angle PQR$ = 70°, QR = 6 సెం.మీ మరియు PS = 6 సెం.మీ. కొలతలతో సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించి వాటి వైశాల్యము కనుగొనుము.

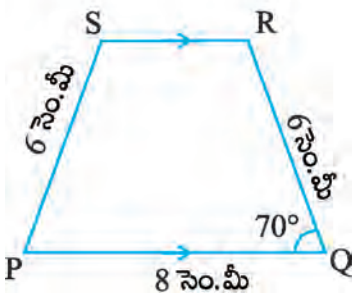
సాధన

ఇవ్వబడినవి:

$\overline{PQ}$, $\overline{SR}$ కు సమాంతరము PQ = 8 సెం.మీ, $\angle PQR$ = 70°,

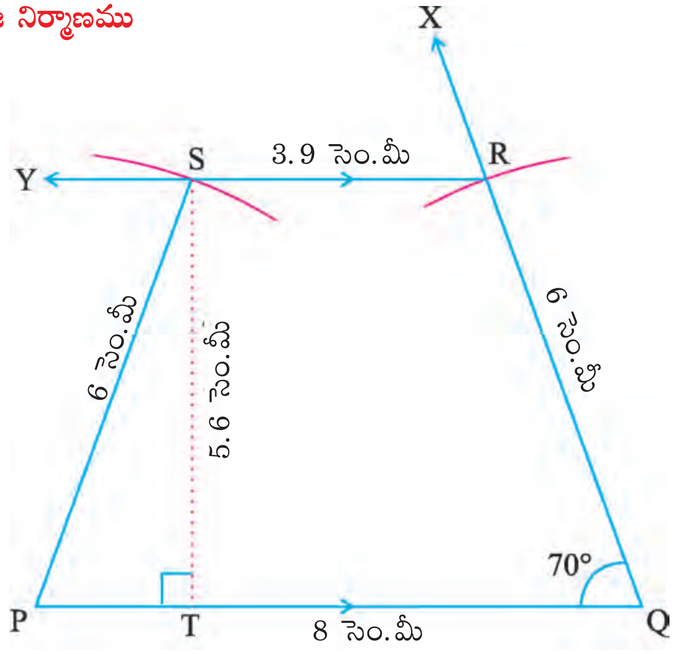
QR = 6 సెం.మీ మరియు PS = 6 సెం.మీ.

చిత్తు పటము



పటము 4.16

సమలంబ చతుర్భుజ నిర్మాణము



పటము *4.17*

నిర్మాణ క్రమము

దశ 1 : చిత్తు పటమును గీచి ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తించుము.

దశ 2 : PQ = 8 సెం.మీ. రేఖా ఖండమును గీయుము.

దశ 3 : $\overline{PQ}$ మీదగా Q వద్ద $\angle PQX = 70°$ ఉండునట్లు కోణము గీయుము.

దశ 4 : Q ను కేంద్రముగా 6 సెం.మీ. వ్యాసార్ధముతో చాపము గీయుము. అది $\overrightarrow{QX}$ ను R వద్ద ఖండించును.

దశ 5 : $\overrightarrow{RY}$ ను $\overline{QP}$ కు సమాంతరముగా గీయుము.

దశ 6 : P ను కేంద్రముగా 6 సెం.మీ. వ్యాసార్ధముతో చాపము గీయుము. అది $\overrightarrow{RY}$ ను S వద్ద ఖండించును.

దశ 7 : $\overline{PS}$ గీయుము. PQRS కావలసిన సమలంబ చతుర్భుజము.

దశ 8 : S నుండి $\overline{ST} \perp \overline{PQ}$ ను గీయుము. ST యొక్క పొడవును కొలువుము.

ST = h = 5.6 సెం.మీ, RS = b = 3.9 సెం.మీ. PQ = a = 8 సెం.మీ.

వైశాల్యమును లెక్కించుట

సమలంబ చతుర్భుజము PQRSలో a = 8 సెం.మీ, b = 3.9 సెం.మీ మరియు h = 5.6 సెం.మీ.

సమలంబ చతుర్భుజము PQRS యొక్క వైశాల్యము $= \frac{1}{2} h(a+b)$

$$= \frac{1}{2}(5.6)(8+3.9)$$

$$= \frac{1}{2} \times 5.6 \times 11.9$$

= 33.32 సెం.మీ^{2}.

4.3.6. ఇవ్వబడిన రెండుభుజములు మరియు రెండు కోణములతో సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 4.8

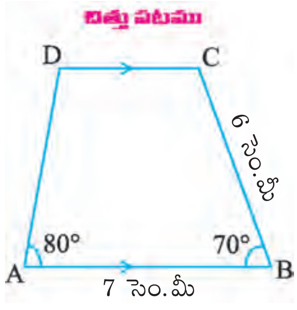
$\overline{AB}$, $\overline{DC}$కు సమాంతరము. AB = 7 సెం.మీ, BC = 6 సెం.మీ, $\angle BAD = 80°$ మరియు $\angle ABC = 70°$ కొలతలతో సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించి వాని వైశాల్యము కనుగొనుము

సాధన

ఇవ్వబడినది:

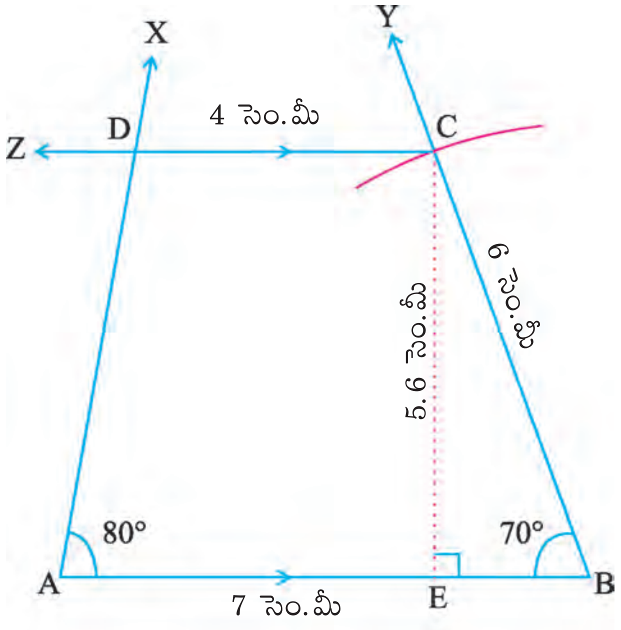
$\overline{AB}$, $\overline{DC}$ కు సమాంతరము. AB = 7 సెం.మీ,

BC = 6 సెం.మీ, $\angle BAD = 80°$ మరియు $\angle ABC = 70°$.



పటము 4.18

సమలంబ చతుర్భుజ నిర్మాణము



పటము 4.19

నిర్మాణ క్రమము

దశ 1 : చిత్తు పటమును గీచి ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తించుము.

దశ 2 : AB = 7 సెం.మీ. రేఖా ఖండమును గీయుము.

దశ 3 : $\overline{AB}$ మీదగా A వద్ద $\angle BAX = 80°$ ఉండునట్లు కోణము గుర్తించుము.

దశ 4 : $\overline{AB}$ మీదగా B వద్ద $\angle ABY = 70°$ ఉండునట్లు కోణము గుర్తించుము.

దశ 5 : B ను కేంద్రముగా తీసికొని 6 సెం.మీ. వ్యాసార్ధముతో చాపము గీయుము. అది $\overrightarrow{BY}$ ను C వద్ద ఖండించును.

దశ 6 : $\overrightarrow{CZ}$ ను $\overline{AB}$ కు సమాంతరముగా గీయుము. ఇది $\overrightarrow{AX}$ ను D వద్ద ఖండించును. ABCD కావలసిన సమాంతర చతుర్భుజము

దశ 7 : C నుండి $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ గీయుము CE పొడవును కొలువుము

$CE = h = 5.6$ సెం.మీ మరియు $CD = b = 4$ సెం.మీ., $AB = a = 7$ సెం.మీ.

వైశాల్యమును లెక్కించుట

సమలంబ చతుర్భుజము ABCD లో $a = 7$ సెం.మీ, $b = 4$ సెం.మీ. మరియు $h = 5.6$ సెం.మీ.

సమలంబ చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యము $= \frac{1}{2} h(a+b)$

$$= \frac{1}{2}(5.6)\ (7+4)$$

$$= \frac{1}{2} \times 5.6 \times 11$$

$$= 30.8 \text{ సెం.మీ}^2.$$

4.3.7. ఇవ్వబడిన నాలుగు భుజములతో సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 4.9

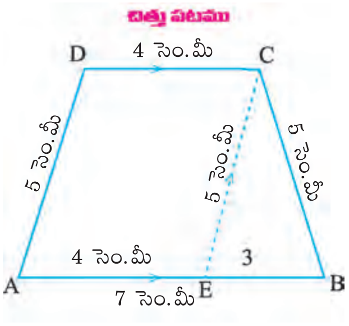
$\overline{AB}$, $\overline{DC}$ కు సమాంతరము, AB = 7 సెం.మీ, BC = 5 సెం.మీ, CD = 4 సెం.మీ మరియు AD = 5 సెం.మీ కొలతలతో సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మించి వాటి వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడినది:

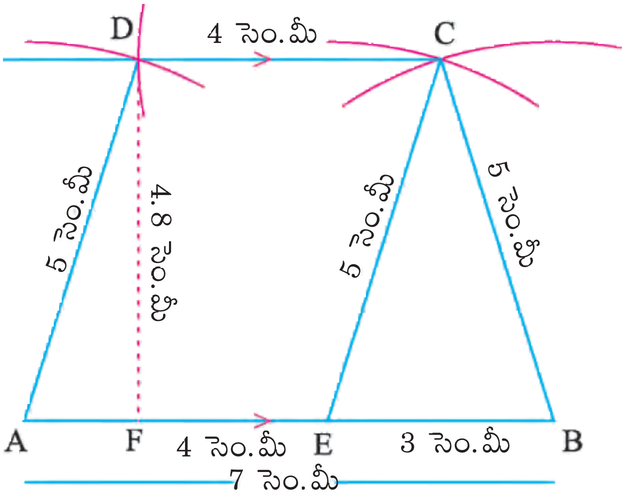
$\overline{AB}$, $\overline{DC}$ కు సమాంతరము AB =7 సెం.మీ,BC = 5 సెం.మీ

CD = 4 సెం.మీ. మరియు AD = 5 సెం.మీ.



పటము *4.20*

సమలంబ చతుర్భుజ నిర్మాణము



పటము *4.21*

నిర్మాణ క్రమము

దశ 1 : చిత్తు పటమును గీచి ఇచ్చిన కొలతలు గుర్తించుము.

దశ 2 : AB = 7 సెం.మీ. రేఖా ఖండమును గీయుము.

దశ 3 : $\overline{AB}$ పై E ను గుర్తించిన, AE = 4 సెం.మీ. [∵ DC = 4 సెం.మీ] అగును.

దశ 4 : B మరియు E లను కేంద్రములుగా తీసికొని 5 సెం.మీ. వ్యాసార్థములతో రెండు చాపములను గీయుము. అవి C వద్ద ఖండించుకొనును.

దశ 5 : $\overline{BC}$ మరియు $\overline{EC}$ లను గీయుము.

దశ 6 : C మరియు A లను కేంద్రములుగా తీసికొని 4 సెం.మీ. మరియు 5 సెం.మీ. వ్యాసార్థములతో రెండు చాపములను గీయుము. అవి D వద్ద ఖండించుకొనును.

దశ 7 : $\overline{AD}$ మరియు $\overline{CD}$ లను గీయుము.

ABCD కావలసిన సమాంతర చతుర్భుజము.

దశ 8 : D నుండి $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ లను గీయుము. $\overline{DF}$ పొడవును కొలువుము.

DF = h = 4.8 సెం.మీ. AB = a = 7 సెం.మీ, CD = b = 4 సెం.మీ.

వైశాల్యమును లెక్కించుట

సమలంబ చతుర్భుజము ABCD లో, a = 7 సెం.మీ, b = 4 సెం.మీ మరియు h = 4.8 సెం.మీ.

సమలంబ చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యము $= \frac{1}{2}h(a+b)$

$$= \frac{1}{2}(4.8)\ (7+4)$$

$$= \frac{1}{2} \times 4.8 \times 11$$

$$= 2.4 \times 11$$

= 26.4 సెం.మీ^{2}.

4.3.8 సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజము

పటము 6.22 లో ABCD ఒక సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజము.

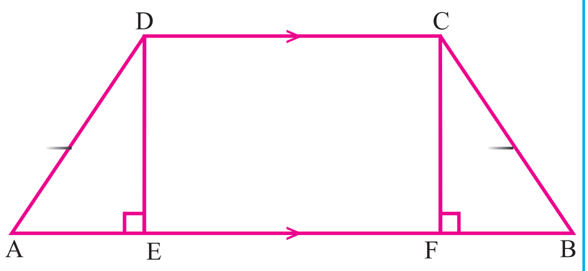
సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజము

(i) సమాంతరము కాని భుజము సమానము
అనగా AD = BC.

(ii) $\angle A = \angle B$.
మరియు $\angle ADC = \angle BCD$

(iii) కర్ణములు సమానము
అనగా AC = BD

(iv) AE = BF, (DE $\perp$ AB, CF $\perp$ BA)



పటము 4.22

ఒక సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మించుటకు మూడు స్వతంత్ర కొలతలు అవసరము మరియు క్రింది ఇవ్వబడిన రెండు నిబంధనలు ఉండవలయును.

(i) ఒక జత ఎదుటి భుజములు సమాంతరము.

(ii) సమాంతరము కాని భుజములు సమానము.

4.3.9. సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజ నిర్మాణము

ఉదాహరణ 6.10

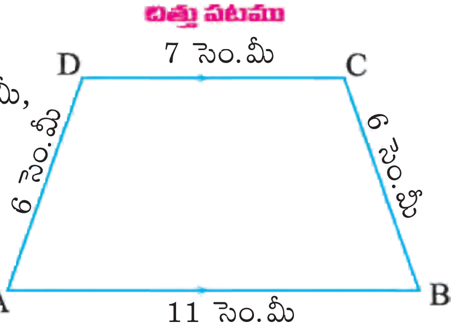
$\overline{AB}$ అనునది $\overline{DC}$ కు సమాంతరము AB = 11 సెం.మీ, DC = 7 సెం.మీ, AD = BC = 6 సెం.మీ కొలతలు గల సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మించి వాటి వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడినవి :

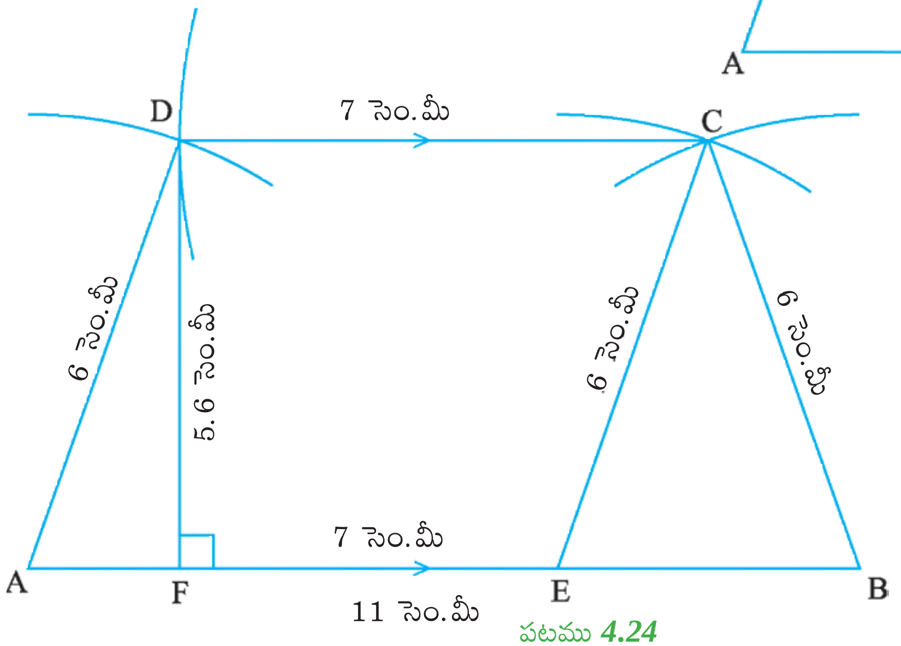
$\overline{AB}$ అనునది $\overline{DC}$ కు సమాంతరము. AB = 11 సెం.మీ,

DC = 7 సెం.మీ, AD = BC = 6 సెం.మీ.



పటము 4.23

సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజ నిర్మాణము



పటము 4.24

నిర్మాణ క్రమము

దశ 1 : చిత్తు పటమును గీచి ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తించుము.

దశ 2 : AB = 11 సెం.మీ. రేఖా ఖండమును గీయుము.

దశ 3 : AE = 7 సెం.మీ ఉండునట్లుగా $\overline{AB}$ పై E ను గుర్తించుము. (DC = 7 సెం.మీ)

దశ 4 : E మరియు B లను కేంద్రములుగా తీసికొని 6 సెం.మీ. (AD = EC = 6 సెం.మీ) వ్యాసార్థములతో రెండు చాపములు గీయుము. అవి C వద్ద ఖండించుకొనును.

దశ 5 : $\overline{BC}$ మరియు $\overline{EC}$ లను గీయుము.

దశ 6 : C మరియు A లను కేంద్రములుగా తీసికొని 7 సెం.మీ. మరియు 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థములతో రెండు చాపములు గీయుము. అవి D వద్ద ఖండించుకొనును.

దశ 7 : $\overline{AD}$ మరియు $\overline{CD}$ లను గీయుము.

ABCD కావలసిన సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజము.

దశ 8 : D నుండి $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ ను గీయుము DF పొడువును కొలువుము.

DF = h = 5.6 సెం.మీ. AB = a = 11 సెం.మీ మరియు CD = b = 7 సెం.మీ.

వైశాల్యమును లెక్కించుట

సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజము ABCDలో, $a = 11$ సెం.మీ, $b = 7$ సెం.మీ మరియు $h = 5.6$ సెం.మీ.

సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యము $= \frac{1}{2} h \ (a+b)$

$$= \frac{1}{2} (5.6) \ (11+7)$$

$$= \frac{1}{2} \times 5.6 \times 18$$

$= 50.4$ సెం.మీ^{2}.

అభ్యాసము 4.2

I. క్రింది ఇవ్వబడిన కొలతలతో సమద్విబాహు చతుర్భుజము **PQRS** నిర్మించుము. వాటి యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

1. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$, PQ=6.8సెం.మీ QR=7.2సెం.మీ, PR = 8.4సెం.మీ RS = 8సెం.మీ
2. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$, PQ = 8 సెం.మీ, QR = 5 సెం.మీ, PR = 6 సెం.మీ RS = 4.5సెం.మీ.
3. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$, PQ = 7సెం.మీ, $\angle$ Q = 60°,QR = 5సెం.మీ, RS = 4 సెం.మీ.
4. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$, PQ = 6.5సెం.మీ, QR = 7సెం.మీ, $\angle$ PQR = 85°, PS = 9 సెం.మీ.
5. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$, PQ = 7.5సెం.మీ, PS =6.5సెం.మీ, $\angle$ QPS =100° $\angle$ PQR =45°.
6. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$, PQ = 6సెం.మీ,PS=5 సెం.మీ, $\angle$ QPS=60° $\angle$ PQR=100°.
7. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$, PQ = 8సెం.మీ, QR = 5సెం.మీ, RS = 6 సెం.మీ,SP = 4సెం.మీ.
8. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$, PQ = 4.5సెం.మీ, QR = 2.5సెం.మీ, RS =3సెం.మీ SP = 2సెం.మీ.

II. క్రింది ఇవ్వబడిన కొలతలతో సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజము **ABCD** నిర్మించి వాటి వైశాల్యమును కనుగొనుము.

1. $\overline{AB}$ అనునది $\overline{DC}$ కు సమాంతరము, AB= 9 సెం.మీ, DC = 6సెం.మీ, AD=BC=5సెం.మీ.
2. $\overline{AB}$అనునది $\overline{DC}$ కు సమాంతరము, AB=10సెం.మీ, DC=6సెం.మీ, AD = BC=7 సెం.మీ.

నీకు తెలియునా?

ప్రాచీనకాల భారతీయులు అనేక చతుర్భుజ ధర్మములను తెలిసికొనియుండిరి.వాటిలో బౌద్ధయాన సూత్రములో స్పష్టముగా చెప్పబడిన రెండు రేఖాగణిత సూత్రములు క్రింద ఇవ్వబడినవి.

i) దీర్ఘ చతురస్రములో కర్ణములు ఒక దానికొకటి సమద్విఖండన చేయును. అవి దీర్ఘ చతురస్రమును నాలుగు భాగములుగా విభజించును.

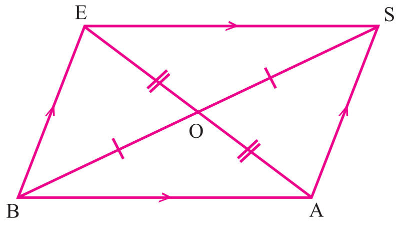
ii) సమబాహు చతుర్భుజములో కర్ణములు ఒక దానికి ఒకటి లంబ సమద్విఖండనము చేయును.

4.4 సమాంతర చతుర్భుజము (Parallelogram)

4.4.1. పరిచయము

సమాంతర చతుర్భుజమును గురించి 7వ తరగతిలో మనము నేర్చుకొనియున్నాము. ఇవి క్రింది విధముగా నిర్వచింపబడెను. ఎదుటి భుజములు సమాంతరముగా ఉన్న చతుర్భుజమును సమాంతర చతుర్భుజము అని అందురు.

పటము 4.25 లో ఇవ్వబడిన సమాంతర చతుర్భుజము BASE ను గమనించుము వాటి యొక్క ధర్మములను తెలిసికొనవచ్చును.



పటము 4.25

(i) $\overline{BA} \parallel \overline{ES}$; $\overline{BE} \parallel \overline{AS}$

(ii) BA = ES , BE = AS

(iii) అభిముఖ కోణములు సమానము
$\angle BES = \angle BAS$; $\angle EBA = \angle ESA$

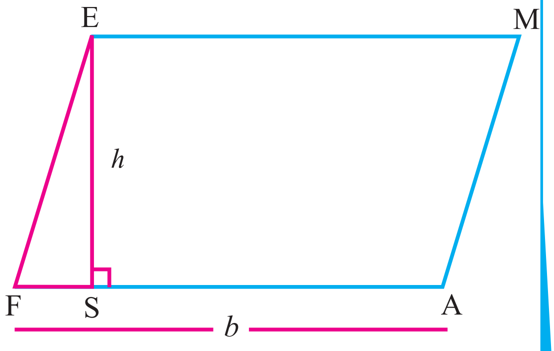
(iv) కర్ణములు ఒకదానినొకటి సమద్విఖండనము చేయును
OB = OS; OE = OA, కాని $BS \neq AE$.

(v) ఏ రెండు ఆసన్న కోణముల మొత్తము 180°

ఇపుడు సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించుటను గూర్చి నేర్చుకొనెదము.

4.4.2 సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము

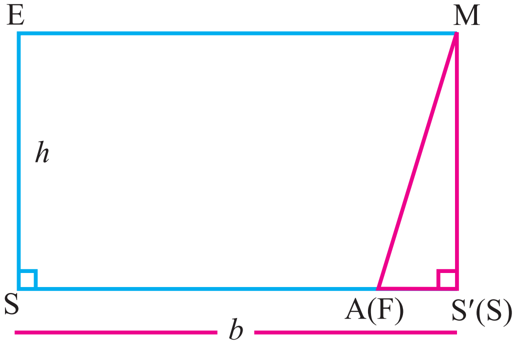
సమాంతర చతుర్భుజము FAME నుండి ఎర్రటి భాగము (లంబకోణ త్రిభుజము EFS) ను ఖండించుము. ఈ భాగము పటము FAME యొక్క కుడి వైపున అతికించుము ఇప్పుడు దీర్ఘ చతురస్రముగా ఉండుటను (పటము 4.27 లో) గమనించవచ్చును.



పటము 4.26

దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క పొడవు b ప్రమాణములు మరియు ఎత్తు h ప్రమాణములైన దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క వైశాల్యము $A = bh$ ప్రమాణములు అని మనకు తెలిసినదే.

ఇక్కడ సమాంతర చతుర్భుజము FAME ను దీర్ఘ చతురస్రముగా మార్చి వ్రాయబడినది. కావున సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము $A = bh$ చ.ప్రమాణములు. 'b' అనునది సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క ఆధారమగును మరియు 'h' అనునది సమాంతర భుజముల మధ్య లంబ దూరమగును.



పటము 4.27

4.4.3 సమాంతర చతుర్భుజ నిర్మాణము

పటమును తగిన త్రిభుజములుగా విభజించుట ద్వారా సమాంతర చతుర్భుజములు నిర్మించబడును. ఇవ్వబడిన వివరముల నుండి ముందుగా ఒక త్రిభుజము నిర్మించవలెను. పిదప నాలుగవ శీర్షము కనుగొనవలెను. సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించుటకు మూడు స్వతంత్ర కొలతలు అవసరము. .

క్రింద ఇవ్వబడిన కొలతలతో సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించవచ్చును.

(i) రెండు ఆసన్న భుజములు మరియు ఒక కోణము

(ii) రెండు ఆసన్న భుజములు మరియు ఒక కర్ణము

(iii) రెండు కర్ణములు మరియు వాటి మధ్యగల కోణము

(iv) ఒక భుజము, ఒక కర్ణము మరియు ఒక కోణము.

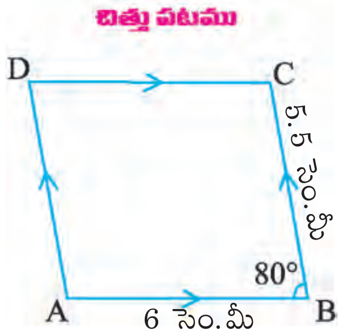
4.4.4 ఇవ్వబడిన రెండు ఆసన్న భుజములు మరియు ఒక కోణముతో సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 4.11

AB = 6 సెం.మీ, BC = 5.5 సెం.మీ మరియు $\angle ABC = 80^\circ$ కొలతలతో సమాంతర చతుర్భుజము ABCD ను నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

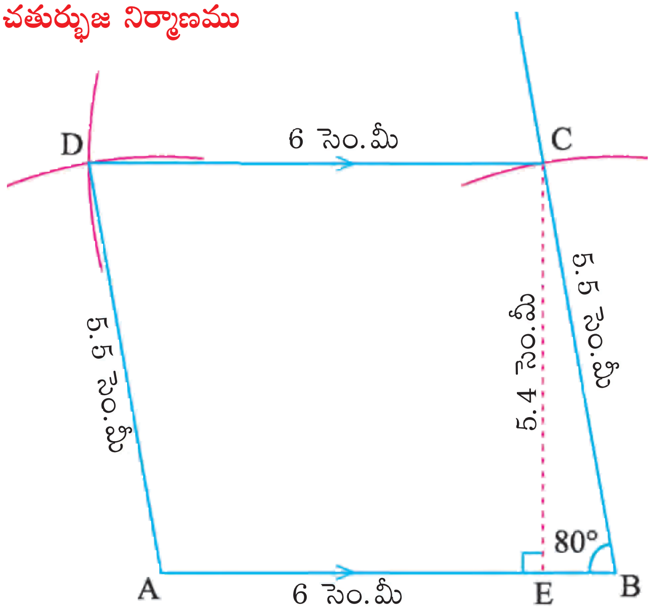
సాధన

ఇవ్వబడినవి: AB = 6 సెం.మీ, BC = 5.5 సెం.మీ మరియు $\angle ABC = 80^\circ$.



పటము 4.28

సమాంతర చతుర్భుజ నిర్మాణము



పటము 4.29

నిర్మాణ క్రమము

దశ 1 : చిత్తు పటమును గీచి ఇచ్చిన కొలతలు గుర్తించుము.

దశ 2 : AB = 6 సెం.మీ. రేఖా ఖండమును గీయుము.

దశ 3 : $\overline{AB}$ మీదగా B వద్ద $\angle ABX = 80°$ ఉండునట్లు కోణము గీయుము.

దశ 4 : B ను కేంద్రముగా తీసికొని 5.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో చాపము గీయుము. అవి $\overrightarrow{BX}$ ను C వద్ద ఖండించును.

దశ 5 : C మరియు A లను కేంద్రములుగా తీసికొని 6 సెం.మీ. మరియు 5.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థములతో రెండు చాపము గీచిన, అవి D వద్ద ఖండించుకొనును.

దశ 6 : $\overline{CD}$ మరియు $\overline{AD}$ లను గీయుము.
ABCD కావలసిన సమాంతర చతుర్భుజము

దశ 7 : C నుండి $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ గీయుము. CE పొడవును CE = h = 5.4 సెం.మీ. AB = b = 6 సెం.మీ. కొలువుము

వైశాల్యమును లెక్కించుట

సమాంతర చతుర్భుజము ABCD లో $b = 6$ సెం.మీ మరియు $h = 5.4$ సెం.మీ.

సమాంతర చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యము $= b \times h = 6 \times 5.4$

$= 32.4$ సెం.మీ^{2}.

4.4.5. ఇవ్వబడిన రెండు ఆసన్న భుజములు మరియు ఒక కర్ణముతో సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించుట

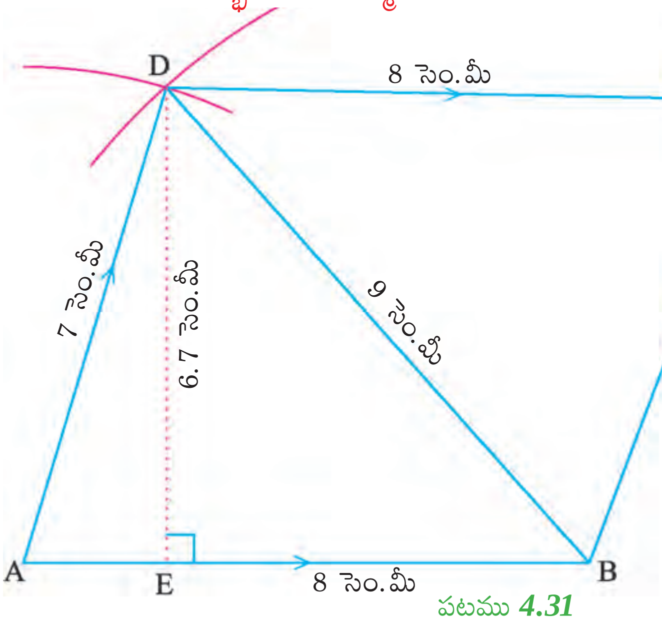
ఉదాహరణ 4.12

AB = 8 సెం.మీ, AD = 7 సెం.మీ, BD = 9 సెం.మీ కొలతలతో సమాంతర చతుర్భుజము ABCD ను నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

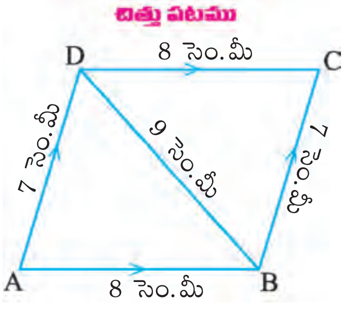
సాధన

ఇవ్వబడినది: AB = 8 సెం.మీ, AD = 7 సెం.మీ, BD = 9 సెం.మీ.

సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించుట



పటము *4.31*



పటము *4.30*

నిర్మాణ క్రమము

దశ 1 : చిత్తు పటమును గీచి ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తించుము.

దశ 2 : AB = 8 సెం.మీ రేఖా ఖండమును గీయుము.

దశ 3 : A మరియు B లను కేంద్రములుగా తీసికొని వ్యాసార్థములు 7 సెం.మీ. మరియు 9 సెం.మీ. లతో రెండు చాపములు గీయుము. అవి D వద్ద ఖండించుకొనును.

దశ 4 : $\overline{AD}$ మరియు $\overline{BD}$ లను గీయుము.

దశ 5 : B మరియు D లను కేంద్రములుగా తీసికొని 7 సెం.మీ. మరియు 8 సెం.మీ. లతో రెండు చాపము గీచిన, అవి C వద్ద ఖండించుకొనును.

దశ 6 : $\overline{CD}$ మరియు $\overline{BC}$ లను గీయుము.
ABCD కావలసిన సమాంతర చతుర్భుజము.

దశ 7 : D నుండి $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ ను గీయుము, DE పొడవును కొలువుము.
DE = h = 6.7 సెం.మీ. AB = DC= b = 8 సెం.మీ

వైశాల్యమును లెక్కించుట

సమాంతర చతుర్భుజము ABCD లో b = 8 సెం.మీ, h = 6.7 సెం.మీ.

సమాంతర చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యము $= b \times h$

$= 8 \times 6.7 = 53.6$ సెం.మీ^{2}.

4.4.6 ఇవ్వబడిన రెండు ఆసన్న భుజములు మరియు ఒక కర్ణముతో సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించుట

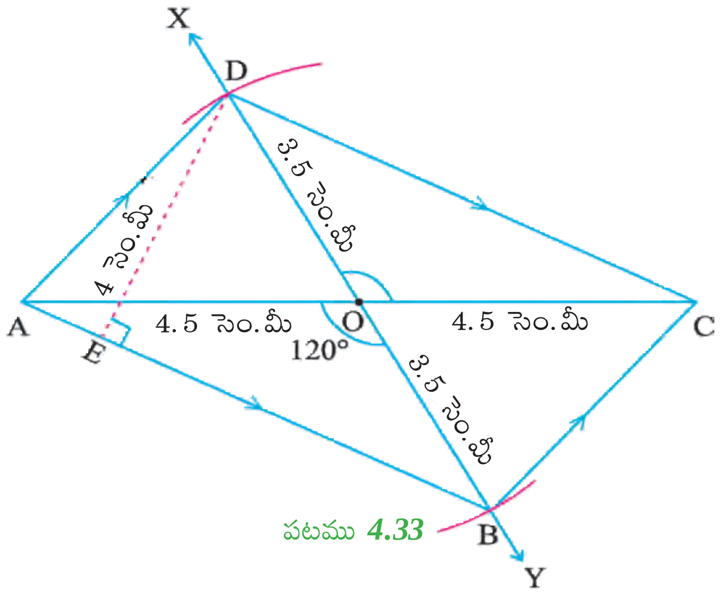
ఉదాహరణ 4.13

AC = 9 సెం.మీ, BD = 7 సెం.మీ $\angle AOB = 120°$ అందులో $\overline{AC}$ మరియు $\overline{BD}$ అనునవి 'O' వద్ద ఖండించుకొనును.

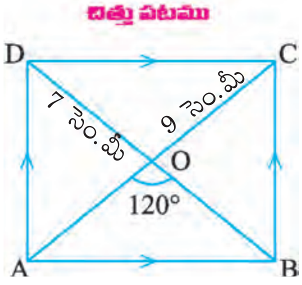
సాధన

ఇవ్వబడినది**:** AC=9 సెం.మీ, BD = 7 సెం.మీ, $\angle AOB = 120°$.

సమాంతర చతుర్భుజ నిర్మాణము



పటము *4.33*



పటము *4.32*

నిర్మాణ క్రమము

దశ 1 : చిత్తు పటమును గీచి ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తించుము.

దశ 2 : AC = 9 సెం.మీ. రేఖా ఖండమును గీయుము.

దశ 3 : $\overline{AC}$ యొక్క మధ్య బిందువును 'O' గా గుర్తించుము.

దశ 4 : $\angle AOY = 120°$ ఉండునట్లు 'O' ద్వారా $\overleftrightarrow{XY}$ రేఖను గీయుము.

దశ 5 : O ను కేంద్రముగా తీసికొని 3.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో $\overleftrightarrow{XY}$ మీద $\overline{AC}$ నకు ఇరువైపుల రెండు చాపములు గీచిన అవి $\overrightarrow{OX}$ ను D వద్ద మరియు $\overrightarrow{OY}$ ను B వద్ద ఖండించును.

దశ 6 : $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ మరియు $\overline{DA}$ లను గీయుము.
ABCD కావలసిన సమాంతర చతుర్భుజము.

దశ 7 : D నుండి $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ను గీయుము DE పొడవును కొలువుము.
DE = h = 4 సెం.మీ. AB = b = 7 సెం.మీ.

వైశాల్యమును లెక్కించుట

సమాంతర చతుర్భుజము ABCD లో b = 7 సెం.మీ మరియు h = 4 సెం.మీ.

సమాంతర చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యము= $b \times h = 7 \times 4 = 28$ సెం.మీ^{2}.

4.4.7. ఇవ్వబడిన ఒక భుజము, ఒక కర్ణము మరియు ఒక కోణముతో సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించుట

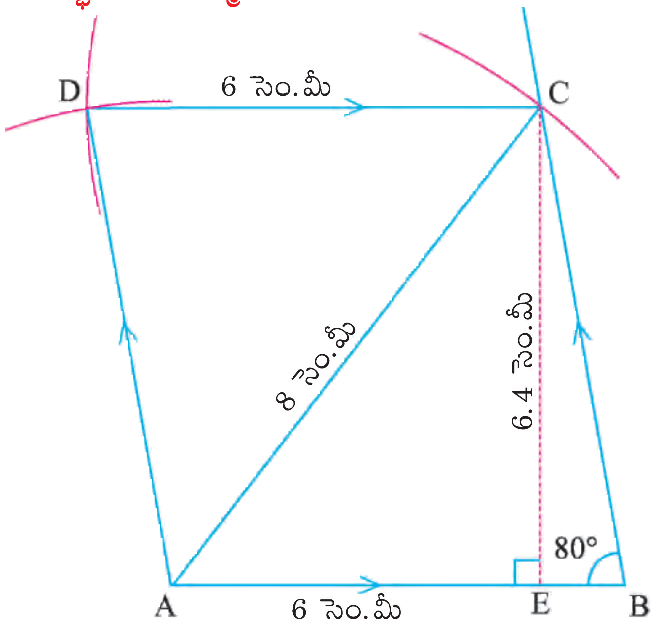
ఉదాహరణ 4.14

AB = 6 సెం.మీ, $\angle ABC = 80°$ మరియు AC = 8 సెం.మీ కొలతలతో సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించి దాని వైశాల్యము కనుగొనుము.

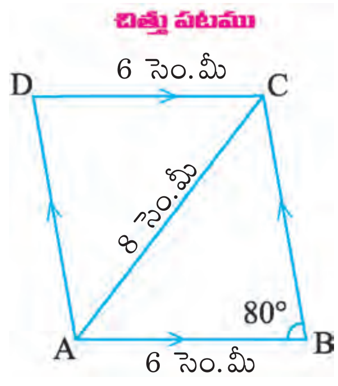
సాధన

ఇవ్వబడినది: AB = 6 సెం.మీ, $\angle ABC = 80°$, AC = 8 సెం.మీ.

సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించుట



పటము 4.35



పటము 4.34

గణితశాస్త్రము

నిర్మాణ క్రమము

దశ 1 : చిత్తు పటమును గీచి ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తించుము.

దశ 2 : AB = 6 సెం.మీ ఉండునట్లు రేఖా ఖండమును గీయుము.

దశ 3 : $\overline{AB}$ మీదగా B వద్ద $\angle ABX$ 80° ఉండునట్లు కోణము గీయుము.

దశ 4 : A కేంద్రముగా 8 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో చాపము గీయుము. అవి $\overrightarrow{BX}$ ను C వద్ద ఖండించును.

దశ 5 : $\overline{AC}$ ను గీయుము.

దశ 6 : C కేంద్రముగా 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో ఒక చాపమును గీయుము.

దశ 7 : A కేంద్రముగా తీసికొని BC యొక్క పొడవును వ్యాసార్థముగా తీసికొని వేరొక చాపమును గీయుము. ఆ రెండు చాపములు D వద్ద ఖండించు కొనును.

దశ 8 : $\overline{AD}$ మరియు $\overline{CD}$ లను గీయుము.

ABCD కావలసిన సమాంతర చతుర్భుజము.

దశ 9 : C నుండి $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ గీయుము CE యొక్క పొడవును కొలువుము.

CE = h = 6.4 సెం.మీ. AB = b = 6 సెం.మీ.

వైశాల్యమును లెక్కించుట

సమాంతర చతుర్భుజము ABCD లో b = 6 సెం.మీ మరియు h = 6.4 సెం.మీ.

సమాంతర చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యము $= b \times h$

$= 6 \times 6.4$

$= 38.4$ సెం.మీ^{2}.

అభ్యాసము 4.3

ఇవ్వబడిన కొలతలతో ABCD సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము

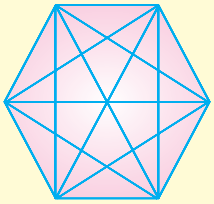
1. AB = 7 సెం.మీ, BC = 5 సెం.మీ మరియు $\angle$ ABC = 60°.
2. AB = 8.5 సెం.మీ, AD = 6.5 సెం.మీ మరియు $\angle$ DAB = 100°.
3. AB = 6 సెం.మీ, BD = 8 సెం.మీ మరియు AD = 5 సెం.మీ.
4. AB = 5 సెం.మీ, BC = 4 సెం.మీ, AC = 7 సెం.మీ.
5. AC = 10 సెం.మీ, BD = 8 సెం.మీ, $\angle$ AOB = 100° అందులో $\overline{AC}$ మరియు $\overline{BD}$ అనునవి 'O' వద్ద ఖండించుకొనును.
6. AC = 8 సెం.మీ, BD = 6 సెం.మీ , $\angle$ COD = 90° అందులో $\overline{AC}$ మరియు $\overline{BD}$ అనునవి 'O' వద్ద ఖండించుకొనును.
7. AB = 8 సెం.మీ, AC = 10 సెం.మీ, $\angle$ ABC = 100°.
8. AB = 5.5 సెం.మీ, $\angle$ DAB = 50° మరియు BD = 7 సెం.మీ.

పాఠ్యభాగ సారాంశము

- నాలుగు రేఖా ఖండములచే మూయబడిన ఒక సమతల పటము ఒక చతుర్భుజమగును.
- ఒక చతుర్భుజమును నిర్మించుటకు ఐదు స్వతంత్ర కొలతలను కావలయును.
- ఒక జత ఎదుటి భుజములు సమాంతరముగా నుండు చతుర్భుజమును సమలంబ చతుర్భుజమందురు.
- సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మించుటకు నాలుగు స్వతంత్ర కొలతలు కావలయును.
- సమలంబ చతుర్భుజము నందలి అసమాంతర భుజాలు సమానముగా ఉన్నయెడల, దానిని సమద్విబాహు చతుర్భుజ మందురు.
- సమద్విబాహు చతుర్భుజమును నిర్మించుటకు మూడు స్వతంత్ర కొలతలు కావలయును.
- ఎదుటి భుజాలు సమాంతరముగా నున్న చతుర్భుజమును సమాంతర చతుర్భుజమని అందురు.
- సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించుటకు మూడు స్వతంత్ర కొలతలు కావలయును.
- 'చతుర్భుజ వైశాల్యము $A = \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$ చ.ప్రమాణములు. ఇందులో d అనునది కర్ణము, 'h_1' మరియు 'h_2' అనునవి ఎదుటి శీర్షముల నుండి కర్ణమునకు గీయబడిన లంబపుటెత్తులగును.
- సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము $A = \frac{1}{2} h (a + b)$ చ.ప్ర. ఇక్కడ 'a' మరియు 'b' అనునవి సమాంతర భుజముల పొడవులగును. 'h' అనునది సమాంతర భుజములకు మధ్యగల లంబదూరమగును.
- సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము , $A = bh$ చ.ప్రమాణములు ఇక్కడ 'b' అనునది సమాంతర చతుర్భుజ ఆధారము, 'h' అనునది సమాంతర భుజముల మధ్యగల లంబదూరమగును.

ఉపయోగకరమైన సమాచారములు

- కొన్ని సంవత్సరములుగా చిత్రకళ మరియు శిల్ప శాస్త్రములో కనిపించు దీర్ఘ చతురస్రమును బంగారపు దీర్ఘ చతురస్రము అందురు. బంగారపు దీర్ఘ చతురస్రములో భుజముల పొడవు నిష్పత్తి సుమారు 1 : 1.6 లో ఉండును. ఈ నిష్పత్తిని బంగారపు నిష్పత్తి అందురు. బంగారపు దీర్ఘచతురస్రము చూచుటకు నయనానందకరముగా ఉండును. క్రీ.పూ ఐదో శతాబ్దం మధ్య కాలంలో గ్రీకులు బంగారపు నిష్పత్తిని కనుగొనిరి.
- గణిత శాస్త్రవేత్త గాస్ 1855లో మరణించెను. 17 భుజముల బహుభుజిని తన సమాధిపై గీయవలయునని కోరుకొనెను. కాని అది శిల్పి చెక్కిన వృత్తమువలె కనిపించెను.
- నిగూఢ షడ్భుజి **(Mystic hexagon)** : ఒక క్రమషడ్భుజి లోగల అన్ని కర్ణములు కలుపబడిన దానిని "నిగూఢ షడ్భుజి" అందురు.



జవాబులు

అధ్యాయము 1

అభ్యాసము 1.1

1. i) A ii) C iii) B iv) D v) A

2. i) వ్యత్యయధర్మము ii) సహచర్య ధర్మము iii) వ్యత్యయధర్మము
   iv) సంకలన తత్సమము v) సంకలన విలోమము

3. i) వ్యత్యయ ధర్మము ii) గుణకార తత్సమము
   iii) గుణకార విలోమము iv) సహచర్య ధర్మము
   v) కూడికలపై గుణకారము విభాగ న్యాయము

6. i) $\frac{-505}{252}$ ii) $\frac{-1}{14}$

అభ్యాసము 1.2

1. i) $\frac{13}{15}$ ii) $\frac{23}{84}$ iii) $\frac{117}{176}$ iv) $\frac{53}{24}$

2. i) $\frac{31}{70}, \frac{51}{140}$ ii) $\frac{111}{110}, \frac{243}{220}$ iii) $\frac{17}{30}, \frac{9}{20}$ iv) $\frac{-1}{24}, \frac{1}{12}$

3. i) $\frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{9}{32}$ ii) $\frac{41}{60}, \frac{83}{120}, \frac{167}{240}$
   iii) $\frac{7}{12}, \frac{1}{8}, \frac{-5}{48}$ iv) $\frac{5}{48}, \frac{11}{96}, \frac{23}{192}$

గమనిక: పై 1,2,3 సమస్యలకు ఇచ్చిన జవాబులు, రాగల జవాబులలో ఒకటి మాత్రమే .

అభ్యాసము 1.3

1. i) A ii) B iii) C iv) A v) B

2. i) $2\frac{7}{24}$ ii) $\frac{16}{17}$ iii) $\frac{11}{32}$ iv) $1\frac{7}{18}$ v) $\frac{-8}{19}$
   vi) $4\frac{23}{32}$ vii) 4 viii) $-5\frac{41}{60}$

అభ్యాసము 1.4

1. i) C ii) B iii) A iv) D v) C
   vi) A vii) B viii) B ix) B x) D

2. i) $\frac{-1}{64}$ ii) $\frac{1}{64}$ iii) 625 iv) $\frac{2}{675}$ v) $\frac{1}{3^{22}}$
   vi) 54 vii) 1 viii) $256\,p^q$ ix) 231 x) $5\frac{1}{3}$

3. i) 5 ii) $\frac{1}{2}$ iii) 29 iv) 1 v) $5\frac{1}{16}$ vi) $\frac{6}{7^{21}}$

4. i) $m = 2$ ii) $m = 3$ iii) $m = 3$ iv) $m = 3$ v) $m = -6$ vi) $m = \frac{1}{4}$

5. a) i) 4 ii) 4 iii) 256 iv) 64 v) $\frac{1}{4}$

b) i) 4 ii) 2187 iii) 9 iv) 6561 v) $\frac{1}{9}$

అభ్యాసము 1.5

1. (ii), (iii), (v) ఖచ్ఛిత వర్గములు కాదు

2. i) 4 ii) 9 iii) 1 iv) 5 v) 4

3. i) 64 ii) 16 iii) 81

4. i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 +11 + 13 ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17

iii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 iv) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21

5. i) $\frac{9}{64}$ ii) $\frac{49}{100}$ iii) $\frac{1}{25}$ iv) $\frac{4}{9}$ v) $\frac{961}{1600}$

6. i) 9 ii) 49 iii) 0.09 iv) $\frac{4}{9}$ v) $\frac{9}{16}$ vi) 0.36

7. a) $4^2 + 5^2 + \underline{20^2} = 21^2$ b) 10000200001

$5^2 + \underline{6^2} + 30^2 = 31^2$ 100000020000001

$6^2 + 7^2 + \underline{42^2} = \underline{43^2}$

అభ్యాసము 1.6

1. i) 12 ii) 10 iii) 27 iv) 385

2. i) $\frac{3}{8}$ ii) $\frac{1}{4}$ iii) 7 iv) 4

3. i) 48 ii) 67 iii) 59 iv) 23 v) 57

vi) 37 vii) 76 viii) 89 ix) 24 x) 56

4. i) 27 ii) 20 iii) 42 iv) 64 v) 88

vi) 98 vi) 77 viii) 96 ix) 23 x) 90

5. i) 1.6 ii) 2.7 iii) 7.2 iv) 6.5 v) 5.6

vi) 0.54 vii) 3.4 viii) 0.043

6. i) 2 ii) 53 iii) 1 iv) 41 v) 31

7. i) 4 ii) 14 iii) 4 iv) 24 v) 149

8. i) 1.41 ii) 2.24 iii) 0.13 iv) 0.94 v) 1.04

9. 21 m 10. i) $\frac{15}{56}$ ii) $\frac{46}{59}$ iii) $\frac{23}{42}$ iv) $1\frac{13}{76}$

అభ్యాసము 1.7

1. i) A ii) C iii) B iv) A v) B
   vi) D vii) A viii) A ix) A x) D
2. ii) 216 iii) 729 v) 1000
3. i) 128 ii) 100 v) 72 vi) 625
4. i) 3 ii) 2 iii) 5 iv) 3 v) 11 vi) 5
5. i) 3 ii) 2 iii) 3 iv) 5 v) 10
6. i) 9 ii) 7 iii) 8 iv) 0.4 v) 0.6
   vi) 1.75 vii) – 1.1 viii) – 30
7. 2.7 సెం.మీ.

అభ్యాసము 1.8

1. i) 12.57 ii) 25.42 కి.గ్రా. iii) 39.93 మీ.
   iv) 56.60 మీ. v) 41.06 మీ. vi) 729.94 కి.మీ.
2. i) 0.052 మీ. ii) 3.533 కి.మీ. iii) 58.294 లీ.
   iv) 0.133 గ్రా. v) 365.301 vi) 100.123
3. i) 250 ii) 150 iii) 6800 iv) 10,000
   v) 36 లక్షలు vi) 104 కోట్లు
4. i) 22 ii) 777 iii) 402 iv) 306 v) 300 vi) 10,000

అభ్యాసము 1.9

1. i) 25, 20, 15 ii) 6, 8, 10 iii) 63, 56, 49
   iv) 7.7, 8.8, 9.9 v) 15, 21, 28 vi) 34, 55, 89
   vii) 125, 216, 343
2. a) 11 సార్లు b) 5 సార్లు
3. a) 10 వరుసల ఆపిల్ పండ్లు = 55 ఆపిల్ పండ్లు b) 210 ఆపిల్ పండ్లు

అడ్డువరసలు	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ఆపిల్ పండ్ల మొత్తము	1	3	6	10	15	21	28	36	45

అధ్యాయము 2

అభ్యాసము 2.1

1. i) C ii) B iii) A iv) D v) A
   vi) D vii) B viii) C ix) A x) C
2. i) 180 సెం.మీ, 1925 చ.సెం.మీ. ii) 54 సెం.మీ, 173.25 చ.సెం.మీ.
   iii) 32.4 మీ., 62.37 చ.మీ. iv) 25.2 మీ., 37.73 చ.మీ.
3. i) 7.2 సెం.మీ, 3.08 చ.సెం.మీ. ii) 144 సెం.మీ, 1232 చ.సెం.మీ.
   iii) 216 సెం.మీ, 2772 చ.సెం.మీ. iv) 288మీ., 4928 చ.మీ.
4. i) 350 సెం.మీ, 7546 చ.సెం.మీ. ii) 250 సెం.మీ, 3850 చ.సెం.మీ.
   iii) 150 మీ., 1386 చ.మీ. iv) 100 మీ., 616 చ.మీ.
5. 77 చ.సెం.మీ., 38.5 చ.సెం.మీ. 6. ₹540

అభ్యాసము 2.2

1. i) 32 సెం.మీ ii) 40 సెం.మీ iii)32.6 సెం.మీ
   iv) 40 సెం.మీ v) 98 సెం.మీ
2. i) 124 చ.సెం.మీ. ii)25 చ.మీ. iii) 273 చ.సెం.మీ. iv) 49.14 చ.సెం.మీ.
   v) 10.40 చ.మీ.
3. i) 24 చ.మీ. ii) 284 చ.సెం.మీ. iii) 308 చ.సెం.మీ.
   iv) 10.5 చ.సెం.మీ. v)135.625 చ.సెం.మీ. vi)6.125 చ.సెం.మీ.
4. 770 చ.సెం.మీ. 5. 1286 చ.మీ. 6. 9384 చ.మీ. 7. 9.71 చ.సెం.మీ.
8. 203 చ.సెం.మీ. 9. 378 చ.సెం.మీ. 10. i) 15,100 చ.మీ., ii) 550000 చ.మీ.

అధ్యాయము 3

పునర్విమర్శన అభ్యాసము

1. $y^\circ = 52^\circ$ 2. $x^\circ = 40^\circ$ 3. $\angle A = 110^\circ$ 4. $x^\circ = 40^\circ$
5. $x^\circ = 105^\circ$ 6. i) అనురూప కోణము, ii) అభిముఖ కోణము, iii) అనురూప కోణము

అభ్యాసము 3.1

1. i) B ii) A iii) A iv) B v) A
2. $x^\circ = 65^\circ$ 3. $x^\circ = 42^\circ$ 5. i) $x^\circ = 58^\circ, y^\circ = 108^\circ$ ii) $x^\circ = 30^\circ, y^\circ = 30^\circ$
   iii) $x^\circ = 42^\circ, y^\circ = 40^\circ$ 6. $x^\circ = 153^\circ, y^\circ = 132^\circ, z^\circ = 53^\circ$.

అభ్యాసము 3.2

1. i) C ii) C iii) C iv) C v) B vi) A vii) B
2. $x^\circ = 66^\circ, y^\circ = 132^\circ$ 3. $x^\circ = 70^\circ$
4. $x^\circ = 15^\circ, y^\circ = 55^\circ$ 7. $x^\circ = 30^\circ, y^\circ = 60^\circ, z^\circ = 60^\circ$

సంఖ్యలతో ఆట

8 తో వరుస సంఖ్యలు

1 × 8 + 1	=	9
12 × 8 + 2	=	98
123 × 8 + 3	=	987
1234 × 8 + 4	=	9876
12345 × 8 + 5	=	98765
123456 × 8 + 6	=	987654
1234567 × 8 + 7	=	9876543
12345678 × 8 + 8	=	98765432
123456789 × 8 + 9	=	987654321

9 తో వరుస 8 లు

9 × 9 + 7	=	88
98 × 9 + 6	=	888
987 × 9 + 5	=	8888
9876 × 9 + 4	=	88888
98765 × 9 + 3	=	888888
987654 × 9 + 2	=	8888888
9876543 × 9 + 1	=	88888888
98765432 × 9 + 0	=	888888888

8 లేకుండా

12345679 × 9	=	111111111
12345679 × 18	=	222222222
12345679 × 27	=	333333333
12345679 × 36	=	444444444
12345679 × 45	=	555555555
12345679 × 54	=	666666666
12345679 × 63	=	777777777
12345679 × 72	=	888888888
12345679 × 81	=	999999999

1 తో సంఖ్యా పాలిన్‌డ్రోమ్

1 × 1	=	1
11 × 11	=	121
111 × 111	=	12321
1111 × 1111	=	1234321
11111 × 11111	=	123454321
111111 × 111111	=	12345654321
1111111 × 1111111	=	1234567654321
11111111 × 11111111	=	123456787654321
111111111 × 111111111	=	12345678987654321

'నేనే చేస్తా, నేనే చేశా'

('I can ,I did')

విద్యార్థుల అభ్యసన కృత్యాల నమోదు పట్టిక

విషయం :

వ.సం	తేది	పాఠ్యాంశ సంఖ్య	పాఠ్యభాగం	కృత్యాలు	అభిప్రాయ సూచన