



Government of Tamilnadu

வினாக்கள் தர்வாசை

STANDARD EIGHT

KANNADA MEDIUM

ஞானம் III Term III

பாகம் 2 Volume 2

மத்தியத்தில் MATHEMATICS

விஜயம் SCIENCE

நமோஜ் விஜயம் SOCIAL SCIENCE

Untouchability is Inhuman and a Crime

Department of School Education

© Government of Tamilnadu

First Edition - 2012

Revised Edition - 2013, 2014, 2015

(Published under Uniform System of School Education scheme in Trimester Pattern)

Textbook preparation and compilation

State Council of Educational Research and Training

College Road, Chennai - 600 006.

Textbook Printing

Tamil Nadu Textbook and Educational Services Corporation

College Road, Chennai - 600 006.

This book has been printed on 80 GSM Maplitho Paper

Price: Rs.

Printed by Web Offset at:

Textbook available at

www.textbooksonline.tn.nic.in

ಹಲವಿಡಿ

ರಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ - (1-97)

ಕ್ರ.ನಂ.	ಅಧ್ಯಾಯದ ಹೆಸರು	ಪುಟ ನಂ.
1.	ಚೀವನ ಗಣತೆ	2
2.	ರೇಖಾಗಣತೆ	47
3.	ದತ್ತಾಂಶ ನಿರ್ವಹಣೆ	59
4.	ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣತೆ	90
	ಉತ್ತರಗಳು	94

ವಿಜ್ಞಾನ - (98-167)

ಕ್ರ.ನಂ.	ಅಧ್ಯಾಯದ ಹೆಸರು	ಪುಟ ನಂ.
1.	ಚೀವಿಗಳ ವೈಧ್ಯತೆ	100
2.	ಸಸ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಸಂರಕ್ಷಣೆ	118
3.	ಕಲ್ಲಿದ್ದಲು ಮತ್ತು ವೆಟ್ಲೋಲಿಯಂ	134
4.	ಬೆಳಕು ಮತ್ತು ಶಬ್ದ	148

ನಮಾಜ ವಿಜ್ಞಾನ - (168-251)

ಕ್ರ.ನಂ.	ಅಧ್ಯಾಯದ ಹೆಸರು	ಪುಟ ನಂ.
	ಇತಿಹಾಸ	
1.	ಲಾಡ್‌ವಿಲಿಯಂ ಬೆಂಚಿಂಕ್ (ಕ್ರಿ.ಶ. 1828 – ಕ್ರಿ.ಶ. 1835)	169
2.	ಲಾಡ್‌ಡಾಲ್‌ಹೋಸಿ (ಕ್ರಿ.ಶ. 1848 – ಕ್ರಿ.ಶ. 1855)	173
3.	ಮಹಾಕ್ಷಾತ್ಕಾಂತಿ – ಕ್ರಿ.ಶ. 1857	177
4.	ತಮಿಳುನಾಡಿನಲ್ಲಿ ನಾಯಕರುಗಳ ಆಳ್ವಿಕೆ	184
5.	ತಂಡಾವೂರಿನಲ್ಲಿ ಮರಾಠರ ಆಳ್ವಿಕೆ (ಕ್ರಿ.ಶ. 1676 – ಕ್ರಿ.ಶ. 1856)	191
6.	ವೆಲ್ಲೂರು ಕ್ರಾಂತಿ – ಕ್ರಿ.ಶ. 1806	197
	ಭಾಗೋಳಿತಾಸ್ತ	
	ತೃತೀಯ ಚಟುವಟಿಕೆ	
1.	ವ್ಯಾಣಿಜ್ಯ (ವ್ಯಾಪಾರ)	201
	ತೃತೀಯ ಚಟುವಟಿಕೆ	
2.	ಸಾರಿಗೆ ಮತ್ತು ಸುದ್ದಿ ಸಂಪರ್ಕಗಳು	206
3.	ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಮತ್ತು ಹಂಡಕೆ	212
4.	ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳು	218
5.	ವಿಕೋಪವನ್ನು ಎದಿರುಗೊಳ್ಳುವಿಕೆ	223
	ಪೌರನೀತಿ	
1.	ರಸ್ತೆ ಸುರಕ್ಷತೆ – ವಧಿ ನಿಯಮಗಳು	238
	ಅಧ್ಯಾತ್ಮ	
1.	ಹಣ, ಉಳಿತಾಯ ಮತ್ತು ಮೂಡಿಕೆ	246

ರಣಿಕಾಶಾಸ್ತ್ರ

MATHEMATICS

KANNADA MEDIUM

ವಂಡನೆಯ ತರಗತಿ

STANDARD EIGHT

ಅವಧಿ III

Term III

1

ಜೀವನ ಗಣಿತ



ರೋಜರ್ ಬೇಕನ್

[1214-1294]

ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ
ವಿಧಾನಗಳ ಮೇಲೆ
ಪ್ರಮುಖಿತ ಪಡೆದ
ಇವರು ಅದ್ದುತ್ತ ತಿಕ್ಕ.
ಅಂಗ್ಲ ತತ್ವಜ್ಞಾನಿ.
ಇವರು ಆರ್ಥಿಕದ್ವಾರಾ ನಲ್ಲಿ
ಶಿಕ್ಷಕರಾಗಿದ್ದರು. "ಗಣಿತದ
ನಿರ್ದ್ವಾಪು ಎಲ್ಲಾ
ಜ್ಞಾನಕ್ಕೂ ತೊಡಕನ್ನು
ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತಬೇ"
ಎಂದು ಅವರು
ಹೇಳಿದ್ದಾರೆ. "ಸಾಮಾನ್ಯ
ಮನುಷ್ಯನಿಗೆ ಗಣಿತದ
ಉಪಯುಕ್ತತಯ
ಬ್ಯಾಂಕುಗಳು, ಮಾರಾಟ
ಮಳಗಳು, ರೈಲ್
ನಿಳ್ಳಣ, ಅಂಚೆ ಕಫೀರಿ,
ವಿಮಾನ ನಿಗಮಗಳು,
ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು
ಭೇಟಿ ಮಾಡಿದಾಗ
ಅಥವಾ ರವಾನಿಸುವ
ಪ್ರಾಪಾರವನ್ನು
ವ್ಯವಹರಿಸುವಾಗ,
ರಘ್ರು ಮತ್ತು ಆಮದು
ಹಾಗೂ ವಾಣಿಜ್ಯಗಳಲ್ಲಿ
ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ"
ಎಂದು ಅವರು
ಹೇಳಿದ್ದಾರೆ.

1.1 ಪೀಠಿಕೆ

1.2 ಮನರಾವರ್ತನೆ - ಲಾಭ, ನಷ್ಟ ಮತ್ತು ಸರಳಬಡ್ಡಿ

1.3 ಶೇಕಡ, ಲಾಭ ಮತ್ತು ನಷ್ಟ, ಹೆಚ್ಚುವರಿ ವಿಚುಗಳು,
ರಿಯಾಯಿತಿ ಮತ್ತು ತೆರಿಗೆಗಳ ಅನ್ವಯ

1.4 ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ (C.I.)

1.5 ಸರಳಬಡ್ಡಿ (S.I.) ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ (C.I.) ಗಳಿರುವ
ವ್ಯಾತ್ಯಾಸ

1.6 ಸಂಚಿತ ರೇಖಣಿ (Fixed Deposit) ಮತ್ತು ಆವರ್ತಕ
ರೇವರೀಗಳು (Recurring Deposits)

1.7 ಸಂಯುಕ್ತ ಅನುಪಾತ

1.8 ಕಾಲ ಮತ್ತು ಕೆಲಸ

1.1 ಪೀಠಿಕೆ (Introduction)

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ತನ್ನ ಜೀವನದುದ್ದಕ್ಕೂ ಗೆಲುವಿನ ತುತ್ತ ತುದಿಯನ್ನು ಮುಟ್ಟಲು
ಹವಣಿಸುತ್ತಿರುತ್ತಾನೆ. ಇದನ್ನು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಸಾಧಿಸಲು, ಅವನು ಅಧಿಕ ಸಂಪತ್ತ
ಮತ್ತು ಪ್ರಖ್ಯಾತಿ ಗಳಿಸಲು ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಅವನ ಕಾಲವನ್ನು (ಸಮಯವನ್ನು)
ಮೀಸಲಾಗಿಡುತ್ತಾನೆ.

ಶಿಲಾ ಯುಗದಿಂದ ಇಂದಿನ ಆಧುನಿಕ ಪ್ರಪಂಚದವರೆಗೆ, ವಸ್ತುಗಳ ವಿನಿಮಯದಿಂದ
ಹಣದ ಚಲಾವಣೆಯವರೆಗೆ, ಅವನ ಉತ್ಪಾದನೆ ಮತ್ತು ಜಮೀನಿಗೆ, ಮಾನವನು ಅನುಪಾತ
ಮತ್ತು ಸಮಾನುಪಾತಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತಿರುತ್ತಾನೆ. ಸೌಂದರ್ಯಕ್ಕೆ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ
ತಾಜ್‌ಮಹಲ್ ಮತ್ತು ತಂజಾವೂರಿನ ಬೃಹದೇಶ್ವರ ದೇವಸ್ಥಾನಗಳಂತಹ ಸ್ವಾರ್ಥಕ ಕಟ್ಟಡಗಳು,
ಅವುಗಳನ್ನು ಶ್ರೀಮಂತಿಕೆಗೊಳಿಸಲು ಸರಿಯಾದ ಅನುಪಾತೀಯ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ನಮ್ಮೆ
ಮೂರ್ವಜರು ಬಳಸಿರುವುದನ್ನು ಜಗತ್ತಿಗೆ ಸಾರುತ್ತಿವೆ.

ಜಗತ್ತಿನಲ್ಲಿ ಲಭ್ಯವಿರುವ ಹಲವಾರು ವಿಚಾರಗಳು ಮಳೆ ಮತ್ತು ಸುಗ್ರಿಕಾಲ,
ಮೋಷಕಾಂಶ ಮತ್ತು ಆರೋಗ್ಯ, ಆದಾಯ ಮತ್ತು ವಿಚು ಮುಂತಾದವುಗಳಲ್ಲಿರುವಂತೆ
ಕಾರಣ ಮತ್ತು ಪರಿಣಾಮ ಸಂಬಂಧಗಳಿಂದ ಬೆಸುಗೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ
ಸಂಯುಕ್ತ ಅನುಪಾತವು ಉಧ್ಬಿಂಬಿಸುತ್ತದೆ.

ಉಳಿವಿಗಾಗಿ ನಮ್ಮೆ ಪ್ರಯತ್ನ ಮತ್ತು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗಾಗಿ ನಮ್ಮೆ ಬಯಕೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಹಣವನ್ನು
ಸ್ವೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ ಅಥವಾ ತೇವಣಿ ಹೂಡುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಗಳ ರೂಪದ ಆದ್ಯತೆಯಾಗಿ
ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸರ್ಕಾರವು ರಕ್ಷಣೆ, ಆರೋಗ್ಯ, ಶಿಕ್ಷಣ ಮತ್ತು ಇತರೆ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳ
ಮೇಲೆ ಜವಾಬ್ದಾರಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲಾ ನಾಗರೀಕರಿಗೆ ಇವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಪೂರ್ವಸಲು
ನಾವು ನಮ್ಮೆ ಆದಾಯದಿಂದ ಸರ್ಕಾರಕ್ಕೆ ಹಲವಾರು ರೀತಿಯ ತೆರಿಗೆಗಳನ್ನು ಪಾವತಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯವು ನಮ್ಮ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿರುವ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

1.2 మనరావత్తానే: లాభ, నష్ట మత్తు సరళబడ్డి

(Revision: Profit, Loss and Simple Interest)

నావు ఈగాగలే హిందిన తరగతియల్లి లాభ, నష్ట మత్తు సరళబడ్డియన్న కురితు అధ్యయన నడెసిద్దేవే. ఈగ నావు కేళగిన ఫలితాంతగళన్న శృంగారాలో.

లాభ, నష్ట మత్తు సరళబడ్డిగళ మేలిన ఫలితాంతగళు

$$(i) \text{ లాభ అధవా ఆదాయ} = \text{మారిద బెలే} - \text{కొండ బెలే}$$

$$(ii) \text{ నష్ట} = \text{కొండ బెలే} - \text{మారిద బెలే}$$

$$(iii) \text{ లాభ \%} = \frac{\text{లాభ}}{\text{కొండ బెలే}} \times 100.$$

$$(iv) \text{ నష్ట \%} = \frac{\text{నష్ట}}{\text{కొండ బెలే}} \times 100$$

$$(v) \text{ సరళబడ్డి (I)} = \frac{\text{అసలు} \times \text{కాల} \times \text{దర}}{100} = \frac{Pnr}{100}$$

$$(vi) \text{ మొత్త} = \text{అసలు} + \text{బడ్డి}$$

1.3 శేకడ, లాభ మత్తు నష్ట, హెచ్చువరి ఖచ్చగళు, రియాలిటి హగూ తెరిగేగళ అన్నయి

1.3.1 శేకడద అన్నయ (Application of Percentage)

నావు ఈగాగలే హిందిన తరగతియల్లి శేకడగళన్న కురితు అధ్యయన నడెసిద్దేవే. ఈ పరికల్పనేయన్న కేళగినంత వ్యక్తపడిసోణ.

$$(i) \text{ శేకడ ఎరడు} = 2\% = \frac{2}{100}$$

$$(ii) 600 \text{ కి.గ్రాం} \text{ న } 8\% = \frac{8}{100} \times 600 = 48 \text{ కి.గ్రాం}$$

$$(iii) 125\% = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = 1 \frac{1}{4}$$

ఈగ, నావు కేలవు సమస్యగళిగే శేకడగళన్న అన్నయిసువుదన్న కలియోణ.

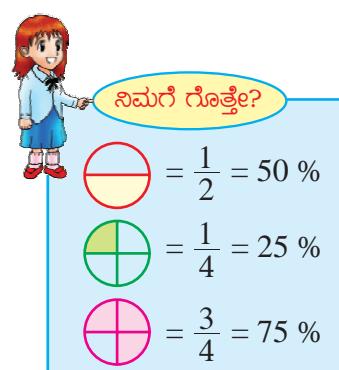
ఉదాహరణ 1.1

2 రూపాయి 70 పైసేయల్లి 15 పైసేయ శేకడ ఎష్టు?

పరిహార

$$\begin{aligned} 2 \text{ రూపాయి } 70 \text{ పైసే } &= (2 \times 100 \text{ పైసే} + 70 \text{ పైసే}) \\ &= 200 \text{ పైసే} + 70 \text{ పైసే} \\ &= 270 \text{ పైసే} \end{aligned}$$

$$\text{బేసాద శేకడ} = \frac{15}{270} \times 100 = \frac{50}{9} = 5 \frac{5}{9}\%.$$



ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಉದಾಹರಣೆ 1.2

₹ 1080 ಎಂಬುದು ಒಂದು ಮೊತ್ತದ 12% ಆದರೆ, ಆ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಮೊತ್ತವು ₹ x ಆಗಿರಲಿ.

$$\begin{aligned} \text{ದತ್ತ: } \quad \text{ಮೊತ್ತದ } 12\% &= ₹ 1080 \\ \frac{12}{100} \times x &= 1080 \\ x &= \frac{1080}{12} = ₹ 9000 \\ \therefore \text{ಮೊತ್ತ} &= ₹ 9000. \end{aligned}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.3

25 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 72% ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಿಪುಣರು. ಎಷ್ಟು ಜನ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಿಪುಣರಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ?

ಪರಿಹಾರ

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಿಪುಣರಾಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಶೇಕಡ = 72%

$$\begin{aligned} \text{ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಿಪುಣರಾಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} &= 25 \text{ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ } 72\% \\ &= \frac{72}{100} \times 25 = 18 \text{ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು} \end{aligned}$$

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಿಪುಣರಾಗಿರದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $25 - 18 = 7$.

ಉದಾಹರಣೆ 1.4

240 ಕ್ಕೆ 15% ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

$$240 \text{ ರ } 15\% = \frac{15}{100} \times 240 = 36$$

$$\therefore \text{ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ} = 240 - 36 = 204.$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.5

ಒಂದು ಮನೆಯ ಬೆಲೆಯು ಹದಿನ್ಯೇದು ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿಗಳಿಂದ ಹನ್ನರಡು ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗೆ ಇಳಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಇಳಿಕೆಯಾದ ಶೇಕಡವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಮೂಲ ಬೆಲೆ = ₹ 15,00,000

ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಆದ ಬದಲಾವಣೆ = ₹ 12,00,000

$$\text{ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಆದ ಇಳಿಕೆ} = 15,00,000 - 12,00,000 = 3,00,000$$

$$\therefore \text{ಇಳಿಕೆಯ ಶೇಕಡ} = \frac{300000}{1500000} \times 100 = 20\%$$

ಸೆನಿಟಿಸೆಂಟ್

$$\begin{aligned} \text{ವರಿಕೆಯ ಶೇಕಡ} &= \frac{\text{ಮೊತ್ತದಲ್ಲಾದ ವರಿಕೆ}}{\text{ಮೂಲ ಮೊತ್ತ}} \times 100 \\ \text{ಇಳಿಕೆಯ ಶೇಕಡ} &= \frac{\text{ಮೊತ್ತದಲ್ಲಾದ ಇಳಿಕೆ}}{\text{ಮೂಲ ಮೊತ್ತ}} \times 100 \end{aligned}$$



ಶರತ್ ಮತ್ತು ಭರತ್‌ರ ನಡುವೆ 15 ಸಿಹಿ ತಿನಿಸುಗಳನ್ನು ಹಂಚಲಾಗಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಅವರು ಕ್ರಮವಾಗಿ 20% ಮತ್ತು 80% ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ಪಡೆದ ಸಿಹಿ ತಿನಿಸಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕ್ರೇಸ್ಟ್‌ಪಣಿ



ನಮ್ಮ ಅಜ್ಞಾಯ ಅವಳ ಬಾಲ್ಯದಲ್ಲಿ ೧೦ ದಿನ ಗ್ರಾಂ ಚಿನ್ನದ ಬೆಲೆಯು ₹ ೧೦೦ ಎಂದು ಹೇಳಿದಳು. ಚಿನ್ನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ವಾತಾ ಪ್ರತಿಕೆಯನ್ನು ಓದಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಮೊದಲನೇ ದಿನದಂದು ಅದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಏರಿಕೆಯ ಶೇಕಡವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

- ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.
 - 25 ಹಣ್ಣಗಳಿರುವ ಒಂದು ಬುಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 5 ಕಿತ್ತಲೆ ಹಣ್ಣಗಳಿವೆ. ಕಿತ್ತಲೆ ಹಣ್ಣಗಳ ಶೇಕಡಾಂಶವು _____.
 - 5%
 - 25%
 - 10%
 - 20%
 - $\frac{2}{25} = \text{_____ \%}$.
 - 25
 - 4
 - 8
 - 15
 - ಒಂದು ಜಾಡಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಸ್ಕಿಟ್‌ಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯ 15% ಭಾಗವು 30 ಆಗಿದೆ. ಬಿಸ್ಕಿಟ್‌ಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯು _____.
 - 100
 - 200
 - 150
 - 300
 - ಕಳೆದ ವರ್ಷ ಒಂದು ಸ್ಕೂಲರಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 34,000 ಆಗಿದೆ. ಅದು ಈ ವರ್ಷ 25% ಏರಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಆಗ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಾದ ಏರಿಕೆಯು _____.
 - ₹ 6,500
 - ₹ 8,500
 - ₹ 8,000
 - ₹ 7,000
 - ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯ ಅವನ ಒಟ್ಟು ವೇತನ ₹ 20,000 ದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ₹ 3,000 ವನ್ನು ಉಳಿಸುತ್ತಾನೆ. ಅವನ ಉಳಿತಾಯಿದ ಶೇಕಡಾಂಶವು _____.
 - 15%
 - 5%
 - 10%
 - 20%
- (i) ಎಣ್ಣೆಯ ಒಟ್ಟು ಪರಿಮಾಣದ 20% ಭಾಗವು 40 ಲೀಟರುಗಳಾಗಿದೆ. ಎಣ್ಣೆಯ ಒಟ್ಟು ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಲೀಟರುಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
 - ಪ್ರಯಾಣದ 25% ಭಾಗವು 5,000 ಕ.ಮೀ. ನ್ನು ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಪ್ರಯಾಣದ ಒಟ್ಟು ದೂರವೆಷ್ಟು?
 - ಒಂದು ಮೊತ್ತದ 3.5% ಭಾಗವು ₹ 54.25 ಆಗಿದೆ. ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
 - ಒಟ್ಟು ಸಮಯದ 60% ಭಾಗವು 30 ನಿಮಿಷಗಳಾಗಿದೆ. ಒಟ್ಟು ಸಮಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
 - ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮಾರಾಟದಲ್ಲಿ 4% ಮಾರಾಟದ ತೆರಿಗೆಯು ₹ 2 ಆಗಿದೆ. ವಸ್ತುವಿನ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಯೇನು?
- ಮೀನ ಅವಳ ವೇತನದಲ್ಲಿ ₹ 2000 ವನ್ನು ಮನರಂಜನೆಗಾಗಿ ಬಳಸುತ್ತಾಳೆ. ಅದು ಅವಳ ವೇತನದಲ್ಲಿ 5% ಆಗಿದೆ. ಅವಳ ವೇತನವೆಷ್ಟು?
- ಒಟ್ಟು ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣಗಳಲ್ಲಿ ಹೊಳೆತ 25% ಭಾಗವು 1,250 ಹಣ್ಣಗಳಾಗಿದೆ. ಜಾಡಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಶುದ್ಧ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 1

5. ಹನ್ನೆರಡನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ರಾಣಿಯು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಶೇಕಡದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ವಿಷಯಗಳು	ಗರಿಷ್ಟ ಅಂಕಗಳು	ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು	ಅಂಕಗಳ ಶೇಕಡ (100 ಹಾಫ್)
(i) ಇಂಗ್ಲಿಷ್	200	180	
(ii) ಕನ್ನಡ	200	188	
(iii) ಗಣಿತ	200	195	
(iv) ಭಾಷಾಶಾಸ್ತ್ರ	150	132	
(v) ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ	150	142	
(vi) ಜೀವಶಾಸ್ತ್ರ	150	140	

6. ಒಂದು ಶಾಲೆಯ ಕ್ರೀಕೆಟ್ ತಂಡವು ಮತ್ತೊಂದು ಶಾಲೆಯ ವಿರುದ್ಧ 20 ಪಂದ್ಯಗಳನ್ನು ಆಡಿದೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಶಾಲೆಯು 25% ಪಂದ್ಯಗಳನ್ನು ಗೆದ್ದಿರುತ್ತದೆ. ಮೊದಲನೇ ಶಾಲೆಯು ಎಷ್ಟು ಪಂದ್ಯಗಳನ್ನು ಗೆದ್ದಿದೆ?
7. ರಾಮನು ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ₹ 10,000 ವನ್ನು ತೇವಣಿ ಹೊಡಿದ್ದು, ಅದು ವರ್ಷಕ್ಕೆ 18% ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. 5 ವರ್ಷಗಳ ಅವಧಿಗೆ ಅವನು ಪಡೆಯುವ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಒಂದು ಗೊಂಬೆಯ ನಮೂದಿಸಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 1,200 ಆಗಿದೆ. ಅಂಗಡಿಯವನು 15% ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, ಗೊಂಬೆಯ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆ ಏನು?
9. ಒಂದು ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿನ ಸಂದರ್ಶನದಲ್ಲಿ 1,500 ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಸಂದರ್ಶಿಸಲಾಯಿತು. ಅವರಲ್ಲಿ 12% ಆಯ್ದ್ಯಾಯಾದರೆ, ಎಷ್ಟು ಜನ ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳು ಆಯ್ದ್ಯಾಯಾದರು? ಹಾಗೂ ಆಯ್ದ್ಯಾಯಾದ ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಟೋಹವು 30% ತಾಮ್ರವನ್ನು ಮತ್ತು 40% ಸತುವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಹಾಗೂ ಉಳಿದ ಭಾಗವು ನಿಕ್ಕಲ್ ಆಗಿದೆ. 20 ಕ.ಗ್ರಾಂ ಮಿಶ್ರ ಟೋಹದಲ್ಲಿರುವ ನಿಕ್ಕಲ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. ಸೋಮ ಮತ್ತು ಭೀಮ ಇಬ್ಬರು ಅವರ ಗ್ರಾಮದಿಂದ ಪಂಚಾಯತಿ ಚುನಾವಣೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಧಿಸುತ್ತಾರೆ. ಸೋಮನು 11,484 ಮತಗಳನ್ನು ಅಂದರೆ, ಒಟ್ಟು ಮತಗಳಲ್ಲಿ 44% ಅನ್ನು ಗಳಿಸುತ್ತಾನೆ. ಭೀಮನು 36% ಮತಗಳನ್ನು ಗಳಿಸುತ್ತಾನೆ. (i) ಗ್ರಾಮದಲ್ಲಿ ಜಲಾವಣೆಯಾದ ಮತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತು (ii) ಇಬ್ಬರು ಸ್ಪರ್ಧಿಗಳಿಗೂ ಘೇರವನ್ನು ನೀಡಿದೆ ಇರುವ ಮತದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ಅವನ ಆದಾಯದಲ್ಲಿ 40% ನ್ನು ಆಹಾರಕ್ಕೆ, 15% ನ್ನು ಬಟ್ಟೆಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು 20%ನ್ನು ಮನೆ ಬಾಡಿಗೆ ಬಿಚು ಮಾಡುತ್ತಾನೆ ಹಾಗೂ ಉಳಿಕೆಯನ್ನು ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. ಅವನು ಶೇಕಡ ಎಷ್ಟನ್ನು ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ? ಅವನ ಆದಾಯವು ₹ 34,400 ಆದರೆ, ಅವನ ಉಳಿತಾಯದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
13. ರಮ್ಯಾಚು ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ 50 ಅಂಕಗಳಿಗೆ 35 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ 30 ಅಂಕಗಳಿಗೆ 27 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದಳು. ಯಾವ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಅಂಕಗಳಿಂದ ಅವಳು ಉತ್ತಮ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾರೆ?
14. ಒಬ್ಬ ಕೆಲಸಗಾರನು ₹ 11,250 ನ್ನು ಇನಾಮಾಗಿ ಪಡೆದನು. ಇದು ಅವನ ವಾರ್ಷಿಕ ವೇತನದಲ್ಲಿ 15% ಆಗಿದೆ. ಅವನ ಮಾಸಿಕ ವೇತನವೇನು?
15. ಒಂದು ಉದುವಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 2,100 ರಿಂದ ₹ 2,520 ಹಾಫ್ ಹೆಚ್ಚಿಂದಾಗಿದೆ. ಹೆಚ್ಚಿಂದ ಶೇಕಡವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



- $40\% = 100\% - \underline{\hspace{2cm}} \%$
- ఒందు తరగతియల్లి 25% విద్యార్థిగళు శాలేగే నడిగెయల్లి బరుతారే, 65% విద్యార్థిగళు బ్యోసికలోనల్లి బరుతారే మత్తు ఉళిద శేకడ విద్యార్థిగళు శాలేయ వాహనదల్లి బరుతారే. శాలా వాహనదల్లి బరువవర శేకడ ఎష్టు?
- ఒందు నిగదిత తరగతియ విద్యార్థిగళల్లి, 30% రష్టు హిందియన్ను, 50% రష్టు కన్నడవన్ను మత్తు ఉళిదవరు ప్రేంజన్ను ద్వితీయ భాషేయాగి తేగెదుచోళ్ళతారే. ద్వితీయ భాషేయాగి ప్రేంజన్ను తేగెదుచోళ్ళవవర శేకడ ఎష్టు?
- ఒందు నగరదల్లి, 30% స్త్రీయరు, 40% పురుషరు మత్తు ఉళిదవరు మక్కళు ఇరుతారే. మక్కళుగళ శేకడ ఎష్టు?

డైస్ట్రిబ్యూషన్



కైపాచు ఇబ్బరు ఏభిన్న వ్యాపారిగళాద శంకర మత్తు ఆదిత్య ఇవరింద రేష్ణే సీరేగళన్ను ఖిరీదిసుత్తాళే. శంకరను 100 గ్రాం కంజిన దారదొందిగె 200 గ్రాం బెళ్ళ దారదింద, ఆదిత్యను 200 గ్రాం కంజిన దారదొందిగె 300 గ్రాం బెళ్ళ దారదింద సీరేగళన్ను నేయుతారే. ప్రతియోందరల్లు బెళ్ళ దారద శేకడవన్ను లేక్కాకి మత్తు యారు ఉత్కుమ గుణమట్టివన్ను నీడుతారే ఎంబుదెన్ను కండుహిదియిరి.
(సూచన: బెళ్ళ దారవు హజ్జాదంత గుణమట్టివు ఉత్కుమవాగిరుత్తదే.)

1.3.2 లాభ మత్తు నష్టానికి అన్వయిగళ (Applications of Profit and Loss)

ఈ భాగదల్లి, లాభ మత్తు నష్టానికి అన్వయినగళ మేలిన సమస్యగళన్ను బిడిసువుదన్ను నావు కలియోణ.

(i) మారిద బెలేగె సూత్రద దృష్టాంతిశేకరణ (Illustration of the formula for S.P.)

కేళగిన సందర్భవన్ను పరిగణిసోణా.

రాజేశను ఒందు పెన్నన్ను ₹ 80 క్రే కొండుచోండను మత్తు అదన్ను అవన స్వేచ్ఛితనిగే మారాట మాడిదను. అవను 5% లాభవన్ను పడేయబేసాదరే, అవను మారబేసాద బెలేయన్ను నీపు హేఖువిరా?

రాజేశను ₹ 80 క్రే పెన్నన్ను కొండుచోండను. అదు కొండ బెలేయాగిదే. అవను మారువాగ 5% లాభవన్ను పడేదను. ఇదన్ను కొండబెలేయ మేలే లేక్కాకలాగిదే.



$$\therefore \text{లాభ} = \text{కొండ బెలేయ } 5\% = \frac{5}{100} \times 80 = ₹ 4$$

అల్లి లాభవిరువుదరింద మారిద బెలే > కొండ బెలే.

$$\begin{aligned}\text{మారిద బెలే} &= \text{కొండ బెలే} + \text{లాభ} \\ &= 80 + 4 = ₹ 84.\end{aligned}$$

రాజేశను మారబేసాద బెలే = ₹ 84

ఇదే సమస్యయన్ను సూత్ర బళసికొండు మాడలాగిదే.

$$\begin{aligned}\text{మారిద బెలే (S.P.)} &= \frac{(100 + \text{లాభ \%})}{100} \times \text{కొండ బెలే} \\ &= \frac{(100 + 5)}{100} \times 80 = \frac{105}{100} \times 80 = ₹ 84.\end{aligned}$$

ಅಧ್ಯಾಯ 1

(ii) ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಗೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸುವುದು (Illustration of the formula for C.P.)

ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿಹಿತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಒಬ್ಬ ಅಂಗಡಿಯವನು ಒಂದು ಕ್ಯಾಗಡಿಯಾರವನ್ನು ₹ 540 ಕ್ಕೆ ಮಾರಿದರೆ, 5 % ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕ್ಯಾಗಡಿಯಾರದ ಬೆಲೆಯು ಏನಾಗಿರಬೇಕು?

ಅಂಗಡಿಯವನು ಕ್ಯಾಗಡಿಯಾರವನ್ನು ಅದರ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ 5 % ಲಾಭಕ್ಕೆ ಮಾರಿದನು. ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದೆ ಇರುವುದರಿಂದ, ಅದನ್ನು ನಾವು ₹ 100 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.



ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ 5% ಲಾಭವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

$$\begin{aligned}\therefore \text{ಲಾಭ} &= 5\% \text{ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ} \\ &= \frac{5}{100} \times 100 \\ &= ₹ 5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ} &= \text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ} + \text{ಲಾಭ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.} \\ &= 100 + 5 \\ &= ₹ 105.\end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ, ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 105 ಅದರೆ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿದೆ.

$$\text{ಕ್ಯಾಗಡಿಯಾರದ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ } ₹ 540, \text{ ಆದಾಗ } \text{ಕೊಂಡಬೆಲೆ} = \frac{540 \times 100}{105} = ₹ 514.29$$

∴ ಅಂಗಡಿಯವನು ಕ್ಯಾಗಡಿಯಾರವನ್ನು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ₹ 514.29 ಆಗಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂತ್ರ ದಿಂದಲೂ ಸಹ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು.

$$\begin{aligned}\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ} &= \left(\frac{100}{100 + \text{ಲಾಭ}\%} \right) \times \text{ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ} \\ &= \frac{100}{100 + 5} \times 540 \\ &= \frac{100}{105} \times 540 \\ &= ₹ 514.29.\end{aligned}$$

ಈಗ ನಾವು ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಕುವ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಾರಾಂಶಿಸುತ್ತೇನೋಣ.

<p>1. ಅಲ್ಲಿ ಲಾಭವಿದ್ದಾಗಿ,</p> $(i) \text{C.P.} = \left(\frac{100}{100 + \text{ಲಾಭ}\%} \right) \times \text{S.P.}$	<p>1. ಅಲ್ಲಿ ನಷ್ಟವಿದ್ದಾಗಿ,</p> $(ii) \text{C.P.} = \left(\frac{100}{100 - \text{ನಷ್ಟ}\%} \right) \times \text{S.P.}$
<p>2. ಅಲ್ಲಿ ಲಾಭವಿದ್ದಾಗಿ,</p> $(i) \text{S.P.} = \left(\frac{100 + \text{ಲಾಭ}\%}{100} \right) \times \text{C.P.}$	<p>2. ಅಲ್ಲಿ ನಷ್ಟವಿದ್ದಾಗಿ,</p> $(ii) \text{S.P.} = \left(\frac{100 - \text{ನಷ್ಟ}\%}{100} \right) \times \text{C.P.}$

ಉದಾಹರಣೆ 1.6

ಹಷಟನು ೧೦ದು ಬ್ಲಾಕ್ ದೂರದರ್ಶನವನ್ನು ₹ 15,200ಗಳಿಗೆ ಖರ್ಚಿಸಿದನು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 20% ನಷ್ಟಕ್ಕೆ ಮಾರಿದನು. ದೂರದರ್ಶನದ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ಏನು?

ಪರಿಹಾರ

ರಾಮಲ್ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದನು.

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಗಾದ ನಷ್ಟ = 20%

$$= \frac{20}{100} \times 15200$$

$$= ₹ 3040$$

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ - ನಷ್ಟ

$$= 15,200 - 3,040$$

$$= ₹ 12,160$$

ಅಧ್ಯಾತ್ಮ

ರೋಪನ್ ಸೂತ್ರದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿದನು.

$$\text{ಕೊಂಡಬೆಲೆ} = ₹ 15,200$$

ನಷ್ಟ = 20%

$$\text{S.P.} = \left(\frac{100 - \text{ನಷ್ಟ \%}}{100} \right) \times \text{C.P.}$$

$$= \frac{100 - 20}{100} \times 15200$$

$$= \frac{80}{100} \times 15200$$

$$= ₹ 12,160$$

ರಾಮಲ್ ಮತ್ತು ರೋಪನ್ ಇಬ್ಬರೂ ೧೦ದೇ ಉತ್ತರವನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದು, ದೂರದರ್ಶನದ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 12,160 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.7

೧೦ದು ಸ್ಕೂಲ್‌ಯಿನ್‌ನ್ನು ₹ 13,600ಗಳಿಗೆ ಮಾರಲಾಗಿದ್ದು, ಅದು 15% ನಷ್ಟವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಸ್ಕೂಲ್‌ಯಿನ್ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದೇವಿಯು ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಳು.

15% ನಷ್ಟ ಎಂದರೆ,

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ₹ 100, ನಷ್ಟ = ₹ 15

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ

$$(100 - 15) = ₹ 85$$

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 85 ಆದರೆ, ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ₹ 100

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ₹ 13,600 ಆದರೆ,

$$\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ} = \frac{100 \times 13600}{85}$$

$$= ₹ 16,000$$

ಅಧ್ಯಾತ್ಮ

ರೇವತಿಯು ಸೂತ್ರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಳು.

ನಷ್ಟ = 15%.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ₹ 13,600

$$\text{C.P.} = \left(\frac{100}{100 - \text{ನಷ್ಟ \%}} \right) \times \text{S.P.}$$

$$= \frac{100}{100 - 15} \times 13600$$

$$= \frac{100}{85} \times 13600$$

$$= ₹ 16,000$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸ್ಕೂಲ್‌ಯಿನ್ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 16,000 ಆಗಿದೆ.



ಇವುಗಳನ್ನು
ಕ್ರಿಯೆತ್ತಿಸಿ

ವಸ್ತುಗಳು	ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ₹ ಗಳಲ್ಲಿ	ಲಾಭ/ನಷ್ಟ	ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ₹ ಗಳಲ್ಲಿ
ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರ	16,000	9% ಲಾಭ	
ಸೂಕ್ತ ಅಲೆಯ ಒಲೆ	13,500	12% ನಷ್ಟ	
ಮರದ ಕಪಾಟು		13% ನಷ್ಟ	6,786
ಸೋಫ್ (ಸುಖಾಸನ)		12½% ಲಾಭ	7,000
ಹವಾನಿಯಂತ್ರಣ ಸಾಧನ	32,400	7% ಲಾಭ	

ಪಾಠ್ಯ ಅಧ್ಯಾತ್ಮ

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಉದಾಹರಣೆ 1.8

11 ಪೆನ್ಸನ್‌ಗಳ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು 10 ಪೆನ್ಸನ್‌ಗಳ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಗೆ ಸಮಾಗಿರುತ್ತದೆ. ನಷ್ಟ ಅಥವಾ ಲಾಭದ ಶೇಕಡವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಪ್ರತಿ ಪೆನ್ಸನ್ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ $\text{₹ } x$ ಆಗಿರಲಿ.

$$10 \text{ ಪೆನ್ಸನ್‌ಗಳ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ} = \text{₹ } 10x$$

$$11 \text{ ಪೆನ್ಸನ್‌ಗಳ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ} = \text{₹ } 11x$$

ದತ್ತ: 11 ಪೆನ್ಸನ್‌ಗಳ ಹೊಂಡ ಬೆಲೆ = 10 ಪೆನ್ಸನ್‌ಗಳ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = $\text{₹ } 10x$

ಇಲ್ಲಿ, ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ > ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ

$$\therefore \text{ಲಾಭ} = \text{ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ} - \text{ಕೊಂಡಬೆಲೆ}$$

$$= 11x - 10x = \text{₹ } x$$

$$\text{ಲಾಭ \%} = \frac{\text{ಲಾಭ}}{\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ}} \times 100 = \frac{x}{10x} \times 100 = 10\%.$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.9

ಒಟ್ಟು ಮನುಷ್ಯನು ಎರಡು ಕ್ಯೂಗಡಿಯಾರಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ $\text{₹ } 594$ ರಂತೆ ಮಾರಿದನು. ಅವನು ಒಂದರಲ್ಲಿ 10% ಲಾಭವನ್ನು ಮತ್ತು ಮತ್ತೊಂದರಲ್ಲಿ 10% ನಷ್ಟವನ್ನು ಹೊಂದಿದನು. ಅವನು ಹೊಂದಿದ ಮೊಣಿ ಶೇಕಡಾವಾರು ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ದತ್ತ: ಒಂದನೇ ಕ್ಯೂಗಡಿಯಾರದ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = $\text{₹ } 594$, ಲಾಭ% = 10%

$$\begin{aligned} \therefore \text{ಒಂದನೇ ಕ್ಯೂಗಡಿಯಾರದ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ} &= \frac{100}{100 + \text{ಲಾಭ \%}} \times \text{S.P.} \\ &= \frac{100}{(100 + 10)} \times 594 \\ &= \frac{100}{110} \times 594 = \text{₹ } 540. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಅದೇ ರೀತಿ ಅವನು 10% ನಷ್ಟವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಎರಡನೇ ಕ್ಯೂಗಡಿಯಾರದ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು} \\ &= \frac{100}{100 - \text{ನಷ್ಟ \%}} \times \text{S.P.} \\ &= \frac{100}{(100 - 10)} \times 594 = \frac{100}{90} \times 594 = \text{₹ } 660. \end{aligned}$$

ಒಟ್ಟಾರೆ ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು, ಒಟ್ಟು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

ಎರಡು ಕ್ಯೂಗಡಿಯಾರಗಳ ಒಟ್ಟು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ = $540 + 660 = \text{₹ } 1,200$.

ಎರಡು ಕ್ಯೂಗಡಿಯಾರಗಳ ಒಟ್ಟು ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = $594 + 594 = \text{₹ } 1,188$.

$$\text{ನಿಷ್ಟಳ ನಷ್ಟ} = 1,200 - 1,188 = \text{₹ } 12.$$

$$\begin{aligned} \text{ನಷ್ಟ \%} &= \frac{\text{ನಷ್ಟ}}{\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ}} \times 100 \\ &= \frac{12}{1200} \times 100 = 1\%. \end{aligned}$$

1.3.3 ಹೆಚ್ಚಿರಿ ವೆಚ್ಚಿದ ಅನ್ವಯನ (Application of Overhead Expenses)

ಮಾರ್ಯಾಜು ಹವಾನಿಯಂತ್ರಣ ಸಾಧನವನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ಅವಳ ತಂದೆಯೊಂದಿಗೆ ತೆರಳಿದಳು. ಅವರು ₹ 18,000 ಕ್ಕೆ ಅದನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದರು. ಖರೀದಿಸಿದ ಅಂಗಡಿಯು ಅವರ ಮನೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಿರಲಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವರು ಹವಾನಿಯಂತ್ರಣ ಸಾಧನವನ್ನು ಅವರ ಮನೆಗೆ ಸಾಗಿಸಲು ವಾಹನದ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಸಾಗಣೆಯ ವೆಚ್ಚಿಪ್ಪ ರೂ 500 ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಹವಾನಿಯಂತ್ರಣ ಸಾಧನದ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ಕೇವಲ ₹ 18,000 ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ವಾಹನ ವೆಚ್ಚಿಪ್ಪ (ಸಾಗಣೆಕೆ ವೆಚ್ಚಿ) ₹ 500 ಸಹ ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು **ಹೆಚ್ಚಿರಿ ವೆಚ್ಚಿ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.



ಈಗ,

$$\begin{aligned} \text{ಹವಾನಿಯಂತ್ರಣ ಸಾಧನದ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ} &= \text{ನಿಜವಾದ ಬೆಲೆ} + \text{ಸಾಗಣೆಕೆ ವೆಚ್ಚಿ} \\ &= 18,000 + 500 = ₹ 18,500 \end{aligned}$$

ಮತ್ತೊಂದು ಸನ್ನಿಹಿತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಕಿಶೋರನ ತಂದೆಯು ಒಟ್ಟು ಬೆಂಬೆ ವ್ಯಾಪಾರಿಯಿಂದ ₹ 2,75,000 ಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಹಳೆಯ ಮಾರುತ್ತಿ ಕಾರನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದರು ಮತ್ತು ಕಾರಿಗೆ ಒಣ್ಣಿಹಚ್ಚಲು ₹ 25,000 ಗಳನ್ನು ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದರು ಹಾಗೂ ಅವರು ಕಾರನ್ನು ತನ್ನ ಸ್ವಂತ ಗ್ರಾಮಕ್ಕೆ ಸಾಗಿಸಲು ಮನಃ ₹ 2,000 ಗಳನ್ನು ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದರು. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ನೀವು ಉತ್ತರಿಸುವಿರಾ.

- (i) ಕಾರಿನ ಒಟ್ಟಾರೆ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
- (ii) ಕಾರಿನ ನಿಜವಾದ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
- (iii) ಇಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಹೆಚ್ಚಿರಿ ವೆಚ್ಚಿಗಳು ಯಾವುವು?

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಒಣ್ಣಿ ಹಚ್ಚಿದ ವೆಚ್ಚಿ ಮತ್ತು ಸಾಗಣೆಕೆ ವೆಚ್ಚಿಗಳು ಹೆಚ್ಚಿರಿ ವೆಚ್ಚಿಗಳಾಗಿವೆ.

$$\begin{aligned} \therefore \text{ಕಾರನ್ನು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ} &= \text{ನೈಜ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ} + \text{ಹೆಚ್ಚಿರಿ ವೆಚ್ಚಿಗಳು} \\ &= 2,75,000 + (25,000 + 2,000) \\ &= 2,75,000 + 27,000 = ₹ 3,02,000. \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವು ಒಂದು ತೀವ್ರಾನಕ್ಕೆ ಬರೋಣ.

ಕೆಲವು ವೇಳೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದಾಗ ಅಥವಾ ಮಾರಿದಾಗ, ಅದನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುವಾಗ ಅಥವಾ ಮಾರುವುದಕ್ಕೆ ಮೊದಲು ಕೆಲವು ಅಧಿಕವಾದ ಖರ್ಚು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವೆಚ್ಚಿಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿರಿ ವೆಚ್ಚಿಗಳು ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇವು ರಿಪೇರಿ, ಕೂಲಿ ಆಳಗಳು, ಸಾಗಣೆಕೆ ಮುಂತಾದ ವೆಚ್ಚಿಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1.10

ರಾಜು ಒಂದು ಮೋಟಾರು ಸ್ಕೆಲ್ಲನ್ನು ₹ 36,000 ಗಳಿಗೆ ಖರೀದಿಸಿದನು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಮೂರಾಗೊಳಿಸಲು ಮತ್ತು ಸುಂದರಗೊಳಿಸಲು ಕೆಲವು ಇನ್ನಿತರೆ ಜೋಡಣಿಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದನು. ಅವನು ಮೋಟಾರು ಸ್ಕೆಲ್ಲನ್ನು 10% ಲಾಭಕ್ಕೆ ಮಾರಿ ₹ 44,000 ಗಳನ್ನು ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯಾಗಿ ಪಡೆದನು. ಮೋಟಾರು ಸ್ಕೆಲ್ಲಿಗಾಗಿ ಇನ್ನಿತರೆ ಜೋಡಣಿಗಳಿಗೆ ಅವನು ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದನು?

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಪರಿಹಾರ

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರಲಿ.

$$\text{ಲಾಭ} = 10\%, \quad \text{ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ} = ₹ 110$$

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 110 ಆದರೆ, ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ₹ 100 ಆಗಿದೆ.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 44,000 ಆದಾಗ

$$\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ} = \frac{44000 \times 100}{110} = ₹ 40,000$$

∴ ಇನ್ನಿತರೆ ಜೋಡಣಿಗೆ ವಿಚಾರದ ಹಣ = $40,000 - 36,000 = ₹ 4,000$.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ / ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ	ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ	ಲಾಭ	ನಷ್ಟ
(i) ₹ 7,282		₹ 208	
(ii)	₹ 572	₹ 72	
(iii) ₹ 9,684			₹ 684
(iv)	₹ 1,973	₹ 273	
(v) ₹ 6,76,000			₹ 18,500

2. ಸೂಕ್ತವಾದ ಪೆಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ ಮತ್ತು ಉಳಿದವುಗಳನ್ನು ಖಾಲಿ ಬಿಡಿ.

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ	ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ	ಲಾಭ ಮತ್ತು ಲಾಭ %	ನಷ್ಟ ಮತ್ತು ನಷ್ಟ %
(i) ₹ 320	₹ 384		
(ii) ₹ 2,500	₹ 2,700		
(iii) ₹ 380	₹ 361		
(iv) ₹ 40			₹ 2 ನಷ್ಟ
(v) ₹ 5,000		₹ 500 ಲಾಭ	

3. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ 5% ಲಾಭವು ಉಂಟಾದರೆ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ₹ 700 ರ ಬ್ಯಾಸಿಕಲ್ ನೋಂದಿಗೆ ₹ 50 ಹೆಚ್ಚುವರಿ ವೆಚ್ಚೆ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ₹ 50 ಸಾಗಣಾ ವೆಚ್ಚುದೊಂದಿಗೆ ೧೦ ಗಳ ಕರ್ಮಾಂಶದ ಮೇಜನ್ನು ₹ 1,150 ಕ್ಕೆ ವಿರೀದಿಸಿದೆ.

(iii) ೧೦ ರುಬ್ಬಿಗೆ ಯಂತ್ರವನ್ನು ₹ 2,560 ಕ್ಕೆ ವಿರೀದಿಸಿ, ಅದರ ರಿಪೇರಿಗೆ ₹ 140 ನ್ನು ವಿಚು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

4. ఒందు మేజన్లు ₹ 1,320 క్షే మారాట మాడువాగ వ్యాపారియు 10% లాభవన్ను గలిగుత్తానె. మేజిన కొండ బెలేయన్ను కండుపిడియిరి.
5. 16 పుస్తకగళ కొండ బెలేయు 12 పుస్తకగళ మారిద బెలేగే సమనాగిదే. లాభద శేక్చావన్ను కండుపిడియిరి.
6. ఒట్టును ఎరడు వస్తుగళన్ను ప్రతియోందక్కే ₹ 375 రంతె మారాట మాడిదను. మోదలనే వస్తువిన మేలే 25% లాభవన్ను మత్తు మత్తొందు వస్తువిన మేలే 25% నష్టవన్ను అవను గలిగిదను. మాణిక వ్యవహారదల్లి అవనిగాద లాభ అధవా నష్ట ఎష్టు? హాగూ మాణిక వ్యవహారదల్లి ఉంటాద లాభ అధవా నష్టద శేక్చావన్ను కండుపిడియిరి.
7. ఆయ్యను ఒందు మనెయన్ను ₹ 17,75,000 క్షే ఖిరీదిసిదను మత్తు అదర ఒక విన్యాసక్కాగి ₹ 1,25,000 వన్ను ఖిర్చు మాడిదను. అవను 20% లాభవన్ను గలిగువుదరోందిగే మనెయన్ను మారాట మాడిదను. మనెయన్ను మారువ బెలేయన్ను కండుపిడియిరి.
8. మనెయన్ను పునర్ నిమాణ మాడలు అరవత్తు సావిర రూపాయిగళన్ను ఖిర్చు మాడిద నంతర అమల 20% లాభక్కే ఆ మనెయన్ను మారాట మాడిదఱు. మారాట మాడిద బెలేయు నలవత్తు ఎరడు లక్ష రూపాయిగళాదరే, అఖఱు మనెయన్ను ఎష్టు హణక్కే ఖిరీదిసిదఱు?
9. జయకుమారను నగరద హోర్బాగదల్లి నివేశనగళ జాగవన్ను ₹ 21,00,000 క్షే ఖిరీదిసిదను. అదర సుత్తలు గోడెయన్ను కట్టిసలు ₹ 1,45,000 ఖిర్చు మాడిదను. నంతర అవను ₹ 25,00,000 గలిగే అదన్ను మారాట మాడబేకాగిద్దు, అదికోస్కరవాగి వాతావ పత్రికేయల్లి జాపిఏరాతిగాగి ₹ 5,000 ఖిర్చు మాడిదను. ఈగ అవన లాభద శేక్చావంతవన్ను కండుపిడియిరి.
10. ఒట్టు మనుషును ఎరడు జాతియ నాయిగళన్ను ప్రతియోందక్కే ₹ 3,605 రంతె మారాట మాడిదను. ఒందరల్లి అవనిగే 15% లాభవు, మత్తొందరల్లి 9% నష్టవు ఉంటాయితు. అవన ఒట్టారే లాభ అధవా నష్టవన్ను కండుపిడియిరి. (సులివు: ప్రతియోందర కొండ బెలేయన్ను కండుపిడియిరి.)

1.3.4 రియాయితియ అస్యం (Application of Discounts)

మొజాఖు నిన్నెయ దిన తన్న తండే తాయియోందిగే సంక్రాంతి హబ్బక్కే ఉడుపన్ను ఖిరీదిసలు ఒందు అంగడిగే తెరళిదఱు. అఖఱు హలవారు నిశానేగళన్ను (బ్యానర్) అంగడిగళల్లి నోడిదఱు. అల్లి ఇరువ విషయిగళన్ను అవళింద అఫ్స్ సిచోళ్లలాగలిల్ల.

ఇదన్ను మనస్సినల్లిట్టుకోండు అఖఱు అంగడిగే తెరళి ఒందు ఉడుపన్ను ఖిరీదిసిదఱు.

ఉడుపిన మేలిరువ దరద పట్టియల్లి ₹550 ఎందు హాకలాగిద్దు అదన్ను ముఖ బెలే (M.P. - Marked Price) ఎన్నుత్తారే మత్తు అఖఱు అంగడియవనిగే ₹ 550 నీఁడుత్తాలే. ఆదరే అంగడియవను ఉళికే హణవన్ను హిందిరుగిసి, అల్లి 20% రియాయితి ఇదే ఎందు తిళిగుత్తానె.

ఇల్లి, 20% రియాయితి ఎంబుదర అధవు ముఖబెలేయ మేలే 20% రియాయితి ఆగిదే.

$$\text{రియాయితి} = \frac{20}{100} \times 550 = ₹ 110.$$

రియాయితి ఎంబుదు వస్తువిన ముఖబెలే అధవా పట్టి బెలేయ మేలిన కడితవాగిదే.



రియాయితిన్ను కొడువ మోదలు వస్తువిగే హాసిరువ (నమూదిసిరువ) సామాన్య బెలేయన్ను వస్తువిన ముఖ బెలే అధవా పట్టి బెలే ఎందు కరెయుత్తేవే.

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಮೊಜಾಳು ಅಂಗಡಿಯವನಿಗೆ ನೀಡಿದ ಹಣ ₹ 440

$$= ₹ 550 - ₹ 110$$

= ಮುಖಿ ಬೆಲೆ - ರಿಯಾಲಿತಿ

ಆಧ್ಯಾತ್ಮಿಕ ನಾವು

ರಿಯಾಲಿತಿ = ಮುಖಿ ಬೆಲೆ - ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ಮುಖಿ ಬೆಲೆ - ರಿಯಾಲಿತಿ

ಮುಖಿ ಬೆಲೆ = ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ + ರಿಯಾಲಿತಿ

ಒಂದು ತೀವ್ರಾನಿಸಬಹುದು.



ಹಬ್ಬಿ ಮತ್ತು ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೋ-ಆಪ್‌ಎಂಟ್‌ಸ್ಟೋರ್ಸ್, ಖಾದಿ ಮತ್ತು ಇನ್‌ಫೋರ್ಮೇಶನ್ ಅಂಗಡಿಗಳು ಮಾರಾಟವನ್ನು ಅಧಿಕಗೊಳಿಸಲು ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲೆ 10%, 20%, 30%, ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ರಿಯಾಲಿತಿ ಅಥವಾ ಸೋಡಿಯನ್ ಕೊಟ್ಟಿ ಗ್ರಾಹಕರನ್ನು ಆಕಾರಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.11

ಒಂದು ಬೈಸಿಕಲ್‌ನ ಮುಖಿ ಬೆಲೆಯು ₹ 1,500 ಗಳಾಗಿದ್ದು. ಅದನ್ನು ₹ 1,350 ಗಳಿಗೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ರಿಯಾಲಿತಿಯ ಶೇಕಡವೇನು?

ಪರಿಹಾರ

ದತ್ತ: ಮುಖಿ ಬೆಲೆ = ₹ 1500, ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ₹ 1350

$$\begin{aligned} \text{ರಿಯಾಲಿತಿಯ ಹಣ} &= \text{ಮುಖಿ ಬೆಲೆ} - \text{ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ} \\ &= 1500 - 1350 \\ &= ₹ 150 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ₹ 1500 ಕ್ಕೆ ರಿಯಾಲಿತಿ &= ₹ 150 \\ ₹ 100 ಕ್ಕೆ ರಿಯಾಲಿತಿ &= \frac{150}{1500} \times 100 \\ \text{ರಿಯಾಲಿತಿಯ ಶೇಕಡ} &= 10\%. \end{aligned}$$

ಮುಖಿ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ರಿಯಾಲಿತಿ
ಇರುವುದರಿಂದ, ನಾವು ಮುಖಿ ಬೆಲೆಯ
ಮೇಲೆ ರಿಯಾಲಿತಿಯನ್ನು ಲೇಕ್ಕಾಚಾರ
ಮಾಡಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 1.12

ಒಂದು ಉಡುಪಿನ ಮುಖಿ ಬೆಲೆಯು ₹ 220 ಆಗಿದೆ. ಮಾರಾಟದ ಮೇಲೆ 20% ರಿಯಾಲಿತಿಯನ್ನು ಫೋಷಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲೆ ರಿಯಾಲಿತಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ಏನು?

ಪರಿಹಾರ

ದತ್ತ: ಉಡುಪಿನ (ಪಟ್ಟಿ) ಮುಖಿ ಬೆಲೆ = ₹ 220, ರಿಯಾಲಿತಿಯ ದರ = 20%

$$\begin{aligned} \text{ರಿಯಾಲಿತಿಯ ಹಣ} &= \frac{20}{100} \times 220 \\ &= ₹ 44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ಉಡುಪಿನ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆ} &= \text{ಮುಖಿ ಬೆಲೆ} - \text{ರಿಯಾಲಿತಿ} \\ &= 220 - 44 \\ &= ₹ 176. \end{aligned}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.13

ಒಂದು ಕಪಾಟು 5% ರಿಯಾಲಿತಿ ಹೊಂದಿದ ನಂತರ ₹ 5,225 ಗಳಿಗೆ ಮಾರಾಟವಾಯಿತು. ಅದರ ಮುಖ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಕೃಷ್ಣನು ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿದನು.
ರಿಯಾಲಿತಿಯನ್ನು ಶೇಕಡಾದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ, ಮುಖ ಬೆಲೆಯನ್ನು ₹ 100 ಎಂದು
ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

$$\text{ರಿಯಾಲಿತಿ ದರ} = 5\%$$

$$\begin{aligned}\text{ರಿಯಾಲಿತಿ ಹಣ} &= \frac{5}{100} \times 100 \\ &= ₹ 5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ} &= \text{ಮುಖ ಬೆಲೆ} - \text{ರಿಯಾಲಿತಿ} \\ &= 100 - 5 = ₹ 95\end{aligned}$$

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ₹ 95 ಆದರೆ, ಮುಖ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 5225 ಆದಾಗ,

$$\text{ಮುಖ ಬೆಲೆ} = \frac{100}{95} \times 5225$$

$$\therefore \text{ಕಪಾಟಿನ ಮುಖ ಬೆಲೆ} = ₹ 5,500.$$

ರಾಮನು ಸೂತ್ರದ ವಿಧಾನವನ್ನು
ಬಳಸಿದನು.

$$\text{ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ} = ₹ 5225$$

$$\text{ರಿಯಾಲಿತಿ} = 5\%$$

$$\text{ಮುಖ ಬೆಲೆ} = ?$$

$$\begin{aligned}\text{ಮುಖ ಬೆಲೆ} &= \frac{100}{100 - \text{ರಿಯಾಲಿತಿ \%}} \times \text{S.P.} \\ &= \left(\frac{100}{100 - 5} \right) \times 5225 \\ &= \frac{100}{95} \times 5225 \\ &= ₹ 5,500.\end{aligned}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.14

ಒಬ್ಬ ಅಂಗಡಿಯವನು ಅವನ ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ 10% ರಿಯಾಲಿತಿಯನ್ನು ನೀಡಿಯೂ 20% ಲಾಭವನ್ನು
ಗಳಿಸಿದನು. ಅಂಗಡಿಯವನಿಗೆ ವಸ್ತುವು ₹ 450 ಕ್ಕೆ ದೊರಕಿದರೆ ವಸ್ತುವಿನ ಮುಖ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ರಾಹುಲ್ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿದನು.

ಮುಖಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರಲಿ.

ರಿಯಾಲಿತಿ = ಮುಖಬೆಲೆಯ 10%

$$\begin{aligned}&= \text{ಮುಖಬೆಲೆಯ } \frac{10}{100} = \frac{10}{100} \times 100 \\ &= ₹ 10\end{aligned}$$

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ಮುಖಬೆಲೆ - ರಿಯಾಲಿತಿ

$$= 100 - 10 = ₹ 90$$

ಲಾಭ = ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯ 20%

$$= \frac{20}{100} \times 450 = ₹ 90$$

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = ಕೊಂಡಬೆಲೆ + ಲಾಭ

$$= 450 + 90 = ₹ 540.$$

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 90 ಆದಾಗ ಮುಖಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 540 ಆದಾಗ,

$$\text{ಮುಖಬೆಲೆ} = \frac{540 \times 100}{90} = ₹ 600.$$

$$\therefore \text{ವಸ್ತುವಿನ ಮುಖಬೆಲೆ} = ₹ 600.$$

ನಿತಿನ್ ಸೂತ್ರದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿದನು.

ರಿಯಾಲಿತಿ = 10%, ಲಾಭ = 20%,

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ = ₹ 450, ಮುಖ ಬೆಲೆ = ?

$$\text{ಮುಖ ಬೆಲೆ} = \frac{100 + \text{ಲಾಭ \%}}{100 - \text{ರಿಯಾಲಿತಿ \%}} \times \text{C.P}$$

$$= \frac{(100 + 20)}{(100 - 10)} \times 450$$

$$= \frac{120}{90} \times 450$$

$$= ₹ 600$$

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಉದಾಹರಣೆ 1.15

ಒಟ್ಟು ವ್ಯಾಪಾರಿಯು 10% ರಿಯಾಲಿತಿಯನ್ನು ನೀಡಿಯೂ 10% ಲಾಭವನ್ನು ಗಳಿಸಿದನು. ₹ 220 ಮುಖ್ಯಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪುಸ್ತಕದ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ಏನು?

ಪರಿಹಾರ

ಸನತ್ತ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿದನು.

$$\text{ಮುಖ್ಯ ಬೆಲೆ} = ₹ 220.$$

$$\text{ರಿಯಾಲಿತಿ} = \text{ಮುಖ್ಯಬೆಲೆ} 10\%$$

$$= \frac{10}{100} \times 220 = ₹ 22$$

[ಅಥವಾ]

$$\begin{aligned}\text{ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ} &= \text{ಮುಖ್ಯಬೆಲೆ} - \text{ರಿಯಾಲಿತಿ} \\ &= 220 - 22 = ₹ 198\end{aligned}$$

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರಲಿ.

$$\begin{aligned}\text{ಲಾಭ} &= \text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯ} 10\% \\ &= \frac{10}{100} \times 100 = ₹ 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ} &= \text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ} + \text{ಲಾಭ} \\ &= 100 + 10 \\ &= ₹ 110.\end{aligned}$$

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 110 ಆದಾಗ, ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 198 ಆದಾಗ,

$$\begin{aligned}\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ} &= \frac{198 \times 100}{110} \\ &= ₹ 180.\end{aligned}$$

ಸಾನ್ನಿ ಸೂತ್ರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿದಳು.

$$\text{ರಿಯಾಲಿತಿ} = 10\%$$

$$\text{ಲಾಭ} = 10\%$$

$$\text{ಮುಖ್ಯ ಬೆಲೆ} = ₹ 220$$

$$\begin{aligned}\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ} &= \frac{100 - \text{ರಿಯಾಲಿತಿ \%}}{100 + \text{ಲಾಭ \%}} \times \text{M.P.} \\ &= \frac{100 - 10}{100 + 10} \times 220 \\ &= \frac{90}{110} \times 220 = ₹ 180.\end{aligned}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.16

ಒಂದು ದೂರದರ್ಶನವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ 10% ಮತ್ತು 20% ಕ್ರಮಾನುಗತ ರಿಯಾಲಿತಿಯನ್ನು ನೀಡಿದ ನಂತರ ₹ 14,400 ಕ್ಕೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಮುಖ್ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

$$\text{ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ} = ₹ 14,400$$

ಮುಖ್ಯ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರಲಿ.

$$\text{ಮೊದಲನೇ ರಿಯಾಲಿತಿ} = 10\% = \frac{10}{100} \times 100 = ₹ 10$$

$$\text{ಮೊದಲನೇ ರಿಯಾಲಿತಿಯ ನಂತರ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ} = 100 - 10 = ₹ 90$$

$$\text{ಎರಡನೇ ರಿಯಾಲಿತಿ} = 20\% = \frac{20}{100} \times 90 = ₹ 18$$

$$\text{ಎರಡನೇ ರಿಯಾಲಿತಿಯ ನಂತರ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ} = 90 - 18 = ₹ 72$$

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 72 ಆದರೆ, ಮುಖ್ಯ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯು ₹ 14,400 ಆದಾಗ,

$$\text{ಮುಖ್ಯ ಬೆಲೆ} = \frac{14400 \times 100}{72} = ₹ 20,000$$

$$\text{ಮುಖ್ಯ ಬೆಲೆ} = ₹ 20,000.$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.17

ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ೧೦ದು ವಸ್ತುವನ್ನು ₹ 1,200 ಕ್ಕೆ ಖರ್ಚಿಸಿ, ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಗಿಂತ 30% ಹೆಚ್ಚು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದನು. ಅವನು ನಂತರ 20% ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ನೀಡಿ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದನು. ಮಾರಿದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಶೇಕಡಾ ಲಾಭವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ವಸ್ತುವಿನ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆಗಿರಲಿ.

$$\text{ಮುಖ ಬೆಲೆ} = \text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಗಿಂತ } 30\% \text{ ಹೆಚ್ಚು} = ₹ 130$$

ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆದರೆ ಮುಖ ಬೆಲೆಯು ₹ 130 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು } ₹ 1200 \text{ ಆದಾಗ, } \text{ಮುಖ ಬೆಲೆ} = \frac{1200 \times 130}{100} = ₹ 1560$$

$$\text{ರಿಯಾಯಿತಿ} = 1560 \text{ ರ } 20\% = \frac{20}{100} \times 1560 = ₹ 312$$

$$\text{ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ} = \text{ಮುಖ ಬೆಲೆ} - \text{ರಿಯಾಯಿತಿ}$$

$$= 1560 - 312 = ₹ 1248$$

$$\text{ಲಾಭ} = \text{ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ} - \text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ}$$

$$= 1248 - 1200 = ₹ 48.$$

$$\therefore \text{ಲಾಭ \%} = \frac{\text{ಲಾಭ}}{\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ}} \times 100 \\ = \frac{48}{1200} \times 100 = 4\%$$



೧೦ದು ಅಂಗಡಿಯು 20% ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ನೀಡಿದೆ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಮಾರುವ ಬೆಲೆ ಎನಾಗಿರುತ್ತದೆ?

- (i) ೧೦ದು ಉದುಳಿನ ಮುಖಬೆಲೆ ₹ 120 ಆದಾಗ
- (ii) ೧೦ದು ಚೀಲದ ಮುಖ ಬೆಲೆ ₹ 250 ಆದಾಗ
- (iii) ೧೦ದು ಜೊತೆ ಪಾದರಕ್ಷೇಯ ಮುಖ ಬೆಲೆ ₹ 750 ಆದಾಗ

1.3.5 ತೆರಿಗೆಯ ಅನ್ವಯ (Application of Tax)

ನಾವು ವಾತಾ ಪತ್ರಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ದೂರದರ್ಶನದಲ್ಲಿ ಜನರಿಗೆ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿ ತಮ್ಮ ತೆರಿಗೆಗಳನ್ನು ಕಟ್ಟಿ ಎಂದು ಸಾರುವ ಜಾಹೀರಾತುಗಳನ್ನು ಆಗಾಗೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಈ ತೆರಿಗೆ ಎಂದರೇನು? ಸಾಮಾನ್ಯ ಜನರಿಂದ ಸರ್ಕಾರವು ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಏಕೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತದೆ?

ರಸ್ತೆ, ರೈಲ್ವೆ ನಿಲಾಷಣ, ಆಸ್ಟ್ರೇಗಳು, ಶಾಲೆಗಳು ಮುಂತಾದ ಅಗತ್ಯ ಸೌಲಭ್ಯಗಳನ್ನು ಜನರಿಗೆ ಒದಗಿಸಲು ಸರ್ಕಾರಕ್ಕೆ ಹಣದ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿದೆ. ಸರ್ಕಾರವು ಹಲವಾರು ತೆರಿಗೆಗಳನ್ನು ಹಾಕುವುದರ ಮೂಲಕ ಅಗತ್ಯವಾದ ಹಣವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತದೆ.



ಅಧ್ಯಾಯ 1

ತೆರಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ವಿಧಗಳಿವೆ.

1. ನೇರ (ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ) ತೆರಿಗೆ (Direct Tax)

ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ, ಅಸ್ತಿ ತೆರಿಗೆ, ವೃತ್ತಿ ತೆರಿಗೆ, ನೀರಿನ ತೆರಿಗೆ ಮುಂತಾದವುಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತೆರಿಗೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸುವುದನ್ನು ನೇರ (ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ) ತೆರಿಗೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇವುಗಳು ಜನರಿಂದ ಸರ್ಕಾರಕ್ಕೆ ನೇರವಾಗಿ ಪಾವತಿಸಲಬ್ದವುತ್ತವೆ.

2. ಪರೋಕ್ಷ ತೆರಿಗೆ (Indirect Tax)

ಸರ್ಕಾರಕ್ಕೆ ನೇರವಾಗಿ ಪಾವತಿಯಾಗದ ಕೆಲವು ತೆರಿಗೆಗಳು ಪರೋಕ್ಷ ತೆರಿಗೆಗಳಾಗಿದ್ದ ಅವುಗಳನ್ನು ಕೇಳಿಗಿನಂತೆ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಅಭಿಕಾರಿ ತೆರಿಗೆ (Excise Tax)

ದೇಶದೊಳಗೆ ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ಕೆಲವು ಪದಾರ್ಥಗಳಿಗೆ ಈ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ವಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಭಾರತ ಸರ್ಕಾರವು ಸಂಗ್ರಹಿಸುತ್ತದೆ.

ಸೇವಾ ತೆರಿಗೆ (Service Tax)

ಫಲಹಾರ ಮಂದಿರ, ಚಿತ್ರ ಮಂದಿರಗಳು, ಲೆಕ್ಕ ಪರಿಶೋಧಕರ ಸೇವೆ, ದೂರವಾಣಿ ಬೆಲೆಪಟ್ಟಿ ಮುಂತಾದವುಗಳಿಗೆ ವಿಧಿಸುವ ತೆರಿಗೆಗಳು ಸೇವಾ ತೆರಿಗೆಗೆ ಸೇರುತ್ತವೆ. ಈ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಬಳಕೆದಾರರಿಂದ ಸೇವೆಯನ್ನು ಒದಗಿಸುವವರು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಸರ್ಕಾರಕ್ಕೆ ಪಾವತಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ (Income Tax)

ಇದು ನಿಗದಿತ ಕನಿಷ್ಠ ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಪಾದಿಸುವ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಪ್ರಜೆಯಿಂದ ಸರ್ಕಾರವು ಸಂಗ್ರಹಿಸುವ ಕಂದಾಯದ ಪ್ರಮುಖ ಮೂಲವಾಗಿದೆ. ನಮ್ಮ ದೇಶದ ಪ್ರಮಾಣಿಕ ಪ್ರಜೆಯಾಗಿ ನಾವು ನಮ್ಮ ಕರ್ತವ್ಯದ ಮೇಲೆ ಜಾಗೃತರಾಗಿ ಸಮಯಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಪಾವತಿಸಬೇಕು.

ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ / ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆ (Sales Tax / Value Added Tax)

ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ

ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟಗಾರನಿಗೆ ಮಾರಾಟದ ಮೇಲೆ ವಿಧಿಸುವ ತೆರಿಗೆಯೇ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯಾಗಿದೆ.

ಖರೀದಿಸುವವನು ಅಗತ್ಯ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸುವಾಗ ಅಗತ್ಯ ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಯೊಂದಿಗೆ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಪಾವತಿಸುತ್ತಾನೆ.

ಈ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಸರ್ಕಾರವು ವಸ್ತುವಿನ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ವಿಧಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಬೆಲೆ ಪಟ್ಟಿಯ ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಇತ್ತೀಚಿನ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆ (VAT) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ವಸ್ತುವಿಗೆ ನಾವು ಪಾವತಿಸುವ ಬೆಲೆಗೆ ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯು ಸೇರಿಸಲಬ್ದಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಇದರ ಅರ್ಥವಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮಾರಾಟದ ಮೇಲೆ ಸರ್ಕಾರವು ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ವಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

CASH BILL			7777 7777
TIN No. 33571280275/Dt. 1-4-95 Area Code No. 0 6 5 Dt. 1-4-95			
Authorised Dealers In :			
TITAN	SEMAKA	TIMEX	Classic
CITIZEN	SARTIME	Ajanta	SAMAY ORPAT
368, HIGH ROAD, CHENNAI - 600 001.			
M/S.	Shree Ponmani	Chennai.	Date: 29/10/15
No.	50476		
Qty.	DESCRIPTION OF ARTICLES	RATE Rs. P.	Rs. P.
1)	SONATA R144 Y103 St 863 -		780 00
	Locks watch Y/L	V.A.T. 10%	78 00
			858 00
			858 00
	Thank You ! ALL MAJOR CREDIT & DEBIT CARDS ACCEPTED		
	Goods once sold cannot be taken back or exchanged		
			For M.H.T. Watch & Radio Centre

Activity

ಸಾಧ್ಯ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಅಗತ್ಯ ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ
ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ
ದರವನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಾ.

1. ಏಧೂತ್ ಉಪಕರಣಗಳು _____ %
2. ಪೆಟ್ರೋಲ್ _____ %
3. ಡೀಸಲ್ _____ %
4. ಗೃಹ ಬಳಕೆಯ ಸಾಮಾಗ್ರಿಗಳು _____ %
5. ರಾಸಾಯನಿಕಗಳು _____ %

**Do you know?**

ಕೆಲವು ಅಗತ್ಯ ವಸ್ತುಗಳಾದ ಅಕ್ಕಿ, ಸಕ್ಕರೆ, ಹಾಲು,
ಉಪ್ಪು, ಪೆನ್ನು, ಪೆನ್ನಲ್ಗಳು ಮತ್ತು ಪುಸ್ತಕಗಳು
ಮುಂತಾದವುಗಳಿಗೆ ಸರ್ಕಾರವು ಮಾರಾಟ
ತೆರಿಗೆಯ ವಿನಾಯಿತಿಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ಲೆಕ್ಕಾಖಾರ (Calculation of Sales Tax)

$$\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ಮೊತ್ತ} = \frac{\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ದರ}}{100} \times \text{ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ}$$

$$\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ದರ} = \frac{\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ಮೊತ್ತ}}{\text{ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ}} \times 100$$

$$\text{ದರ ಪಟ್ಟಿಯ ಮೊತ್ತ} = \text{ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ} + \text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ಮೊತ್ತ}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.18

ವಿನೋದನು ಸಂಗೀತ ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ₹ 12,000 ಕ್ಕೆ ಖರ್ಚಿಸಿದನು. ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ದರವು 8% ಆದರೆ, ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅವನಿಂದ ಪಾವತಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಟ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

$$\text{ಸಂಗೀತ ಉಪಕರಣಗಳ ಬೆಲೆ} = ₹ 12,000$$

$$\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ದರ} = 8\%$$

$$\begin{aligned}\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ಮೊತ್ತ} &= \frac{8}{100} \times 12000 \\ &= ₹ 960\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯೊಂದಿಗೆ ವಿನೋದನಿಂದ ಪಾವತಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ} &= 12,000 + 960 \\ &= ₹ 12,960\end{aligned}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.19

ಒಂದು ಶೈಕ್ಷಿಕರಣ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯೊಂದಿಗೆ ₹ 14,355 ಗಳಿಗೆ ಖರ್ಚಿಸಲಾಯಿತು. ಶೈಕ್ಷಿಕರಣ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಸ್ವೇಚ್ಚಾ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 13,050 ಆದರೆ, ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಶೈಕ್ಷಿಕರಣ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗೆ, ದರ ಪಟ್ಟಿಯ ಮೊತ್ತ = ₹ 14,355, ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ = ₹ 13,050.

$$\begin{aligned}\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ} &= \text{ದರ ಪಟ್ಟಿಯ ಮೊತ್ತ} - \text{ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ} \\ &= 14,355 - 13,050 = ₹ 1,305\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ದರ} &= \frac{\text{ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ಮೊತ್ತ}}{\text{ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ}} \times 100 \\ &= \frac{1305}{13050} \times 100 = 10\%\end{aligned}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.20

ಪ್ರಿಯಾ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ₹ 2,730 ಕ್ಕೆ ಖರ್ಚಿಸಿದಳು. ಈ ವಸ್ತುವಿಗೆ ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯು 5% ಆಗಿದೆ. ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮೊದಲು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಬೆಲೆ ಏನು? ಹಾಗೂ ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯು ಎಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ದತ್ತ: ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯು 5%.

ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದರೆ ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 100 ಆದರೆ, ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 105 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 105 ಆದರೆ, ನೈಜ ಬೆಲೆಯು ₹ 100.

ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 2,730 ಆದಾಗ, ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ನೈಜ ಬೆಲೆಯು

$$= \frac{100}{105} \times 2730 = ₹ 2,600$$

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ನೈಜ ಬೆಲೆ = ₹ 2,600

$$\therefore \text{ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆ} = 2,730 - 2,600 = ₹ 130$$



1. 5% ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಖರ್ಚಿನಲ್ಲಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ₹ 60 ಕ್ಕೆ ತಲೆ ದಿಂಬು (ii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ₹ 25 ಆಗಿರುವ ಎರಡು ಸಾಬೂನಿನ ಬಿಲ್ಲೆಗಳು.

2. ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ 8% VAT (ವ್ಯಾಟ್) ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ, ಮೂಲ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ನೀರನ್ನು ಬಿಸಿ ಮಾಡುವ ವಿದ್ಯುತ್ ಉಪಕರಣವನ್ನು ₹ 14,500 ಕ್ಕೆ ಹೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

(ii) ಒಂದು ಲೋಟದ ಸೆಟ್‌ನ್ನು ₹ 200 ಕ್ಕೆ ಹೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಒರೆಯಿರಿ.

(i) ರಿಯಾಯಿತಿಯ ಯಾವಾಗಲೂ _____ ಯ ಮೇಲಿದೆ.

(A) ಮುಖಿ ಬೆಲೆ (B) ಹೊಂಡ ಬೆಲೆ (C) ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ (D) ಬಡ್ಡಿ

(ii) ಮುಖಿಬೆಲೆ = ₹ 140, ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ = ₹ 105 ಆದರೆ, ರಿಯಾಯಿತಿ = _____.

(A) ₹ 245 (B) ₹ 25 (C) ₹ 30 (D) ₹ 35

(iii) _____ = ಮುಖಿಬೆಲೆ – ರಿಯಾಯಿತಿ.

(A) ಹೊಂಡ ಬೆಲೆ (B) ಮಾರುವ ಬೆಲೆ (C) ದರ ಪಟ್ಟಿ (D) ಮಾರುಕಟ್ಟಿ ಬೆಲೆ

(iv) ವಸ್ತುವಿನ ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸುವ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು _____ ತೆರಿಗೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

(A) ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ (B) ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆ (C) ಅಬಕಾರಿ ತೆರಿಗೆ (D) ಸೇವಾ ತೆರಿಗೆ

(v) ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯು ₹ 240 ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲೆ ಹೊಟ್ಟಿ ರಿಯಾಯಿತಿಯು ₹ 28 ಆದರೆ, ಅದರ ಮುಖಿ ಬೆಲೆಯು _____.

(A) ₹ 212 (B) ₹ 228 (C) ₹ 268 (D) ₹ 258

2. ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ಮುಖಿಬೆಲೆಯು ₹ 450 ಆಗಿದೆ. ಅಂಗಡಿಯವನು ಪುಸ್ತಕ ಪ್ರದರ್ಶನದಲ್ಲಿ ಆ ಪುಸ್ತಕಕ್ಕೆ 20% ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ನೀಡಿದನು. ಮಾರಾಟ ಮಾಡುವ ಬೆಲೆ ಏನು?

3. ಕ್ರಮವಾಗಿ 10% ಮತ್ತು 20% ಕ್ರಮಾನುಗತ ರಿಯಾಯಿತಿಗಳನ್ನು ನೀಡಿದ ನಂತರ ದೂರದರ್ಶನವನ್ನು ₹ 5,760 ಗಳಿಗೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಲಾಯಿತು. ಅದರ ಮುಖಿ ಬೆಲೆ ಏನು?

4. ಶೇಷಿರ್ ಒಂದು ಗಣಕ ಯಂತ್ರವನ್ನು ₹ 38,000 ಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಮುದ್ರಣ ಯಂತ್ರವನ್ನು ₹ 8,000 ಕ್ಕೆ ಖರೀದಿಸಿದನು. ಈ ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ದರವು 7% ಆದರೆ, ಈ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ಪಾವತಿಸಿದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ಅಡಿಗೆ ಸಾಧನದ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಯು ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡು ₹ 19,610 ಆಗಿದೆ. ಮೌಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆಯು 6% ಆದರೆ, ಅಡಿಗೆ ಸಾಧನದ ಮೂಲ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಪ್ರಶಾಂತನು ಒಂದು ಉದುಪಿನ ಖರೀದಿಯಲ್ಲಿ 10% ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ಪಡೆದನು. ಉದುಪಿನ ಮುಖಿಯೆಲೆಯು ₹ 5,000 ಆಗಿದೆ. ಅವನು ಖರೀದಿಸಿದ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ 10% ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಅವನು ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಪಾವತಿಸಿದನು?
7. ಒಂದು ಶೈಕ್ಷಿಕರಣ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯು 9% ದರದಲ್ಲಿ ₹ 1,170 ಆಗಿದೆ. ನೈಜ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಅವನ ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಹೊಂಡ ಬೆಲೆಗಿಂತ 40% ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿದನು. ಅವನು 5% ರಿಯಾಯಿತಿಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದನು. ಅವನ ನಷ್ಟ ಅಥವಾ ಲಾಭದ ಶೇಕಡ ಏನು?
9. ₹ 11,500 ಗಳನ್ನು ಮುಖಿಯೆಲೆಯಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ದೂರದರ್ಶನವನ್ನು 10% ರಿಯಾಯಿತಿಯಿಂದ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಲಾಯಿತು. ಹಬ್ಬಗಳ ಕಾರಣದಿಂದ ಅಂಗಡಿಯವನು 5% ಹೆಚ್ಚಿನ ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ನೀಡಿದನು. ದೂರದರ್ಶನದ ನಿವ್ವಳ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ₹ 3,500 ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿರುವ ಒಂದು ತಂಪು ಮಾಡುವ ಯಂತ್ರವನ್ನು ₹ 2,800 ಕ್ಕೆ ಖರೀದಿಸಿದನು. ಅಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ಶೇಕಡ ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. ಶಾರದಜ್ಞ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ₹ 1,200 ರಂತೆ 15 ಅಂಗಿಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದಜ್ಞ ಮತ್ತು 5% ಲಾಭಕ್ಕೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದಜ್ಞ. ಗ್ರಾಹಕರು 4% ದರದಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ ಒಂದು ಅಂಗಿಯ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ?
12. ರಿಯಾಯಿತಿ, ಶೇಕಡ ರಿಯಾಯಿತಿ, ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಮುಖಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕ್ರ. ಸಂ	ವಸ್ತುಗಳು	ಮುಖಿಯೆಲೆ	ರಿಯಾಯಿತಿಯ ದರ	ರಿಯಾಯಿತಿಯ ಮೊತ್ತ	ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆ
(i)	ಸೀರೆ	₹ 2,300	20%		
(ii)	ಪೆನ್ಸ್‌ಗಳ ಸೆಟ್‌ಪು	₹ 140			₹ 105
(iii)	ಉಳಿದ ಮೇಚು		20%		₹ 16,000
(iv)	ಒಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರ	₹ 14,500			₹ 13,775
(v)	ಮಣಿನ ಪಾತ್ರೆಗಳ ಸೆಟ್‌ಪು	₹ 3,224	12½%		



ಇವುಗಳನ್ನು
ಪ್ರಯೋಜಿಸಿ

ಯಾವುದು ಉತ್ತಮ ಅವಕಾಶ? 20% ಮತ್ತು 5% ಗಳ ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ರಿಯಾಯಿತಿಗಳು ಅಥವಾ 25% ಏಕ ರಿಯಾಯಿತಿ. ಸೂಕ್ತವಾದ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಹೊಡಿ.

1.4 ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ (Compound Interest)

ನೀವು 7 ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ಬಗ್ಗೆ ಹಾಗೂ ಸರಳಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಲೇಕ್ಕೆ ಹಾಕುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದು ನಿಗದಿತ ಅವಧಿಯ ಕೊನೆಗೆ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಲೇಕ್ಕೆ ಹಾಕುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಪ್ರೀಪನು ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ 4% ವಾರ್ಷಿಕ ದರದಲ್ಲಿ 2 ವರ್ಷಗಳ ನಿಗದಿತ ಅವಧಿಗೆ ₹ 50,000 ಗಳನ್ನು ಸಾಲವಾಗಿ ಪಡೆದುಕೊಂಡನು.

ಪ್ರೀಪನು ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಹಣ,



$$\begin{aligned} \text{ಸರಳಬಡ್ಡಿ} &= \frac{P \times n \times r}{100} \\ &= \frac{50000 \times 1 \times 4}{100} = ₹ 2,000 \end{aligned}$$

ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ₹ 2,000 ಸರಳಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಪಾವತಿಸಲು ಅವನಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ₹ 2,000 ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಹಳೆಯ ಅಸಲು ₹ 50,000 ಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಈಗ ಮೊತ್ತವು $P + I = ₹ 52,000$ ಎಂಬುದು ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಅಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೇಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ, ಎರಡನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅವನು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಬಡ್ಡಿಯು

$$\begin{aligned} \text{ಸರಳಬಡ್ಡಿ} &= \frac{P \times n \times r}{100} \\ &= \frac{52000 \times 1 \times 4}{100} = ₹ 2,080 \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರೀಪನು ಎರಡನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿ ಲೇಕ್ಕಹಾಕಿದ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬ್ಯಾಂಕುಗಳಲ್ಲಿ, ಏಮಾ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ, ಅಂಚೆ ಕಭೇರಿಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಇನ್ವೆಸ್ಟರೆ ಸಾಲ ಕೊಡುವ ಮತ್ತು ತೇವಣಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಹೊಳ್ಳುವ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.21

ರಾಮನು ಒಂದು ಹಣಕಾಸಿನ ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ 15% ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿಯ ದರದಲ್ಲಿ 3 ವರ್ಷಕ್ಕೆ ₹ 8,000 ವನ್ನು ತೇವಣಿ ಇಟ್ಟನು. 3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ರಾಮನು ಪಡೆದ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಏನು?

ಪರಿಹಾರ

ಹಂತ 1: ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಅಸಲು = ₹ 8,000

$$\begin{aligned} \text{ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಬಡ್ಡಿ} &= \frac{P \times n \times r}{100} \\ &= \frac{8000 \times 1 \times 15}{100} = ₹ 1,200 \end{aligned}$$

ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ = $P + I = 8,000 + 1,200 = ₹ 9,200$



ಶಿಮಗೆ ಗೆಂತ್ತೆ?

ಅಸಲಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು
ನೀಡಿದರೆ ಅದನ್ನು **ಸರಳಬಡ್ಡಿ**
ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಅಸಲಿನೊಂದಿಗೆ
ಗೆಳಿಸಿದ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ
ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಪಾವತಿಸಿವುದುನ್ನು
ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

హంత 2: మొదలనే వషణద అంత్యదల్లిన మోత్తపు ఎరడనే వషణక్కే అసలాగుత్తదే.

$$\begin{aligned}\text{ఎరడనే వషణక్కే అసలు} &= ₹ 9,200 \\ \text{ఎరడనే వషణక్కే బడ్డి} &= \frac{P \times n \times r}{100} \\ &= \frac{9200 \times 1 \times 15}{100} = ₹ 1,380\end{aligned}$$

$$\text{ఎరడనే వషణద అంత్యదల్లిన మోత్త} = P + I = 9,200 + 1,380 = ₹ 10,580$$

హంత 3: ఎరడనే వషణద అంత్యదల్లిన మోత్తపు మూరనే వషణక్కే అసలాగుత్తదే.

$$\begin{aligned}\text{మూరనే వషణక్కే అసలు} &= ₹ 10,580 \\ \text{మూరనే వషణక్కే బడ్డి} &= \frac{P \times n \times r}{100} \\ &= \frac{10580 \times 1 \times 15}{100} = ₹ 1,587 \\ \text{మూరనే వషణద అంత్యదల్లిన మోత్త} &= P + I \\ &= 10,580 + 1,587 = ₹ 12,167\end{aligned}$$

ఆద్యరింద, రామను మూరు వషణగళ నంతర పడేద జక్కబడ్డియు

$$A - P = 12,167 - 8,000 = ₹ 4,167.$$

జక్కబడ్డియ సూత్రపన్న కండుహిదియవుదు (Deduction of formula for Compound Interest)

జక్కబడ్డియన్న లేక్కాకలు నావు బళసిరువ మేలిన విధానపు బహళ దీఘా ముత్తు ఏశేషవాగి కాలావధియు అధికవాగిరువాగ బహళ దొడ్డాగిదే. ఆద్యరింద జక్కబడ్డి ముత్తు మోత్తపన్న కండుహిదియలు సూత్రపన్న పడేయబేసిదే.

అసలు P , వాషణక బడ్డియ దర $r\%$ ముత్తు కాలావధి అథవా వషణగళ సంఖ్య n ఆదరే జక్కబడ్డియ సూత్రపన్న నావు కేళగినంత నిరూపిసచమదు.

హంత 1 : మొదలనే వషణక్కే అసలు $= P$

$$\begin{aligned}\text{మొదలనే వషణక్కే బడ్డి} &= \frac{P \times n \times r}{100} \\ &= \frac{P \times 1 \times r}{100} = \frac{Pr}{100}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{మొదలనే వషణద అంత్యదల్లిన మోత్త} &= P + I \\ &= P + \frac{Pr}{100} \\ &= P \left(1 + \frac{r}{100} \right)\end{aligned}$$

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಹಂತ 2 :

$$\begin{aligned} \text{ಎರಡನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲು} &= P\left(1 + \frac{r}{100}\right) \\ \text{ಎರಡನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ} &= \frac{P\left(1 + \frac{r}{100}\right) \times 1 \times r}{100} \\ &\quad (\text{ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು}) \\ &= P\left(1 + \frac{r}{100}\right) \times \frac{r}{100} \end{aligned}$$

ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ = $P + I$

$$\begin{aligned} &= P\left(1 + \frac{r}{100}\right) + P\left(1 + \frac{r}{100}\right) \times \frac{r}{100} \\ &= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right) \\ &= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \end{aligned}$$

ಹಂತ 3 :

$$\begin{aligned} \text{ಮೂರನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲು} &= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \\ \text{ಮೂರನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ} &= \frac{P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \times 1 \times r}{100} \\ &\quad (\text{ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು}) \\ &= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \times \frac{r}{100} \\ \text{ಮೂರನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ} &= P + I \\ &= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 + P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \times \frac{r}{100} \\ &= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2\left(1 + \frac{r}{100}\right) \\ &= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3 \end{aligned}$$

ಇದೇ ರೀತಿ, n ನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತವು $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

ಮತ್ತು ' n ' ನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿನ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯು $A - P$

ಅಂದರೆ, ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ (C. I.) = $P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - P$

ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಕಲು (To Compute Compound Interest)

ಸಂಗತಿ 1 : ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ (Compounded Annually)

ಪ್ರತಿವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಅಸಲಿಗೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ, ಬಡ್ಡಿಯು ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು.

$$\text{ಇಲ್ಲಿ, } A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \text{ ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ} = A - P$$

సంగతి 2: అధ్వర్య వాణిక చక్కబడ్డి (Compounded Half - Yearly)

చక్కబడ్డియన్న అధ్వర్య వషట్ కొమ్మే లేక్కాజార మాడిదరే ఒందు వషట్ దల్లి ప్రతి 6 తింగళిగొమ్మే ఎరదు మాపాడు కాలాంతరగళు అల్లి ఉంటాగుత్తవే. ఇంతకి సందభగళల్లి, అధ్వర్య వాణిక దరపు వాణిక దరద అధ్వర్యదష్టిరుత్తదే, అందరే $\left(\frac{r}{2}\right)$ రష్టిరుత్తదే.

$$\text{ఈ సంగతియల్లి, } A = P \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{100} \right) \right]^{2n} \text{ మత్తు చక్కబడ్డి} = A - P$$

సంగతి 3: కాలు వాణిక చక్కబడ్డి (Compounded Quarterly)

చక్కబడ్డియన్న కాలు వాణిక కొమ్మే లేక్కాజార మాడిదాగ, ఒందు వషట్ దల్లి నాల్చు మాపాడు కాలాంతరగళు ఉంటాగుత్తవే మత్తు కాలు వాణిక దరపు వాణిక దరద నాల్చనే ఒందరష్టిరుత్తదే. అందరే $\left(\frac{r}{4}\right)$ రష్టిరుత్తదే.

$$\text{ఈ సంగతియల్లి, } A = P \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{100} \right) \right]^{4n} \text{ మత్తు చక్కబడ్డి} = A - P$$

సంగతి 4: కాలపు వషట్ ద భిన్నరాతీయాగిదాగ చక్కబడ్డి (Compounded when time being fraction of a year)

చక్కబడ్డియన్న వాణికవాగి లేక్కాహాకువాగ ఆదరే కాలపు భిన్నరాతీయాగిదాగ.

ఈ సంగతియల్లి, చక్కబడ్డియన్న వాణికవాగి లేక్కాహాకిదాగ ఆదరే కాలపు ఒందు వషట్ ద భిన్నరాతీయాగిదాగ, అందరే ఉదాహరణ $5\frac{1}{4}$ వషట్గాలు ఎందు హేళిదరే, ఆగ మొత్త A ఎంబుదు

$$A = P \left(1 + \frac{r}{100} \right)^{\frac{5}{4}} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{100} \right) \right] \text{ మత్తు చక్కబడ్డి} = A - P$$

\downarrow \downarrow
5 వషట్గాలేగే $\frac{1}{4}$ వషట్గాలేగే

ఉదాహరణ 1.22

₹ 15,625 శ్రీ వాణిక 8% బడ్డియ దరదల్లి 3 వషట్గాలేగే వాణికవాగి లేక్కాజారమాడిద చక్కబడ్డియన్న కండుహిదియిరి.

పరిహార

$$\begin{aligned}
 3 \text{ వషట్గాల నంతర మొత్త} &= P \left(1 + \frac{r}{100} \right)^3 \\
 &= 15625 \left(1 + \frac{8}{100} \right)^3 \\
 &= 15625 \left(1 + \frac{2}{25} \right)^3 \\
 &= 15625 \left(\frac{27}{25} \right)^3 \\
 &= 15625 \times \frac{27}{25} \times \frac{27}{25} \times \frac{27}{25} \\
 &= ₹ 19,683
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ఈగ, చక్కబడ్డి} &= A - P = 19,683 - 15,625 \\
 &= ₹ 4,058
 \end{aligned}$$

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಅಥವಾ ಅರ್ಥ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದಾಗ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಅಥವಾ ಅರ್ಥ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದರೆ ಒಂದು ವರ್ಷದ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ₹ 100 ಏನಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡೋಣ.

ಕ್ರ. ಸಂ.	ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ	ಅರ್ಥ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ
1	$P = ₹ 100$ ಗಳಿಗೆ ವಾರ್ಷಿಕ 10% ದರದಲ್ಲಿ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ.	$P = ₹ 100$ ಗಳಿಗೆ ವಾರ್ಷಿಕ 10% ದರದಲ್ಲಿ ಅರ್ಥ ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ.
2	ಕಾಲಾವಧಿಯನ್ನು 1 ವರ್ಷವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ.	ಕಾಲಾವಧಿಯನ್ನು 6 ತಿಂಗಳುಗಳು ಅಥವಾ $\frac{1}{2}$ ವರ್ಷವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ.
3	$I = \frac{100 \times 10 \times 1}{100} = ₹ 10$	$I = \frac{100 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹ 5$
4	$A = 100 + 10 = ₹ 110$	$A = 100 + 5 = ₹ 105$ ಮುಂದಿನ 6 ತಿಂಗಳುಗಳಿಗೆ, $P = ₹ 105$ ಆದ್ದರಿಂದ, $I = \frac{105 \times 10 \times \frac{1}{2}}{100} = ₹ 5.25$ ಮತ್ತು $A = 105 + 5.25 = ₹ 110.25$
5	$A = ₹ 110$	$A = ₹ 110.25$

ಆದ್ದರಿಂದ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅರ್ಥ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದಾಗ, ನಾವು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ದರವನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕ ದರದ ಅರ್ಥದಷ್ಟು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.23

ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅರ್ಥ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದಾಗ ₹ 1000 ಕ್ಕೆ ವಾರ್ಷಿಕ 10% ದರದಲ್ಲಿ 18 ತಿಂಗಳುಗಳಿಗಾಗುವ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಇಲ್ಲಿ, $P = ₹ 1000$, $r =$ ವಾರ್ಷಿಕ 10%.

ಮತ್ತು $n = 18$ ತಿಂಗಳುಗಳು $= \frac{18}{12}$ ವರ್ಷಗಳು $= \frac{3}{2}$ ವರ್ಷಗಳು $= 1\frac{1}{2}$ ವರ್ಷಗಳು

$$\therefore 18 \text{ ತಿಂಗಳುಗಳ ನಂತರ ಮೊತ್ತ } = P \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{100} \right) \right]^{2n}$$

$$= 1000 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{10}{100} \right) \right]^{2 \times \frac{3}{2}}$$

$$= 1000 \left(1 + \frac{10}{200} \right)^3$$

$$= 1000 \left(\frac{21}{20} \right)^3$$

$$= 1000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$$

$$= ₹ 1157.625$$

$$= ₹ 1157.63$$

$$\text{ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ } = A - P$$

$$= 1157.63 - 1000 = ₹ 157.63$$



ಒಂದು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ವಾರ್ಷಿಕ 8% ದರದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿ 3 ತಿಂಗಳುಗಳಿಗೂಮೈ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದರೆ ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ?

ಉದಾಹರಣೆ 1.24

₹ 20,000 ಕ್ಕೆ ವಾರ್ಷಿಕ 15% ದರದಲ್ಲಿ $2\frac{1}{3}$ ವರ್ಷಗಳಿಗಾಗುವ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
ಪರಿಹಾರ

$$\begin{aligned}
 \text{ಇಲ್ಲಿ, } P &= ₹ 20,000, r = \text{ವಾರ್ಷಿಕ} 15\% \text{ ಮತ್ತು } n = 2\frac{1}{3} \text{ ವರ್ಷಗಳು.} \\
 2\frac{1}{3} \text{ ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಮೊತ್ತವು } A &= P \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{100}\right)\right] \\
 &= 20000 \left(1 + \frac{15}{100}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{15}{100}\right)\right] \\
 &= 20000 \left(1 + \frac{3}{20}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{20}\right) \\
 &= 20000 \left(\frac{23}{20}\right)^2 \left(\frac{21}{20}\right) \\
 &= 20000 \times \frac{23}{20} \times \frac{23}{20} \times \frac{21}{20} \\
 &= ₹ 27,772.50 \\
 \text{ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ} &= A - P \\
 &= 27,772.50 - 20,000 \\
 &= ₹ 7,772.50
 \end{aligned}$$

ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ಮೇಲಿನ ವಿಲೋಮ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು (Inverse Problems on Compound Interest)

$A = P \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ A , P , r ಮತ್ತು n ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಚರಾಂಶಗಳು ಒಳಗೊಂಡಿವೆ. ಈ ನಾಲ್ಕು ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಚರಾಂಶಗಳು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ, ನಾಲ್ಕನೇ ಚರಾಂಶವನ್ನು ಲೇಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1.25

ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಂತೆ 2 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ₹ 640 ಎಂಬುದು ₹ 774.40 ಮೊತ್ತವಾದರೆ, ವಾರ್ಷಿಕ ದರವೇನು?

ಪರಿಹಾರ

ದತ್ತ: $P = ₹ 640$, $A = ₹ 774.40$, $n = 2$ ವರ್ಷಗಳು, $r = ?$

$A = P \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

$$774.40 = 640 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{774.40}{640} = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{77440}{64000} = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{121}{100} = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$$

ಅಧ್ಯಾಯ 1

$$\left(\frac{11}{10}\right)^2 = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{11}{10} = 1 + \frac{r}{100}$$

$$\frac{r}{100} = \frac{11}{10} - 1$$

$$\frac{r}{100} = \frac{11 - 10}{10}$$

$$\frac{r}{100} = \frac{1}{10}$$

$$r = \frac{100}{10}$$

ದರ r = ವಾರ್ಷಿಕ 10% .

ಉದಾಹರಣೆ 1.26

ವಾರ್ಷಿಕ 5% ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ದರದಲ್ಲಿ ₹ 1600 ಹಣವು ₹ 1852.20 ಆಗಲು ಎಪ್ಪು ಕಾಲ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ? ಪರಿಹಾರ

ದತ್ತ: $P = ₹ 1600$, $A = ₹ 1852.20$, r = ವಾರ್ಷಿಕ 5%, n = ?

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \text{ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.}$$

$$1852.20 = 1600\left(1 + \frac{5}{100}\right)^n$$

$$\frac{1852.20}{1600} = \left(\frac{105}{100}\right)^n$$

$$\frac{1852.20}{160000} = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

$$\frac{9261}{8000} = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

$$\left(\frac{21}{20}\right)^3 = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

$$\therefore n = 3 \text{ ವರ್ಷಗಳು}$$



ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಲಾವಧಿ ಮತ್ತು ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. ಅಥವ ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ ವಾರ್ಷಿಕ 8% ದರದಂತೆ 2 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೊತ್ತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.
2. ಅಥವ ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ ವಾರ್ಷಿಕ 4% ದರದಂತೆ $1\frac{1}{2}$ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೊತ್ತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

1.5 ಸರಳಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ವೃತ್ತಾಸ್

P ಎಂಬುದು ಅಸಲು, $n = 2$ ವರ್ಷಗಳು ಮತ್ತು r ಎಂಬುದು ಬಡ್ಡಿಯ ದರ ಆದಾಗ,

$$2 \text{ ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಸರಳಬಡ್ಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ವೃತ್ತಾಸ್ = } P\left(\frac{r}{100}\right)^2$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.27

₹ 8,000 ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ವಾರ್ಷಿಕ 10% ದರದಲ್ಲಿ 2 ವರ್ಷಗಳಿಗಾಗುವ ಸರಳಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ವೃತ್ತಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಇಲ್ಲಿ, $P = ₹ 8000$, $n = 2$ ವರ್ಷಗಳು, r = ವಾರ್ಷಿಕ 10%.

$$\begin{aligned}
 \text{ఎరదు వషట్కాలిగే సరళబడ్డి మత్తు చక్కబడ్డిగళ నమునిన వ్యత్యాస} &= P \left(\frac{r}{100} \right)^2 \\
 &= 8000 \left(\frac{10}{100} \right)^2 \\
 &= 8000 \left(\frac{1}{10} \right)^2 \\
 &= 8000 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = ₹ 80
 \end{aligned}$$

అభ్యాస 1.4

1. కేళగిన సంగతిగళల్లి మొత్త మత్తు చక్కబడ్డియన్న కండుహిందియిరి.

క్ర.సం.	అసలు ₹ గళల్లి	వాషిఫ శతాబ్ది % దర	కాల వషట్కాలిగే
(i)	1000	5%	3
(ii)	4000	10%	2
(iii)	18,000	10%	$2\frac{1}{2}$

- త్రియదశినియు ₹ 8,000 వన్న 2 వషట్కాలిగే వాషిఫ శతాబ్ది 12½% దరదంతె రూపదశినియింద పడేదుకోండఱు. వాషిఫకవాగి చక్కబడ్డియన్న లేక్కాకిదరే త్రియదశినియు ఎష్టు బడ్డియన్న రూపదశినిగే పావతిసబేకు?
- మానసళు ₹ 80,000 గళన్న ఒందు వ్యవహారక్కే హాడికే మాడిదఱు. అవళు వాషిఫ శతాబ్ది 5% దరదల్లి వాషిఫకవాగి చక్కబడ్డియన్న పావతిసబేకాగిదే. (i) ఎరదనే వషట అంత్యదల్లి అవళ సాలద మొత్త మత్తు (ii) మూరనే వషటక్కే బడ్డి, ఇప్పుగళన్న కండుహిందియిరి.
- అధ్య వాషిఫ చక్కబడ్డియల్లి ₹ 24,000 క్కే వాషిఫ శతాబ్ది 10% దరదల్లి 1½ వషట్కాలిగాగువ చక్కబడ్డియన్న కండుహిందియిరి.
- ద్వారిడో అధ్య వాషిఫ చక్కబడ్డియల్లి ₹ 8,192 గళన్న వాషిఫ శతాబ్ది 12½% దరదంతె 18 తింగళుగళిగే హాడికే మాడిదరే, అవను పడేద మొత్తవన్న కండుహిందియిరి.
- కాలు వాషిఫ చక్కబడ్డియల్లి ₹ 15,625 గళిగే వాషిఫ శతాబ్ది 16% దరదంతె 9 తింగళుగళిగాగువ చక్కబడ్డియన్న కండుహిందియిరి.
- వాషిఫ శతాబ్ది 4% బడ్డియ దరదల్లి 2 వషట్కాలిగే ₹ 1,632 వన్న చక్కబడ్డియన్నాగి పడేయువ అసలన్న కండుహిందియిరి.
- జీతనో ఒందు ద్విజక్కవాహనవన్న ఖరీదిసలు వాషిఫ శతాబ్ది 15% దరదంతె ₹ 26,400 న్న ఒందు బ్యాంకినింద పడేదుకోండను. సాలవన్న తేరిసలు 2 వషట గళ మత్తు 4 తింగళుగళ అంత్యదల్లి అవను పావతిసబేకాద హణవేష్టు?
- ఆయసు ఒందు బ్యాంకినింద ₹ 80,000 వన్న సాలవాగి పడేదుకోండను. వాషిఫ బడ్డియ దరవు 10% ఆదరే, చక్కబడ్డియన్న (i) వాషిఫకవాగి మత్తు (ii) అధ్య వాషిఫకవాగి లేక్కచార మాడిదాగ 1½ వషటగళ నంతర అవను పావతిసబేకాద మొత్తగళ వ్యత్యాసవన్న కండుహిందియిరి.
- వాషిఫ చక్కబడ్డియంతె ₹ 2,400 క్కే వాషిఫ శతాబ్ది 2 వషట్కాలిగాగువ సరళబడ్డి మత్తు చక్కబడ్డిగళిగిరువ వ్యత్యాసవన్న కండుహిందియిరి.
- వాషిఫ చక్కబడ్డియంతె ₹ 6,400 క్కే వాషిఫ శతాబ్ది 2 వషట్కాలిగాగువ సరళబడ్డి మత్తు చక్కబడ్డిగళిగిరువ వ్యత్యాసవన్న కండుహిందియిరి.

ಅಧ್ಯಾಯ 1

12. ವಾರ್ಷಿಕ 5% ದರದಲ್ಲಿ 2 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೊಬಿಲಿನ ಚಕ್ಕಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ₹ 5 ಆದರೆ, ಮೊಬಿಲಿನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
13. ನಿತಿನ್ ವಾರ್ಷಿಕ 12% ದರದಂತೆ 3 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ₹ 12,500 ನ್ನು ಸರಳಬಡ್ಡಿಗೆ ಪಡೆದುಕೊಂಡನು. ನಂದಕುಮಾರನು ವಾರ್ಷಿಕ 10% ದರದಲ್ಲಿ ಅದೇ ಹಣವನ್ನು ಅದೇ ಕಾಲಾವಧಿಗೆ ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ಕಬಡ್ಡಿಗೆ ಪಡೆದುಕೊಂಡನು. ಯಾರು ಹೆಚ್ಚು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಪಾವತಿಸುವರು?
14. ಅರ್ಥ ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ಕಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ ವಾರ್ಷಿಕ 4% ದರದಂತೆ $1\frac{1}{2}$ ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ₹ 1,32,651 ಮೊತ್ತವಾಗಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಬೇಕು?
15. ಜಂಧುಶೇಖರ ವಾರ್ಷಿಕ 5% ಚಕ್ಕಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ ₹ 12,000 ವನ್ನು ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಿದನು. ಅವನು ‘n’ ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ₹ 13,230 ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡನು. ‘n’ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
16. 2 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ₹ 640 ಹಣವು ₹ 774.40 ಮೊತ್ತವಾದರೆ ವಾರ್ಷಿಕ ಚಕ್ಕಬಡ್ಡಿಯ ಶೇಕಡಾ ದರವೇನು?
17. ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅರ್ಥ ವರ್ಷಗ್ರಹದಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಾಕಿದಾಗ ಒಂದು ಮತ್ತು ಅರ್ಥ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ₹ 2,000 ಹಣವು ₹ 2,315.25 ಮೊತ್ತವಾದರೆ ವಾರ್ಷಿಕ ಶೇಕಡಾ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



1.5.1 ಬೆಲೆ ಪರಿಕೆ ಮತ್ತು ಬೆಲೆ ಇಳಿಕೆ (Appreciation and Depreciation)

a) ಬೆಲೆ ಪರಿಕೆ

ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಳವಣಿಗೆ, ಭೌಪ್ರೇರಿಯಾಗಳ ಬೆಳವಣಿಗೆ, ಸ್ವಕ್ಷೇಪಣಿ ಮೌಲ್ಯದ ಹೆಚ್ಚಳ, ಕೆಲವು ಬೆಲೆಬಾಳುವ ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆಯ ಹೆಚ್ಚಳ ಮುಂತಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$A = P \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$



ನಿಮಗೆ ನೀಡಿ:

ಪ್ರಪಂಚದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ	
ವರ್ಷ	ಜನಸಂಖ್ಯೆ
1700	600,000,000
1800	900,000,000
1900	1,500,000,000
2000	6,000,000,000
3 ಶತಮಾನಗಳಲ್ಲಿ	ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ
10ರ ಗುಣಕವಾಗಿದೆ.	

b) ಬೆಲೆ ಇಳಿಕೆ

ಯಂತ್ರಗಳು, ವಾಹನಗಳ ಬೆಲೆ, ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆ, ಕಟ್ಟಡಗಳ ಮೌಲ್ಯ, ಮುಂತಾದವುಗಳು ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$A = P \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.28

ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು ಪ್ರತಿವರ್ಷ 7% ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಳವಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು 90,000 ಆದರೆ, 2 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ

ಇಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆ $P = 90,000$, ಹೆಚ್ಚಳದ ದರ $r = 7\%$, ವರ್ಷಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n = 2$.

$$\text{‘}n\text{’ ವರ್ಷಗಳ ನಂತರದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ} = P \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

$$\therefore 2 \text{ ವರ್ಷಗಳ ನಂತರದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ} = 90000 \left(1 + \frac{7}{100}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= 90000 \left(\frac{107}{100} \right)^2 \\
 &= 90000 \times \frac{107}{100} \times \frac{107}{100} \\
 &= 103041
 \end{aligned}$$

ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ = 1,03,041

ಉದಾಹರಣೆ 1.29

ಒಂದು ಯಂತ್ರದ ಮೌಲ್ಯವು ಪ್ರತಿವರ್ಷವು 5% ಇಳಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಯಂತ್ರಕ್ಕೆ ₹ 30,000 ವನ್ನು ಪಾವತಿಸಿದನು. 3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅದರ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಇಂದಿನ ಯಂತ್ರದ ಮೌಲ್ಯ $P = ₹ 30,000$, ಇಳಿಕೆಯ ದರ $r = 5\%$,

ವರ್ಷಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n = 3$

$$\text{‘}n\text{’ ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಯಂತ್ರದ ಮೌಲ್ಯ} = P \left(1 - \frac{r}{100} \right)^n$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಯಂತ್ರದ ಮೌಲ್ಯ} &= 30000 \left(1 - \frac{5}{100} \right)^3 \\
 &= 30000 \left(\frac{95}{100} \right)^3 \\
 &= 30000 \times \frac{95}{100} \times \frac{95}{100} \times \frac{95}{100} \\
 &= 25721.25
 \end{aligned}$$

ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಯಂತ್ರದ ಮೌಲ್ಯ = ₹ 25,721.25

ಉದಾಹರಣೆ 1.30

ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು ಪ್ರತಿವರ್ಷ 5% ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು 1,04,832 ಆದರೆ, 2 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟಾಗಿತ್ತು?

ಪರಿಹಾರ

2 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆ P ಆಗಿರಲಿ .

$$\therefore P \left(1 + \frac{5}{100} \right)^2 = 104832$$

$$P \left(\frac{105}{100} \right)^2 = 104832$$

$$P \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} = 104832$$

$$P = \frac{104832 \times 100 \times 100}{105 \times 105}$$

$$= 95085.71$$

= 95,086 (ಹತ್ತಿರದ ಮೊಣಿ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಮೊಣಿಗೊಳಿಸುವುದು)

\therefore 2 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು 95,086 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಅಭ್ಯಾಸ 3.5

- ಒಂದು ಶಾಲೆಗೆ ದಾಖಲಾದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2000 ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ದಾಖಲಾತಿಯು 5% ಹೆಚ್ಚಿದರೆ, 2 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇರುತ್ತಾರೆ?
- ₹ 3,50,000 ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಕಾರು ಪ್ರತಿವರ್ಷವು 10% ಇಳಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ. 3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಕಾರಿನ ಬೆಲೆಯೇನು?
- ಒಂದು ಮೋಟಾರ್ ಸೈಕಲ್‌ನ್ನು ₹ 50,000 ಕ್ಕೆ ಖರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಬೆಲೆಯು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವು 8% ದರದಲ್ಲಿ ಇಳಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ವರ್ಷದ ನಂತರ ಅದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗಾಲಯದಲ್ಲಿ ನಿಶ್ಚಿತ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಬ್ಯಾಕ್‌ಪೇರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪ್ರತಿ ಗಂಟೆಗೆ 2.5% ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿಕೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಬ್ಯಾಕ್‌ಪೇರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 5,06,000 ಇದ್ದರೆ ಏರಡು ಗಂಟೆಗಳ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಅದರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ ಜನರು ನಿರುದ್ಯೋಗ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಕಾರಣದಿಂದ ತಮ್ಮ ಹತ್ತಿರದ ನಗರಗಳಿಗೆ ವಲಸೆ ಬರಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರು. 2 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಆ ಗ್ರಾಮದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು 6,000 ಆಗಿತ್ತು. ವಲಸೆಯು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವು 5% ದರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ಒಂದು ಯಂತ್ರದ ಇಂದಿನ ಮೌಲ್ಯವು ₹ 14,580 ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವು 10% ದರದಲ್ಲಿ ಅದರ ಮೌಲ್ಯವು ಇಳಿಕೆಯಾದರೆ, 3 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಯಂತ್ರದ ಮೌಲ್ಯವೇನು?
- ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಲ್ಲಿ ದೊರಕುವ ಉದ್ಯೋಗಾವಕಾಶಗಳ ಕಾರಣದಿಂದ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವು 9% ಹೆಚ್ಚಿಕೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಗ್ರಾಮದ ಇಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು 11,881 ಆದರೆ, ಏರಡು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಏನು?

1.6 ಸಂಚಿತ ತೇವಣಿಗಳು ಮತ್ತು ಆವರ್ತಕ ತೇವಣಿಗಳು (Fixed Deposits and Recurring Deposits)

ಬ್ಯಾಂಕುಗಳು, ಅಂಚೆ ಕಬ್ಬಿರಿಗಳು ಮತ್ತು ಇನ್ನಿತರೆ ಹಣಕಾಸಿನ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ವಿವಿಧ ಬಡ್ಡಿಯ ದರದಲ್ಲಿ ಸಾವಜನಿಕರಿಂದ ತೇವಣಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತವೆ. ಜನರು ಇಂತಹ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ ನಿರಂತರ ಅವಧಿಯ ಆದಾಯವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಉಳಿತಾಯವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಾರೆ.

ಇಂತಹ ಹಣಕಾಸು ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ವಿವಿಧ ಉಳಿತಾಯ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಆಯೋಜಿಸಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಯೋಜನೆಗಳೆಂದರೆ,



- (i) ಸಂಚಿತ ತೇವಣಿ ಮತ್ತು (ii) ಆವರ್ತಕ ತೇವಣಿ

(i) ಸಂಚಿತ ತೇವಣಿ (Fixed Deposit)

ಈ ವಿಧದ ತೇವಣಿಯಲ್ಲಿ, ಜನರು ಒಂದು ನಿಗದಿತ ಅವಧಿಗೆ ಗೊತ್ತಾದ ಪರಿಮಾಣದ ಹಣವನ್ನು ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಇಂತಹ ತೇವಣಿಯನ್ನು ಸಂಚಿತ ತೇವಣಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. (ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ F. D. ಎನ್ನಬಹುದಾಗಿದೆ.)

ಮೂಳನೆ: ಹೂಡಿಕೆಯು ಕಡಿಮೆ ಅವಧಿಗಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ದೀರ್ಘ ಅವಧಿಗಾಗಿರಬಹುದು. ತೇವಣಿಗಳ ಅವಧಿಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, ಅವರು ಹೆಚ್ಚಿನ ಬಡ್ಡಿಯ ದರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಾರೆ.

(ii) ಆವರ್ತಕ ತೇವಣಿ (Recurring Deposit)

ಆವರ್ತಕ ತೇವಣಿಯು (ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ R. D. ಎನ್ನಬಹುದಾಗಿದೆ) ಸಂಚಿತ ತೇವಣಿಗಿಂತ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಭಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

ಈ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ, ತೇವಣಿದಾರನು ಅವನ ಉಳಿತಾಯದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಕ್ಕನುಗಣವಾಗಿ ಹಣವನ್ನು ಆಯ್ದುಮಾಡುವ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯವನ್ನು ಪಡೆದಿರುತ್ತಾನೆ. ಇದನ್ನು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಕೆಲವು ವರ್ಷಗಳ ಅವಧಿಗೆ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಅಂಚೆ ಕಬ್ಬಿರಿಯಲ್ಲಿ ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ.

బ్యాంకు అథవా అంజే కభేరియు ఒట్టు తేవణి హావమ్మ బడ్డియోందిగె అవధియ అంత్యదల్లి మరుపావతిసుత్తదే. ఈ వివిధ తేవణియన్న ఆవశ్యక తేవణి ఎన్నుత్తారే. (సంస్కృతవాగి R.D. ఎన్నబుమదాగిదే)

సూచన: ఆవశ్యక తేవణియ మేలే బడ్డియన్న సరళబడ్డియ విధానవమ్మ ఒళసి లేక్కాకలాగుత్తదే.



Do you know?

ఆవశ్యక తేవణిగె మాసిక కంతుగళన్న ఆ తింగళ ఒళగె యావ దినదల్లాదరూ పావతిసబముదు.

ఆవశ్యక తేవణియ బడ్డి మత్తు పక్క మొత్తవమ్మ (maturity amount) లేక్కాకువ సూత్రవమ్మ కండుహించియుపుదు
బడ్డియ దరవు $r\%$ మత్తు 'n' తింగళుగలిగే పావతిసిద మాసిక కంతు 'P' ఆగిరలి.

బడ్డియ దరవు $r\%$ మత్తు 'n' తింగళుగలిగే పావతిసిద మాసిక కంతు 'P' ఆగిరలి.

$$\text{బడ్డి} = \frac{PNr}{100}, \text{ ఇల్లి } N = \frac{1}{12} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \text{ వషణగళు}$$

$$\text{పక్కతేయిందుంటాద ఒట్టు మొత్త } A = Pn + \frac{PNr}{100}$$

ఉదాహరణ 1.31

తరుణను ఒందు బ్యాంకినల్లి ఎరదు లక్ష రూపాయిగళన్న 5 వషణగళ కాల తేవణి ఇట్టను. బడ్డియ దరవు వాషిక 8% ఆదరే, పక్క బేలేయన్న కండుహించియిరి.

పరిహార

తేవణి ఇట్ట అసలు $P = ₹ 2,00,000$, $n = 5$ వషణగళు, $r =$ వాషిక 8%

$$\begin{aligned} \text{బడ్డి} &= \frac{Pnr}{100} = 200000 \times 5 \times \frac{8}{100} \\ &= ₹ 80,000 \end{aligned}$$

$$\therefore 5 \text{ వషణగళ నంతరద పక్క బేలే} = 2,00,000 + 80,000 = ₹ 2,80,000.$$

ఉదాహరణ 1.32

వ్యేదీతను ఒందు అంజే కభేరియల్లి 5 వషణగళగే ప్రతి తింగళ ప్రారంభదల్లి ₹ 500 న్న తేవణి ఇడుత్తానే. బడ్డియ దరవు 7.5% ఆదరే, 5 వషణగళ అంత్యదల్లి అవను పడేయువ మొత్తవమ్మ కండుహించియిరి.

పరిహార

ప్రతి తింగళ తేవణి ఇట్ట హా, $P = ₹ 500$

$$\text{తింగళుగళ సంఖ్య, } n = 5 \times 12 = 60 \text{ తింగళుగళు}$$

$$\text{బడ్డియ దర, } r = 7\frac{1}{2}\% = \frac{15}{2}\%$$

$$\begin{aligned} \text{ఒట్టు మాసిద తేవణి} &= Pn = 500 \times 60 \\ &= ₹ 30,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ఆవశ్యక తేవణియ అవధి, } N &= \frac{1}{12} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \text{ వషణగళు} \\ &= \frac{1}{24} \times 60 \times 61 = \frac{305}{2} \text{ వషణగళు} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಒಟ್ಟು, } I &= \frac{PNr}{100} \\ &= 500 \times \frac{305}{2} \times \frac{15}{2 \times 100} \\ &= ₹ 5,718.75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಉಂಟಿದ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ } &= Pn + \frac{PNr}{100} \\ &= 30,000 + 5,718.75 \\ &= ₹ 35,718.75 \end{aligned}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.33

ವಿಶಾಲ್ ಒಂದು ಅಂಚೆ ಕರ್ಫೇರಿಯ ಆವರ್ತಕ ತೇವಣಿಯ ಖಾತೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ₹ 200 ರಂತೆ 5 ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲ ತೇವಣಿ ಇಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ. ಅವನು ₹ 13,830 ನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡರೆ, ಬಡ್ಡಿಯ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

$$\text{ಪಕ್ಕ ಮೊತ್ತ }, A = ₹ 13,830, P = ₹ 200, n = 5 \times 12 = 60 \text{ ತಿಂಗಳಗಳು}$$

$$\begin{aligned} \text{ಅವಧಿ, } N &= \frac{1}{12} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \text{ ವರ್ಷಗಳು} \\ &= \frac{1}{12} \times 60 \times \frac{61}{2} = \frac{305}{2} \text{ ವರ್ಷಗಳು} \end{aligned}$$

$$\text{ತೇವಣಿ ಇಟ್ಟ ಮೊತ್ತ } = Pn = 200 \times 60 = ₹ 12,000$$

$$\begin{aligned} \text{ಪಕ್ಕ ಮೊತ್ತ } &= Pn + \frac{PNr}{100} \\ 13830 &= 12000 + 200 \times \frac{305}{2} \times \frac{r}{100} \end{aligned}$$

$$13830 - 12000 = 305 \times r$$

$$1830 = 305 \times r$$

$$\therefore r = \frac{1830}{305} = 6\%$$

1.6.1 ಬಾಡಿಗೆ ಖರೀದಿ ಮತ್ತು ಕಂತುಗಳು (Hire Purchase and Instalments)

ಬ್ಯಾಂಕುಗಳು ಮತ್ತು ಹಣಕಾಸಿನ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ಇಂದಿನ ಗ್ರಾಹಕರ ಅಗತ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಮೂರ್ಧೆಸಲು ಬಾಡಿಗೆ ಖರೀದಿ ಮತ್ತು ಕಂತುಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿವೆ.

ಬಾಡಿಗೆ ಖರೀದಿ: ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ, ಕೆಲವು ಕಾಲಾವಧಿಗಳವರೆಗೆ ಖರೀದಿದಾರನು ಆ ವಸ್ತುವಿನ ಒಡೆಯನಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಖರೀದಿದಾರನು ಖರೀದಿಸಿದ ವಸ್ತುವಿನ ಮೂರ್ತಿ ಹಣವನ್ನು ಪಾವತಿಸಿದಾಗ ಮಾತ್ರ ಆ ವಸ್ತುವಿನ ಒಡೆಯನಾಗುತ್ತಾನೆ.

ಕಂತುಗಳು: ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಯೊಂದಿಗೆ ಒಟ್ಟು ಮತ್ತು ಇನ್ನಿತರ ವಿಚುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಅದನ್ನು ಸಾಲದ ಅವಧಿಯ ತಿಂಗಳಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುವ ಹಣವನ್ನು ಕಂತುಗಳು ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಮಾನ ಮಾಸಿಕ ಕಂತುಗಳು (E.M.I.)

ಸಮಾನ ಮಾಸಿಕ ಕಂತುಗಳು ಎಂಬುದು ಕಂತುಗಳ ವೃವಣ್ಣಗೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದು, ಕಡಿತಗೊಳಿಸುವ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಯೊಂದಿಗೆ ಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಇನ್ವಿಟರ ಲಿಚುರ್ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ನಾವು ಮರುಪಾವತಿಸಬೇಕು. ಒಟ್ಟು ಹಣವನ್ನು ತಿಂಗಳುಗಳ ಅವಧಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಆಗ ದೂರಕುವ ಹಣವನ್ನು ಸಮಾನ ಮಾಸಿಕ ಕಂತುಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$$\text{E.M.I} = \frac{\text{ಅಸಲು} + \text{ಬಡ್ಡಿ}}{\text{ತಿಂಗಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಬಾಡಿಗೆ ಖರೀದಿ ಮತ್ತು ಕಂತುಗಳ ವೃವಣ್ಣಯ ವಿವಿಧ ಯೋಜನೆಗಳು

- 0% ಬಡ್ಡಿ ಯೋಜನೆ:** ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಶುಲ್ಕ ಮತ್ತು 4 ಅಥವಾ 5 ತಿಂಗಳುಗಳ ಕಂತುಗಳನ್ನು ಮುಂಗಡವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.
- 100% ಹಣಕಾಸು:** ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಗೆ ಬಡ್ಡಿ ಮತ್ತು ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಶುಲ್ಕವನ್ನು ಸೇರಿಸುತ್ತವೆ.
- ರಿಯಾಯಿತಿ ಮಾರಾಟ:** ಮಾರಾಟವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲು, ಕಂತುಗಳ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ರಿಯಾಯಿತಿಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ.
- ಆರಂಭ ಪಾವತಿ :** ವಸ್ತುವನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಯ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಮುಂಗಡವಾಗಿ ಪಾವತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಹಣವನ್ನು ಮುಂಗಡ ಪಾವತಿ ಹಣ ಎಂದು ಸಹ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.34

ಒಂದು ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರದ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆಯು ₹ 18,940 ಆಗಿದೆ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯು ಕಂತುಗಳ ಮೂಲಕ ಬಟ್ಟೆ ಒಗೆಯುವ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಖರೀದಿಸುವ ವಿವಿಧ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸಿದೆ. ಖರೀದಿಸಲು ಉತ್ತಮ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಆಯ್ದುಮಾಡಿ.

ಕ್ರ. ಸಂ.	ವಿವಿಧ ಯೋಜನೆಗಳು	ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ ₹ ಗಳಲ್ಲಿ	ಆರಂಭ ಪಾವತಿಗಳು	ಬಡ್ಡಿಯ ದರ	ಪ್ರಕ್ರಿಯಾ ಶುಲ್ಕ	ಅವಧಿ
(i)	75% ಹಣಕಾಸು	18,940	25%	12%	1%	24 ತಿಂಗಳುಗಳು
(ii)	100% ಹಣಕಾಸು	18,940	ಇಲ್ಲ	16%	2%	24 ತಿಂಗಳುಗಳು
(iii)	0% ಹಣಕಾಸು	18,940	ಮುಂಗಡವಾಗಿ 4 E. M. I.	ಇಲ್ಲ	2%	24 ತಿಂಗಳುಗಳು

ಮೇಲಿನ ಯೋಜನೆಗಳಿಗೆ E. M. I. ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) 75% ಹಣಕಾಸು

$$P = ₹ 18,940, \text{ಆರಂಭ ಪಾವತಿ} = 25\%, \text{ದರ} = 12\%, \text{ಪ್ರಕ್ರಿಯಾ ಶುಲ್ಕ} = 1\%$$

$$\begin{aligned} \text{ಪ್ರಕ್ರಿಯಾ ಶುಲ್ಕ} &= ₹ 18,940 \text{ರ } 1\% \\ &= \frac{1}{100} \times 18940 = ₹ 189.40 \approx ₹ 189 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಆರಂಭ ಪಾವತಿ} &= ₹ 18,940 \text{ರ } 25\% \\ &= \frac{25}{100} \times 18940 = ₹ 4,735 \end{aligned}$$

ಅಧ್ಯಾಯ 1

$$\text{ಸಾಲದ ಮೊತ್ತ} = 18,940 - 4,735 = ₹ 14,205$$

$$\begin{aligned}\text{ಬಡ್ಡಿ} &= \frac{14205 \times 12 \times 2}{100} \\ &= ₹ 3,409.20 \approx ₹ 3,409\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{E. M. I.} &= \frac{\text{ಸಾಲದ ಮೊತ್ತ} + \text{ಬಡ್ಡಿ}}{\text{ಶಿಂಗಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} \\ &= \frac{14205 + 3409}{24} = \frac{17614}{24} \\ &= ₹ 733.92 \approx ₹ 734\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ} &= 4,735 + 14,205 + 3,409 + 189 \\ &= ₹ 22,538\end{aligned}$$

(ii) 100% ಘಣಾಕಾಸು

$$\begin{aligned}\text{ಪ್ರಕ್ರಿಯಾ ಶುಲ್ಕ} &= ₹ 18,940 \text{ ರ } 2\% \\ &= \frac{2}{100} \times 18940 = ₹ 378.80 \approx ₹ 379 \\ \text{ಬಡ್ಡಿಯ ದರ} &= 16\% \\ \text{ಬಡ್ಡಿ} &= 18940 \times \frac{16}{100} \times 2 \\ &= ₹ 6060.80 \approx ₹ 6,061\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{E. M. I.} &= \frac{\text{ಸಾಲದ ಮೊತ್ತ} + \text{ಬಡ್ಡಿ}}{\text{ಶಿಂಗಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} \\ &= \frac{18940 + 6061}{24} = \frac{25001}{24} \\ &= ₹ 1,041.708 \approx ₹ 1,041.71 \\ &= ₹ 1,042\end{aligned}$$

$$\text{ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ} = 6,061 + 18,940 + 379 = ₹ 25,380$$

(iii) 0% ಬಡ್ಡಿ ಯೋಜನೆ

$$\begin{aligned}\text{ಪ್ರಕ್ರಿಯಾ ಶುಲ್ಕ} &= ₹ 18,940 \text{ ರ } 2\% \\ &= \frac{2}{100} \times 18940 = ₹ 378.80 \approx ₹ 379\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{E. M. I.} &= \frac{\text{ಸಾಲದ ಮೊತ್ತ} + \text{ಬಡ್ಡಿ}}{\text{ಶಿಂಗಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} \\ &= \frac{18940 + 0}{24} = \frac{18940}{24} \\ &= ₹ 789.166 \approx ₹ 789\end{aligned}$$

$$\text{ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ} = 18,940 + 3,156 + 379 = ₹ 22,475$$

$$\text{ಪಾವತಿಸಿದ ಮುಂಗಡ E. M. I.} = ₹ 789 \times 4 = ₹ 3,156$$

ಆದ್ದರಿಂದ, 0% ಬಡ್ಡಿ ಯೋಜನೆಯು ಉತ್ತಮವಾದ ಯೋಜನೆಯಾಗಿದೆ.

ఉదాహరణ 1.35

ఒందు కంప్యూటరోన బెలేయు ₹ 20,000 ఆగిదే. సంస్థేయు అదన్న 36 తింగళుగళిగే నీడితు, ఆదరే 10% బడ్డియన్న విధిసితు. ఖరీదిదారను పావతిసబేకాద మాసిక కంతుగళన్న కండుపిడియిరి.

పరిహార

కంప్యూటరోన బెలే = ₹ 20,000, బడ్డి = వాషిచ 10%, అవధి = 36 తింగళుగళ (3 వషణగళ)

$$\begin{aligned}\text{బట్టు బడ్డి} &= 20000 \times \frac{10}{100} \times 3 \\ &= ₹ 6,000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{పావతిసబేకాద బట్టు మొత్త} &= 20,000 + 6,000 \\ &= ₹ 26,000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{మాసిక కంతు} &= \frac{\text{బట్టు మొత్త}}{\text{తింగళుగళ సంఖ్య}} \\ &= \frac{26000}{36} \\ &= ₹ 722.22 \\ &\simeq ₹ 722\end{aligned}$$

అభ్యాస 1.6

- శ్రీతాళు ₹ 25,000 వన్న 2 వషణగళిగే సంచిత తేవణియాగి ఒందు బ్యాంకినల్లి ఇట్టిలు. బడ్డియ దరపు వాషిచ 4% ఆదరే, పక్క హణవన్న కండుపిడియిరి.
- నితినో సంచిత తేవణియాగి ₹ 75,000 వన్న 3 వషణక్కే ఒందు బ్యాంకినల్లి ఇట్టిను. బడ్డియ దరపు వాషిచ 5% ఆదరే, పక్క హణవన్న కండుపిడియిరి.
- ఇమూనో ఒందు అంజె కభేరియల్లి ప్రతి తింగళిగే ₹ 400 న్న 2 వషణక్కే ఆవత్కా తేవణియాగి ఇట్టిను. బడ్డియ దరపు 12% ఆదరే, 2 నే వషణద కొనెయల్లి అవను పడేద మొత్తవన్న కండుపిడియిరి.
- రమేశను ప్రతి తింగళు ఒందు నిష్టిత హణవన్న 8% దరదంతే 6 వషణగళ కాల ఒందు అంజె కభేరియల్లి తేవణి ఇట్టిను మత్తు 6 నే వషణద కొనెయల్లి ₹ 17,904 న్న పడేదను. అవన మాసిక తేవణియన్న కండుపిడియిరి.
- కుమారను ఒందు బ్యాంకినల్లి ప్రతి తింగళు ₹ 700 న్న 6 వషణగళ కాల ఆవత్కా తేవణియల్లి ఇట్టిను. అవను 6 వషణగళ కొనెయల్లి ₹ 64,197 న్న పడేదరే, బడ్డియ దరవన్న లేక్కాహారి.
- ఒందు సూక్ష్మ అలే ఒలేయ బెలేయు ₹ 6,000 ఆగిదే. మూర్ఖమాళు అదన్న 5 కంతుగళల్లి ఖరీదిసలు ఇచ్చిసుత్తాళి. సంస్థేయు వాషిచ 10% సరళబడ్డియ దరదల్లి నీడిదరే, E.M.I. మత్తు అవలింద పావతిసల్పుడువ బట్టు మొత్తవన్న కండుపిడియిరి.
- ఒందు శైధ్యికరణ పేట్టియ కొండ బెలేయు ₹ 16,800 ఆగిదే. రంజితను 0% హణకాసిన యోజనెయల్లి 3 E.M.I. యన్న ముంగడవాగి పావతిసి శైధ్యికరణ పేట్టియెన్న ఖరీదిసలు ఇచ్చిసుత్తానే. రంజితోనింద 3% ప్రతియా శుల్షవన్న సవ పడేయలాగిదే. E.M.I. మత్తు 24 తింగళుగళ ఆవధిగే అవనింద పావతిసల్పు బట్టు మొత్తవన్న కండుపిడియిరి.
- ఒందు ఉండద మేజిన బెలేయు ₹ 8,400 ఆగిదే. తేజస్సీ అదన్న 10 కంతుగళల్లి ఖరీదిసలు ఇచ్చిసిదను. సంస్థేయు అదన్న వాషిచ 5% సరళబడ్డియ దరదల్లి నీడిదరే, E.M.I. మత్తు అవనింద పాతిసల్పు బట్టు మొత్తవన్న కండుపిడియిరి.

1.7 ಸಂಯುಕ್ತ ಅಥವಾ ಏಕ್‌ ಅನುಪಾತ (Compound Variation)

ನೇರ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕರಿತು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಯಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಈಗ ನಾವು ಸ್ವರ್ಪಾಠಿಗಳಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದ್ದಾಗಿ ಅಧ್ಯಯಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ನೇರ ಅನುಪಾತ (Direct Variation)

ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದರ ಏರಿಕೆ ಅಥವಾ ಇಳಿಕೆಯು ಮತ್ತೊಂದರ ಅನುರೂಪ ಏರಿಕೆ ಅಥವಾ ಇಳಿಕೆಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ, ಅದನ್ನು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ನೇರ ಅನುಪಾತದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

- ದೂರ ಮತ್ತು ಕಾಲ ಇವುಗಳು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಚಲಿಸಿದ ದೂರವು ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲವು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ (ವೇಗವು ಒಂದೇ ರೀತಿ ಇದ್ದಾಗ).
- ಅಸಲು ಮತ್ತು ಬಡ್ಡಿ ಇವುಗಳು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಅಸಲು ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ಪಡೆಯುವ ಬಡ್ಡಿಯು ಸಹ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ.
- ವಸ್ತುಗಳ ವಿರೀದಿ ಮತ್ತು ವಿಚುರ್ಮಾ ಮಾಡಿದ ಹಣ ಇವುಗಳು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಹೆಚ್ಚು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ವಿರೀದಿಸಿದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಹಣವು ವಿಚುರ್ಮಾಗುತ್ತದೆ.

ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತ (Indirect Variation or Inverse Variation)

ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದರ ಏರಿಕೆ ಅಥವಾ ಇಳಿಕೆಯು ಮತ್ತೊಂದರ ಅನುರೂಪ ಇಳಿಕೆ ಅಥವಾ ಏರಿಕೆಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ, ಅದನ್ನು ನಾವು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

- ಕೆಲಸ ಮತ್ತು ಕಾಲ ಇವುಗಳು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
- ವೇಗ ಮತ್ತು ಕಾಲ ಇವುಗಳು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಒಂದು ಅಂತರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ವೇಗವು ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
- ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಆಹಾರದ ಪರಿಮಾಣ ಇವುಗಳು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ದೊರಕುವ ಆಹಾರವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಯುಕ್ತ ಅನುಪಾತ (Compound Variation)

ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಎರಡು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅನುಪಾತಗಳ ಸರಪಳಿಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತವೆ. ಇಂತಹವುಗಳನ್ನು ಸಂಯುಕ್ತ ಅನುಪಾತ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಎರಡು ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಅನುಪಾತಗಳ ವಿವಿಧ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

అనుపాత I	అనుపాత II
నేర	నేర
విలోమ	విలోమ
నేర	విలోమ
విలోమ	నేర

సంయుక్త అనుపాతగళన్న దృష్టాంతికరిసలు కేలవు సమస్యగళన్న నావు పరిహరిసోణ.

ఉదాహరణ 1.36

20 గండసరు 112 మీటర్ల లుద్దద గోడెయన్న 6 దినగళల్లి కట్టిదరే, 25 గండసరు 3 దినగళల్లి ఎష్టు లుద్దద గోడెయన్న కట్టుతారే?

పరిహార

ఎధాన 1: సమస్యేయ గండసరుగళ సంబేధ దినగళ సంబేధ మత్తు గోడెయ లుద్ద ఎంబ చెరాంతగళ మూరు గణగళన్న ఒళగొండిదే.

గండసర సంబేధ	దినగళ సంబేధ	గోడెయ లుద్ద మీటర్ల గళల్లి
20	6	112
25	3	x

హంత 1: గండసర సంబేధ మత్తు గోడెయ లుద్ద ఇప్పగళన్న పరిగణిసిరి. గండసర సంబేయు 20 రింద 25 రవరేగే హెచ్చాదరే, గోడెయ లుద్దవు సహ హెచ్చాగుత్తదే. ఆద్దరింద ఇదు నేర అనుపాతదల్లిదే.

ఆద్దరింద, సమానుపాతవు $20 : 25 :: 112 : x \dots\dots (1)$

హంత 2: దినగళ సంబేధ మత్తు గోడెయ లుద్ద ఇప్పగళన్న పరిగణిసిరి. దినగళ సంబేయు 6 రింద 3 క్షేత్ర కడిమేయాదరే, గోడెయ లుద్దవు సహ కడిమేయాగుత్తదే. ఆద్దరింద ఇదు నేర అనుపాతదల్లిదే.

ఆద్దరింద, సమానుపాతవు $6 : 3 :: 112 : x \dots\dots (2)$

(1) మత్తు (2) న్న సేరిసిదాగ

$$\left. \begin{matrix} 20 : 25 \\ 6 : 3 \end{matrix} \right\} :: 112 : x$$

ఎందు నావు బరెయబహుదు.

అంత్య పదగళ గుణలబ్ధ = మధ్య పదగళ గుణలబ్ధ ఎంబుదు నమగె తిళిదిదే.

అంత్య పదగళ

20

6

మధ్య పదగళ

$25 :: 112$

3

అంత్య పదగళ

x

ಅಧ್ಯಾಯ 1

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ, } 20 \times 6 \times x = 25 \times 3 \times 112 \\ x = \frac{25 \times 3 \times 112}{20 \times 6} = 70 \text{ ಮೀಟರುಗಳು.}$$

ವಿಧಾನ 2

ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆ	ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದು ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ
20	6	112
25	3	x

ಹಂತ 1: ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದು ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆಯು 20 ರಿಂದ 25 ರವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದವು ಸಹ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ.

$$\text{ಗುಣಾಕಾರದ ಅಪವರ್ತನ} = \frac{25}{20}$$

ಹಂತ 2: ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದು ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 6 ರಿಂದ 3 ಕ್ಕೆ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ, ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದವು ಸಹ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ.

$$\text{ಗುಣಾಕಾರದ ಅಪವರ್ತನ} = \frac{3}{6}.$$

$$\therefore x = \frac{25}{20} \times \frac{3}{6} \times 112 = 70 \text{ ಮೀಟರುಗಳು}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.37

6 ಗಂಡಸರು ದಿನಕ್ಕೆ 10 ಗಂಟೆಗಳ ಕಾಲ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿ 20 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಅದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು 9 ಗಂಡಸರು ದಿನಕ್ಕೆ 8 ಗಂಟೆಗಳು ಕಾಲ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿ ಎಷ್ಟು ದಿನದಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು?

ಪರಿಹಾರ

ವಿಧಾನ 1: ಸಮಸ್ಯೆಯು ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆ, ಕೆಲಸದ ಅವಧಿ ಮತ್ತು ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ಚರಾಂಶಗಳ 3 ಗಣಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆ	ಕೆಲಸದ ಅವಧಿ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ)	ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
6	10	24
9	8	x

ಹಂತ 1: ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. ಗಂಡಸರ ಸಂಖ್ಯೆಯು 6 ರಿಂದ 9 ಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ.

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮಾನಪಾತವು } 9 : 6 :: 24 : x \quad \dots \dots (1)$$

ಹಂತ 2: ದಿನದ ಕೆಲಸದ ಅವಧಿ ಮತ್ತು ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. ಕೆಲಸದ ಅವಧಿಯು 10 ರಿಂದ 8 ಕ್ಕೆ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ, ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ.

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮಾನಪಾತವು } 8 : 10 :: 24 : x \quad \dots \dots (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ

$$\left. \begin{array}{l} 9 : 6 \\ 8 : 10 \end{array} \right\} :: 24 : x$$

అంత్య పదగళ గుణలబ్ధ = మధ్య పదగళ గుణలబ్ధ ఎంచుదు నమగే తిల్చిదిదే.

అంత్య పదగళు	:	మధ్య పదగళు	:	అంత్య పదగళు
9	:	6 : 24	:	x
8	:	10		

ఆధ్యరింద,

$$9 \times 8 \times x = 6 \times 10 \times 24$$

$$x = \frac{6 \times 10 \times 24}{9 \times 8} = 20 \text{ దినగళు}$$

- సూచన:** 1. నేర అనుపాతవన్ను ↓ నింద సూచిసిరి. (కేళముఖివాగి బాణద గురుతు)
2. విలోమ అనుపాతవన్ను ↑ నింద సూచిసిరి. (మేల్చుఖివాగి బాణద గురుతు)
3. గుణాకారద అపవత్కనగళన్ను బాణద గురుతన్ను ఆధరిసి బరేయబముదు. బాణద గురుతిన తలేయ భాగద సంఖ్యేయన్ను అంతదల్లియూ మత్తు బాణద గురుతిన బాలద భాగద సంఖ్యేయన్ను భేదదల్లియూ తేగదుహోళ్లి.

ఎరడనే విధానక్కె, మేలిన టిప్పుశేయల్లి కొట్టిరువ సూచనగళన్ను ఉపయోగిసి.

విధాన 2 : (బాణద గురుతన్ను ఉపయోగిసి) (Using arrow marks)

గండసర సంఖ్య	కేలసద అవధి (గంటిగళల్లి)	దినగళ సంఖ్య
6	10	24
9	8	x

హంత 1 : గండసర సంఖ్య మత్తు దినగళ సంఖ్య ఇప్పగళన్ను పరిగణిసిరి. గండసర సంఖ్యేయు 6 రింద 9 క్షేత్రాలలో దినగళ సంఖ్యేయు కడిమేయాగుత్తదే. ఆధ్యరింద ఇదు విలోమ అనుపాతదల్లిదే.

$$\text{గుణాకారద అపవత్కన} = \frac{6}{9}$$

హంత 2 : దినద కేలసద అవధి మత్తు దినగళ సంఖ్య ఇప్పగళన్ను పరిగణిసిరి. కేలసద అవధియు 10 రింద 8 క్షేత్రాలలో దినగళ సంఖ్యేయు కడిమేయాగుత్తదే. ఆధ్యరింద ఇదు సక విలోమ అనుపాతదల్లిదే.

$$\text{గుణాకారద అపవత్కన} = \frac{10}{8}$$

$$\therefore x = \frac{6}{9} \times \frac{10}{8} \times 24 = 20 \text{ దినగళు.}$$

అభ్యాస 1.7

- 12 జన మరగెలసదవరు దినక్కే 10 గంటిగళు కాయ్ఫనివహిసి పీఎలోపకరణగళ కేలసవన్ను 18 దినగళల్లి పొంచగొలిసిదరు. 15 మర కేలసదవరు దినక్కే 6 గంటిగళు కాయ్ఫనివహిసిదరే అదే కేలసవన్ను పొంచగొలిసలు ఎష్టు దినగళు బేకాగుత్తదే?
- 80 యంత్రగళు 6 గంటిగళల్లి ఒందే విధద 4,800 సంచారి దూరవాణి (mobile) గళన్ను తయారిస బముదు. ఒందు యంత్రపు ఒందు గంటియల్లి ఎష్టు సంచారి దూరవాణిగళన్ను తయారిసబముదు? 25 యంత్రగళు 5 గంటిగళల్లి ఎష్టు సంచారి దూరవాణిగళన్ను తయారిసుత్తాడే?
- 14 జన అచ్చుమోళి జోడిసువవరు 5 గంటిగళల్లి 70 మటగళిరువ ఒందు పుస్తకవన్ను రచిసిదరే, 10 గంటిగళల్లి ఎష్టు జన అచ్చుమోళి జోడిసువవరు అదే మటగళన్ను రచిసుత్తారే?
- 2,400 జదర ఏటర్ భూమియన్ను 10 దినగళ కాల 12 కేలసగారరు కృషి మాడిదరే, 5,400 జదర ఏటర్ భూమియన్ను 18 దినగళల్లి కృషి మాడలు ఎష్టు కేలసగారర అగత్యవిదే?
- స్వాతియు ప్రతిదిన 4 గంటిగళు కాయ్ఫనివహిసి 18 దినగళల్లి 5 సిరేగళిగె కసూతి కేలస మాడుత్తాళి. ప్రతిదిన 6 గంటిగళు కాయ్ఫనివహిసి 10 సిరేగళిగె కసూతి కేలస మాడలు అవళిగె ఎష్టు దినగళు బేకాగుత్తదే?
- ఒందు బ్యాంకెనల్లి ₹ 2,500 రేవణి ఇట్ట మొత్తపు 6 తింగళగళల్లి ₹ 100 బడ్డియన్ను నీడుత్తదే. ₹ 3,200 క్షేత్రాలలో తింగళగళిగె అదే బడ్డియ దరదంతే బడ్డియు ఎష్టుగుత్తదే?

1.8 ಕಾಲ ಮತ್ತು ಕೆಲಸ (Time and Work)

ನಾವು ಹಲವು ಜನರ ಕೆಲಸವನ್ನು ಹೋಲಿಸುವಾಗ, ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನು ಮೊಣಾಗೋಳಿಸುವ ಕೆಲಸದ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಲಿಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಕಾಲ ಮತ್ತು ಕೆಲಸಗಳು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದವುಗಳು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಮಾಡಲು ಹೆಚ್ಚು ಜನರು ಸೇರಿದರೆ, ಕೆಲಸವು ಕಡಿಮೆ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಮೊಣಾಗೋಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವಾಗ, ಕೆಳಗಿನ ಮುಖ್ಯಾಂಶಗಳನ್ನು ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಲೇಬೇಕು.

- ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಒಟ್ಟು ಕೆಲಸವನ್ನು ' n ' ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮೊಣಾಗೋಳಿಸಿದರೆ, ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಅವನು ಒಟ್ಟು ಕೆಲಸದ $\frac{1}{n}$, ರಷ್ಟು ಕೆಲಸವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು 4 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮೊಣಾಗೋಳಿಸಿದರೆ, ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಅವನು ಕೆಲಸದ $\frac{1}{4}$ ಭಾಗವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಾನೆ.
 - ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಡುವ ಕೆಲಸದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ಕೆಲಸವನ್ನು ಮೊಣಾಗೋಳಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಒಟ್ಟು ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 1/(1 \text{ ದಿನದ } \text{ಕೆಲಸ})$. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸದ $\frac{1}{10}$ ಭಾಗವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ, ಕೆಲಸವನ್ನು ಮೊಣಾಗೋಳಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು
- $$= \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)} = 1 \times \frac{10}{1} = 10 \text{ ದಿನಗಳು.}$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.38

A ಎಂಬುವವನು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು 20 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು B ಎಂಬುವವನು ಅದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು 30 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ, ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ?

ಪರಿಹಾರ

$$1 \text{ ದಿನದಲ್ಲಿ } A \text{ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ } \text{ಕೆಲಸ} = \frac{1}{20}, 1 \text{ ದಿನದಲ್ಲಿ } B \text{ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ } \text{ಕೆಲಸ} = \frac{1}{30}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ ದಿನದಲ್ಲಿ } A \text{ ಮತ್ತು } B \text{ ಇಬ್ಬರಿಂದ } \text{ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ } \text{ಕೆಲಸ} &= \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \\ &= \frac{3+2}{60} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

A ಮತ್ತು B ಗಳಿಬ್ಬರಿಂದ ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಮೊಣಾಗೋಳಿಸಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$$= \frac{1}{\frac{1}{12}} = 12 \text{ ದಿನಗಳು.}$$

ಉದಾಹಾರಣೆ 1.39

A ಮತ್ತು B ಇಬ್ಬರೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು 8 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಆದರೆ A ಒಬ್ಬನೇ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು 12 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. B ಒಬ್ಬನೇ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮಾಡಲು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ?

ಪರಿಹಾರ

$$1 \text{ ದಿನದಲ್ಲಿ } A \text{ ಮತ್ತು } B \text{ ಇಬ್ಬರಿಂದ } \text{ಒಟ್ಟಿಗೆ } \text{ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ } \text{ಕೆಲಸ} = \text{ಕೆಲಸದ } \frac{1}{8} \text{ ಭಾಗ}$$

$$1 \text{ ದಿನದಲ್ಲಿ } A \text{ ನಿಂದ } \text{ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ } \text{ಕೆಲಸ} = \text{ಕೆಲಸದ } \frac{1}{12} \text{ ಭಾಗ.}$$

$$1 \text{ ದಿನದಲ್ಲಿ } B \text{ ನಿಂದ } \text{ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ } \text{ಕೆಲಸ} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{3-2}{24} = \frac{1}{24}$$

ಆದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು B ಒಬ್ಬನೇ ಮಾಡಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{1}{\frac{1}{24}} = 24 \text{ ದಿನಗಳು.}$

ఉదాహరణ 1.40

A మత్తు B ఎంబ ఇబ్బరు వృక్షిగళు ఒందు కేలసదల్లి నిరతరాగిరుత్తారే. A ఎంబువవను ఒందు కేలసవన్న 12 దినగళల్లి మాడుత్తానే మత్తు B ఎంబువవను అదే కేలసవన్న 20 దినగళల్లి మాడుత్తానే. అవరిబ్బరూ ఒట్టిగే 3 దినగళు కాయినివచ్చిసి నంతర A యు హోరమోగుత్తానే. B యు ఎప్పు దినగళల్లి కేలసవన్న మాణగొళిసుత్తానే?



ఇప్పగళమ్మ
ప్రయోగిసి

A, B మత్తు C గళు ప్రత్యేకవాగి కాయినివచ్చిసి ఒందు కేలసవన్న క్రమవాగి 20, 5 మత్తు 4 దినగళల్లి మాణగొళిసుత్తారే. ఎల్లరూ ఒట్టిగే సేరి కాయినివచ్చిసిదరె, ఎప్పు దినగళల్లి కేలసవన్న మాణగొళిసుత్తారే ఎంబుదన్న కండుండియిరి.

పరిహార

$$1 \text{ దినదల్లి } A \text{ నింద మాడల్పట్ట కేలస} = \frac{1}{12}$$

$$1 \text{ దినదల్లి } B \text{ నింద మాడల్పట్ట కేలస} = \frac{1}{20}$$

$$1 \text{ దినదల్లి } A \text{ మత్తు } B \text{ గళింద ఒట్టిగే మాడల్పట్ట కేలస} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$$

$$= \frac{5+3}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$$

$$3 \text{ దినగళల్లి } A \text{ మత్తు } B \text{ గళింద ఒట్టిగే మాడల్పట్ట కేలస} = \frac{2}{15} \times 3 = \frac{2}{5}$$

$$\text{ఉళిద కేలస} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\text{ఉళిద కేలసవన్న } 'B' \text{ యు మాణగొళిసలు తేగెదుశోండ దినగళ సంఖ్య} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{20}} = \frac{3}{5} \times \frac{20}{1}$$

$$= 12 \text{ దినగళు.}$$

ఉదాహరణ 1.41

ఒందు కేలసవన్న A మత్తు B గళిబ్బరూ 12 దినగళల్లి, B మత్తు C గళిబ్బరూ 15 దినగళల్లి హగూ C మత్తు A గళిబ్బరూ 20 దినగళల్లి మాడుత్తారే. అవరెల్లరూ ఒట్టిగే మత్తు ప్రత్యేకవాగి ఎప్పు దినగళల్లి కేలసవన్న మాణగొళిసుత్తారే?

పరిహార

$$1 \text{ దినదల్లి } A \text{ మత్తు } B \text{ ఇబ్బరింద మాడల్పట్ట కేలస} = \frac{1}{12}$$

$$1 \text{ దినదల్లి } B \text{ మత్తు } C \text{ ఇబ్బరింద మాడల్పట్ట కేలస} = \frac{1}{15}$$

$$1 \text{ దినదల్లి } C \text{ మత్తు } A \text{ ఇబ్బరింద మాడల్పట్ట కేలస} = \frac{1}{20}$$

$$1 \text{ దినదల్లి } (A+B)+(B+C)+(C+A) \text{ గళింద మాడల్పట్ట కేలస} = \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}$$

$$1 \text{ దినదల్లి } (2A + 2B + 2C) \text{ గళింద మాడల్పట్ట కేలస} = \frac{5+4+3}{60}$$

$$1 \text{ దినదల్లి } 2(A + B + C) \text{ గళింద మాడల్పట్ట కేలస} = \frac{12}{60}$$

$$1 \text{ దినదల్లి } \text{ ఒట్టిగే } A, B \text{ మత్తు } C \text{ గళింద మాడల్పట్ట కేలస} = \frac{1}{2} \times \frac{12}{60} = \frac{1}{10}$$

ಅಧ್ಯಯ 1

$\therefore A, B$ ಮತ್ತು C ಗಳು 10 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸುತ್ತಾರೆ.

1 ದಿನದಲ್ಲಿ A ನಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ

$$\text{ಅಂದರೆ, } [(A + B + C) \text{ ಯ ಕೆಲಸ} - (B + C) \text{ ಯ ಕೆಲಸ}] = \frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{3 - 2}{30} = \frac{1}{30}$$

$\therefore A$ ಯು ಕೆಲಸವನ್ನು 30 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುತ್ತಾನೆ.

1 ದಿನದಲ್ಲಿ B ನಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ

$$\text{ಅಂದರೆ, } [(A + B + C) \text{ ಯ ಕೆಲಸ} - (C + A) \text{ ಯ ಕೆಲಸ}] = \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{2 - 1}{20} = \frac{1}{20}$$

$\therefore B$ ಯು ಕೆಲಸವನ್ನು 20 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುತ್ತಾನೆ.

1 ದಿನದಲ್ಲಿ C ನಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ

$$\text{ಅಂದರೆ, } [(A + B + C) \text{ ಯ ಕೆಲಸ} - (A + B) \text{ ಯ ಕೆಲಸ}] = \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{6 - 5}{60} = \frac{1}{60}$$

$\therefore C$ ಯು ಕೆಲಸವನ್ನು 60 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುತ್ತಾನೆ.

ಉದಾಹಾರಣ 1.42

A ಯು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು 10 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು B ಯು ಅದನ್ನು 15 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. ಅವರು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ ₹ 1500 ನ್ನು ಗಳಿಸಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ಪಡೆದ ಹಣವೆಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ

$$1 \text{ ದಿನದಲ್ಲಿ } A \text{ ನಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ} = \frac{1}{10}$$

$$1 \text{ ದಿನದಲ್ಲಿ } B \text{ ನಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಕೆಲಸ} = \frac{1}{15}$$

$$\text{ಅವರ ಕೆಲಸದ ಪ್ರಮಾಣ (ಅನುಪಾತ)} = \frac{1}{10} : \frac{1}{15} = 3 : 2$$

$$\text{ಒಟ್ಟು ಪಾಲು} = ₹ 1500$$

$$A \text{ ನ ಪಾಲು} = \frac{3}{5} \times 1500 = ₹ 900$$

$$B \text{ ನ ಪಾಲು} = \frac{2}{5} \times 1500 = ₹ 600$$

ಉದಾಹಾರಣ 1.43

ಎರಡು ನಲ್ಲಿಗಳು ಒಂದು ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯನ್ನು 30 ನಿಮಿಷಗಳು ಮತ್ತು 40 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಸುತ್ತವೆ. ಮತ್ತೊಂದು ನಲ್ಲಿಯು ಅದನ್ನು 24 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಖಾಲಿಮಾಡುತ್ತದೆ. ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯು ಖಾಲಿ ಇದ್ದು, ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ನಲ್ಲಿಗಳನ್ನು ತೆರೆದರೆ, ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿಯು ಎಷ್ಟು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ತುಂಬುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ

$$1 \text{ ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ } A \text{ ನಲ್ಲಿಯಿಂದ ನೀರು ತುಂಬುವ ಪರಿಮಾಣ} = \frac{1}{30}$$

$$1 \text{ ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ } B \text{ ನಲ್ಲಿಯಿಂದ ನೀರು ತುಂಬುವ ಪರಿಮಾಣ} = \frac{1}{40}$$

$$1 \text{ ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ } C \text{ ನಲ್ಲಿಯಿಂದ ನೀರು ಖಾಲಿಯಾಗುವ ಪರಿಮಾಣ} = \frac{1}{24}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ఎల్లా } 3 \text{ నల్గళన్న తేరేదాగ, } 1 \text{ నిమిషదల్లి} \\ \text{నీరు తుంబువ పరిమాణ} \end{array} \right\} = \frac{1}{30} + \frac{1}{40} - \frac{1}{24} = \frac{4+3-5}{120} = \frac{7-5}{120} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

$$\text{నీరిన తోట్టియు తుంబలు తెగేదుకొళ్లువ కాల} = \frac{1}{\frac{1}{60}} = 60 \text{ నిమిషగళు} \\ = 1 \text{ గంట}$$

అభ్యాస 1.8

- ఒట్టు పరుషను ఒందు కేలసవన్న 4 దినగళల్లి మాణసోళిసిదరే, ఒట్టు మహిళీయు అదన్న 12 దినగళల్లి మాణసోళిసుత్తాళే. ఇట్టరూ ఒట్టిగే కేలసమాడిదరే, కేలసవు ఎష్టు దినగళల్లి మాణసోళ్లుత్తదే?
- ఇట్టరు ముడుగరు ఒట్టిగే కేలస మాడిదరే 10 దినగళల్లి ఒందు కేలసవన్న మాణసోళిసుత్తారే. మొదలనే ముడుగను అవనోబ్బనే 15 దినగళల్లి అదన్న మాడుత్తానే. ఎరడనే ముడుగను అవనోబ్బనే అదన్న ఎష్టు దినగళల్లి మాడుత్తానే ఎంబుదన్న కండుహిదియిరి.
- A, B మత్తు C ఎంబ మూరు గండశరు ఒందు కేలసవన్న క్రమవాగి 8, 12 మత్తు 16 దినగళల్లి మాణసోళిసుత్తారే. A మత్తు B ఇట్టరు ఒట్టిగే 3 దినగళు కేలస మాడుత్తారే. నంతర B యు హోరచరుత్తానే మత్తు C యు సేవకచేయాగుత్తానే. A మత్తు C ఇట్టరు ఎష్టు దినగళల్లి కేలసవన్న మాణసోళిసుత్తారే?
- A ఎంబ నల్లియు 10 నిమిషగళల్లి ఒందు తోట్టియన్న తుంబిసుత్తదే. B ఎంబ ఎరడనే నల్లియు 20 నిమిషగళల్లి తుంబిసుత్తదే. C ఎంబ మూరనే నల్లియు 15 నిమిషగళల్లి ఖాలి మాడుత్తదే. ప్రారంభదల్లి తోట్టియు ఖాలియాగిద్దరే, ఎల్లా నల్గళన్న ఒట్టిగే తేరేదాగ ఎష్టు సమయదల్లి అదు తుంబుత్తదే ఎంబుదన్న కండుహిదియిరి.
- A యు ఒందు కేలసవన్న 20 దినగళల్లి మాణసోళిసుత్తానే మత్తు B యు అదన్న 30 దినగళల్లి మాణసోళిసుత్తానే. అపరిష్కరు ఒట్టిగే కాయినివచ్చిసి కేలసవన్న మాణసోళిసుత్తారే. ₹ 600 న్న కూలియాగి పావతిసిదరే, ప్రతియోబ్బర పాలన్న కండుహిదియిరి.
- A, B మత్తు C గళు ఒందు కేలసవన్న క్రమవాగి 12, 24 మత్తు 8 దినగళల్లి మాడుత్తారే. అవరేల్లరూ సేరి ఒందు దిన కేలస మాడుత్తారే. నంతర C యు గుంపినింద హోరచరుత్తానే. A మత్తు B ఇట్టరు ఉళిద కేలసవన్న ఎష్టు దినగళల్లి మాణసోళిసుత్తారే?
- ఒందు నల్లియు 15 నిమిషగళల్లి ఒందు నీరిన తోట్టియన్న తుంబిసుత్తదే. ఇన్నొందు నల్లియు అదన్న 20 నిమిషగళల్లి ఖాలి మాడుత్తదే. తోట్టియు ప్రారంభదల్లి ఖాలియాగిరుత్తదే. ఎరడా నల్గళు కాయిగత మాడలు ప్రారంభిసిదరే, ఎష్టు సమయదల్లి తోట్టియు తుంబుత్తదే?

విస్తరణ: C.P. = కొండ బెలె (Cost Price), S.P. = మారిద బెలె (Selling Price), M.P. = ముఖబెలె (Marked Price), P = అసలు (Principal), r = బడ్డియ దర (Rate of interest), n = కాలావధి (time period), A = మొత్త (Amount), C. I. = జక్కబడ్డ (Compound Interest)



ಪರಿಕಲ್ಪನಾ ಸಾರಾಂಶ

↳ ಶೇಂಕಡ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥ ನೂರಕ್ಕೆ ಭೇದದಲ್ಲಿ ನೂರನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಇನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಶೇಂಕಡ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

↳ ಲಾಭದ ಸಂರಕ್ಷಿತಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಳಗನವುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತೀರೆ.

$$\text{ಲಾಭ} = \text{S.P.} - \text{C.P.}; \quad \text{ಶೇಂಕಡ ಲಾಭ} = \frac{\text{ಲಾಭ}}{\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ}} \times 100.$$

$$\text{S.P.} = \left(\frac{100 + \text{ಲಾಭ}\%}{100} \right) \times \text{C.P.}; \quad \text{C.P.} = \left(\frac{100}{100 + \text{ಲಾಭ}\%} \right) \times \text{S.P.}$$

↳ ನಷ್ಟದ ಸಂರಕ್ಷಿತಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಳಗನವುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತೀರೆ.

$$\text{ನಷ್ಟ} = \text{C.P.} - \text{S.P.}; \quad \text{ಶೇಂಕಡ ನಷ್ಟ} = \frac{\text{ನಷ್ಟ}}{\text{ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ}} \times 100.$$

$$\text{S.P.} = \left(\frac{100 - \text{ನಷ್ಟ}\%}{100} \right) \times \text{C.P.}; \quad \text{C.P.} = \left(\frac{100}{100 - \text{ನಷ್ಟ}\%} \right) \times \text{S.P.}$$

↳ ಲಯಾಯತ ಎಂಬುದು ಮುಲ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ಕೆತ್ತಿತವಾಗಿದೆ.

↳ ಮಾಲದ ಬೆಲೆ ಎಂಬುದು ಮುಲ ಬೆಲೆಗೆ ಲಯಾಯತಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ನಂತರ ಪಾವತಿಸುವ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ.

↳ ಲಯಾಯತ = M.P. – S.P.

$$\Rightarrow \text{M.P.} = \frac{100}{100 - \text{ರಿಯಾಯಿತಿ}\% \times \text{S.P.}; \quad \text{S.P.} = \frac{100 - \text{ರಿಯಾಯಿತಿ}\%}{100} \times \text{M.P.}$$

$$\Rightarrow \text{C.P.} = \frac{100 - \text{ರಿಯಾಯಿತಿ}\%}{100 + \text{ಲಾಭ}\%} \times \text{M.P.}; \quad \text{M.P.} = \frac{100 + \text{ಲಾಭ}\%}{100 - \text{ರಿಯಾಯಿತಿ}\%} \times \text{C.P.}$$

$$\Rightarrow \text{ಶೇಂಕಡ ಲಯಾಯತ} = \frac{\text{ರಿಯಾಯಿತಿ}}{\text{ಮುಲ ಬೆಲೆ}} \times 100.$$

↳ ಜರ್ಕಬಣ್ಡಿಯನ್ನು

$$(i) \text{ ವಾರ್ಷಿಕತವಾಗಿ } \text{ಲೀಕ್ಕೆ } \text{ಹಾಕಿದಾಗ}, A = P \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n$$

$$(ii) \text{ ಅರ್ಥ } \text{ ವಾರ್ಷಿಕತವಾಗಿ } \text{ಲೀಕ್ಕೆಹಾಕಿದಾಗ}, A = P \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{100} \right) \right]^{2n}$$

$$(iii) \text{ ಕಾಲು } \text{ ವಾರ್ಷಿಕತವಾಗಿ } \text{ಲೀಕ್ಕೆಹಾಕಿದಾಗ}, A = P \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{100} \right) \right]^{4n}$$

$$\Rightarrow \text{ಬೆಲೆ } \text{ ಏಕೆ, } A = P \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n; \quad \text{ಬೆಲೆ } \text{ ಇತಕೆ, } A = P \left(1 - \frac{r}{100} \right)^n$$

$$\Rightarrow \text{ಎರಡು } \text{ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ } \text{ ಜರ್ಕಬಣ್ಡಿ } \text{ ಮತ್ತು } \text{ ಸರಳಬಣ್ಡಿಗಳ } \text{ ನಡುವಿನ } \text{ ವ್ಯತ್ಯಾಸ} = P \left(\frac{r}{100} \right)^2$$

$$\Rightarrow A \text{ } \text{ನಿಂದ } \text{ ಒಂದು } \text{ ದಿನ } \text{ ಕೆಲಸ} = \frac{1}{A \text{ } \text{ಯು } \text{ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ } \text{ ದಿನಗಳ } \text{ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$\Rightarrow 'x' \text{ } \text{ದಿನಗಳಲ್ಲಿ } \text{ ಹೋಣಿಗೊಳಿಸಿದ } \text{ ಕೆಲಸ} = \text{ಒಂದು } \text{ ದಿನ } \text{ ಕೆಲಸ} \times x.$$

ರೇಖಾಗಣಿತ

- 2.1 ಪೀಠಿಕೆ
- 2.2 ಶ್ರೀಭೂಜದಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಶೀಲತೆ
- 2.3 ಪೈಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯ
- 2.4 ವೃತ್ತಗಳು



ಪೈಥಾಗೋರಸ್

(ಕ್ರಿ.ಪೂ. 582 - 497)

2.1 ಪೀಠಿಕೆ (Introduction)

ಕ್ರಿ. ಪೂ. 1000 ವರ್ಷಗಳಿಗೂ ಮೊದಲೇ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಕಂಚೆಟ್ಟಿಯನ್ನರಿಂದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತು. ಇದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಮೂಲ ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧಗಳು ಅಥವಾ ಆದ್ಯತ್ವಿಕಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಾಧನೆಗಳ ತಾರ್ಕಿಕ ಪದ್ಧತಿಯಾಗಿ ಗ್ರೇಕರಿಂದ ಅಮೂರ್ತಗೊಳಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತು.

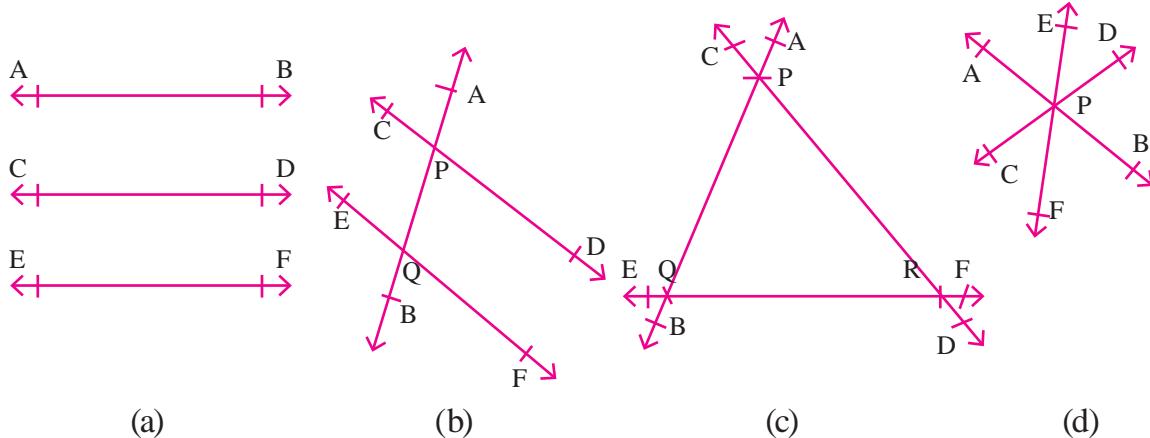
ನಮ್ಮ ದಿನನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಹಲವಾರು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖವಾದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತದೆ. ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಶ್ರೀಭೂಜಗಳನ್ನು ಹಲವಾರು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಬಹುಭೂಜಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಜಮೀನನ್ನು ಶ್ರೀಭೂಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಶ್ರೀಭೂಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತವು ಜಮೀನಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ. ಶ್ರೀಭೂಜಗಳು ಲಂಬಕೋನ ಶ್ರೀಭೂಜಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ತುಂಬಾ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಪಾದದಿಂದ ಶೃಂಗಕ್ಕೆ ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರಿಂದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಶ್ರೀಭೂಜಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಶೀಲತೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನಾವು ನೋಡೋಣ.

ಇವರು ಸರ್ವಕಾಲಿಕ
ಪ್ರಮುಖ
ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಲ್ಲಿ
ಒಬ್ಬರು. ಇವರು
ತಮ್ಮದೇ ಹೆಸರಿನ
ಲಂಬಕೋನ
ಶ್ರೀಭೂಜದ
ಸಂಬಂಧಕ್ಕಾಗಿ
ಪ್ರಶ್ನಾತರಾಗಿದ್ದಾರೆ.

2.2 ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಶೀಲತೆ (ವರ್ಕಬಿಂದುಸ್ಥತೆ) (Concurrency in Triangles)

ಚಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಧಿವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಕಂಡುಬರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳೇನು? ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿರಬಹುದು.



(a) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AB, CD ಮತ್ತು EF ಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವು ಭೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

(b) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AB ಮತ್ತು CD ಗಳು P ನಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತವೆ. AB ಮತ್ತು EF ಗಳು Q ನಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ P, Q ಗಳು ಎರಡು ಭೇದನಾ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ.

(c) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, P, Q, R ಗಳು ಮೂರು ಭೇದನಾ ಬಿಂದುಗಳು.

ಆದರೆ, (d) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, P ಯು ಮಾತ್ರ ಭೇದನಾ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ AB, CD, EF ಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದು P ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತವೆ. ಈ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸಂಗಮಶೀಲ ರೇಖೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. P ಬಿಂದುವನ್ನು ಸಂಗಮ ಬಿಂದು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಿಂದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದ ಸುರುತ್ತಕೇಂದ್ರ, ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರ, ತ್ರಿಭುಜದ ಅಂತರ್ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿಕೇಂದ್ರ. ಈಗ ನಾವು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯುವುದು ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲಿದ್ದೇವೆ.

2.2.1 ತ್ರಿಭುಜದ ಸುರುತ್ತಕೇಂದ್ರ (Centroid of a Triangle)

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ABC ಯು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

D ಯು BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. AD ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.

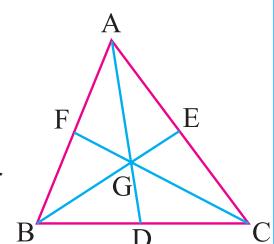
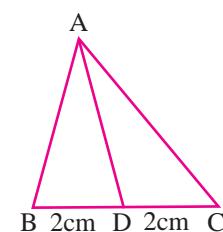
ಇಲ್ಲಿ AD ಯು $\triangle ABC$ ಯ ಒಂದು ಮಧ್ಯರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಶೃಂಗ ಮತ್ತು ಅಭಿಮುಖ ಭಾಗವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವಾಗಿದೆ.

AD, BE, CF ಗಳು $\triangle ABC$ ಯ ಮೂರು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳಾಗಿರುವ ಪಕ್ಕದ ಚೆತ್ತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳು.

ಅವು G ನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಶೀಲ (ವರ್ಕಬಿಂದುಸ್ಥ) ವಾಗಿವೆ. ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸುರುತ್ತಕೇಂದ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಸಂಗಮಶೀಲವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಸಂಗಮಬಿಂದುವನ್ನು ಸುರುತ್ತಕೇಂದ್ರ ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು 'G' ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.



- ಮೂಲಕ :** (i) ಸುರುತ್ತಕೇಂದ್ರವು ಪ್ರತಿ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯನ್ನು 2 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.
(ii) ಸುರುತ್ತಕೇಂದ್ರವು ಭೌತಿಕ ಸುರುತ್ತಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

2.2.2 ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರ (Orthocentre of a Triangle)

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ABC ಯು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

A ನಿಂದ BC ಗೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

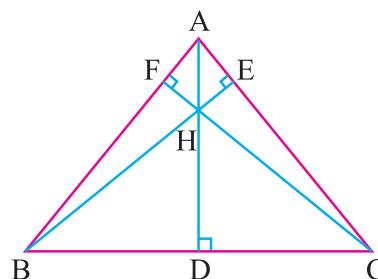
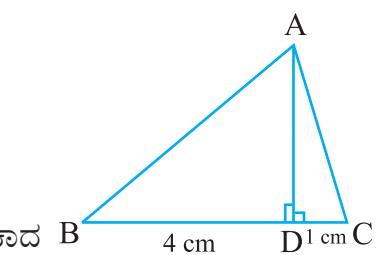
AD ಯು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$. ಇಲ್ಲಿ D ಯು ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಬೇಕಾದ
ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ AD ಯು A ಶೃಂಗದಿಂದಿರುವ ಜೆನ್ನತ್ಯವಾಗಿದೆ.

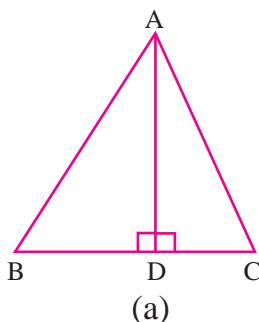
ತ್ರಿಭುಜದ ಜೆನ್ನತ್ಯವು ಒಂದು ಶೃಂಗದಿಂದ ಅಭಿಮುಖ ಭಾಗವಿಗೆ
ಎಳೆದ ಲಂಬವಾದ ರೇಖಾವಿಂಡವಾಗಿದೆ. AD, BE, CF ಗಳನ್ನು
ABC ಯ ಮೂರು ಜೆನ್ನತ್ಯಗಳಾಗಿರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಅವು H ನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಶೀಲವಾಗಿವೆ. ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ಲಂಬಕೇಂದ್ರ
ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

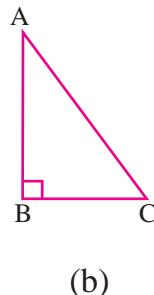
ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಜೆನ್ನತ್ಯಗಳು ಸಂಗಮಶೀಲವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಸಂಗಮಬಿಂದುವನ್ನು **ಲಂಬಕೇಂದ್ರ** ಎಂದು
ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.



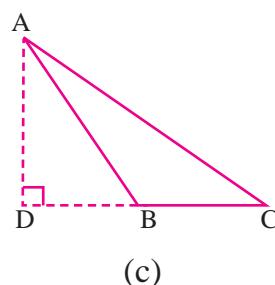
ಲಂಬಕೇಂದ್ರದ ವಿಭಿನ್ನ ಸ್ಥಾನಗಳು (Different positions of orthocentre)



(a)



(b)



(c)

ಸಂಗತಿ (i) : (a) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ABC ಯು ಲಫುಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವು ΔABC ಯ ಒಳಗಡೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಸಂಗತಿ (ii) : (b) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ABC ಯು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವು
ಲಂಬಕೋನದ ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಸಂಗತಿ (iii) : (c) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ABC ಯು ಏಣಾಲಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವು
 ΔABC ಯ ಹೊರಗಡೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

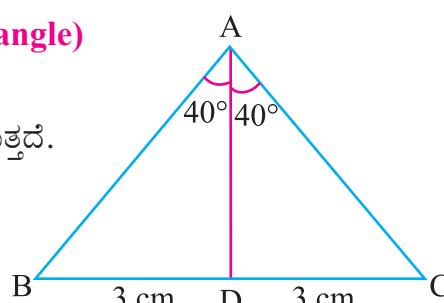
2.2.3 ತ್ರಿಭುಜದ ಅಂತರ್ಕೇಂದ್ರ (ಒಳಕೇಂದ್ರ) (Incentre of a Triangle)

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ABC ಯು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

$\angle A$ ಯನ್ನು AD ಯು ಎರಡು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಅಧಿಕಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle BAD = \angle DAC$.

ಇಲ್ಲಿ AD ಯನ್ನು $\angle A$ ನ ಕೋನಾರ್ಥಕ ಎಂದು
ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.



ಅಧ್ಯಾಯ 2

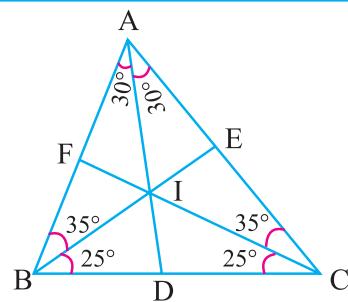
ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಾರ್ಥಕವು ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನವನ್ನು ಅರ್ಥಸೂವ ರೇಖಾವಿಂಡವಾಗಿದೆ.

AD, BE, CF ಗಳು $\triangle ABC$ ಯ ಮೂರು ಕೋನಾರ್ಥಕಗಳಾಗಿರುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಅವು I ನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಶೀಲವಾಗಿವೆ.

ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ತ್ರಿಭುಜದ ಅಂತರ್ಕೇಂದ್ರ ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ.

ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಾರ್ಥಕಗಳು ಸಂಗಮಶೀಲವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಸಂಗಮಬಿಂದುವನ್ನು ಅಂತರ್ಕೇಂದ್ರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

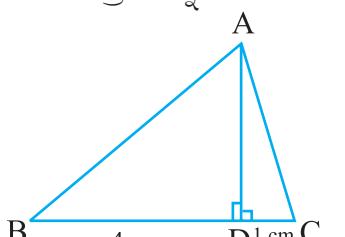


2.2.4 ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿಕೇಂದ್ರ (Circumcentre of a Triangle)

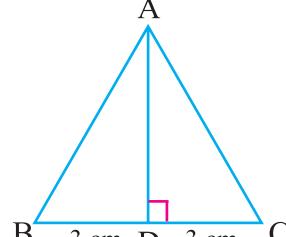
ಹಿಂದಿನ ಶರೀರಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಲಂಬಾರ್ಥಕದ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ.

ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಲಂಬಾರ್ಥಕ ಎಂದರೇನು?

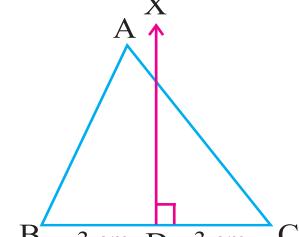
ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಾಮರ್ಶಿಸಿ.



(a)



(b)



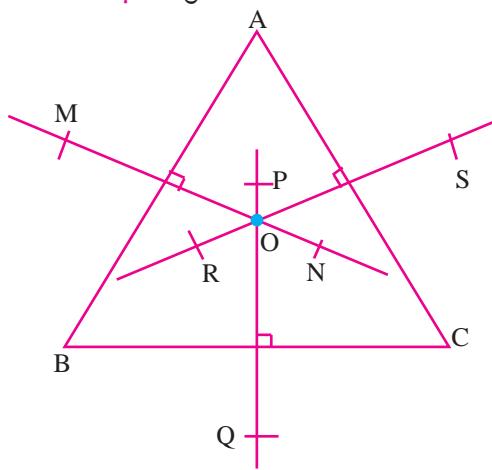
(c)

(a) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AD ಯು A ನಿಂದ BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ BC ಯನ್ನು ಅರ್ಥಸೂಪುಡಿಲ್ಲ.

(b) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AD ಯು BC ಯನ್ನು ಅರ್ಥಸೂತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $BD = DC$ ಮತ್ತು AD ಯು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

(c) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, DX ಯು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು DX ಯು BC ಯನ್ನು ಅರ್ಥಸೂತ್ತದೆ. $BD = DC$ ಆದರೆ DX ಯು 'A' ಶೃಂಗದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತಿಲ್ಲ.

ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುವಿನ ಲಂಬಾರ್ಥಕವು ಬಾಹುವಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಬಾಹುವನ್ನು ಅರ್ಥಸೂವ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.



ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಇಲ್ಲಿ PQ , RS , ಮತ್ತು MN ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ BC , AC ಮತ್ತು AB ಗಳ ಲಂಬಾಧರಕಗಳಾಗಿದ್ದು, O ನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಶೀಲವಾಗಿವೆ. O ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಕೇಂದ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಲಂಬಾಧರಕಗಳು ಸಂಗಮಶೀಲವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಕೇಂದ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

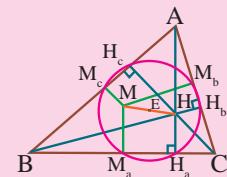
ಫೋಟೋ: (i) ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ, ಪರಿಕೇಂದ್ರ (O), ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ (G) ಮತ್ತು ಲಂಬಕೇಂದ್ರ (H) ಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ
ಮೇಲೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ. ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು **ಯೂಲರ್** (ಅಂಥ್ರೂ) ರೇಖೆ
ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು $OG : GH = 1 : 2$.

(ii) ನಿದ್ರಾಪ್ರವಾಗಿ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಪರಿಕೇಂದ್ರ (O),
ಅಂತಕೇಂದ್ರ (I), ಲಂಬಕೇಂದ್ರ (H) ಮತ್ತು ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ (G) ಗಳು
ಒಂದೇ ಸಾಫದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.



ಯೂಲರ್ (1707-1783)

ಫ್ರಾನ್ಸ್‌ಬಾಣ



2.3 ಪ್ರಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯ (Pythagoras Theorem)

2.3.1 ಪ್ರಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯ

ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, ವಿಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ
ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾಗಿರುತ್ತದೆ.

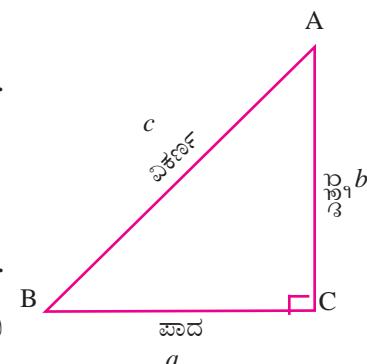
$\angle C = 90^\circ$ ಯೊಂದಿಗೆ ΔABC ಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$BC = a$, $CA = b$ ಮತ್ತು $AB = c$.

ಆಗ, $a^2 + b^2 = c^2$.

ಇದನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಹಲವಾರು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಪ್ರಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ಸರಳವಾದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನಾವು
ನೋಡಲಿದ್ದೇವೆ.

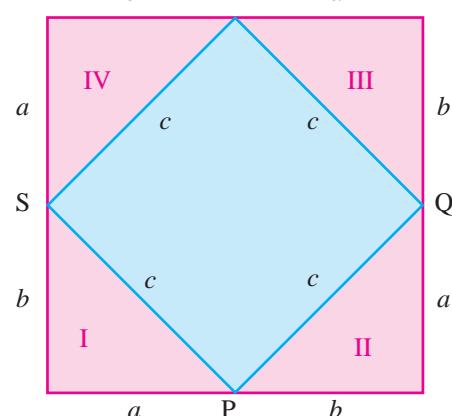


ಈಗ, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, $(a + b)$ ಬಾಹುವಿನ ಒಂದು ಚೌಕ (ವರ್ಗ)ವನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸೋಣ
ಮತ್ತು ರಚನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ ನಾವು ಪ್ರಾಗೋರಸ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ $a^2 + b^2 = c^2$
ಎಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಯಾವುದೇ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ಬಾಹುವಿನ
ವರ್ಗ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

$(a + b)$ ಬಾಹುವಿನ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= (a + b)^2$
ಚಿತ್ರದಿಂದ,

$(a + b)$ ಬಾಹುವಿನ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= (a + b)^2$
 $= I, II, III$ ಮತ್ತು IV ತ್ರಿಭುಜಗಳ
ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ + $PQRS$ ಚೌಕದ
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.



ಅಧ್ಯಾಯ 2

ಅಂದರೆ, $(a + b)^2 = 4$ (ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) + (PQRS ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ)

$$(a + b)^2 = 4\left(\frac{1}{2} \times a \times b\right) + c^2$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

ಇದರಿಂದ ಪ್ರೇರಣಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಾವು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಕೈಚುಪಟಕ ಪ್ರೇರಣಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ

$$\angle C = 90^\circ, AB = 5 \text{ ಸೆ.ಮೀ.},$$

$$AC = 4 \text{ ಸೆ.ಮೀ. } \text{ಮತ್ತು } BC = 3 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಆಗುವಂತೆ ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈ ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ ಚೌಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಈ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಒಂದು ಚಕ್ರದಲ್ಲಿ ಸೆರ್ಟಿಫಿಕೇಟ ವಿರುವ ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ.

ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎಣಿಕೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ಪ್ರೇರಣಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

$$\text{ABPQ ನಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} = 25$$

$$\text{BCRS ನಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} = 9$$

$$\text{ACMN ನಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} = 16$$

$$\therefore \text{ABPQ ನಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} = \text{BCRS ನಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} + \text{ACMN ನಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.}$$

ಪ್ರೇರಣಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ತೃಪ್ತಪಡಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರೇರಣಗೊರಸನ ತ್ರಿಖಳಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.1

$\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 18$ ಸೆ.ಮೀ., $BC = 24$ ಸೆ.ಮೀ. ಆದರೆ, AC ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

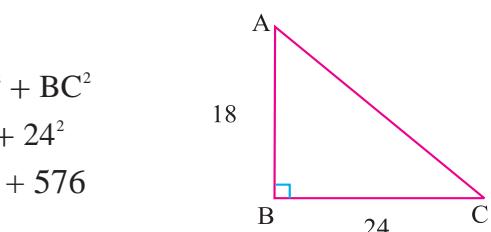
ಪರಿಹಾರ

$$\begin{aligned} \text{ಪ್ರೇರಣಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, } AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 18^2 + 24^2 \\ &= 324 + 576 \\ &= 900 \end{aligned}$$

$$\therefore AC = \sqrt{900} = 30 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಉದಾಹರಣೆ 2.2

ಒಂದು ಚೌಕವು 40 ಸೆ.ಮೀ. ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಕಣಕಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು?



ಪರಿಹಾರ

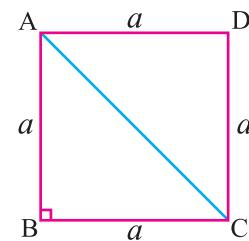
ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವು ' a ' ಆಗಿರಲಿ. AC ಯು ಒಂದು ಕರ್ಣ.

ABCD ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆ $= 4a$ ಮೂಲಮಾನಗಳು

$$4a = 40\text{cm} \quad [\text{ಕೊಟ್ಟಿದೆ}]$$

$$a = \frac{40}{4} = 10 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಚೌಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಕೋನವು 90° ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.



$$\begin{aligned}\Delta ABC \text{ ಯಲ್ಲಿ}, AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 10^2 + 10^2 = 100 + 100 \\ &= 200 \\ \therefore AC &= \sqrt{200} \\ &= \sqrt{2 \times 100} = 10\sqrt{2} \\ &= 10 \times 1.414 = 14.14 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}\end{aligned}$$

ಕರ್ಣ AC = ಕರ್ಣ BD

ಇದರಿಂದ, ಕರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ $= 14.14 + 14.14 = 28.28 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$

ಉದಾಹರಣೆ 2.3

ಚಿತ್ರದಿಂದ $PQ = 25 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$, $PR = 17 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$

ಮತ್ತು $PT = 15 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$ ಆಗಿರುವ $\triangle PQR$ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ

PT ಯು ಜೈಸ್ನತ್ಯವಾಗಿದೆ. $QR = x \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$ ಆದರೆ,

x ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಚಿತ್ರದಿಂದ, $QR = QT + TR$.

QT ಮತ್ತು TR ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು:

$\triangle PTQ$ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$\angle PTQ = 90^\circ \quad [PT \text{ ಯು ಜೈಸ್ನತ್ಯ}]$$

ಪ್ರಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, $PQ^2 = PT^2 + QT^2 \quad \therefore PQ^2 - PT^2 = QT^2$

$$\therefore QT^2 = 25^2 - 15^2 = 625 - 225 = 400$$

$$QT = \sqrt{400} = 20 \text{ ಸೆ.ಮೀ.} \quad \dots\dots (1)$$

ಹೀಗೆಯೇ, $\triangle PTR$ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

ಪ್ರಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, $PR^2 = PT^2 + TR^2$

$$\therefore TR^2 = PR^2 - PT^2$$

$$= 17^2 - 15^2$$

$$= 289 - 225 = 64$$

$$TR = \sqrt{64} = 8 \text{ ಸೆ.ಮೀ.} \quad \dots\dots (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$$QR = QT + TR = 20 + 8 = 28 \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಅಧ್ಯಾಯ 2

ಉದಾಹರಣೆ 2.4

ಒಂದು ಆಯತಕಾರ ಮೈದಾನದ ಅಳತೆಯು 40 ಮೀ. ಮತ್ತು 30 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಮೈದಾನದ ಕೊಂಡ ಮೂಲಕ ನಡೆದು ಹೋದರೆ ಎಪ್ಪು ದೂರವನ್ನು ಉಳಿಸಬಹುದು?

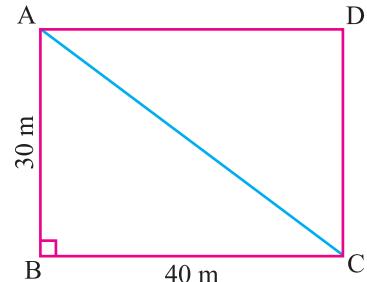
ಪರಿಹಾರ

ದತ್ತ: ABCD ಯು ಆಯತಕಾರದ ಮೈದಾನ. $\angle A = 40$ ಮೀ., $\angle B = 90^\circ$

ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 \\ &= 2500 \\ \therefore AC &= \sqrt{2500} = 50 \text{ ಮೀ.} \end{aligned}$$



B ನ ಮೂಲಕವಾಗಿ A ನಿಂದ C ವರೆಗೆ ಇರುವ ದೂರ

$$= 30 + 40 = 70 \text{ ಮೀ.}$$

ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದ ದೂರ = $70 - 50 = 20$ ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

- ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.
 - ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯದೇಶಿಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವು

(A) ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ (B) ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ (C) ಲಂಬಕೇಂದ್ರ (D) ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ
 - ತ್ರಿಭುಜದ ಜೀನ್ಯತ್ವಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವು

(A) ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ (B) ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ (C) ಲಂಬಕೇಂದ್ರ (D) ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ
 - ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಾರ್ಥಕಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವು

(A) ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ (B) ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ (C) ಲಂಬಕೇಂದ್ರ (D) ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ
 - ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬಾರ್ಥಕಗಳ ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವು

(A) ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ (B) ಪರಿಕೇಂದ್ರ (C) ಲಂಬಕೇಂದ್ರ (D) ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ
- ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಭಾಂತ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $AB = AC$ ಮತ್ತು $\angle B = 65^\circ$ ಆಗಿದೆ. ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹು ಯಾವುದು?
- PQR ತ್ರಿಭುಜವು P ನಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. $PQ = 10$ ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು $PR = 24$ ಸೆ.ಮೀ. ಆದರೆ, QR ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- $AB = 25$ ಸೆ.ಮೀ., $BC = 24$ ಸೆ.ಮೀ., $AC = 7$ ಸೆ.ಮೀ. ಎಂಬವು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳಾಗಬಹುದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.
- PQR ತ್ರಿಭುಜದ Q ಮತ್ತು R ಕೋನಗಳು 25° ಮತ್ತು 65° ಆಗಿವೆ. ΔPQR ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗುವುದೇ? ಇದರೊಂದಿಗೆ PQ ಯು 4 ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು PR ಯು 3 ಸೆ.ಮೀ. ಆದರೆ, QR ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 15 ಮೀ. ಉದ್ದದ ಏಣಿಯನ್ನು ನೆಲದಿಂದ x ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ಗೋಡೆಗೆ ಓರೆಯಾಗಿಟ್ಟಾಗ 12 ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಿಟಕಿಯನ್ನು ಮುಟ್ಟಿತ್ತದೆ. x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 10 ಸೆ.ಮೀ. ಬಾಹುವಿನ ಸಮಭಾಂತ ತ್ರಿಭುಜದ ಜೀನ್ಯತ್ವ (ಎತ್ತರ)ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 12, 5 ಮತ್ತು 13 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ತ್ರಿಖಳಾಗಿವೆಯೇ?

9. ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚುವವನೊಬ್ಬನು ನೆಲದಿಂದ 16 ಅಡಿ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡನೇ ಅಂತಸ್ಯಿನ ಕಿಟಕಿಯ ಪಾದವನ್ನು ಮುಟ್ಟುವಂತೆ ಒಂದು ಏಣಿಯನ್ನು ಶಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ. ಏಣಿಯ ಪಾದವು ಮನೆಯಿಂದ 12 ಅಡಿ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಅವನು ಬಣ್ಣವನ್ನು ಮಿಶ್ರಣ ಮಾಡುವಾಗ ಪಕ್ಕದ ಮನೆಯವರ ನಾಯಿಯು ಏಣಿಯನ್ನು ನೂಕಿದಾಗ ಏಣಿಯ ಪಾದವು ಮನೆಯಿಂದ ಇನ್ನೂ 2 ಅಡಿ ದೂರಕ್ಕೆ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆಗ, ಏಣಿಯು ಮನೆಯ ಎಪ್ಪು ಎತ್ತರವನ್ನು ಮುಟ್ಟುತ್ತದೆ?



2.4 ವೃತ್ತಗಳು (Circles)

ನಿಮಗೆ ಕೆಳಗಿನ ವಸ್ತುಗಳ ಪರಿಚಯವಿದೆ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಆಕಾರವನ್ನು ನೀವು ಹೇಳಬಹುದೇ?

- ಸೈಕಲಿನ ಚಕ್ರ
- ನಮ್ಮ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಲಾಂಭನದಲ್ಲಿರುವ ಅರ್ಜೋಕ ಚಕ್ರ.
- ಮೂರ್ಖ ಚಂಡ್ರ

ಖಂಡಿತವಾಗಿ, ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವು ವೃತ್ತವಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರ ದೂರದಲ್ಲಿ P ಬಿಂದುವು ಚಲಿಸಿದಾಗ ವೃತ್ತವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ (Definition of Circle)

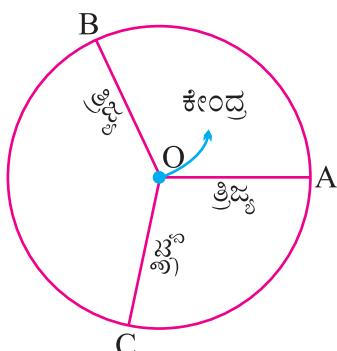
ವೃತ್ತವು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರವಾದ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವಾಗಿದೆ.

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವನ್ನು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಸ್ಥಿರ ದೂರವನ್ನು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 'O' ಎಂಬುದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು OA, OB, OC ಗಳು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿವೆ.

$$\text{ಇಲ್ಲಿ, } OA = OB = OC = r$$



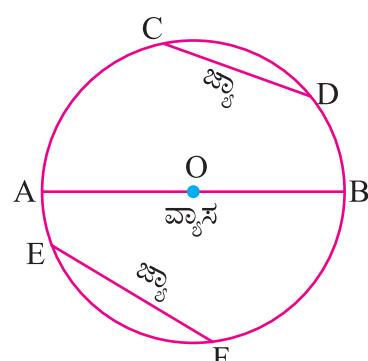
ಮೂಡನೆ: ವೃತ್ತದ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಜ್ಯಾ (Chord)

ಜ್ಯಾವು ಅದರ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡವಾಗಿದೆ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, CD, AB ಮತ್ತು EF ಗಳು ಜ್ಯಾಗಳಾಗಿವೆ.

ಇಲ್ಲಿ, AB ಯು O ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾಡುಹೋಗುವ ವಿಶೇಷವಾದ ಜ್ಯಾ ಆಗಿದೆ.



ಅಧ್ಯಾಯ 2

ವ್ಯಾಸ (Diameter)

ವ್ಯಾಸವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಜ್ಯಾ ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು ವೃತ್ತದ ದೊಡ್ಡ ಜ್ಯಾ ಆಗಿದೆ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AOB ಯು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ.

O ಎಂಬುದು AB ಯ ಮ್ಯಾಂಬಿಂದು ಮತ್ತು $OA = OB =$ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ.

ಇದರಿಂದ, $\text{ವ್ಯಾಸ} = 2 \times \text{ತ್ರಿಜ್ಯ}$ (ಅಥವಾ) $\text{ತ್ರಿಜ್ಯ} = (\text{ವ್ಯಾಸ}) \div 2$

ಮೂಲಕ : (i) ವೃತ್ತದ ಪ್ರತಿ ವ್ಯಾಸದ ಮ್ಯಾಂಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ.

(ii) ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸಗಳು ಸಂಗಮಶೀಲ (ಪಕಬಿಂದುಸ್ಥ) ಆಗಿವೆ ಮತ್ತು ಸಂಗಮ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತದ ಭೇದಕ (Secant of a Circle)

ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುವ (ಕತ್ತರಿಸುವ) ರೇಖೆಯನ್ನು ವೃತ್ತದ ಭೇದಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AB ರೇಖೆಯು ಭೇದಕವಾಗಿದೆ.

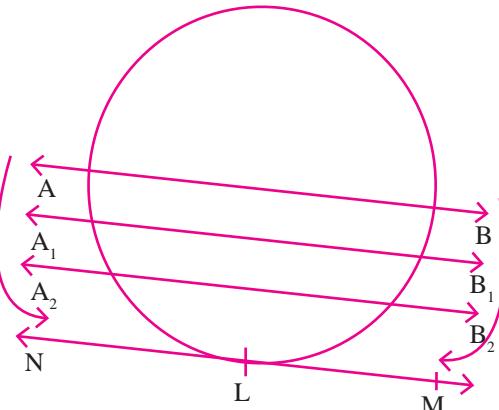
ಇದು ವೃತ್ತವನ್ನು A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ, AB ಭೇದಕವನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಮುಖಾಗಿ ಚಲಿಸೋಣ. ಇದರ ಹೊಸ ಸ್ಥಾನಗಳು $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots$ ಇತ್ಯಾದಿ ಆಗಿವೆ.

AB ಭೇದಕವು ಕೆಳಗೆ ಚಲಿಸುವಾಗ, A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, A ಮತ್ತು B ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಕ್ರಮೇಣವಾಗಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ AB ಭೇದಕವು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು L ನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ, LM ರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಇದು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.



ಸ್ಪರ್ಶಕ (Tangent)

ಸ್ಪರ್ಶಕವು ವೃತ್ತವನ್ನು ನಿರ್ವಿರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವೃತ್ತದ ಕಂಸ (Arc of a Circle)

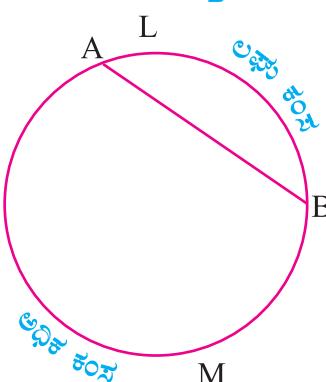
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AB ಯು ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಆಗಿದೆ. AB ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ALB ಮತ್ತು AMB ವರ್ತ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಕಂಸಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

\widehat{AMB} ಕಂಸಗಳನ್ನು ' ' ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

\widehat{ALB} ಕಂಸವು ಲಘು ಕಂಸವಾಗಿದೆ.

AMB ದೊಡ್ಡ ಕಂಸವು ಅಧಿಕ ಕಂಸವಾಗಿದೆ.

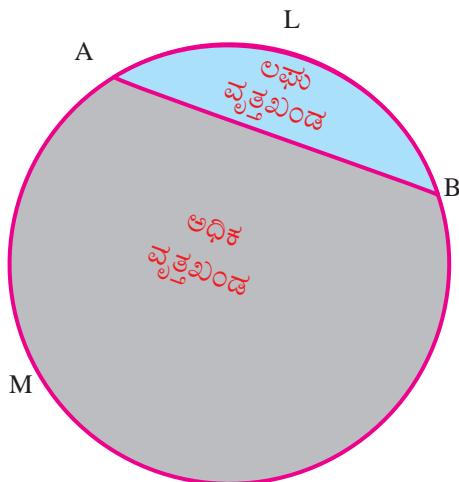


ವೃತ್ತವಿಂಡ (Segment of a Circle)

ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾಪು ವೃತ್ತೀಯ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ಭಾಗವನ್ನು ವೃತ್ತವಿಂಡ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಲಘು ಕಂಸವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ವೃತ್ತವಿಂಡವನ್ನು **ಲಘು ವೃತ್ತವಿಂಡ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

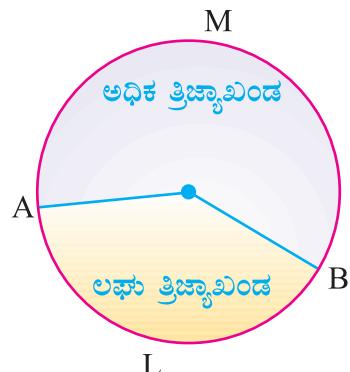
ಅಧಿಕ ಕಂಸವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ವೃತ್ತವಿಂಡವನ್ನು **ಅಧಿಕ ವೃತ್ತವಿಂಡ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.



ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡ (Sector of a Circle)

ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಕಂಸ ಮತ್ತು ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತೀಯ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

OALB ಚಿಕ್ಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡವನ್ನು **ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
OAMB ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡವನ್ನು **ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.



ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

- ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.
 - ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಪರಿಧಿಗಿರುವ ದೂರವು _____ ಆಗಿದೆ.
(A) ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡ (B) ವೃತ್ತವಿಂಡ (C) ವ್ಯಾಸಗಳು (D) ತ್ರಿಜ್ಯ
 - ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸದ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವು _____ ಆಗಿದೆ.
(A) $\text{ತ್ರಿಜ್ಯ} = 2 \times \text{ವ್ಯಾಸ}$ (B) $\text{ತ್ರಿಜ್ಯ} = \text{ವ್ಯಾಸ} + 2$
(C) $\text{ವ್ಯಾಸ} = \text{ತ್ರಿಜ್ಯ} + 2$ (D) $\text{ವ್ಯಾಸ} = 2 (\text{ತ್ರಿಜ್ಯ})$
 - ವೃತ್ತದ ದೊಡ್ಡ ಜ್ಯಾಪು _____ ಆಗಿದೆ.
(A) ತ್ರಿಜ್ಯ (B) ಫೇದಕ (C) ವ್ಯಾಸ (D) ಸ್ವರ್ಚಕ
- ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳ ಮೊತ್ತವು 200 ಮಿ.ಮೀ. ಆದರೆ, ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಸೆಂ.ಮೀ. ಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ವೃತ್ತವಿಂಡ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖಾನಿಸಿರಿ.
- ವೃತ್ತದ ಕಂಸವನ್ನು ವ್ಯಾಖಾನಿಸಿರಿ.
- ವೃತ್ತದ ಸ್ವರ್ಚಕ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಫೇದಕಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖಾನಿಸಿರಿ.



Concept Summary

- ❖ ನುರುತ್ತಕೆಂದ್ರ : ಮೂರು ಮುಢ್ಯ ರೇಖೆಗಳ ಸಂಗಮ ಜಿಂದು.
- ❖ ಲಂಬಕೆಂದ್ರ : ಮೂರು ಶಿಷ್ಟಾಕ್ಷರಗಳ ಸಂಗಮ ಜಿಂದು.
- ❖ ಅಂತಃಕೆಂದ್ರ : ಮೂರು ಕೊನ್ನಾಧರ್ಡಕರೆಗಳ ಸಂಗಮ ಜಿಂದು.
- ❖ ಪರಕೆಂದ್ರ : ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಲಂಬಾಧರ್ಡಕರೆಗಳ ಸಂಗಮ ಜಿಂದು.
- ❖ ವೃತ್ತ : ವೃತ್ತವು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಜಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಜಿಂದುಗಳ ಗಣವಾಗಿದೆ.
- ❖ ಜ್ಯಾ : ಜ್ಯಾವು ಅದರ ಅಂತ್ಯ ಜಿಂದುಗಳ ವೃತ್ತದ ಮೇಲರುವ ರೇಖಾಳಂಡವಾಗಿದೆ.
- ❖ ವ್ಯಾನ : ವ್ಯಾನವು ವೃತ್ತದ ಕೆಂದ್ರದ ಮೂಲಕವಾಗಿ ಹಾದುಹೊಳಿಸುವ ಜ್ಯಾ ಆಗಿದೆ.
- ❖ ಭೀದಕ : ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೊಳಿಸುವ ಮತ್ತು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಜಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಭೀದಿನುವ (ಕತ್ತಲನುವ) ರೇಖೆಯನ್ನು ವೃತ್ತದ ಭೀದಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
- ❖ ಸ್ವರ್ಶಕ : ಸ್ವರ್ಶಕವು ವೃತ್ತವನ್ನು ನಿಲರುವಾಗಿ ಒಂದು ಜಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಭಿನುವ ಒಂದು ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ನಂಭಿನುವ ಜಿಂದುವನ್ನು ಸ್ವರ್ಶಜಿಂದು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- ❖ ವೃತ್ತಲಂಡ : ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತೀಯ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಭಾಗಗಳನ್ನು ವೃತ್ತಲಂಡ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
- ❖ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಳಂಡ : ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಕಂಂಡ ಮತ್ತು ಅಂತ್ಯ ಜಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತೀಯ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಳಂಡ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಗಣಿತ ನಂಖ ಚಟುವಟಿಕೆ

ಪ್ರೇರಣಾಗೋರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳು

$m > n ; m , n \in \mathbb{N}$ ಆಗಿರುವ $m^2 + n^2, m^2 - n^2, 2mn$ ಸಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ನಾವು ಹಲವಾರು ಪ್ರೇರಣಾಗೋರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$m = 2 \text{ ಮತ್ತು } n = 1 \text{ ಆದರೆ, } m^2 + n^2 = 2^2 + 1^2 = 5, m^2 - n^2 = 2^2 - 1^2 = 3, 2mn = 2 \times 2 \times 1 = 4.$$

5, 3, 4 ಎಂಬವು ಪ್ರೇರಣಾಗೋರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳಾಗಿವೆ.

ಪ್ರೇರಣಾಗೋರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳ ಅಪವರ್ತ್ಯಾಗಳು ಸಹ ಪ್ರೇರಣಾಗೋರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ. (5, 3, 4) ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಾಗಳು: (10, 6, 8), (15, 9, 12), (20, 12, 16), ... ಗಳು ಸಹ ಪ್ರೇರಣಾಗೋರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳಾಗಿವೆ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರೇರಣಾಗೋರಸನ ತ್ರಿವಳಿಗಳನ್ನು ನಿಂಬು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಾ?

ದತ್ತಾಂಶ ನಿರ್ವಹಣೆ

- 3.1 ಪೀಠಿಕೆ
- 3.2 ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕದ ರಚನೆಯನ್ನು ಸ್ಥಿರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲುವುದು
- 3.3 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯತಚಿಕ್ರಿ (Histogram) ಮತ್ತು ಆವಶಯಾಂಕ ಬಹುಭಿಜಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು
- 3.4 ಸರಳವಾದ ಪೈ-ನಕ್ಕೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವುದು
- 3.5 ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳು



ಆರ್.ಎ. ಫಿಷರ್

[17 ಫೆಬ್ರವರಿ, 1890 –
29 ಜುಲೈ, 1962]

ಫಿಷರ್ ರವರು ದೋಷಗಳ

ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಬಗ್ಗೆ
ಅಸ್ತಿ ಮೊಂದಿದ್ದರಿಂದ
ಕೊನೆಗೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ
ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೋಡಿಸಲು
ನಾದಿಯಾಯಿತು.
ಇವರು 1915 ಮತ್ತು
1919 ರ ನಡುವೆ ಗಣಿತ

ಮತ್ತು ಭೌತಿಕಶಾಸ್ತ್ರ
ಶಿಕ್ಷಕರಾಗಿದ್ದರು.

ಇವರು ಪ್ರಸರಣ
ವಿಚಳನೆಯ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ
ಮಾಡುವುದರಿಂದ
ಮತ್ತು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ
ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು
ಪರಿಚಯಿಸುವುದರ
ಮೂಲಕ.

ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿಲ್ಲಾ ಪ್ರಸ್ತುತ
ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ
ಕ್ರಮಗಳಿಂದ ಪ್ರಯೋಗಗಳ
ರಚನೆಯನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ
ಮಾಡಿದರು. ಇವರನ್ನು
“ಆಧುನಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ
ಫಿತಾಮುಹ” ಎಂದು
ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

3.1 ಪೀಠಿಕೆ (Introduction)

ಪ್ರತಿನಿಶ್ಯ ನಾವು ಏವಿಧ ರೀತಿಯ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ತ ಪ್ರತಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ಇನ್ನಿತರೆ ಸಂಪರ್ಕ ಮಾಡುವುದು ಮೂಲಕ ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಮಾಹಿತಿಗಳು ನಮ್ಮ ರಾಷ್ಟ್ರದಲ್ಲಿ ಆಹಾರ ಉತ್ಪಾದನೆ, ಪ್ರಪಂಚದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ, ಏವಿಧ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ರಘ್ಯ ಮತ್ತು ಆಮದು, ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಶಾಲೆಗಳನ್ನು ತೊರೆದ ಮಕ್ಕಳು, ಅಪಘಾತಗಳಿಂದಾದ ಸಾಖ್ಯಗಳು, ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಆಗಿರಬಹುದು.

ಈ ಎಲ್ಲಾ ಮಾಹಿತಿಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು **ದತ್ತಾಂಶ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ನಿರ್ಧಾರಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳಲು ನಮಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ನಾಗರೀಕನ ಜೀವನದ ಹಾದಿಯಲ್ಲಿ ಮಹತ್ವದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂತಹ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಂದ ಸರಿಯಾದ ಮತ್ತು ನಿಖಿಲವಾದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಲುವುದು ಎಂಬುದು ಬಹಳ ಮುಖ್ಯವಾದುದು.

ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಓದುವುದಕ್ಕೆ, ಅಥವಾಡಿಕೊಳ್ಳಲುವುದಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತವಾಗಿಲ್ಲದಿರಬಹುದು. ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಏವಿಧ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬೇಕಾದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ನಿರ್ವಹಿಸಬೇಕು. ಸಾಮಾನ್ಯ ಮನವು ಅಧ್ಯೇತ್ಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಮತ್ತು ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತಿರಬೇಕು.

3.2 ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕದ ರಚನೆಯನ್ನು ಸೃಜಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು

(Recalling the Formation of Frequency Table)

ನಾವು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲಿತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಇದನ್ನು ಸೃಜಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

3.2.1 ಅವೀಕ್ಷತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

(Formation of frequency table for an ungrouped data)

ಉದಾಹರಣೆ 3.1

ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

15, 17, 17, 20, 15, 18, 16, 25, 16, 15,

16, 18, 20, 28, 30, 27, 18, 18, 20, 25,

16, 16, 20, 28, 15, 18, 20, 20, 20, 25.

ಪರಿಷಾರ

ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಸಂಖ್ಯೆ (x)	ತಾಳಿ ಗುರುತು	ಆವೃತ್ತಿ (f)
15		4
16		5
17		2
18		5
20		7
25		3
27		1
28		2
30		1
	ಮೊತ್ತ	30

3.2.2 ವರ್ಗಿಕ್ಷತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

(Formation of frequency table for a grouped data)

ಉದಾಹರಣೆ 3.2

50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಅಂಕ 100ಕ್ಕೆ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

43, 88, 25, 93, 68, 81, 29, 41, 45, 87, 34, 50, 61, 75, 51, 96, 20, 13, 18, 35, 25, 77, 62, 98, 47, 36, 15, 40, 9, 25, 39, 60, 37, 50, 19, 86, 42, 29, 32, 61, 45, 68, 41, 87, 61, 44, 67, 30, 54, 8.

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ವರ್ಗಾಂಶರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಟ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

$$\text{ಮೌಲ್ಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ} = 50$$

$$\text{ಘಟ್ಟಿ} = \text{ಗರಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯ} - \text{ಕನಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯ}$$

$$= 98 - 8 = 90$$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು 10 ವರ್ಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿರಿ.

$$\therefore \text{ವರ್ಗಾಂಶರದ ಉದ್ದ} = \frac{\text{ಘಟ್ಟಿ}}{\text{ವರ್ಗಾಂಶರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$= \frac{90}{10} = 9$$

50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಟ್ಟಕವು ಕಳಗಿನಂತಿದೆ.

ವರ್ಗಾಂಶರ (C.I)	ತಾಳಿ ಸುರುತು	ಆವೃತ್ತಿ (f)
0 - 10		2
10 - 20		4
20 - 30		6
30 - 40		7
40 - 50		9
50 - 60		4
60 - 70		8
70 - 80		2
80 - 90		5
90 - 100		3
	ಮೊತ್ತ	50

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವರ್ಗೀಕರಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಕೋಟ್ಟಿಕರಿಸಬಹುದು.

ವರ್ಗಾಂಶ (C.I)	0-10	10-20	20- 30	30-40	40- 50	50- 60	60- 70	70- 80	80-90	90-100
ಆವೃತ್ತಿ (f)	2	4	6	7	9	4	8	2	5	3

3.3 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯಂತರಿತ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು (Drawing Histogram and Frequency Polygon for Grouped Data)

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಚಿತ್ರಗಳ ಅಥವಾ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇವುಗಳನ್ನು “ನಕ್ಷೆಗಳು” ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ಓದಲು ಆಸಕ್ತಿಯುತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ, ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಉಳಿತಾಯವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅಧ್ಯೋಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಹಲವಾರು ರೀತಿಗಳಿವೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಏರಡು ವಿಧಿಗಳ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ.

- (i) ಆಯಂತರಿತ ಮತ್ತು
- (ii) ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ

3.3.1 ಆಯಂತರಿತ (Histogram)

ನಿರಂತರ ಆವೃತ್ತಿ ವಿಶಿಷ್ಟಾಂಶದಲ್ಲಿ ಇವುಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ರೂಪದ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು **ಆಯಂತರಿತ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಆಯಂತರಿತದಲ್ಲಿ, ಸ್ಥಂಭಗಳನ್ನು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಅಕ್ಷಪಕ್ಷದ ಸ್ಥಂಭಗಳ ನಡುವೆ ಸ್ಥಳಾವಕಾಶವಿಲ್ಲದಂತೆ ರಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಆಯಂತರಿತದಲ್ಲಿ ವಿಶಿಷ್ಟಾಂಶದಲ್ಲಿ ಆಯಂತರಿತಗಳನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆಯಂತರಿತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಆವೃತ್ತಿಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

3.3.1 (a) ನಿರಂತರ ಆವೃತ್ತಿ ವಿಶಿಷ್ಟಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆಯಂತರಿತವನ್ನು ರಚಿಸುವುದೆ

(Drawing a histogram for continuous frequency distribution)

ಕಾರ್ಯವಿಧಾನ:

- ಹಂತ 1 : ದತ್ತಾಂಶವು ನಿರಂತರವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ನಿರಂತರ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.
- ಹಂತ 2 : X-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಏಕರೂಪದ ಅಳತೆಯ ಮೇಲೆ ವರ್ಗಾಂಶಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.
- ಹಂತ 3 : Y-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಏಕರೂಪದ ಅಳತೆಯ ಮೇಲೆ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.
- ಹಂತ 4 : ವರ್ಗಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಾದವಾಗಿ ಮತ್ತು ಅನುಗುಣವಾದ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಎತ್ತರವಾಗಿರುವಂತೆ ಆಯಂತರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ಆಯಂತರಿತವನ್ನು ಎಳೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.3

100 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪರೀಕ್ಷೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಟ್ಟಕ್ಕೆ ಆಯಂತರಿತವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ಅಂಕಗಳು	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	5	10	15	20	25	12	8	5

ಪರಿಹಾರ

ಎಲ್ಲ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು 10 ಅಂಕಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಮ ಉದ್ದೇಶನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. X-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಈ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು, Y- ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರಿ. ಆಯಾತಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 3.1

ಗಮನಿಸಿ: ಮೇಲಿನ ರೇಖಾಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಸ್ಥಂಭಾಲೇಖಗಳನ್ನು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಆಯಾತಗಳ ಉದ್ದೇಶ (ಅತ್ಯರವು) ಅನುಗುಣವಾದ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿವೆ. ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಸಮನಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಸ್ಥಂಭಾಲೇಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಅನುಗುಣವಾದ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

3.3.1 (b) ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ನಿರಂತರವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವಾಗ ಆಯಾತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸುವಿಕೆ (Drawing a histogram when class intervals are not continuous)

ಉದಾಹರಣೆ 3.4

ಒಂದು ಅರಣ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಮರಗಳ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಆಯಾತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಎತ್ತರಗಳು (ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
ಮರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	10	15	25	30	45	50	35	20

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಪರಿಹಾರ

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ಕೊಟ್ಟರುವ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ನಿರಂತರವಾಗಿರದ (ಸಂಪೂರ್ಣ ವಿಧಾನ) ರೂಪದಲ್ಲಿವೆ. ಇವುಗಳಿರುವಂತೆಯೇ ಆಯತಚಿಕ್ಕವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ನಡುವೆ ಅಂತರ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆಯತಚಿಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಂಭಾಲೇವಿಗಳು ಯಾವುದೇ ಅಂತರವಿಲ್ಲದೆ ನಿರಂತರವಾಗಿರುತ್ತಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಇದಕ್ಕೆ ನಮಗೆ ಸರಿಪಡಿಸುವ ಅಪವರ್ತನವು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

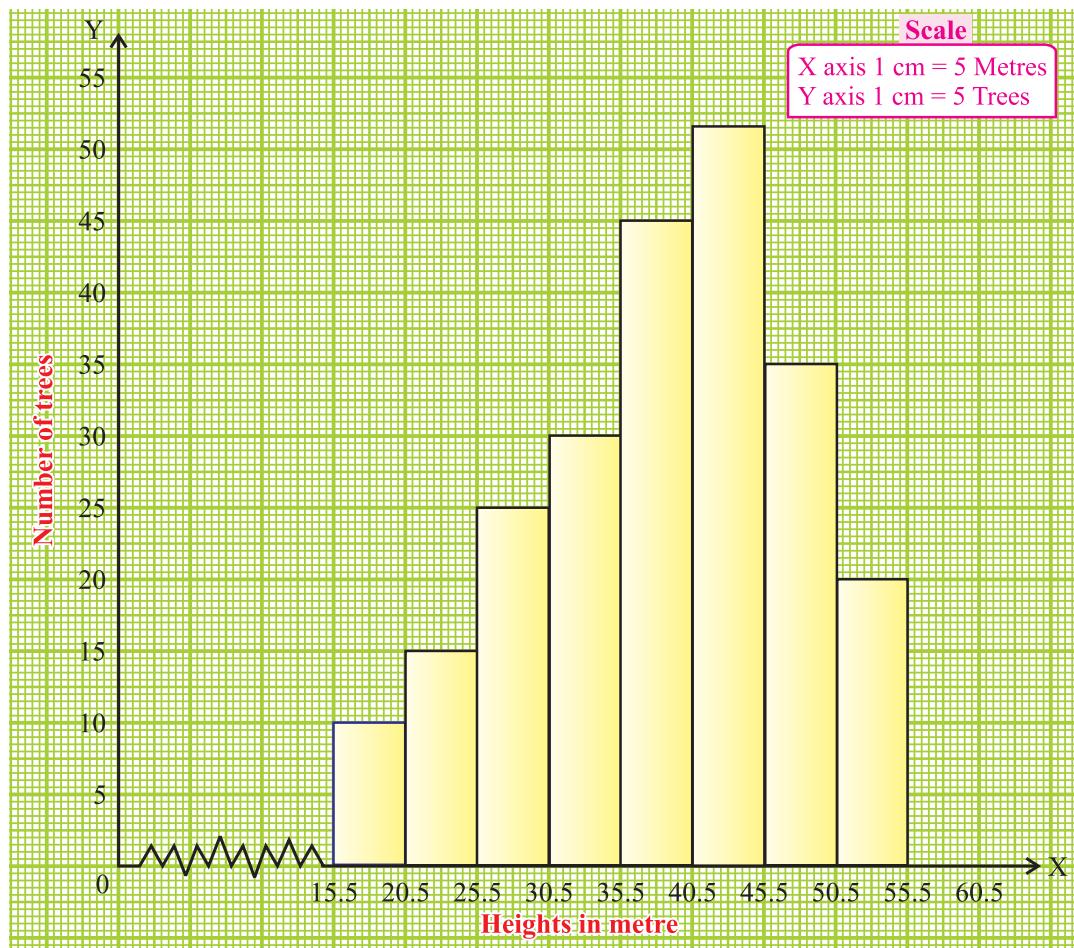
$$\text{ಸರಿಪಡಿಸುವ ಅಪವರ್ತನ} = \frac{1}{2} [\text{ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ} - \text{ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮೀತಿ}]$$

$$= \frac{1}{2} (21 - 20) = 0.5$$

ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿ ಕೆಳಮಿತಿಯಿಂದ 0.5 ನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಿಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಮೇಲ್ಮೀತಿಗಳಿಗೆ 0.5 ನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಕೊಟ್ಟರುವ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಂತೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಎತ್ತರಗಳು (ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	15.5-20.5	20.5-25.5	25.5-30.5	30.5-35.5	35.5-40.5	40.5-45.5	45.5-50.5	50.5-55.5
ಮರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	10	15	25	30	45	50	35	20

ಈಗ ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ನಿರಂತರ ಆವೃತ್ತಿಯ ವಿಶರಣೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆಯತಚಿಕ್ಕವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 3.2

ಗಮನಿಸಿ: ಆಯತಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ (ಜಿತ್ರ 3.2) X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮೊದಲನೇ ಚೆಲೆಯು 15.5 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು 15.5 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬೇಕೆ ಹೋರಬೇ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದಲ್ಲಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ವಿರಾಮವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



ನಿಮಗೆ ದೊತ್ತಿಲ್ಲ?

ಪ್ರಾರಂಭವನ್ನು ಜಿಗ್-ಜಾಗ್ ವಕ್ರೇಖೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

3.3.2 ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ (Frequency polygon)

ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯು ಆವೃತ್ತಿ ವಿಶರಣೆಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಇನ್ವೋಂದು ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ.

ಕೊಟ್ಟರುವ ನಿರಂತರ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಪಾಶ್ಚಾಯ ಆಯತಗಳ ಮೇಲ್ಬಾಗದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ಈ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು **ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ** ರೇಖಾಖಂಡದಿಂದ ಸೇರಿಸಿದರೆ, ನಾವು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು **ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆವೃತ್ತಿಯ ಕೆಳವರ್ಗ ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತಿಯ ಮೇಲ್ಗಳವನ್ನು ಉಂಟಾಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಲ್ಪಡಿರಿಂದ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ತುದಿಗಳನ್ನು ತಳಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ತರಲಾಗಿ ರೂಪಿಸಿಕೊಂಡಿರಿ.

ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದು.

- ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು
- ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಲೇ

3.3.2 (a) ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವಿಕೆ

(To draw frequency polygon using histogram)

ಕಾರ್ಯವಿಧಾನ:

- : ಕೊಟ್ಟರುವ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ ಆವೃತ್ತಿ ವಿಶರಣೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
- : ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಂದ ಆಯತಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಪಾಶ್ಚಾಯ ಆಯತಗಳ ಮೇಲ್ಬಾಗದಲ್ಲಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.
- : ಸೊನ್ನ ಆವೃತ್ತಿಯ ಎರಡು ಉಂಟಾಗಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು, ಒಂದನ್ನು ಮೊದಲ ಸ್ಥಂಬದ ಎಡಭಾಗದ ಪಾಶ್ಚಾಯದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಇನ್ವೋಂದನ್ನು ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಂಬದ ಬಲಭಾಗದ ಪಾಶ್ಚಾಯದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಿರಿ. ಈ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು **ಉಂಟಾಗಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
- : ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಪಾಶ್ಚಾಯರುವ ಉಂಟಾಗಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಮೊಣಿಗೊಳಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.5

ಕೆಳಗಿನ ವಿಶರಣೆಗೆ ಆಯತಚಿತ್ರಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

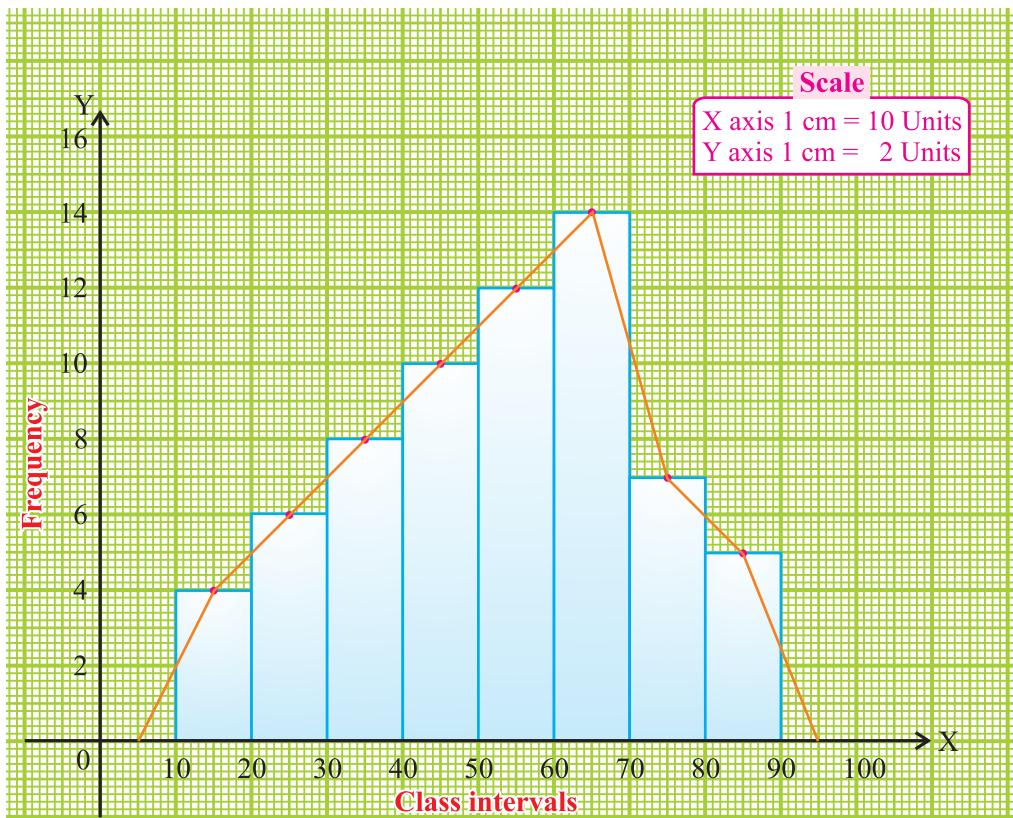
ವರ್ಗಾಂತರ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
ಆವೃತ್ತಿ	4	6	8	10	12	14	7	5

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಪರಿಹಾರ

ಚಿತ್ರ 3.3 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಸೂಕ್ತ ಅಳತೆಯೊಂದಿಗೆ X- ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ವರ್ಗಾಂಶಗಳನ್ನು (class-intervals) ಮತ್ತು Y- ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು (frequencies) ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಕ್ರಮಾನುಗತ ಆಯತಗಳ ಮೇಲ್ಮೈಗಳಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. 0 -10 ಮತ್ತು 90 -100 ಎಂದು ಉಂಟಿಸಿರುವ ವರ್ಗಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಹ ನಾವು ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಳತೆಪಟ್ಟಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. ಒಟ್ಟಾರ್ಥಿಯ ಶುದ್ಧಿಕ್ಕಾಗಿ ಮತ್ತು ಅಳತೆಯ ಶುದ್ಧಿಕ್ಕಾಗಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ 3.3 ನ್ನು ಪರಾಮರ್ಶಿಸಿ)



ಚಿತ್ರ 3.3

ಉದಾಹರಣೆ 3.6

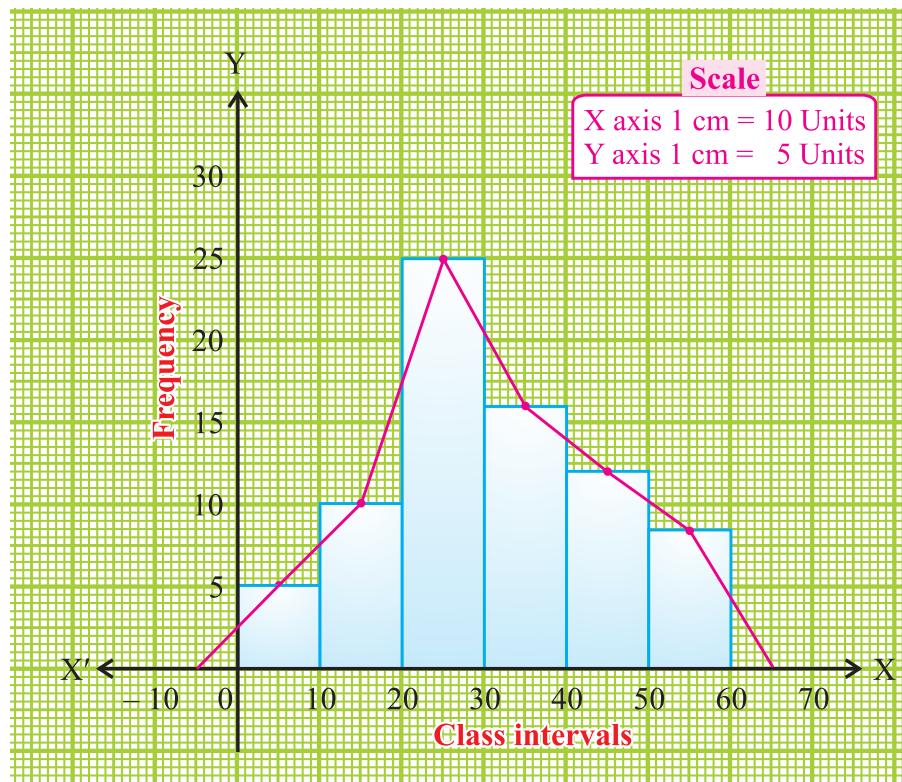
ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಆವರ್ತಾಂಶ ಬಹುಭಜಕಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂಶ	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
ಆವೃತ್ತಿ	5	10	25	16	12	8

ಪರಿಹಾರ

ಚಿತ್ರ 3.4 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಸೂಕ್ತ ಅಳತೆಯೊಂದಿಗೆ X- ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ವರ್ಗಾಂಶಗಳನ್ನು ಮತ್ತು Y- ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಈಗ, ಕ್ರಮಾನುಗತ ಆಯತಗಳ ಮೇಲ್ಬಾಗದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. (-10) - 0 ಮತ್ತು 60 - 70 ಎಂಬ ಉಂಟಿತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಕೂಡ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಅಳತೆಪಟ್ಟಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ತುದಿಗಳನ್ನು (-10) - 0 ಮತ್ತು 60 - 70 ರ ಉಂಟಿತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈಗ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯು ಸಿಗುತ್ತದೆ. (ಬಿತ್ತ 3.4 ನ್ನು ಪರಾಮರ್ಶಿಸಿ)



ಬಿತ್ತ 3.4

ಗಮನಿಸಿ: ಕೆಲವು ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಿತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಲಭಿಸುವುದಿಲ್ಲ. **ಉದಾಹರಣೆಗೆ**, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪರೀಕ್ಷೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಸಂಗತಿಗಳಲ್ಲಿ, ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕೆಳಗೆ ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಟೆ ಅಂಕಗಳ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಕಡೆಗಳಗೂ ನಾವು ಹೋಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ಅಂತ್ಯ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಭಾಗಶಃವಾಗಿ ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಆಯತಗಳ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಲಂಬಿಯ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರುವಂತೆ ಕೆಳಗೆ ತರಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಸೂಚನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನಾವು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 3.7

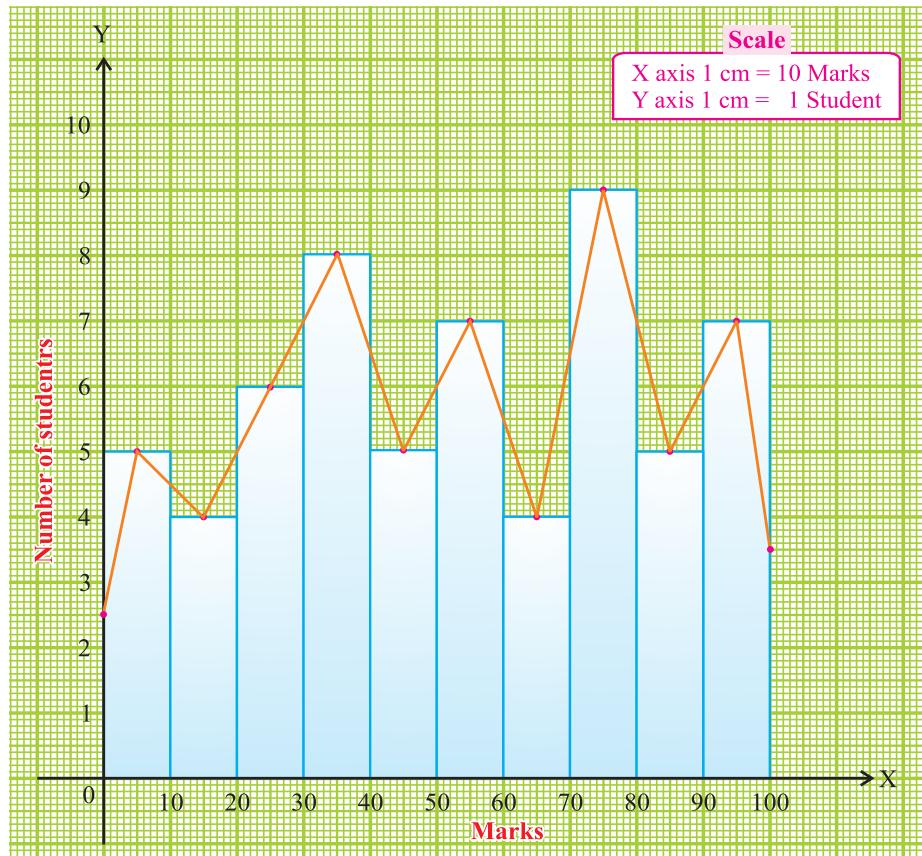
ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಅಂಕಗಳು	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	5	4	6	8	5	7	4	9	5	7

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಪರಿಹಾರ

X-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಮತ್ತು Y- ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಕ್ರಮಾನುಗತ ಆಯತಗಳ ಮೇಲ್ಮಾಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಅಳತೆಪಟ್ಟಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ. ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭಜಕ್ಕಾಗಿಯ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ತುದಿಗಳು ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಆಯತಗಳ ಲಂಬ ಅಂಚುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 3.5

3.3.2 (b) ಆಯತ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆಯೇ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭಜಕ್ಕಾಗಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವಿಕೆ
(To draw a frequency polygon without using histogram)

ಕಾರ್ಯ-ವಿಧಾನ:

- ಹಂತ 1** : ಆವೃತ್ತಿ ವಿಶಿಷ್ಟವಾದ ಪದೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ಹಂತ 2** : X- ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು Y- ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.
- ಹಂತ 3** : ಪ್ರತಿ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.
- ಹಂತ 4** : ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ.
- ಹಂತ 5** : ಬಹುಭಜಕ್ಕಾಗಿಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು X- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಕೆನಿಷ್ಟೆ ಅಥವಾ ಗರಿಷ್ಟ ವರ್ಗದ ಗುರುತುಗಳಿಗೆ (ಶೂನ್ಯ ಆವೃತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ಸಂಗತಿಯಂತೆ) ತಕ್ಷಣದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.8

ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಅಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಬಳಸದೆಯೇ ಆವಶ್ಯಕ ಬಹುಭುಜಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂಶ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
ಆವೃತ್ತಿ	4	6	8	10	12	14	7	5

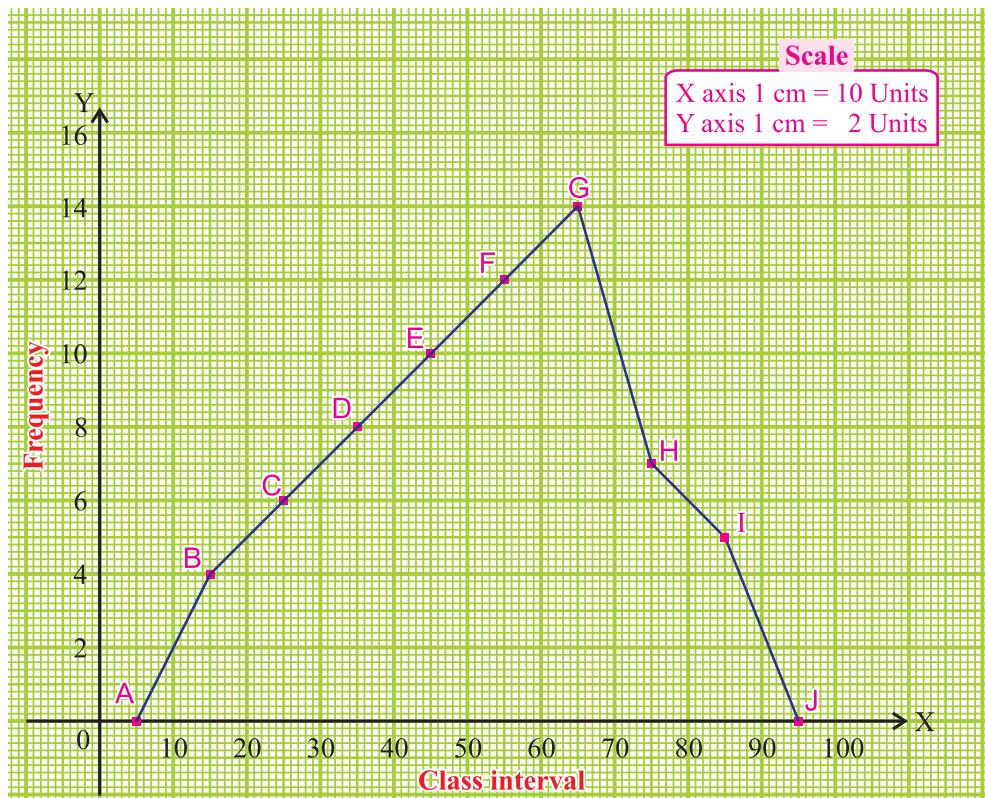
ಪರಿಹಾರ

X-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ವರ್ಗಾಂಶರಗಳನ್ನು ಮತ್ತು Y-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೊನ್ನೆ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ 0-10 ಮತ್ತು ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ 90-100 **ಉಂಟಾಗಣಿತ ವರ್ಗಾಗಳನ್ನು** ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ನಾವು ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು A (5, 0), B (15, 4), C (25, 6), D (35, 8), E (45, 10), F (55, 12), G (65, 14), H (75, 7), I (85, 5) ಮತ್ತು J (95, 0) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

ವರ್ಗಾಂಶ	ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು	ಆವೃತ್ತಿ
0-10	5	0
10-20	15	4
20-30	25	6
30-40	35	8
40-50	45	10
50-60	55	12
60-70	65	14
70-80	75	7
80-90	85	5
90-100	95	0

ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ABCDEFGHIJ ಆವಶ್ಯಕ ಬಹುಭುಜಕೃತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು, AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ನಾವು ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಜಿತ್ತು 3.6 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 3.6

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

1. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರಗಳು	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ಆವೃತ್ತಿ	8	12	6	14	10	5

2. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಪ್ರತಿ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಇಳುವರಿ (ಕ್ಷೀಂಟಾಲಾನಲ್ಲಿ)	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36 - 40
ಭತ್ತೆ ನಾಟಿ ಮಾಡಿದ ಜಮೀನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	3	5	18	15	6	4

3. ಒಂದು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಪಂದ್ಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರುಗಳ ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
ಪ್ರೇಕ್ಷಕರ ಸಂಖ್ಯೆ	4	6	12	10	8	2

4. ಗ್ರಾಮವೊಂದರಲ್ಲಿರುವ ಸಕ್ಕರೆ ಕಾಯಿಲೆ ರೋಗಿಗಳ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ವೀಕ್ಷಣೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	3	6	13	20	10	5

ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭಂಡಾಪ್ತಿಯಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

5. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯತಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭಂಡಾಪ್ತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ಆವೃತ್ತಿ	7	10	23	11	8	5

6. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 150 ಅಭ್ಯಧಿಕಾರಿಗಳು ಒಂದು ಬುದ್ಧಿಶಕ್ತಿ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಶೇಷಣೆಗೆ ಆಯತಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭಂಡಾಪ್ತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಬುದ್ಧಿಶಕ್ತಿ ಸೂಚ್ಯಂಕ	55-70	70-85	85-100	100-115	115-130	130-145
ಅಭ್ಯಧಿಕಾರಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	20	40	30	35	10	15

7. ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭಂಡಾಪ್ತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಅಂಶಗಳು	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ವಿದ್ಯುತ್ತಿರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	9	3	4	6	2	3	4	5	7	8

8. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆಯೇ ಆವಶ್ಯಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ	6	11	25	35	18	12	6

9. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯತಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆಯೇ ಆವಶ್ಯಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ವರ್ಗಾಂಶರ	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59
ಅವುತ್ತಿ	12	16	20	8	10	4

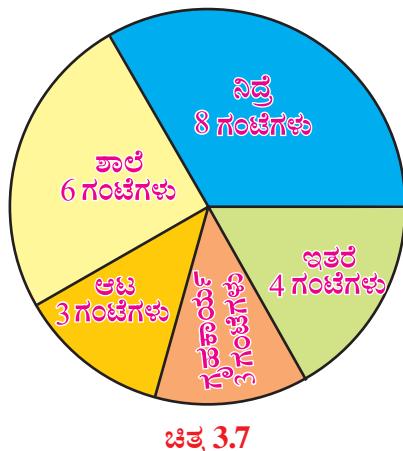
10. ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಗಳು 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಪರೀಕ್ಷೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ (50 ಅಂಕಗಳಿಗೆ) ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆಯತಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ಆವಶ್ಯಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
29, 45, 23, 40, 31, 11, 48, 1, 30, 24, 25, 29, 25, 32, 31, 22, 9, 49, 19, 13, 32, 39, 25, 3, 27, 41, 12, 13, 2, 44, 7, 43, 15, 35, 40, 3, 12, 48, 49, 18.

3.4 ಸರಳವಾದ ಪೈ-ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವುದು (Construction of Simple Pie-Chart)

ಚಿತ್ರ 3.7 ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 3.8 ರಲ್ಲಿ ವ್ಯತೀಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನೀವು ಯಾವಾಗಲಾದರೂ ನೋಡಿದ್ದಿರಾ?

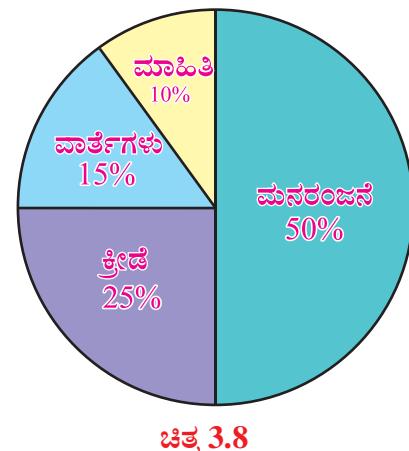
ಒಬ್ಬ ಶಾಲೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ

(24 ಗಂಟೆಗಳು) ವ್ಯಯಿಸಿದ ಸಮಯ

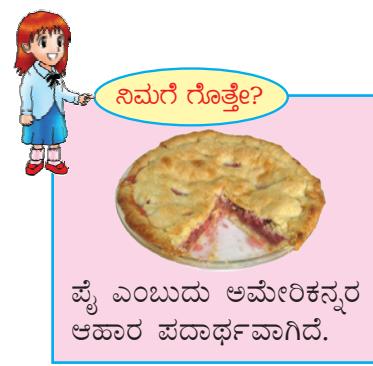


ದೂರದರ್ಶನದಲ್ಲಿ ವೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿಸುವ ವಿವಿಧ

ರೀತಿಯ ಜಾನಲ್‌ಗಳು



ಮೇಲಿನವುಗಳ ಆಕೃತಿಯಂತೆಯೇ ಇರುವುದನ್ನು ವ್ಯತೀಯ ನಕ್ಷೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ವ್ಯತೀಯ ನಕ್ಷೆಯ ಒಂದು ಮೂರ್ಖ ಮತ್ತು ಇದರ ಭಾಗಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಮೂರ್ಖ ವ್ಯತ್ತವನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡದ ಗಾತ್ರವು ಅದು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗೆ ಅಧಿಕಾ ಮಾಹಿತಿಗೆ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡಗಳು ಪೈ-ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಭಾಗಗಳಿಗೆ ಹೋಲಿಕೆಯಾಗುವುದರಿಂದ, ಇದನ್ನು ಪೈ-ನಕ್ಷೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಲುದಾಹರಣೆಗೆ, ಪೈ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 3.7)

$$\left[\begin{array}{l} \text{ನಿದ್ರೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಗಂಟೆಗಳಿಗಾಗಿ} \\ \text{ಶ್ರೀಜ್ಯಾವಿಂಡದ ಅನುಪಾತ} \end{array} \right] = \frac{\text{ನಿದ್ರೆಗೆ ವ್ಯಯಿಸುವ ಸಮಯ}}{\text{ಮಾರ್ಣ ದಿನದ ಸಮಯ}} \\ = \frac{8 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}}{24 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}} = \frac{1}{3}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಶ್ರೀಜ್ಯಾವಿಂಡವನ್ನು ವೃತ್ತದ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

$$\left[\begin{array}{l} \text{ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಗಂಟೆಗಳಿಗಾಗಿ} \\ \text{ಶ್ರೀಜ್ಯಾವಿಂಡದ ಅನುಪಾತ} \end{array} \right] = \frac{\text{ಶಾಲೆಯ ಸಮಯ}}{\text{ಮಾರ್ಣ ದಿನದ ಸಮಯ}} \\ = \frac{6 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}}{24 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}} = \frac{1}{4}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಶ್ರೀಜ್ಯಾವಿಂಡವನ್ನು ವೃತ್ತದ $\frac{1}{4}$ ಭಾಗವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

$$\left[\begin{array}{l} \text{ಆಟದಲ್ಲಿ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಗಂಟೆಗಳಿಗಾಗಿ} \\ \text{ಶ್ರೀಜ್ಯಾವಿಂಡದ ಅನುಪಾತ} \end{array} \right] = \frac{\text{ಆಡುವುದಕ್ಕೆ ವ್ಯಯಿಸುವ ಸಮಯ}}{\text{ಮಾರ್ಣ ದಿನದ ಸಮಯ}} \\ = \frac{3 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}}{24 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}} = \frac{1}{8}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಶ್ರೀಜ್ಯಾವಿಂಡವನ್ನು ವೃತ್ತದ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

$$\left[\begin{array}{l} \text{ಗೃಹಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಗಂಟೆಗಳಿಗಾಗಿ} \\ \text{ಶ್ರೀಜ್ಯಾವಿಂಡದ ಅನುಪಾತ} \end{array} \right] = \frac{\text{ಗೃಹಕಾರ್ಯದ ಸಮಯ}}{\text{ಮಾರ್ಣ ದಿನದ ಸಮಯ}} \\ = \frac{3 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}}{24 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}} = \frac{1}{8}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಶ್ರೀಜ್ಯಾವಿಂಡವನ್ನು ವೃತ್ತದ $\frac{1}{8}$ ನೇ ಭಾಗವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

$$\left[\begin{array}{l} \text{ಇತರೆ ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ವ್ಯಯಿಸಿದ} \\ \text{ಗಂಟೆಗಳಿಗಾಗಿ ಶ್ರೀಜ್ಯಾವಿಂಡದ ಅನುಪಾತ} \end{array} \right] = \frac{\text{ಇತರೆ ಕೆಲಸಗಳ ಸಮಯ}}{\text{ಮಾರ್ಣ ದಿನದ ಸಮಯ}} \\ = \frac{4 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}}{24 \text{ ಗಂಟೆಗಳು}} = \frac{1}{6}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಶ್ರೀಜ್ಯಾವಿಂಡವನ್ನು ವೃತ್ತದ $\frac{1}{6}$ ಭಾಗವಾಗಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಎಲ್ಲಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ಮೇಲಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೊಡಿದಾಗ,

$$\begin{aligned} \text{ನಮಗೆ ಸಿಗುವ ಮೊತ್ತವು} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{8 + 6 + 3 + 3 + 4}{24} = \frac{24}{24} = 1 \end{aligned}$$

ಎಲ್ಲಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಂದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಶಾಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಸಮಯವನ್ನು ವೃತ್ತವನ್ನು ಬಳಸಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಮಾರ್ಣ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು 1 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಶಾಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ವಿವಿಧ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ವಿವಿಧ ಶ್ರೀಜ್ಯಾವಿಂಡಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಕೋನದ ಅಳತೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದಲೂ ಸಹ ಅನುಪಾತ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು. ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 360° ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಪ್ರತಿ ಶ್ರೀಜ್ಯಾವಿಂಡವನ್ನು ಕೋನದ ಅಳತೆಯ ಉಪಯೋಗದಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪೈ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸಲಿದ್ದೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.9

ಒಂದು ಕೆಲಸದ ದಿನದಲ್ಲಿ ೭ ಬಬ್ಬು ಶಾಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಹಲವಾರು ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಗಂಟೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಪೈ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಚಟುವಟಿಕೆ	ನಿದ್ರೆ	ಶಾಲೆ	ಆಟ	ಗೃಹಕಾರ್ಯ	ಇತರೆ
ಗಂಟೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	8	6	3	3	4

ಪರಿಹಾರ

ಒಂದು ದಿನದ 24 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಗಂಟೆಗಳನ್ನು 360° ಯ ಆಂಶಿಕ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿರಿ.

ನಿದ್ರೆಯ ಅವಧಿಯು 8 ಗಂಟೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದನ್ನು $\frac{8}{24} \times 360^\circ = 120^\circ$ ಯಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬೇಕು.

ಆಧ್ಯಾತ್ಮಿಕ ನಿರ್ದೇಶನ ಅವಧಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 120° ಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು.

ಹೀಗೆಯೇ, ಶಾಲೆ, ಆಟ, ಗೃಹಕಾರ್ಯ ಮತ್ತು ಇತರೆ ಎಂಬ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡಗಳನ್ನು ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಡಿಗ್ರಿಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕು. ಇವುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ	ಅವಧಿ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ)	ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ
ನಿದ್ರೆ	8	$\frac{8}{24} \times 360^\circ = 120^\circ$
ಶಾಲೆ	6	$\frac{6}{24} \times 360^\circ = 90^\circ$
ಆಟ	3	$\frac{3}{24} \times 360^\circ = 45^\circ$
ಗೃಹಕಾರ್ಯ	3	$\frac{3}{24} \times 360^\circ = 45^\circ$
ಇತರೆ	4	$\frac{4}{24} \times 360^\circ = 60^\circ$
ಮೊತ್ತ	24	360°

ಪೈ-ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ (Drawing pie chart)

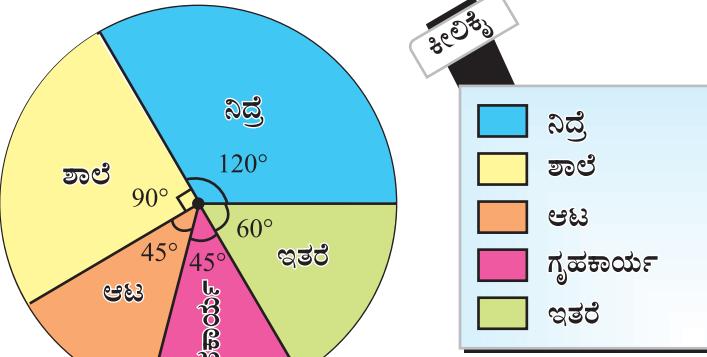
ಯಾವುದೇ ಅನುಕೂಲವಾದ ತ್ರಿಜ್ಯಾದಿಂದ ನಾವೀಗ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ. ಈ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯಾದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 120° ಯನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಈ ಕೋನಕ್ಕೆ ಎರಡನೇ ಬಾಹುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡವು ನಿದ್ರೆಗೆ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಗಂಟೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಈ ಬಾಹುವಿನಿಂದ
ಹಿಂದಿನತೆಯೇ 90° ಕೋನವನ್ನು
ಅಳಿದು ಎರಡನೇ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡವನ್ನು
ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡವು ಶಾಲೆಯ
ಅವಧಿಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ
ರೀತಿಯೇ ಮುಂದುವರಿದು, ಆಟ ಮತ್ತು
ಗೃಹಕಾರ್ಯಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡಗಳನ್ನು
ನಾವು ರಚಿಸೋಣ. ಉಳಿದ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡವು
ಕೊನೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು (ಇತರೆಯನ್ನು)
ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡಗಳಿಗೆ
ವಿವಿಧ ಬಣ್ಣಗಳನ್ನು ಹಜ್ಜುವುದರಿಂದ
ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು
ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಮೇಲೆ
ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೂರಂಗೊಳಿಸಿದ ಪ್ಯೆನ್‌ಕ್ಷೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಒಬ್ಬ ಶಾಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ
(24 ಗಂಟೆಗಳು) ವ್ಯಂಖ್ಯಿಸಿದ ಸಮಯ



ಚಿತ್ರ 3.9

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಪ್ಯೆನ್‌ಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ, ಹಲವಾರು ವೀಕ್ಷಣೆಗಳು ಅಥವಾ ಅಂಗಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡಗಳಿಂದ
ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಮೂರಂಗ ವೃತ್ತವು ಎಲ್ಲಾ ಅಂಗಗಳ ಮೌಲ್ಯದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.
ಸ್ವಷ್ಟವಾಗಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೇಂದ್ರದ ಒಟ್ಟು ಕೋನ 360° ಯನ್ನು ಅಂಗಗಳ ಮೌಲ್ಯಗಳಿಗೆ ಅನುಕೂಲವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ.

$$\text{ಅಂಗದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ} = \left[\frac{\text{ಅಂಗದ ಮೌಲ್ಯ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಮೌಲ್ಯ}} \times 360^\circ \right]$$

ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ಅಂಗಗಳ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಶೇಕಡಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$\text{ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ಅಂಗದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ} = \left[\frac{\text{ಅಂಗದ ಶೇಕಡ ಮೌಲ್ಯ}}{100} \times 360^\circ \right].$$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಪ್ಯೆನ್‌ಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಹಂತಗಳು:

1. ಮೇಲನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಪ್ರತಿ ಅಂಗಗಳಿಗೂ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ.
2. ಅನುಕೂಲವಾದ ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
3. ಈ ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
4. ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ಮೊದಲ ಅಂಗವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಕ್ಕೆ
ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡವು ಮೊದಲ ಅಂಗವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.
ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡ, ಎರಡನೇ ಅಂಗದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಇನ್ನೂಂದು
ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡವು ಎರಡನೆ ಅಂಗವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.
ಹೀಗೆ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಗಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವರೆಗೆ ಮುಂದುವರಿಯಿರಿ.
5. ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಜ್ಯಾವಿಂಡಕ್ಕೆ ಭಿನ್ನವಾದ ಬಣ್ಣವನ್ನು ಹಜ್ಜೆರಿ ಮತ್ತು ಇದು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದನ್ನು
ಅಂಗಗಳಿಗೆ ಗುರುತಿಸಿರಿ.
6. ಕೇಲಿಯನ್ನು ನೀಡಿರಿ.
7. ತಲೆಬರಹವನ್ನು ನೀಡಿರಿ.

ಹೀಗೆ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ನಮಗೆ ಅವಕ್ಷೇಪಣಾದ ಪ್ಯೆನ್‌ಕ್ಷೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.10

ಒಂದು ಕುಟುಂಬದ ತಿಂಗಳ ಆಯವ್ಯಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವರಗಳು	ಆಹಾರ	ಮನೆ ಬಾಡಿಗೆ	ಬಟ್ಟೆ	ಶೀಕ್ಷಣೆ	ಉಳಿತಾಯ	ಇತರೆ
ಖರ್ಚು (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	4800	2400	1600	800	1000	1400

ಕೊನೆದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಪ್ರೈ-ನಷ್ಟೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

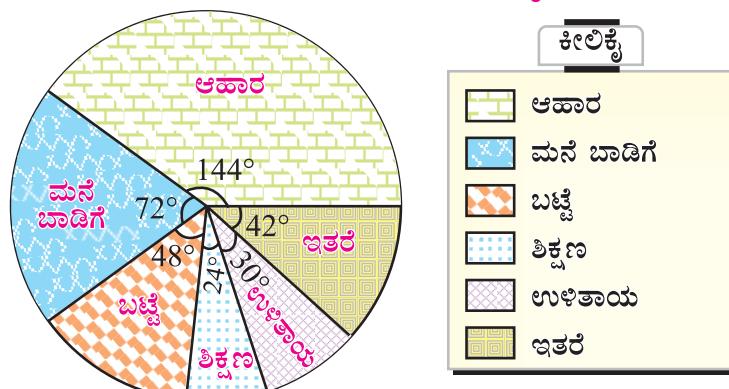
ಪರಿಹಾರ

ಹಲವಾರು ಅಂಗಗಳಿಗೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೊನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

ವರಗಳು	ಖರ್ಚು (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೊನ
ಆಹಾರ	4800	$\frac{4800}{12000} \times 360 = 144^\circ$
ಮನೆ ಬಾಡಿಗೆ	2400	$\frac{2400}{12000} \times 360 = 72^\circ$
ಬಟ್ಟೆ	1600	$\frac{1600}{12000} \times 360 = 48^\circ$
ಶೀಕ್ಷಣೆ	800	$\frac{800}{12000} \times 360 = 24^\circ$
ಉಳಿತಾಯ	1000	$\frac{1000}{12000} \times 360 = 30^\circ$
ಇತರೆ	1400	$\frac{1400}{12000} \times 360 = 42^\circ$
ಒಟ್ಟು	12000	360°

ಸ್ವಷ್ಟವಾಗಿ, ನಮಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಾದ ಪ್ರೈ-ನಷ್ಟೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಕುಟುಂಬದ ತಿಂಗಳ ಆಯವ್ಯಯ



ಚಿತ್ರ 3.10

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಉದಾಹರಣೆ 3.11

ಒಂದು ಶಾಲೆಯ ಎಸ್.ಎಸ್.ಎಲ್.ಎಸ್. ವಾರ್ಷಿಕ ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಫಲಿತಾಂಶವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ಫಲಿತಾಂಶ	ಪ್ರಥಮ ದರ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣ	ದ್ವಿತೀಯ ದರ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣ	ತೃತೀಯ ದರ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣ	ಅನುತ್ತೀರ್ಣ
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಶೇಕಡ	25%	35%	30%	10%

ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಪೈ-ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

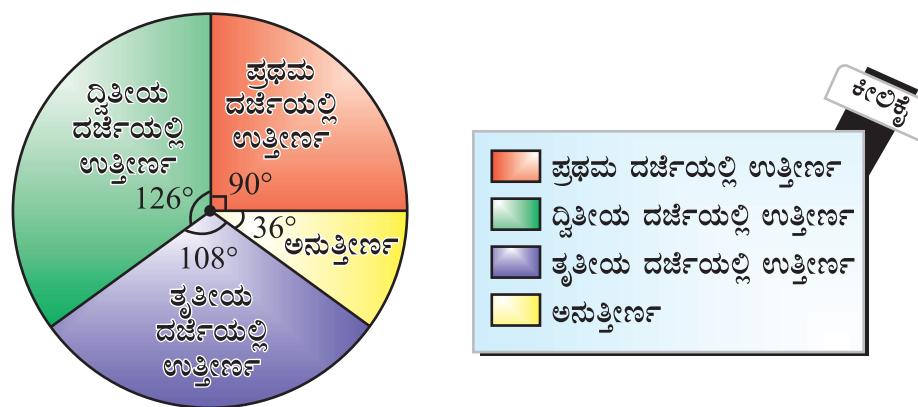
$$\text{ಒಂದು ಅಂಗದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ} = \frac{\text{ಅಂಗದ ಶೇಕಡ ಹೊಲ}}{100} \times 360^\circ$$

ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಹಲವಾರು ಅಂಗಗಳಿಗೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ನಾವು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

ಫಲಿತಾಂಶ	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಶೇಕಡ	ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ
ಪ್ರಥಮ ದರ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣ	25%	$\frac{25}{100} \times 360^\circ = 90^\circ$
ದ್ವಿತೀಯ ದರ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣ	35%	$\frac{35}{100} \times 360^\circ = 126^\circ$
ತೃತೀಯ ದರ್ಜೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣ	30%	$\frac{30}{100} \times 360^\circ = 108^\circ$
ಅನುತ್ತೀರ್ಣ	10%	$\frac{10}{100} \times 360^\circ = 36^\circ$
ಒಟ್ಟು	100%	360°

ಸ್ವಷ್ಟವಾಗಿ, ನಮಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಾದ ಪೈ-ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಎಸ್.ಎಸ್.ಎಲ್.ಎಸ್. ವಾರ್ಷಿಕ ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು



ಚತ್ರ 3.11

ಅಭ್ಯಾಸ 3.2

1. ಚೇತನ್ ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅಂಕಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವಿಷಯ	ಕನ್ನಡ	ಇಂಗ್ಲಿಷ್	ಗಣಿತ	ವಿಜ್ಞಾನ	ಸಮಾಜ ವಿಜ್ಞಾನ
ಅಂಕಗಳು	72	60	84	70	74

ಹಲವಾರು ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಅವನ ಅಂಕಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಪ್ರೇನಕ್ಕೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

2. 8 ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 36 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದಾರೆ. ಅವರುಗಳು ವಿವಿಧ ಸಂಖಗಳ ಸದಸ್ಯರುಗಳಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರೇನಕ್ಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

ಸಂಖಗಳು	ಗಣಿತ	ಎನ್.ಸಿ.ಸಿ.	ಜೆ.ಆರ್.ಸಿ.	ಸೇವಾದಳ
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	12	6	10	8

3. ಒಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಲಂಯದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಭಾಷೆಗಳನ್ನು ಮಾತನಾಡುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಭಾಷೆಗಳು	ತಮಿಳು	ತೆಲುಗು	ಮಲೆಯಾಳಂ	ಕನ್ನಡ	ಇಂಗ್ಲಿಷ್	ಇತರೆ
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	36	12	9	6	5	4

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರೇನಕ್ಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

4. ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ, 8 ನೇ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಆಸ್ತಕ್ಕಿಯಿಂದ ಭಾಗವಹಿಸುವ ಹಲವಾರು ಹವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಪ್ರೇನಕ್ಕೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಹವ್ಯಾಸ	ಸಂಗೀತ	ಕುಂಬಾರಿಕೆ	ನೃತ್ಯ	ನಾಟಕ	ಸಮಾಜ ಸೇವೆ
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	20	25	27	28	20

5. ಒಂದು ಮಿಶ್ರಲೋಹವು ಕೆಳಗಿನ ಲೋಹಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪ್ರೇನಕ್ಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

ಲೋಹ	ಚಿನ್ನ	ಸೀಸ್	ಬೆಳ್ಳಿ	ತಾಮ್ರ	ಸತು
ತೂಕ (ಗ್ರಾಂ)	60	100	80	150	60

6. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿನದಲ್ಲಿ, ಬೇಕರಿ ಅಂಗಡಿಯೊಂದು ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) ವಿವಿಧ ತಿನಿಸುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಪ್ರೇನಕ್ಕೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ತಿನಿಸುಗಳು	ಸಾಮಾನ್ಯ ಬ್ರೆಡ್	ಹಣ್ಣಿನ ಬ್ರೆಡ್	ಕೇಕುಗಳು	ಬಿಸ್ಕಿಟುಗಳು	ಇತರೆ
ಬೆಲೆ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	320	80	160	120	40

7. ಒಬ್ಬ ಪ್ರಕಾಶಕನು ಒಂದು ಪುಸ್ತಕಕ್ಕೆ ವ್ಯಯಿಸಿದ ಹಣವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ವಸ್ತು	ಹಾಳೆ	ಮುದ್ರಣ	ಬ್ರೆಂಡಿಂಗ್	ಪ್ರಚಾರ	ಗೌರವಧನ
ವ್ಯಯಿಸಿದ ಹಣ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	25	12	6	9	8

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರೇನಕ್ಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

8. ಒಬ್ಬ ಕೃಷಿಕನು ಬೇಸಾಯಕ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ವಿರಚನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ವಸ್ತು	ಉಳುಮೆ	ಗೊಬ್ಬರ	ಬೀಜಗಳು	ಕ್ರಿಮಿನಾಶಕ	ನೀರಾವರಿ
ಮೊಬಿಲ್‌ಗ್ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	2000	1600	1500	1000	1100

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರೇನಕ್ಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 3

9. ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಮೃಗಾಲಯದಲ್ಲಿ 900 ಜೀವಿಗಳಿವೆ.

ಜೀವಿಗಳು	ಸಾಧು ಪ್ರಾಣಿಗಳು	ಪಟ್ಟಿಗಳು	ಭೂಮಿಯ ಇತರೆ ಪ್ರಾಣಿಗಳು	ನೀರು ಪ್ರಾಣಿಗಳು	ಸರೀಸೈಪ್
ಜೀವಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	400	120	135	170	75

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪ್ರೇರಿಸಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟಿಸಿ.

10. ಕಾಶಾರನೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಿದ ಇದು ಬಗೆಯ ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರೇರಿಸಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟಿಸಿ.

ವಾಹನ	ಸೂಕ್ತರ್	ಮೋಟಾರ್ ಬೈಕ್	ಕಾರು	ಜೀಮ್	ವ್ಯಾನು
ಸಂಖ್ಯೆ	3000	4000	1500	1000	500

11. ಒಂದು ಆಹಾರವು ಕೆಳಗಿನ ಮೋಷಕಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಪ್ರೇರಿಸಿ.

ಮೋಷಕಾಂಶಗಳು	ಮೌರ್ಚೀನ್	ಕೊಬ್ಬಿ	ಕಾರ್ಬೋಹೈಡ್ರೇಟ್	ಅನ್ನಾಂಗಗಳು	ಖನಿಜಗಳು
ಶೇಕಡ	30%	10%	40%	15%	5%

12. ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಇಪ್ಪತ್ತಾದ ಸ್ವಾಧಯುಕ್ತ ರುಚಿಯ ಐಸ್‌ತ್ರೀಂಗಳ ಶೇಕಡವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಸ್ವಾಧಯುಕ್ತ ರುಚಿ	ಚಾಕೊಲೇಟ್	ವೆನಿಲಾ	ಸ್ಟ್ರಬ್ರಿ	ಇತರೆ ಸ್ವಾಧಯುಕ್ತ ರುಚಿಗಳು
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇಪ್ಪತ್ತಾದ ಸ್ವಾಧಯುಕ್ತ ರುಚಿಗಳ ಶೇಕಡಾಂಶ	40%	30%	20%	10%

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರೇರಿಸಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟಿಸಿ.

13. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಶಾಲೆಗೆ ಬರಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ವಾಹನಗಳ ವಿಧ	ಬಸ್	ಸೈಕಲ್	ನಡಿಗೆ	ಸೂಕ್ತರ್	ಕಾರು
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಶೇಕಡ	40%	30%	15%	10%	5%

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರೇರಿಸಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟಿಸಿ.

14. ಭರತನು ತನ್ನ ಆದಾಯದಲ್ಲಿ 20% ನ್ನು ಮನೆ ಬಾಡಿಗೆ, 30% ನ್ನು ಆಹಾರಕ್ಕೆ, 10% ನ್ನು ಮಕ್ಕಳ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ, 25% ನ್ನು ಉಳಿತಾಯಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಹಣವನ್ನು ಇನ್ವಿಟರೆಗಾಗಿ ವ್ಯಯಿಸುತ್ತಾನೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಗಳಿಗೆ ಪ್ರೇರಿಸಿ.

15. ಒಂದು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವವರ ಶೇಕಡವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೆಲಸಗಾರರ ವಿಭಾಗ	ಬೇಸಾಯ	ವ್ಯವಸಾಯದ ಕೊಲಿಗಳು	ಕಾರ್ಬಿಂಗ್ ನೆಗಳ ಕೆಲಸಗಾರರು	ವಾರ್ಷಿಕ್ ಕೆಲಸಗಾರರು	ಇತರೆ
ಶೇಕಡ	40%	25%	12.5%	10%	12.5%

ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಗಳಿಗೆ ಪ್ರೇರಿಸಿ.

3.5 ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರಮ್ಯತ್ವ ಅಳತೆಗಳು (Measures of Central Tendency)

ಸಂಗ್ರಹಣೆಯಾದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೋಣೀಕರಿಸಿದ ನಂತರವೂ, ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಮಾತ್ರ ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸ್ಪಷ್ಟ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಹೊರ್ನ್ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಏಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ವಿವರಿಸುವುದು ಆದರ್ಥನೀಯವಾಗಿದೆ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗೆ ವಿಚಲನೆ ಹೊಂದುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಮ್ಯತ್ವ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚು ವಿಷಯವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಎಲ್ಲಾ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಅಳತೆಯಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಾಗಿದೆ. ಈ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರಮ್ಯತ್ವ ಅಳತೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆ ಅಳತೆಗಳಿಂದರೆ,

- (i) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ
- (ii) ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು
- (iii) ಒಮ್ಮಲಕ

3.5.1 ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ (Arithmetic Mean) (A.M)

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯು ಎಲ್ಲಾ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅನುಪಾತವಾಗಿದೆ.

3.5.1 (a) ಅವರ್ಗಿಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ

(Arithmetic mean for ungrouped data)

x ಚರಾಂಶದ n ಸಂಖ್ಯೆಯ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳು $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ಆದರೆ, ಅದರ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು \bar{x} ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರದಲ್ಲಿರುವ ಚಿಹ್ನೆಯಾದ Σ ಎಂಬುದನ್ನು **ಶಿಗ್** (Sigma) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು $\sum_{i=1}^n x_i$ ಅಥವಾ ಸರಳವಾಗಿ Σx_i ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಂತರ $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸರಾಸರಿ ಅಥವಾ ಮಾಧ್ಯ ಎಂದು ಸಹ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

Σ ಚಿಹ್ನೆಯ ವಿವರಣೆ:

$$\sum_{k=1}^3 k = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\sum_{n=3}^6 n = 3 + 4 + 5 + 6 = 18$$

$$\sum_{n=2}^4 2n = 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 = 18$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 5 &= \sum_{k=1}^3 5 \times k^0 \\ &= 5 \times 1^0 + 5 \times 2^0 + 5 \times 3^0 \\ &= 5 + 5 + 5 = 15 \end{aligned}$$

$$\sum_{K=2}^4 (K - 1) = (2 - 1) + (3 - 1) + (4 - 1) = 6$$

ಉದಾಹರಣೆ 3.12

ಒಂದು ಕಿರು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು 15, 75, 33, 67, 76, 54, 39, 12, 78, 11 ಆಗಿವೆ. ಅವುಗಳ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಇಲ್ಲಿ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, $n = 10$

$$A. M = \bar{x} = \frac{15 + 75 + 33 + 67 + 76 + 54 + 39 + 12 + 78 + 11}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{460}{10} = 46.$$

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಉದಾಹರಣೆ 3.13

9, 6, 7, 8, 5 ಮತ್ತು x ಬೆಲೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯು 8 ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರ.

ಪರಿಹಾರ

ಇಲ್ಲಿ, ಕೊಟ್ಟರುವ ಬೆಲೆಗಳಿಂದರೆ 9, 6, 7, 8, 5 ಮತ್ತು x . ಇಲ್ಲಿ $n = 6$.

$$\text{ಸೂತ್ರದಿಂದ, A.M.} = \bar{x} = \frac{9 + 6 + 7 + 8 + 5 + x}{6} = \frac{35 + x}{6}$$

$$\text{ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, } \bar{x} = 8$$

$$\text{ಆಗ, } \frac{35 + x}{6} = 8$$

$$\text{ಅಂದರೆ, } 35 + x = 48$$

$$x = 48 - 35 = 13$$

ಉದಾಹರಣೆ 3.14

ಒಂದು ತರಗತಿಯ 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು 166 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಯಿತು. ಅದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸರಿಯಾದ 150 ಸೆಂ.ಮೀ. ಗೆ ಬದಲಾಗಿ 160 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ನಮೂದಿಸಿರುವುದು ಕಂಡುಬಂದಿತು. ಸರಿಯಾದ ಸರಾಸರಿ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರ.

ಪರಿಹಾರ

$$\text{ಇಲ್ಲಿ, } \bar{x} = 166 \text{ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು } n = 10$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{\sum x}{10}$$

$$\text{ಅಂದರೆ, } 166 = \frac{\sum x}{10} \text{ (ಅಥವಾ) } \sum x = 1660$$

$$\text{ದೋಷಯೂಕ್ತ } \sum x = 1660$$

$$\begin{aligned} \text{ಸರಿಯಾದ } \sum x &= \text{ದೋಷಯೂಕ್ತ } \sum x - \text{ತಪ್ಪಿ ಬೆಲೆ} + \text{ಸರಿಯಾದ ಬೆಲೆ} \\ &= 1660 - 160 + 150 = 1650 \end{aligned}$$

$$\text{ಆಗ, ಸರಿಯಾದ A.M.} = \frac{1650}{10} = 165 \text{ ಸೆಂ.ಮೀ.}$$

3.5.1 (b) ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ (Arithmetic mean for grouped data)

ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಅವುಗಳಿಂದರೆ, (i) ನೇರ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು (ii) ಉಳಾತ್ಮಕ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ

(i) ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (ನೇರ ವಿಧಾನ)

ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿ,

ಚರಾಂಶ	x_1	x_2	x_3	...	x_n
ಆವೃತ್ತಿ	f_1	f_2	f_3	...	f_n

ಆಗ ಈ ಕೋಟ್ಟಕವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಾಗಿ ಅಧ್ಯುತ್ಸಬಹುದು.

x_1 ಬೆಲೆಯು f_1 ನಷ್ಟು ಬಾರಿ ಸಂಭವಿಸಿದೆ.

x_2 ಬೆಲೆಯು f_2 ನಷ್ಟು ಬಾರಿ ಸಂಭವಿಸಿದೆ.

x_3 ಬೆಲೆಯು f_3 ನಷ್ಟು ಬಾರಿ ಸಂಭವಿಸಿದೆ.

.....

.....

x_n ಬೆಲೆಯು f_n ನಷ್ಟು ಬಾರಿ ಸಂಭವಿಸಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ಗಳು x ಚರಾಂಶದ ವಿಭಿನ್ನ ಬೆಲೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ N ಎಂಬ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$(ಅಂದರೆ) f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = N \quad (\text{ಅಥವಾ}) \sum_{i=1}^n f_i = N$$

ಆಗ ವೀಕ್ಷಣಿದ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಗಳು

$$\begin{aligned} &= (x_1 + x_1 + x_1 + \dots + f_1 \text{ ಭಾರಿ}) + (x_2 + x_2 + x_2 + \dots + f_2 \text{ ಭಾರಿ}) + \dots + (x_n + x_n + x_n + \dots + f_n \text{ ಭಾರಿ}) \\ &= f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \dots + f_n \times x_n = \sum f_i x_i \end{aligned}$$

$$\text{ಆಗ, } \bar{x} = \frac{\text{ವೀಕ್ಷಣಿದ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಗಳು}}{\text{ಒಟ್ಟು ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$\text{ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ } \bar{x} = \frac{\sum f x}{\sum f} = \frac{\sum f x}{N} \text{ ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ } N = \sum f.$$

ಉದಾಹರಣೆ 3.15

ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶದ ಅಂಕಗಳಿಂದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	5	10	15	20	25	30
f	4	5	7	4	3	2

ಪರಿಹಾರ

x	f	$f x$
5	4	20
10	5	50
15	7	105
20	4	80
25	3	75
30	2	60
ಒಟ್ಟು	$N = 25$	$\sum f x = 390$

$$\begin{aligned} \text{ಅಂಕಗಳಿಂದ ಸರಾಸರಿ, } \bar{x} &= \frac{\sum f x}{N} \\ &= \frac{390}{25} = 15.6 \end{aligned}$$

(ii) ಅಂಕಗಳಿಂದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (ಉಂಟಾಗುವ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ)

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕಡಿಮೆಯಿರುವುದರಿಂದ ಗುಣಾಕಾರವು ತುಂಬಾ ಸರಳವಾಗಿರುವಂತೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಧಿಕವಾದಾಗ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ನಿರಾಸಕ್ತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ದೋಷಗಳಿಗೆ ಅವಕಾಶ ಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಇದನ್ನು ಸರಿಪಡಿಸಲು ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಸರಾಸರಿ (A) ಎಂದು ನಾವು ಉಹಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಉಹಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ A ನ್ನು ಉಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ ಎನ್ನತ್ತೇವೆ. ನಂತರ ನಾವು ಉಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ (A) ಯಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ಚರಾಂಶಗಳಿಗೆ $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ನಾವು ಲೇಕ್ಕಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\text{ಅಂದರೆ, } d_1 = x_1 - A, d_2 = x_2 - A, d_3 = x_3 - A, \dots, d_n = x_n - A$$

ಈಗ $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ ಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ ಮತ್ತು $\sum fd$ ಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಈ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರಿ.

$$\text{ಈಗ, ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ } \bar{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{N} \quad (\text{ಇಲ್ಲಿ } A \text{ ಯು ಉಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು } N = \sum f)$$

ಈಗ, ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ (ಉದಾಹರಣೆ 3.15) ಉಹಾತ್ಮಕ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಉಹಾತ್ಮಕ ಸರಾಸರಿ $A = 15$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

x	f	$d = x - A$	fd
5	4	-10	-40
10	5	-5	-25
15	7	0	0
20	4	5	20
25	3	10	30
30	2	15	30
ಒಟ್ಟು	N = 25		$\sum fd = 15$

$$\begin{aligned} \text{ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ} &= \bar{x} = A + \frac{\sum fd}{N} \\ &= 15 + \frac{15}{25} = 15 + \frac{3}{5} = \frac{75 + 3}{5} = \frac{78}{5} \\ &= 15.6. \end{aligned}$$

3.5.2 ಶೂಕದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ (Weighted Arithmetic Mean) (W.A.M.)

ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಚರಾಂಶಗಳು ವಿವಿಧ ಶೂಕಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದುದಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಈ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೇಕ್ಕಿಸಬಹುದು. ಅಂತಹ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು **ಶೂಕದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ** ಎನ್ನತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಚರಾಂಶ x_1 ಎಂಬುದು ಶೂಕ w_1 ನಿಂದ ಸಂಬಂಧಿಸಿದುದಾಗಿದೆ, x_2 ಎಂಬುದು ಶೂಕ w_2 ನಿಂದ ಸಂಬಂಧಿಸಿದುದಾಗಿದೆ ಇತ್ಯಾದಿ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದಾಗಿ, x_n ಎಂಬುದು ಶೂಕ w_n ನಿಂದ ಸಂಬಂಧಿಸಿದುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಉಹಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ,

$$\text{W. A. M.} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n} = \frac{\sum w x}{\sum w}$$

ಉದಾಹರಣೆ 3.16

ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಬೆಲೆಗಳ ತೊಕದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಆಹಾರ ಪದಾರ್ಥ	ಪರಿಮಾಣ (ಕ್ರಾಂತಿ) w_i	ಪ್ರತಿ ಕ್ರಾಂತಿ ಬೆಲೆ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) x_i
ಅಕ್ಕಿ	25	30
ಸಕ್ಕರೆ	12	30
ಎಣ್ಣೆ	8	70

ಪರಿಹಾರ

ಇಲ್ಲಿ x - ಬೆಲೆಗಳು ಹೊಟ್ಟಿರುವ ಆಹಾರ ಪದಾರ್ಥದ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತೊಕವು (ಕ್ರಾಂತಿ) ಪರಿಮಾಣವಾಗಿದೆ.

$$\begin{aligned} \text{ಆಗ, W.A.M} &= \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n} \\ &= \frac{25 \times 30 + 12 \times 30 + 8 \times 70}{25 + 12 + 8} = \frac{1670}{45} \\ &= ₹ 37.11 . \end{aligned}$$

3.5.3 ಮಧ್ಯಾಂಕ (Median)

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ಅಳತೆಯು ಮಧ್ಯಾಂಕ ಆಗಿದೆ.

3.5.3 (a) ಅವರೈಕ್ಯತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

(To find Median for ungrouped data)

ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

- (i) ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳಿಂದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಅಥವಾ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ನಂತರ ಮಧ್ಯದ ಪದವೇ ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: 33, 35, 39, 40, 43 ವೀಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಳಿಸಿರಿ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯದ ಬೆಲೆಯು 39. ಇದು ಈ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗಿದೆ.

- (ii) ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳಿಂದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಅಥವಾ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ನಂತರ ಏರಡು ಮಧ್ಯದ ಪದಗಳ ಸರಾಸರಿಯು ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: 33, 35, 39, 40, 43, 48 ರ ಮಧ್ಯಾಂಕವು $\frac{39+40}{2} = 39.5$ ಆಗಿದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಒಂದು ಚರಾಂಶವು ಮೊದಲು ಮತ್ತು ನಂತರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆ ಚರಾಂಶದ ಮೌಲ್ಯವು ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.17

17, 15, 9, 13, 21, 7, 32 ರ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ 7, 9, 13, 15, 17, 21, 32.

ಇಲ್ಲಿ, $n = 7$ (ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ)

ಮಧ್ಯಾಂಕ = ಮಧ್ಯದ ಬೆಲೆ

$$= \left(\frac{n+1}{2} \right) \text{ನೇ ಬೆಲೆ} = \left(\frac{7+1}{2} \right) \text{ನೇ ಬೆಲೆ} = 4 \text{ನೇ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ.}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮಧ್ಯಾಂಕವು 15 ಆಗಿದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಉದಾಹರಣೆ 3.18

ಒಟ್ಟು ಶ್ರೀಕೆಟ್ ಅಟಗಾರನು ಗಳಿಸಿದ ಓಟಗಳು 13, 28, 61, 70, 4, 11, 33, 0, 71, 92 ಅಗಿವೆ. ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಓಟಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿರಿ. 0, 4, 11, 13, 28, 33, 61, 70, 71, 92.

ಇಲ್ಲಿ $n = 10$ (ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆ).

28 ಮತ್ತು 33 ಎಂಬವು ಎರಡು ಮಧ್ಯದ ಪದಗಳಾಗಿವೆ.

$$\begin{aligned}\therefore \text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} &= \text{ಎರಡು ಮಧ್ಯದ ಪದಗಳ ಸರಾಸರಿ} \\ &= \frac{28 + 33}{2} = \frac{61}{2} = 30.5\end{aligned}$$

3.5.3 (b) ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

(To find Median for grouped data)

ಸಂಚಿತ ಅವೃತ್ತಿ (Cumulative frequency)

ಒಂದು ವರ್ಗದ ಸಂಚಿತ ಅವೃತ್ತಿಯು ಆ ವರ್ಗದವರೆಗಿನ ಒಟ್ಟು ಅವೃತ್ತಿಯ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.19

50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಂಕಗಳು	20	27	34	43	58	65	89
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	4	6	11	12	8	7

ಪರಿಹಾರ

ಅಂಕಗಳು (x)	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f)	ಸಂಚಿತ ಅವೃತ್ತಿ
20	2	2
27	4	(2 + 4 =) 6
34	6	(6 + 6 =) 12
43	11	(11 + 12 =) 23
58	12	(23 + 12 =) 35
65	8	(35 + 8 =) 43
89	7	(43 + 7 =) 50

$$\text{ಇಲ್ಲಿ, ಒಟ್ಟು ಅವೃತ್ತಿ } N = \Sigma f = 50$$

$$\therefore \frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

ಮಧ್ಯಾಂಕವು $\left(\frac{N}{2}\right)$ ನೇ ಬೆಲೆ = 25 ನೇ ಬೆಲೆ

ಈಗ, 25 ನೇ ಬೆಲೆಯ ಸಂಚಿತ ಅವೃತ್ತಿ 35 ರಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಅದರ ಅನುಸೂಜಾದ ಅಂಕವು 58.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮಧ್ಯಾಂಕ = 58.

3.5.4 ಬಹುಲಕ (Mode)

ಬಹುಲಕವು ಹೊಡ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರಮ್ಯತ್ವ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

3.5.4 (a) ಅವೇಕ್ಷಣೆಯ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ (ವಿವಿಕ್ತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ) ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (To find Mode for ungrouped data)

ವೈಯಕ್ತಿಕ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಹಲವು ಸಲ ಸಂಭವಿಸುವ ಬೆಲೆಯೇ ಬಹುಲಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.20

2, 4, 5, 2, 1, 2, 3, 4, 4, 6, 2 ರ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ 2 ಎಂಬುದು ಗರಿಷ್ಟ ನಾಲ್ಕು ಬಾರಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಹುಲಕ = 2 .

ಉದಾಹರಣೆ 3.21

22, 25, 21, 22, 29, 25, 34, 37, 30, 22, 29, 25 ರ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಇಲ್ಲಿ 22 ಎಂಬುದು 3 ಬಾರಿ ಮತ್ತು 25 ಎಂಬುದು 3 ಬಾರಿ ಸಂಭವಿಸಿದೆ.

∴ 22 ಮತ್ತು 25 ಗಳಿರಡೂ ಈ ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಎರಡು ಬಹುಲಕವಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 3.22

15, 25, 35, 45, 55, 65 ರ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಪ್ರತೀ ಬೆಲೆಯು ನಿರ್ವಿರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಾರಿ ಸಂಭವಿಸಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ದತ್ತಾಂಶವು ಬಹುಲಕವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ.

3.5.4 (b) ವೀಕ್ಷಣೆಯ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ (ಅವೃತ್ತಿ ವಿಶಿಷ್ಟಗೆ) ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

(To find Mode for grouped data)

ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಅವೃತ್ತಿ ಕೋಟ್ಟಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥಿಗೊಳಿಸಿದಾಗ, ಗರಿಷ್ಟ ಅವೃತ್ತಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ವರ್ಗವು ಬಹುಲಕೀಯ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ. ಬಹುಲಕೀಯ ವರ್ಗದ ವಿಚರ ಬೆಲೆಯು ಬಹುಲಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.23

ಕೆಳಗಿನ ಅವೃತ್ತಿ ಕೋಟ್ಟಕಕ್ಕೆ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೊಲ (₹)	250	300	350	400	450	500
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	10	15	16	12	11	13

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಪರಿಹಾರ

ಕೊಲ (₹)	ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
250	10
300	15
350	16
400	12
450	11
500	13

ಮೇಲಿನ ಕೋಟ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿಯು 16 ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. **ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿ 16 ಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ವಿಚರ (ಕೊಲಿ) ಬೆಲೆಯು 350 ಆಗಿದೆ.** ಇದು ಕೊಟ್ಟರುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕವಾಗಿದೆ.



ನಿಮಗೆ ನೀಡುತ್ತೇ?

ಏಕಬಹುಲಕ	ದ್ವಿಬಹುಲಕ	ತ್ರಿಬಹುಲಕ	ಬಹುಬಹುಲಕ
ಕೊಟ್ಟರುವ ಶೈಳಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಹುಲಕ ಇದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಏಕಬಹುಲಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.	ಕೊಟ್ಟರುವ ಶೈಳಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಹುಲಕಗಳು ಇದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ದ್ವಿಬಹುಲಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.	ಕೊಟ್ಟರುವ ಶೈಳಿಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ಬಹುಲಕ ಇದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ತ್ರಿಬಹುಲಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.	ಕೊಟ್ಟರುವ ಶೈಳಿಯಲ್ಲಿ ಮೂರಕ್ಕಂತಹ ಹಿಂಬಣೆಯ ಬಹುಲಕಗಳು ಇದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಬಹುಬಹುಲಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
ಉದಾಹರಣೆ : 10, 15, 20, 25, 15, 18, 12, 15. ಇಲ್ಲಿ, ಬಹುಲಕವು 15.	ಉದಾಹರಣೆ : 20, 25, 30, 30, 15, 10, 25. ಇಲ್ಲಿ, 25, 30 ಗಳು ದ್ವಿಬಹುಲಕವಾಗಿದೆ.	ಉದಾಹರಣೆ : 60, 40, 85, 30, 85, 45, 80, 80, 55, 50, 60. ಇಲ್ಲಿ 60, 80, 85 ಗಳು ತ್ರಿಬಹುಲಕವಾಗಿವೆ.	ಉದಾಹರಣೆ : 1, 2, 3, 8, 5, 4, 5, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 2, 7, 4, 1. ಇಲ್ಲಿ 1, 2, 3, 4, 5 ಗಳು ಬಹುಬಹುಲಕವಾಗಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.3

I. ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಸರಾಸರಿಯ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

- 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 ರ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 18, 41, x , 36, 31, 24, 37, 35, 27, 36 ಬೆಲೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯು 31 ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- 20 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, 5 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 76 ಅಂಕಗಳನ್ನು, 7 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 77 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತು 8 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 78 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದರೆ, ಆ ತರಗತಿಯ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ಒಂದು ತರಗತಿಯ 20 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ಎತ್ತರವನ್ನು 160 ಸೆ.ಮೀ. ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಾಕಲಾಯಿತು. ಅದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಎತ್ತರವನ್ನು 152 ಸೆ.ಮೀ. ಗೆ ಬದಲಾಗಿ 132 ಸೆ.ಮೀ. ಎಂದು ನಮೂದಿಸಿರುವುದು ಕಂಡುಬಂದಿತು. ಸರಿಯಾದ ಸರಾಸರಿ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	15	25	35	45	55	65	75	85
f	12	20	15	14	16	11	7	8

6. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವು 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಯಸ್ಸಿನ ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	13	14	15	16	17	18
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	3	8	9	11	6	3

7. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು (A.M ನ್ನು) ಪಡೆಯಿರಿ.

ಅಂಕಗಳು	65	70	75	80	85	90	95	100
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	11	3	5	4	7	10	4

8. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಒಂದು ಕಾಶಾಂಕೆಯಲ್ಲಿನ 12 ಕೆಲಸಗಾರರ ಶೂಕವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಶೂಕಗಳು (ಕೆ.ಗ್ರಾಂಗಳಲ್ಲಿ)	60	64	68	70	72
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	3	4	2	2	1

ಕೆಲಸಗಾರರ ಸರಾಸರಿ ಶೂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ತಿಂಗಳಿಗೆ, ಒಂದು ಕುಟುಂಬಕ್ಕೆ ಬೇಕಾಗುವ ಸರಕುಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಕಿನ ಶೂಕವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಶೂಕದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸರಕು	ಶೂಕಗಳು (ಕೆ.ಗ್ರಾಂನಲ್ಲಿ)	ಪ್ರತಿ ಕೆ.ಗ್ರಾಂನ ಬೆಲೆ (₹ ನಲ್ಲಿ)
ಅಕ್ಕಿ	25	30
ಗೊಂಡಿ	5	20
ಕಾಳುಗಳು	4	60
ತರಕಾರಿಗಳು	8	25
ಎಣ್ಣೆ	3	65

10. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಶೂಕದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಸ್ತು	ವಸ್ತುವಿನ ಸಂಖ್ಯೆ	ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ
ಪೌಡರ್	2	₹ 45
ಸೋಮ	4	₹ 12
ಪೆನ್ನು	5	₹ 15
ಸಾಧನ ಪೆಟ್ಟಗೆ	4	₹ 25.50

II. ಮಧ್ಯಾಂಕಗಳ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

1. ಕೆಳಗಿನ ವೊಲ್ಯುಗಳ ಗಣಕೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

- (i) 83, 66, 86, 30, 81.
- (ii) 45, 49, 46, 44, 38, 37, 55, 51.
- (iii) 70, 71, 70, 68, 67, 69, 70.
- (iv) 51, 55, 46, 47, 53, 55, 51, 46.

ಅಧ್ಯಾಯ 3

2. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f	9	11	5	6	8	1	3	7

3. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು (ಸೆಂ.ಮೀ.ನಲ್ಲಿ) ಕೆಳಗೆ ಹೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಎತ್ತರ (ಸೆಂ.ಮೀ.ನಲ್ಲಿ)	156	155	154	153	152	151	150
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	8	4	6	10	12	3	7

4. 60 ರೋಗಿಗಳ ಹೃದಯವನ್ನು ಕ್ಷ-ಕಿರಣದ ಮೂಲಕ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹೃದಯದ ವ್ಯಾಸ (ಮಿ.ಮೀ.ನಲ್ಲಿ)	130	131	132	133	134	135
ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	9	15	12	6	11

5. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ 43 ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ಸಂಬಳವನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಂಬಳ (₹ ನಲ್ಲಿ)	4000	5500	6000	8250	10,000	17,000	25,000
ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	5	4	3	13	8	3

III. ಬಹುಲಕದ ಮೇಲನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

1. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

- i) 74, 81, 62, 58, 77, 74. iii) 43, 36, 27, 25, 36, 66, 20, 25.
 ii) 55, 51, 62, 71, 50, 32. vi) 24, 20, 27, 32, 20, 28, 20.

2. ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ಹೋಷ್ಟಕದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

x	5	10	15	20	25	30
f	14	25	37	16	8	5

3. ಕೆಳಗಿನ ಹೋಷ್ಟಕಕ್ಕೆ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉಷ್ಣತೆ (°C ನಲ್ಲಿ)	29	32.4	34.6	36.9	38.7	40
ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	2	6	4	8	3

4. ಸಮೀಕ್ಷೆಯಿಂದ ಪಡೆದ ಬೆಂಧಿಕೆಯಿರುವ ವಿವಿಧ ಅಂಗಿಗಳ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಾತ್ರ	38	39	40	41	42	43	44
ವೃಕ್ಷಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಧರಿಸುವವರು)	27	40	51	16	14	8	6

IV. ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕದ ಮೇಲನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ಹೋಷ್ಟಕಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	10	20	25	30	37	55
f	5	12	14	15	10	4

2. ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯ ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	19	21	23	25	27	29	31
ಪ್ರಕಟಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ	13	15	20	18	16	17	13

3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 20 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೊಕವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತೊಕ (ಕೋಟಿ ಗ್ರಾಂಲ್ಲಿ)	47	50	53	56	60
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	4	3	7	2	4



ಪರಿಕಲ್ಪನಾ ಸಾರಾಂಶ

- ▶ ಆಯಂತರಿಕ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭಿಜಾಕ್ತುತ್ತಿಗಳು ಆವೃತ್ತಿ ವಿಶೇಷಿಸಿಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಎರಡು ವಿಧಗಳಾಗಿವೆ.
- ▶ ಆಯಂತರಿಕ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭಿಜಾಕ್ತುತ್ತಿಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಾಗ ವರಾಂತರಗಳನ್ನು X-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಮತ್ತು ಅನುಗುಣವಾದ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು Y-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ತೆಗೆದುಹಾಕಿಳಿಲಾಗುತ್ತದೆ.
- ▶ ಆಯಂತರಿಕದಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷಪಕ್ಕದ ಆಯಂತರಿಕ ನಡುವೆ ಸ್ಥಿರಾವಕಾಶವಿಲ್ಲದಂತೆ ಆಯಂತರಿಕನ್ನು ಸಿರಂತರವಾಗಿ ಇಡಲಾಗುತ್ತದೆ.
- ▶ ಆಯಂತರಿಕದಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷಪಕ್ಕದ ಆಯಂತರಿಕ ಮೇಲಾಳಾದ ಮಧ್ಯಾಂದುಗಳನ್ನು ಸೇಲಸಿ, ಹಿಂಬನ ಮತ್ತು ಮುಂಬಿನ ವರಾಂತರದ ಮಧ್ಯಾಂದುಗಳವರೆಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದಾರ ಸಿದುವ ಬಹುಭಿಜಾಕ್ತುಯನ್ನು ಆವರ್ತಾಂಕ ಬಹುಭಿಜಾಕ್ತು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.
- ▶ ಒಂದು ಅಂದದ ಕೆಲಂಟಿಲಯ ಕೊಂಡು = $\left[\frac{\text{ಅಂಗದ ಮೌಲ್ಯ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಮೌಲ್ಯ}} \times 360^\circ \right]$
- ▶ ಅಂತರಣಿತ ಸರಾಸರಿಯು ಎಲ್ಲಾ ವಿಳಕ್ಷಣೆಗಳ ಮೌಲ್ಯ ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ವಿಳಕ್ಷಣೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಡುವಿನ ಅನುಹಾತವಾಗಿದೆ.
- ▶ A.M. ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ
 - (i) $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ (ii) $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$
 - (iii) $\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$, A ಯು ಉಣಿತ್ವಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಮತ್ತು $d = x - A$.
- ▶ ತೂಕದ ಅಂತರಣಿತ ಸರಾಸರಿ (W.A.M.) = $\frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$.
- ▶ ಒಂದು ಜರಾಂಶವು ಮೌಲ್ಯ ಮತ್ತು ನಂತರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ವಿಳಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ಹೊಂಬಿದ್ದರೆ, ಆ ಜರಾಂಶದ ಮೌಲ್ಯವು ಮಧ್ಯಾಂಕವಾಗಿದೆ.
- ▶ ಒಂದು ವಿಶೇಷಿಸಿಯಲ್ಲಿ ನಾಮೋನ್ಯವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚು ಬಾಲ ಕಂಡುಬರುವ ಬೆಲೆಯು ಬಹುಳವಾಗಿದೆ.

4

ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ



ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ

[ಕ್ರಿ.ಶ. 598 - 670]

7 ನೇ ಶತಮಾನದ
ಭಾರತೀಯ ಪ್ರಸಿದ್ಧ
ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ
ರಾಜಸಾಫಿನ ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತರವರು
ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು
ವಿಗೋಳಿಶಾಸ್ತ್ರದ
ಮೇಲೆ ಹಲವಾರು
ಮುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ.
ಇವರು ಉಜ್ಜಾಯಿನಿಯ
ವಿಗೋಳಿಶಾಸ್ತ್ರೀಯ
ವೀಕ್ಷಣಾಲಯದ
ಮುಖ್ಯಸ್ಥರಾಗಿದ್ದರು. ಇವರು
ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ “ಬ್ರಹ್ಮಸೂಟ
ಸಿದ್ಧಾಂತ” ಎಂಬ
ಮುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ.
ಇವರು

$\pi \approx \sqrt{10}$ ಮತ್ತು

“n” ಸಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ
ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ =

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದಾರೆ.

4.1 ಪೀಠಿಕೆ



4.2 ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು

4.1 ಪೀಠಿಕೆ (Introduction)

ಪ್ರಾಚೀನ ಈಜಿಪ್ಟಿಯನ್ನರು ಸಮೀಕ್ಷೆ ಮತ್ತು ಯೋಜನೆಗಳ ರಚನೆಯ ಮೂಲಕ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದರು. ಪ್ರಾಚೀನ ಗ್ರೀಕರು ಅವರ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಾತ್ಸ್ಥಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದರು. ಅವರು ಅಳತೆಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಕ್ರೀರಾರವನ್ನು ಬಳಸಿ ವಿವಿಧ ರಚನೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ರೇಖಾಗಣಿತವು ಗಣಿತದ ಮೂರಾತನ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿದೆ. ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಸ್ವೇಚ್ಛಾಂತಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ ಎಂದು ವರ್ಗೀಕರಿಸಬಹುದು. ಸ್ವೇಚ್ಛಾಂತಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಕರಡು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದರೊಂದಿಗೆ ರೇಖಾಗಣಿತದ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ನೈಜ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದನ್ನು ಅಧ್ಯಯಿಸುತ್ತದೆ.

ಕೆಲವು ಸಮಶಲ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಚಿತ್ರಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ, ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು ಮತ್ತು ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದನ್ನು ಕಲಿಯಲಿದ್ದೇವೆ.

4.2 ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು (Concentric Circles)

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ನಾವು ಅಧ್ಯಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಮೊದಲೇ ವೃತ್ತಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಪರಿಚಿತರಾಗಿದ್ದೇವೆ.

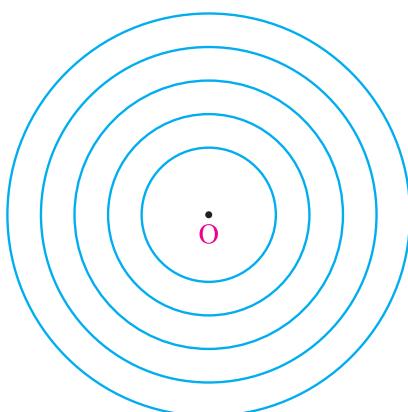
4.2.1 ಪ್ರೇರಣ (Motivation)

ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಕಲ್ಲನ್ನು ಸ್ಥಿರ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದಾಗ, ವೃತ್ತೀಯ ಅಲೆಗಳು ಉಂಟಾಗುವುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿರಬಹುದು. ಈ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರವು ಯಾವುದು? ಇದು ಕಲ್ಲು ಬಿದ್ದಂತಹ ಸ್ಥಳವಲ್ಲವೇ? ಹೌದು.

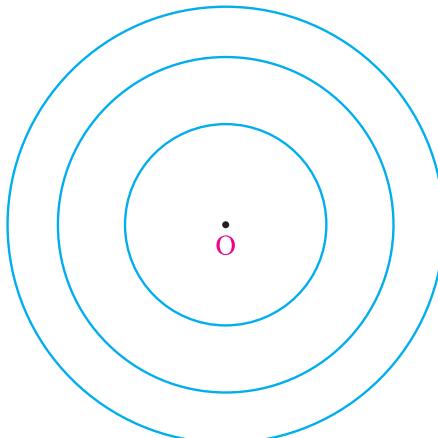
ಒಂದೇ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ವಿವಿಧ ಅಳತೆಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೇಂದ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು

ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ವಿವಿಧ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಎಳೆದಿರುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. (ಜಿತ್ತ 4.1 ಮತ್ತು 4.2)

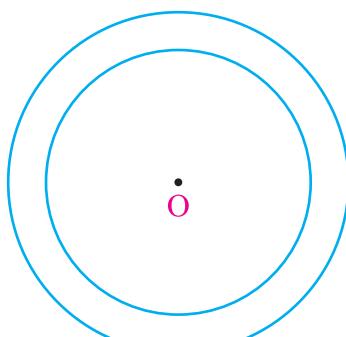


ಚಿತ್ರ 4.1

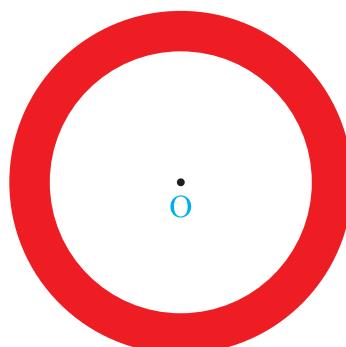


ಚಿತ್ರ 4.2

ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 4.3



ಚಿತ್ರ 4.4

ಚಿತ್ರ 4.3 ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ 4.4 ರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವಿನ ಕೇತಕೆ ಬಣ್ಣವನ್ನು ತುಂಬಲಾಗಿದೆ. ಬಣ್ಣ ತುಂಬಿದ ಕೇತಕವನ್ನು ವೃತ್ತೀಯ ಬಳಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 4

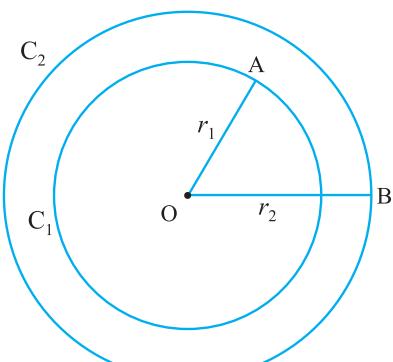
ವಿವರಣೆ: ವೃತ್ತೀಯ ಬಳೆ (Circular Ring)

ಚಿತ್ರ (4.5) ರಲ್ಲಿ, C_1 ಮತ್ತು C_2 ಗಳು ವಿವಿಧ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು r_1 ಮತ್ತು r_2 ಗಳೊಂದಿಗೆ ಒಂದೇ ಕೇಂದ್ರ O ಅನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಏರಡು ವೃತ್ತಗಳಾಗಿವೆ.

C_1 ಮತ್ತು C_2 ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಏಕಕೆಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಏರಡು ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವೆ ಆವರಿಸಿರುವ ಕ್ಷೇತ್ರವನ್ನು ವೃತ್ತೀಯ ಬಳೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$$\text{ವೃತ್ತೀಯ ಬಳೆಯ ಅಗಲ} = OB - OA = r_2 - r_1, \quad (r_2 > r_1)$$



ಚಿತ್ರ 4.5

4.2.2 ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಏಕಕೆಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

ಉದಾಹರಣೆ 4.1

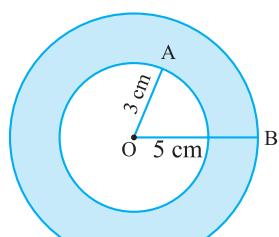
3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೊಂದಿಗೆ ಏಕಕೆಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ವೃತ್ತೀಯ ಬಳೆಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಜ್ಜಿರಿ. ಇದರ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

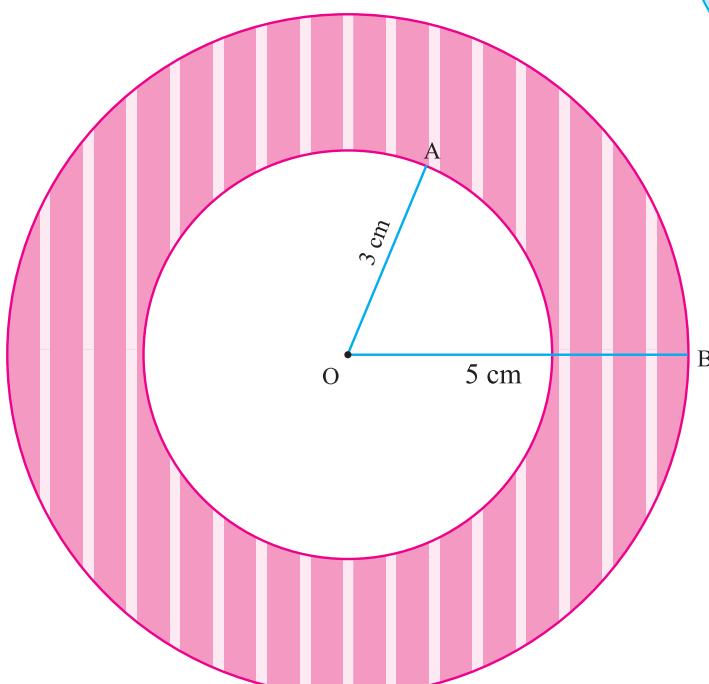
ದತ್ತ: ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 5 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಏಕಕೆಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚನಲು

ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ಚಿತ್ರ 4.6



ಚಿತ್ರ 4.7

ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

ಹಂತ 1: ಕರಡು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

ಹಂತ 2 : ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು O ಅನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿರಿ.

ಹಂತ 3 : Oನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಸಿಕೊಂಡು ಮತ್ತು $OA = 3$ ಸೆ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಹಂತ 4 : Oನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಸಿಕೊಂಡು ಮತ್ತು $OB = 5$ ಸೆ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ C_1 ಮತ್ತು C_2 ಏಕಕೇಂದ್ರಿಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

$$\begin{aligned} \text{ವೃತ್ತೀಯ ಬಳಿಯ ಅಗಲ} &= OB - OA \\ &= 5 - 3 \\ &= 2 \text{ ಸೆ.ಮೀ.} \end{aligned}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

- ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಏಕಕೇಂದ್ರಿಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತೀಯ ಬಳಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
 - 4 ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು 6 ಸೆ.ಮೀ.
 - 3.5 ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು 5.5 ಸೆ.ಮೀ.
 - 4.2 ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು 6.8 ಸೆ.ಮೀ.
 - 5 ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು 6.5 ಸೆ.ಮೀ.
 - 6.2 ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು 8.1 ಸೆ.ಮೀ.
 - 5.3 ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು 7 ಸೆ.ಮೀ.



ಪರಿಕಲ್ಪನಾ ಸಾರಾಂಶ

- 👉 ನಾಮಾನ್ಯ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ವಿವಿಧ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೊಂಬತ್ತಿಗೆ ಒಂದು ನಮುತಲದಲ್ಲಿ ಎಂದಿದ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಏಕಕೇಂದ್ರಿಯ ವೃತ್ತಗಳ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- 👉 ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರಿಯ ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವೆ ಆವಲಸಿರುವ ಕ್ಷೇತ್ರವನ್ನು ವೃತ್ತೀಯ ಬಳಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- 👉 ವೃತ್ತೀಯ ಬಳಿಯ ಅಗಲ = $r_2 - r_1$; ($r_2 > r_1$)

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

1. i) D ii) C iii) B iv) B v) A
2. i) 200 ಲೆಟರ್‌ಗಳು ii) 20,000 ಕೆ.ಮೀ. iii) ₹ 1,550
iv) 50 ನೇಮಿಷ್‌ಗಳು v) ₹ 50
3. ₹ 40,000 4. 5000, 3750
5. i) 90% ii) 94% iii) 98% iv) 88% v) 95% vi) 93%
6. 5 7. ₹ 9,000 8. ₹ 1,020
9. 180, 1320 10. 6 ಕೆ.ಆರ್
11. i) 26,100 ii) 5,220 12. 25%, ₹ 8,600
13. ಅವಳು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ 20% ನಿಂದ ಉತ್ತಮ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾರೆ. 14. ₹ 6,250 15. 20%

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. i) ₹ 7490 ii) ₹ 500 iii) ₹ 9,000 iv) ₹ 2,246 v) ₹ 6,57,500
2. i) ಲಾಭ ₹ 64, ಲಾಭ % = 20%
ii) ಲಾಭ ₹ 200, ಲಾಭ % = 8%
iii) ನಷ್ಟ ₹ 19, ನಷ್ಟ % = 5%
iv) S.P. = ₹ 38, ನಷ್ಟ % = 5%
v) S.P. = ₹ 5,500, ಲಾಭ % = 10%.
3. i) ₹ 787.50 ii) ₹ 1,260 iii) ₹ 2,835
4. ₹ 1,200 5. $33\frac{1}{3}\%$ 6. 25%
7. ₹ 22,80,000 8. ₹ 34,40,000
9. $11\frac{1}{9}\%$ 10. ಒಟ್ಟಾರೆ ಲಾಭ ₹ 113.68

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. i) A ii) D iii) B iv) B v) C
2. ₹ 360 3. ₹ 8,000 4. ₹ 49,220
5. ₹ 18,433.40 6. ₹ 4,950 7. ₹ 13,000
8. 33% 9. ₹ 9,832.50 10. 20%
11. ಒಂದು ಅಂಗಿಗೆ ₹ 1,310.40
12. i) ರಿಯಾಲಿಟಿಯ ಮೊತ್ತ = ₹ 460; S.P. = ₹ 1,840
ii) ರಿಯಾಲಿಟಿಯ ಮೊತ್ತ = ₹ .35; ರಿಯಾಲಿಟಿಯ ದರ = 25%
iii) M.P. = ₹ 20,000; ರಿಯಾಲಿಟಿಯ ಮೊತ್ತ = ₹ 4,000
iv) ರಿಯಾಲಿಟಿಯ ದರ = 5%; ರಿಯಾಲಿಟಿಯ ಮೊತ್ತ = ₹ 725
v) ರಿಯಾಲಿಟಿಯ ಮೊತ್ತ = ₹ 403; S.P. = ₹ 2,821

ಅಭ್ಯಾಸ 1.4

1. i) $A = ₹ 1,157.63$, $\text{B}_{\text{ಡಿ}}$ = ₹ 157.63
- ii) $A = ₹ 4,840$, $\text{B}_{\text{ಡಿ}}$ = ₹ 840
- iii) $A = ₹ 22,869$, $\text{B}_{\text{ಡಿ}}$ = ₹ 4,869
2. ₹ 2,125
3. i) ₹ 88,200 ii) ₹ 4,410
4. $A = ₹ 27,783$, C.I. = ₹ 3,783 5. ₹ 9,826
6. C.I. = 1,951 7. ₹ .20,000 8. ₹ 36,659.70
9. i) ₹ 92,400 ii) ₹ 92,610, ವ್ಯಾಪ್ತಿ = ₹ 210
10. ₹ 6 11. ₹ 25 12. ₹ 2,000
13. ನಿತ್ಯ ರೂ 924.10 ರ ಅಧಿಕ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಪಾವತಿಸಿದನು. 14. $P = ₹ 1,25,000$
15. 2 ವರ್ಷಗಳು 16. 10% 17. 10%

ಅಭ್ಯಾಸ 1.5

1. 2,205
2. ₹ 2,55,150
3. ₹ 46,000
4. 5,31,616.25
5. 5,415
6. 20,000
7. 10,000

ಅಭ್ಯಾಸ 1.6

1. ₹ 27,000
2. ₹ 86,250
3. ₹ 10,800
4. ₹ 200
5. 9%
6. ₹ 1,250
7. $E.M.I. = ₹ 700$, ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ = ₹ 19,404
8. $E.M.I. = ₹ 875$, ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ = ₹ 8,750

ಅಭ್ಯಾಸ 1.7

1. 24 ದಿನಗಳು
2. 10, 1250
3. 10 ಜನ ಅಚ್ಚುಮೊಳೆ ಜೋಡಿಸುವವರು
4. 15 ಕೆಲಸಗಾರರು
5. 24 ದಿನಗಳು
6. ₹ 192

ಅಭ್ಯಾಸ 1.8

1. 3 ದಿನಗಳು
2. 30 ದಿನಗಳು
3. 2 ದಿನಗಳು
4. 12 ನಿಮಿಷಗಳು
5. $A = ₹ 360$, $B = ₹ 240$
6. 6 ದಿನಗಳು
7. 1 ಗಂಟೆ

ಅಧ್ಯಾಯ 2

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. i) D ii) C iii) A iv) B
2. ಅಶ್ವಂತ ಚೆಕ್ಕಿ ಬಾಹು BC. 3. $QR = 26$ ಸೆ.ಮೀ.
4. ಇದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಲಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.
5. $QR = 5$ ಸೆ.ಮೀ. 6. $x = 9$ ಮೀ.
7. ಜೈನ್‌ತ್ರಿ, $x = 5\sqrt{3}$ ಸೆ.ಮೀ.
8. ಹೌದು 9. $2\sqrt{51}$ ಅಡಿ

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

1. i) D ii) D iii) C 2. ಶ್ರೀಜ್ಯ = 5 ಸೆ.ಮೀ.

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಅಭ್ಯಾಸ 3.3

I. ಅಂಕಗಳೆಲ್ಲ ಸರಾಸರಿಯ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

1. 9 2. $x = 25$ 3. 77.15 4. 161 ಸೆ.ಮೀ. 5. 45
6. 15.45 7. 82.1 8. 65.33 9. ₹ 33 10. ₹ 21

II. ಮಧ್ಯಾಂಕದ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

1. i) 81 ii) 45.5 iii) 70 iv) 51
2. 3 3. 153 4. 132 5. ₹ 10,000

III. ಒಹುಲಕದ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

1. i) 74 ii) ಒಹುಲಕ ಇಲ್ಲ iii) 25 ಮತ್ತು 36 iv) 20
2. 15 3. 38.7°C 4. 40

IV. 1. ಸರಾಸರಿ 28; ಮಧ್ಯಾಂಕ 25; ಒಹುಲಕ 30

2. ಸರಾಸರಿ 25; ಮಧ್ಯಾಂಕ 25; ಒಹುಲಕ 23
3. ಸರಾಸರಿ 53.05; ಮಧ್ಯಾಂಕ 53; ಒಹುಲಕ 53

‘ನನ್ನಿಂದ ಸಾಧ್ಯ, ನಾನು ಮಾಡಿದೆ’

(‘I can, I did’)

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಚಟುವಟಿಕೆ ದಾಖಲೆ

ವಿಷಯ :

ಕ್ರ.ಸಂ	ತಾರೀಖು	ಪಾಠದ ಸಂಖ್ಯೆ	ಪಾಠದ ಹೇಸರು	ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು	ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳು