Government of Tamilnadu

സ്റ്റാൻഡേർഡ് എട്ടാം

STANDARD EIGHT

MALAYALAM MEDIUM

ഭാഗം III Term III

വാല്യം 2 Volume 2

ഗണിതം MATHEMATICS

ശാസ്ത്രം SCIENCE

സാമൂഹ്യ ശാസ്ത്രം SOCIAL SCIENCE

Untouchability is Inhuman and a Crime

Department of School Education

© Government of Tamilnadu

First Edition - 2012
Revised Edition - 2013, 2014, 2015
(Published under Uniform System of School Education scheme in Trimester Pattern)

Textbook preparation and compilation

State Council of Educational Research and Training

College Road, Chennai - 600 006.

Textbook Printing

Tamil Nadu Textbook and Educational Services Corporation

College Road, Chennai - 600 006.

This book has been printed on 80 GSM Maplitho Paper

Price: Rs.

Printed by Web Offset at:

Textbook available at

www.textbooksonline.tn.nic.in

ഉള്ളടക്കം

ഗണിതം - (1-97)
(MATHEMATICS)

ക്രമ നമ്പർ	അദ്ധ്യായം	പേജ് നമ്പർ
1.	ദൈനം ദിനകണക്കുകൾ	2
2.	ജ്യാമിതി	47
3.	വിവര നിർവ്വഹണം	59
4.	പ്രായോഗിക ജ്യാമിതി	90
	ഉത്തരങ്ങൾ	94

ശാസ്ത്രം - (98-167)
(SCIENCE)

ക്രമ നമ്പർ	അദ്ധ്യായം	പേജ് നമ്പർ
1.	ജീവജാലങ്ങളിലെ വൈവിദ്ധ്യം	100
2.	സസ്യങ്ങളുടെയും ജന്തുക്കളുടെയും സംരക്ഷണം	118
3.	കൽക്കരിയും പെട്രോളിയവും	134
4.	പ്രകാശവും ശബ്ദവും	148

സാമൂഹ്യ ശാസ്ത്രം - (168-255)

(SOCIAL SCIENCE)

ക്രമ നമ്പർ	അദ്ധ്യായം	പേജ് നമ്പർ
	പരിത്രം	
1.	വില്യം ബെന്റിക് പ്രഭു (ക്രി.പി. 1828-ക്രി.പി. 1835)	169
2.	ഡൽഹൗസി പ്രഭു (ക്രി.പി. 1848-1855)	173
3.	മഹത്തായ വിപ്ലവം (ക്രി.പി.1857)	178
4.	തമിഴ്നാട്ടിൽ നായക്കന്മാരുടെ ഭരണം	185
5.	തഞ്ചാവൂരിൽ മറാത്തഭരണം (ക്രി.പി. 1676-ക്രി.പി.1856)	192
6.	വെല്ലൂർ കലാപം - 1806	199
	ഭൂമിശാസ്ത്രം	
	ത്രിതീയ പ്രവർത്തനങ്ങൾ - I	
1.	വാണിജ്യം	202
	ത്രിതീയ പ്രവർത്തനങ്ങൾ -II	
2.	ഗതാഗതവും വാർത്താവിനിമയവും	207
3.	ജനസംഖ്യാ വർദ്ധനവും, വ്യാപനവും	214
4.	ജനസംഖ്യയും വിഭവങ്ങളും	220
5.	ദുരന്തത്തോടുള്ള പ്രതികരണങ്ങൾ അഥവാ രക്ഷാപ്രവർത്തനങ്ങൾ	225
	പൗരധർമ്മം	
1.	റോഡു സംരക്ഷണം നിയമങ്ങളും, നിയന്ത്രണങ്ങളും	240
	സാമ്പത്തികം	
1.	പണം, സമ്പാദ്യവും, നിക്ഷേപവും	249

ഗണിതം

MATHEMATICS

MALAYALAM MEDIUM

സ്റ്റാൻഡേർഡ് എട്ടാം

STANDARD EIGHT

ഭാഗം III
Term III

1 ദൈനം ദിനകണക്കുകൾ

1.1 ആമുഖം

1.2 ആവർത്തനം – ലാഭം, നഷ്ടം, സാധാരണ പലിശ

1.3 ശതമാനം, ലാഭവും നഷ്ടവും, അധിക ചെലവുകൾ, കിഴിവും നികുതിയും – പ്രയോഗങ്ങൾ

1.4 കൂട്ടുപലിശ

1.5 സാധാരണ പലിശ – കൂട്ടുപലിശ വ്യത്യാസം

1.6 സ്ഥിര നിക്ഷേപവും ആവർത്തക നിക്ഷേപവും

1.7 മിശ്രവ്യതിയാനം

1.8 സമയവും ജോലിയും

റോഗർ ബേക്കൺ

[1214-1294]

പ്രഗത്ഭനായ അദ്ധ്യാപകനും ഇംഗ്ലീഷ് തത്വജ്ഞാനിയും അനുഭവസിദ്ധമായ രീതിയിൽ കാര്യങ്ങൾ ഊന്നി പറയുന്നതിൽ അഗ്രഗണ്യനുമായ ഇദ്ദേഹം ഓകസ്ഫോർഡിലെ മാസ്റ്റർ പദം അലങ്കരിച്ചു.

അദ്ദേഹത്തിന്റെ നിർവ്വചനം *"Neglect of mathematics works injury to all knowledge".*

ബാങ്ക്, ഷോപ്പിങ് മോൾസ്, റെയിൽവേ, പോസ്റ്റാഫീസ്, ഇൻഷ്വറൻസ് കമ്പനികൾ, ഗതാഗതം, കച്ചവടം കയറ്റുമതി, ഇറക്കുമതി, വാണിജ്യപരമായ മറ്റു ക്രയവിക്രയങ്ങൾ എന്നിവയിൽ ഗണിതത്തിന്റെ പ്രാധാന്യം അദ്ദേഹം ഊന്നി പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്.

1.1 ആമുഖം

ഓരോ പൗരനും തന്റെ ജീവിതത്തിൽ വിജയത്തിന്റെ ഉത്തുംഗ ശൃംഗത്തിലെത്താൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നവരാണ്. അതിനായി അവൻ പരിശ്രമിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. സ്വന്തം പരിശ്രമത്തിലൂടെ കൂടുതൽ സമ്പത്തും പ്രശംസയും നേടാനായി തന്റെ മുഴുവൻ സമയവും വിനിയോഗിക്കുന്നു.

ശിലായുഗം മുതൽ ആധുനിക യുഗം വരെയും ക്രയവിക്രയം മുതൽ പണമിടപാടുകാലം വരെ മനുഷ്യൻ തന്റെ ഉല്പന്നങ്ങൾക്കും വസ്തുവിനും കൈമാറ്റം ചെയ്യാൻ അംശബന്ധ അനുപാതങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. താജ്മഹൽ, തഞ്ചാവൂർ ബൃഹദീശ്വര ക്ഷേത്രം തുടങ്ങിയ സ്മാരകങ്ങൾ ക്ഷേത്രങ്ങൾ എന്നിവയുടെ അതിശയിപ്പിക്കുന്ന ദൃശ്യ, ബല നിർമ്മാണങ്ങളിലും യോജിച്ച അംശബന്ധാനുപാതങ്ങളുടെ പ്രയോഗം, നമ്മുടെ പൂർവ്വികരുടെ കഴിവ് തെളിയിക്കുന്നവയാണ്.

മഴയും, കൊയ്ത്തും, പോഷകവും ആരോഗ്യവും, വരവും ചെലവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം പോലെ പ്രവർത്തിയും ഫലവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധവും യോജിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇന്ന് ലോകത്തിൽ നിലനിൽക്കുന്ന വസ്തുക്കളിൽ നിന്നാണ് മിശ്ര വ്യതിയാനത്തിന്റെ ഉത്ഭവം.

നമ്മുടെ ആവശ്യങ്ങൾ സാധിക്കുന്നതിന് നാം പണം നിക്ഷേപിക്കുകയും കടം വാങ്ങുകയും ചെയ്യുന്നുണ്ട്. ഇതിന് കാലക്രമം അനുസരിച്ച് ഉത്തമമായ കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുന്നു. സുരക്ഷ, ആരോഗ്യം, വിദ്യാഭ്യാസം മറ്റ് സുഖസൗകര്യങ്ങൾ എന്നിവയുടെ ഉത്തരവാദിത്വം സർക്കാർ വഹിക്കുന്നു. ഇവ ഓരോ പൗരനും ലഭ്യമാകുന്നതിന് നാം നമ്മുടെ വരുമാനത്തിൽ നിന്നും പലവിധത്തിലുള്ള നികുതികൾ സർക്കാരിന് നൽകുന്നു.

ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ നമ്മുടെ ദൈനംദിന ജീവിതത്തിന് ആവശ്യമായ കണക്കുകളെക്കുറിച്ച് പ്രതിപാദിക്കുന്നു.

1.2 ആവർത്തനം : ലാഭം, നഷ്ടം, സാധാരണ പലിശ

നാം മുൻക്ലാസ്സുകളിൽ ലാഭം, നഷ്ടം, സാധാരണ പലിശ എന്നിവയെക്കുറിച്ച് പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു. നമുക്ക് അവയുടെ ഫലങ്ങളെക്കുറിച്ച് ഓർത്ത് നോക്കാം.

ലാഭം, നഷ്ടം സാധാരണ പലിശ എന്നിവയുടെ ഫലങ്ങൾ

(i) ലാഭം അല്ലെങ്കിൽ നേട്ടം = വിറ്റവില - വാങ്ങിയവില

(ii) നഷ്ടം = വാങ്ങിയവില - വിറ്റവില

(iii) ലാഭശതമാനം = $\frac{\text{ലാഭം}}{\text{വാങ്ങിയവില}} \times 100$

(iv) നഷ്ടശതമാനം = $\frac{\text{നഷ്ടം}}{\text{വാങ്ങിയവില}} \times 100$

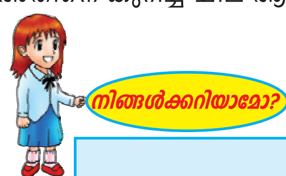
(v) സാധരണ പലിശ (I) = $\frac{\text{മുതൽ} \times \text{കാലം} \times \text{നിരക്ക്}}{100} = \frac{Pnr}{100}$

(vi) തുക = മുതൽ + പലിശ

1.3 ശതമാന പ്രയോഗം ലാഭം, നഷ്ടം, അധിക ചെലവ്, കിഴിവ്, നികുതി

1.3.1. ശതമാന പ്രയോഗം

നാം ശതമാനത്തിനെക്കുറിച്ച് മുൻ ക്ലാസ്സുകളിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതിനെ കുറിച്ച് ചില ആശയങ്ങൾ കീഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു:



$= \frac{1}{2} = 50\ \%$

$= \frac{1}{4} = 25\ \%$

$= \frac{3}{4} = 75\ \%$

(i) 2 ശതമാനം = $2\% = \frac{2}{100}$

(ii) 600കി.ഗ്രാമിന്റെ 8% = $\frac{8}{100} \times 600 = 48$ കി.ഗ്രാം

(ii) 125% = $\frac{125}{100} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

ഇപ്പോൾ നമുക്ക് ശതമാനം ഉപയോഗിക്കുന്നതിനെക്കുറിച്ച് ചില കണക്കുകളിൽ നിന്നും പഠിക്കാം.

ഉദാഹരണം *1.1*

15 പൈസ എന്നത് 2 രൂപ 70 പൈസയുടെ എത്ര ശതമാനം ?

നിർദ്ധാരണം

2 രൂപ 70 പൈസ = (2 × 100 പൈസ + 70പൈസ)

= 200 പൈസ + 70 പൈസ

= 270 പൈസ

ആവശ്യമായ ശതമാനം = $\frac{15}{270} \times 100 = \frac{50}{9} = 5\frac{5}{9}\%$.

ഉദാഹരണം 1.2

ഒരു തുകയുടെ 12% എന്നത് ₹ 1080 ആണെങ്കിൽ തുക എത്ര ?

നിർദ്ധാരണം

തുക x എന്നിരിക്കട്ടെ

തന്നിട്ടുള്ളത് : തുകയുടെ 12% = ₹ 1080

$$\frac{12}{100} \times x = 1080$$

$$x = \frac{1080 \times 100}{12} = ₹\,9000$$

∴ തുക = ₹ 9000.

ഉദാഹരണം 1.3

ഒരു ക്ലാസ്സിലെ 25 കുട്ടികളിൽ 72 % ഗണിതത്തിൽ സമർത്ഥരാണ്. എന്നാൽ ഗണിതത്തിൽ സമർത്ഥരല്ലാത്ത കുട്ടികൾ എത്ര ?

നിർദ്ധാരണം

ഗണിതത്തിൽ സമർത്ഥരായ കുട്ടികളുടെ ശതമാനം = 72%

ഗണിതത്തിൽ സമർത്ഥരായ കുട്ടികൾ = 25കുട്ടികളുടെ 72%

$$= \frac{72}{100} \times 25 = 18$$ കുട്ടികൾ

സമർത്ഥരല്ലാത്ത കുട്ടികൾ = 25 – 18 = 7.

ഉദാഹരണം 1.4

240 ൽ നിന്ന് 15% കുറവ് ചെയ്ത് എഴുതുക.

നിർദ്ധാരണം

240 ന്റെ 15% $= \frac{15}{100} \times 240 = 36$

∴ 240 ൽ നിന്ന് 15% കുറച്ച് കിട്ടുന്ന സംഖ്യ = 240 – 36 = 204.

ഉദാഹരണം 1.5

ഒരു വീടിന്റെ വില പതിനഞ്ച് ലക്ഷത്തിൽ നിന്ന് പന്ത്രണ്ട് ലക്ഷമായി കുറഞ്ഞു. എന്നാൽ കുറഞ്ഞ ശതമാനം എത്ര ?

നിർദ്ധാരണം

യഥാർത്ഥ വില = ₹ 15,00,000

പുതുക്കിയ വില = ₹ 12,00,000

കുറഞ്ഞ വില = 15,00,000 – 12,00,000 = 3,00,000

∴ കുറഞ്ഞ ശതമാനം $= \frac{300000}{1500000} \times 100 = 20\%$

ഓർമ്മിക്കുക

വർദ്ധിത ശതമാനം $= \frac{\text{വില വർദ്ധന}}{\text{മുഖവില}} \times 100$

കുറഞ്ഞ ശതമാനം $= \frac{\text{വില കിഴിവ്}}{\text{മുഖവില}} \times 100$

ശ്രമിക്കുക

15 മിഠായികളെ ശരത്തും ഭരത്തും 20% കൂടാതെ 80% എന്ന ക്രമത്തിൽ വീതിച്ചാൽ ഓരോരുത്തർക്കും കിട്ടുന്ന മിഠായികൾ എത്ര ?

പ്രവർത്തി

എന്റെ മുത്തശ്ശി പറഞ്ഞു, അവരുടെ കുട്ടിക്കാലത്ത് 1 ഗ്രാം സ്വർണ്ണത്തിന്റെ വില ₹100 ആയിരുന്നു. ഓരോ മാസാരംഭത്തിലും പത്രം വായിച്ച് സ്വർണ്ണത്തിന്റെ വില കുറിക്കുക. ഓരോ മാസത്തിലും ഉള്ള വർദ്ധനവിന്റെ ശതമാനം കാണുക

അഭ്യാസം 1.1

1. ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക

(i) 25 പഴങ്ങളുള്ള ഒരു കൂടയിൽ 5 ഓറഞ്ച് ആണ് ഉള്ളത് എങ്കിൽ ഓറഞ്ചിന്റെ, ശതമാനം______ ആകുന്നു.

(A) 5% (B) 25% (C) 10% (D) 20%

(ii) $\frac{2}{25}$ = ________ %.

(A) 25 (B) 4 (C) 8 (D) 15

(iii) ഒരു ഭരണിയിലുള്ള ബിസ്ക്കറ്റിന്റെ 15% എന്നത് 30 എങ്കിൽ ഭരണിയിലുള്ള ബിസ്ക്കറ്റ് ________.

(A) 100 (B) 200 (C) 150 (D) 300

(iv) ഒരു ഇരുചക്രവാഹനത്തിന്റെ കഴിഞ്ഞ വർഷത്തെ വില ₹ 34000 ഈ വർഷം വില 25 % വർദ്ധിച്ചു. വർദ്ധിച്ച വില ________.

(A) ₹ 6,500 (B) ₹ 8,500 (C) ₹ 8,000 (D) ₹ 7,000

(v) ഒരാൾ തന്റെ വരുമാനത്തിൽ ₹ 3,000 ചെലവാക്കുന്നു. വരുമാനം ₹ 20,000 അയാളുടെ സമ്പാദ്യ ശതമാനം ________ .

(A) 15% (B) 5% (C) 10% (D) 20%

2. (i) 20% എണ്ണയുടെ അളവ് 40 ലിറ്റർ എന്നാൽ ആകെ എത്ര ലിറ്റർ ഉണ്ട് എന്ന് കാണുക?

(ii) 25 % യാത്ര ചെയ്തദൂരം 5000കി.മീ. എന്നാൽ മൊത്തം യാത്ര ചെയ്യേണ്ട ദൂരം എത്ര?

(iii) ഒരു തുകയുടെ 3.5 % , ₹ 54.25 എന്നാൽ ആ തുക എത്ര ?

(iv) സമയത്തിന്റെ 60%, 30 മിനിറ്റ് എന്നാൽ ആ സമയം എത്ര ?

(v) ഒരു വസ്തുവിന്റെ വില്പന നികുതി 4% എന്നത് ₹ 2 എന്നാൽ വിറ്റവില എന്ത് ?

3. മീനു തന്റെ ശമ്പളത്തിന്റെ 5% മായ ₹ 2000 വിനോദത്തിനായി ഉപയോഗിക്കുന്നു. എന്നാൽ ശമ്പളം എത്ര ?

4. ഒരു കൂടയിലുള്ള മാമ്പഴത്തിൽ 25 % മായ 1250 എണ്ണം അഴുകി. കൂടയിലുള്ള മൊത്തം മാമ്പഴം കാണുക. കൂടാതെ നല്ല മാമ്പഴങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക.

5. റാണിക്ക് 12-ാം ക്ലാസ്സിലെ പരീക്ഷയിൽ കിട്ടിയ മാർക്ക് താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. അവയുടെ ശതമാനം കാണുക.

വിഷയം	ഉയർന്ന മാർക്ക്	ലഭിച്ച മാർക്ക്	മാർക്കിന്റെ ശതമാനം (100 ന്)
(i) ഇംഗ്ലീഷ്	200	180	
(ii) തമിഴ്	200	188	
(iii) ഗണിതം	200	195	
(iv) ഭൗതികശാസ്ത്രം	150	132	
(v) രസതന്ത്രം	150	142	
(vi) ജീവശാസ്ത്രം	150	140	

6. ഒരു വിദ്യാലയത്തിലെ ക്രിക്കറ്റ് ടീം മറ്റൊരു വിദ്യാലയവുമായി 20 കളികളിൽ പങ്കെടുത്തു. ആദ്യത്തെ വിദ്യാലയം 25 % വിജയം കൈവരിച്ചു. എങ്കിൽ ആദ്യത്തെ വിദ്യാലയം എത്ര കളികളിൽ ജയിച്ചു?

7. റഹീം ഒരു വർഷത്തിൽ 18% സാധാരണ പലിശ ലഭിക്കുന്ന ഒരു കമ്പനിയിൽ ₹ 10,000 നിക്ഷേപിച്ചു. 5 വർഷങ്ങൾക്ക് ശേഷം അയാൾക്ക് കിട്ടിയ പലിശ എത്ര ?

8. ഒരു കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ മുഖവില ₹ 1,200. കച്ചവടക്കാരൻ അതിന് 15 % കിഴിവിൽ വിറ്റാൽ വിറ്റ വില എന്ത് ?

9. ഒരു കമ്പ്യൂട്ടർ സ്ഥാപനം 1500 പേരെ ഇന്റർവ്യൂ ചെയ്തതിൽ 12 % പേർ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ടു എന്നാൽ തെരഞ്ഞെടുത്തവർ എത്ര? തെരഞ്ഞെടുക്കാത്തവർ എത്ര.

10. ഒരു ലോഹക്കൂട്ടിൽ 30% ചെമ്പും 40% സിങ്കും ബാക്കി നിക്കലുമാണ് എന്നാൽ 20 കി.ഗ്രാം ലോഹക്കൂട്ടിലുള്ള നിക്കൽ എത്രഗ്രാം ?

11. പാണ്ഡ്യനും താമരയും അവരുടെ ഗ്രാമത്തിലെ ഇലക്ഷന് സ്ഥാനാർത്ഥികളായി മത്സരിച്ചു. പാണ്ഡ്യന് ആകെ വോട്ടിൽ 44 % മായ 11484 വോട്ട് ലഭിച്ചു. താമരയ്ക്ക് 36 % വോട്ട് ലഭിച്ചു. എങ്കിൽ (i) ആ ഗ്രാമത്തിലെ ആകെ വോട്ട് എത്ര ? (ii) എത്ര പേർ രണ്ടു സ്ഥാനാർത്ഥികൾക്കും വോട്ട് ചെയ്തില്ല എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക.

12. ഒരാൾ തന്റെ വരുമാനത്തിൽ 40 % ആഹാരത്തിനും 15% വസ്ത്രത്തിനും 20 % വീട്ടു വാടകയ്ക്കും ബാക്കിയെ സമ്പാദ്യത്തിനും ഉപയോഗിക്കുന്നു. അയാളുടെ വരുമാനം ₹ 34,400, എന്നാൽ അയാളുടെ സമ്പാദ്യം, സമ്പാദ്യ ശതമാനം എന്നിവ കാണുക ?

13. ജ്യോതികയ്ക്ക് ഇംഗ്ലീഷിന് 50 ൽ 35 മാർക്കും ഗണിതത്തിന് 30 ൽ 27 മാർക്കും ലഭിച്ചു ഏത് വിഷയത്തിനാണ് കൂടുതൽ മാർക്ക് ലഭിച്ചത് ? അത് എത്ര ?

14. ഒരു തൊഴിലാളിക്ക് തന്റെ വാർഷിക വരുമാനത്തിൽ 15 % മായ ₹ 11,250 ബോണസ് ലഭിച്ചു. അയാളുടെ മാസശമ്പളം എത്ര ?

15. ഒരു വസ്ത്രത്തിന്റെ വില ₹ 2,100 ൽ നിന്ന് ₹ 2,520 ആയി വർദ്ധിച്ചു. വർദ്ധന ശതമാനം കാണുക ?

ശ്രമിക്കുക

1. 40% = 100% – ______ %
2. ഒരു വിദ്യാലയത്തിലെ വിദ്യാർത്ഥികളിൽ 25 % കുട്ടികൾ നടന്നും 65% കുട്ടികൾ സൈക്കിളിലും ബാക്കി കുട്ടികൾ സ്കൂൾ ബസ്സിലും സ്കൂളിൽ വരുന്നു. എത്ര ശതമാനം കുട്ടികൾ സ്കൂൾ ബസ്സിൽ വരുന്നു ?
3. ഒരു ക്ലാസ്സിലെ കുട്ടികളിൽ 30% പേർ ഹിന്ദിയും 50% പേർ തമിഴും ബാക്കി ഫ്രഞ്ചു ഭാഷയും പഠിക്കുന്നു. എത്ര ശതമാനം കുട്ടികൾ രണ്ടാം ഭാഷയായി ഫ്രഞ്ച് ഭാഷ പഠിക്കുന്നു.
4. ഒരു നഗരത്തിൽ 30% പേർ സ്ത്രീകളും 40% പേർ പുരുഷന്മാരും ബാക്കി കുട്ടികളും ആയാൽ കുട്ടികൾ എത്ര ശതമാനം ?

പ്രവർത്തി

അമുത കടച്ചവടക്കാരായ ഗണേശൻ, ഗോവിന്ദൻ എന്നിവരിൽ നിന്നും സിൽക്ക് സാരികൾ വാങ്ങി, ഗണേശൻ നെയ്തത് 200 ഗ്രാം വെള്ളി നൂലും 100 ഗ്രാം വെങ്കലനൂലും. ഗോവിന്ദൻ നെയ്തത് 300 ഗ്രാം വെള്ളി നൂലും 200 ഗ്രാം വെങ്കലനൂലും. വെള്ളി നൂലിന്റെ ശതമാനം കണക്കാക്കി ആരുടെ സാരിയാണ് ഗുണമേന്മയുള്ളതെന്ന് കാണുക ?

(**കുറിപ്പ്** : കൂടുതൽ ഗുണമേന്മയുള്ളത് വെള്ളി നൂലാണ്)

1.3.2 ലാഭ നഷ്ടങ്ങളുടെ പ്രയോഗങ്ങൾ

ഈ ഭാഗത്ത് ലാഭ നഷ്ടങ്ങളുടെ പ്രയോഗങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളിച്ചു വരുന്ന കണക്കുകൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ പഠിക്കാം.

(i) വിറ്റവിലയുടെ സൂത്രത്തിന്റെ വിശദീകരണം:

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സാഹചര്യം പരിഗണിക്കാം.

രാജേഷ് ₹80 ന് ഒരു പേന വാങ്ങി. അതിനെ അവന്റെ കൂട്ടുകാരന് വിറ്റു. അവന് 5 % ലാഭം കിട്ടണമെങ്കിൽ അവൻ എത്ര രൂപയ്ക്ക് വിറ്റിരിക്കും എന്ന് നിങ്ങൾക്ക് പറയാമോ?

രാജേഷ് ₹ 80 ന് പേന വാങ്ങി, അതാണ് അതിന്റെ വാങ്ങിയവില (C.P.) അവൻ അതിനെ 5% ലാഭത്തിനു വിറ്റു. ഇത് C.P. യുടെ സഹായത്തോടെ നിർണ്ണയിക്കാം.

∴ ലാഭം = C.P. യുടെ 5% $= \frac{5}{100} \times 80 =$ ₹ 4

അവിടെ ലാഭമുള്ളതിനാൽ, S.P. > C.P.

S.P. = **C.P.** + ലാഭം

= 80 + 4 = ₹ 84

∴ രാജേഷ് വിറ്റവില = ₹ 84

ഇതേ കണക്ക് സൂത്രവാക്യരീതി ഉപയോഗിച്ചും ചെയ്യാൻ സാധിക്കും

വിറ്റവില (S.P.) $= \frac{(100 + \text{ലാഭ}\%)}{100} \times$ C.P.

$= \frac{(100 + 5)}{100} \times 80 = \frac{105}{100} \times 80 =$ ₹ 84

(ii) C.P. യുടെ സൂത്ര വിശദീകരണം

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സാഹചര്യം പരിഗണിക്കാം:

ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ ഒരു വാച്ച് ₹540 ന് വിറ്റപ്പോൾ 5% ലാഭം കിട്ടി. എങ്കിൽ വാച്ചിന്റെ വാങ്ങിയ വില എന്ത് ?

C.P. യിൽ നിന്നാണ് 5% ലാഭം കിട്ടിയത് എന്നാൽ C.P. അറിയില്ല. അതിനാൽ ₹100 ന് കണക്കാക്കാം.

C.P. യുടെ 5% ലാഭം

$\therefore$ ലാഭം = C.P. യുടെ 5%

$$= \frac{5}{100} \times 100$$

$$= ₹\ 5$$

നമുക്കറിയാം **S.P. = C.P. + ലാഭം**

$$= 100 + 5$$

$$= ₹\ 105$$

ഇവിടെ, S.P. ₹105, ആണെങ്കിൽ C.P. ₹ 100.

അപ്പോൾ വാച്ചിന്റെ S.P. ₹ 540

$$\text{C.P.} = \frac{540 \times 100}{105} = ₹\ 514.29$$

$\therefore$ കച്ചവടക്കാരൻ വാച്ച് ₹ 514.29 വാങ്ങിയിരിക്കാം.

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള കണക്ക് സൂത്രവാക്യരീതി ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ സാധിക്കും

$$\textbf{C.P.} = \left(\frac{100}{100 + \text{ലാഭ}\%}\right) \times \text{S.P.}$$

$$= \frac{100}{100 + 5} \times 540$$

$$= \frac{100}{105} \times 540$$

$$= ₹\ 514.29$$

S.P.യും C.P.യും കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം താഴെ കാണുന്നതുപോലെ ചുരുക്കി എഴുതാം

1. ലാഭമാണെങ്കിൽ, (i) $\text{C.P.} = \left(\frac{100}{100 + \text{ലാഭ}\%}\right) \times \text{S.P.}$	1. നഷ്ടമാണെങ്കിൽ, (ii) $\text{C.P.} = \left(\frac{100}{100 + \text{നഷ്ട}\%}\right) \times \text{S.P.}$
2. ലാഭമാണെങ്കിൽ, (i) $\text{S.P.} = \left(\frac{100 + \text{ലാഭ}\%}{100}\right) \times \text{C.P.}$	2. നഷ്ടമാണെങ്കിൽ, (ii) $\text{S.P.} = \left(\frac{100 + \text{നഷ്ട}\%}{100}\right) \times \text{C.P.}$

ഉദാഹരണം *1.6*

ഹമീദ് ₹15,200 ന് ഒരു കളർ ടി.വി. വാങ്ങിയിട്ട് , 20% നഷ്ടത്തിന് അത് വിറ്റു. ടി.വി.യുടെ വിറ്റ വില എത്ര ?

നിർദ്ധാരണം

രാഹുൽ ഉപയോഗിച്ച രീതി C.P. യുടെ 20% നഷ്ടം

$= \frac{20}{100} \times 15200$

= ₹ 3040

S.P. = C.P. – നഷ്ടം

= 15,200 – 3,040

= ₹ 12,160

OR

റോഷൻ സൂത്രരീതി ഉപയോഗിച്ചു :

C.P. = ₹ 15, 200

നഷ്ടം = 20%

S.P. = $\frac{(100 - \text{നഷ്ട}\%)}{100}$ x C.P.

$= \frac{100 - 20}{100} \times 15200$

$= \frac{80}{100} \times 15200$

= ₹ 12,160

ഒരേ ഉത്തരം തന്നെ രാഹുലിനും റോഷനും കിട്ടിയത്. അതായത് ടി.വി. യുടെ വിറ്റവില ₹ 12,160.

ഉദാഹരണം *1.7*

ഒരു സ്കൂട്ടി ₹13,600 ന് വിറ്റപ്പോൾ 15% നഷ്ടമുണ്ടായി. സ്കൂട്ടിയുടെ വാങ്ങിയ വില കാണുക.

ദേവി ഈ രീതി ഉപയോഗിച്ചു:

15 % നഷ്ടം ആണെങ്കിൽ വാങ്ങിയ വില ₹100 , നഷ്ടം = ₹ 15 അതിനാൽ

S.P. എന്നത് (100-15) = ₹ 85

S.P. ₹ 85, C.P. ₹100

അപ്പോൾ S.P. ₹ 13600 ആകുമ്പോൾ

C.P. = $\frac{100 \times 13600}{85}$

= ₹16,000

OR

രേവതി സൂത്രവാക്യരീതി ഉപയോഗിച്ചു.:

നഷ്ടം = 15%.

S.P. = ₹ 13,600

C.P. = $\frac{100}{(100 - \text{നഷ്ട}\%)}$ x S.P.

$= \frac{100}{100 - 15} \times 13600$

$= \frac{100}{85} \times 13600$

= ₹16,000

അതിനാൽ സ്കൂട്ടിയുടെ വാങ്ങിയ വില ₹16000

ശ്രമിക്കുക

ഇനങ്ങൾ	വാങ്ങിയവില ₹	ലാഭം / നഷ്ടം	വിറ്റവില ₹
വാഷിംങ് മെഷീൻ	16,000	9% ലാഭം	
മൈക്രോ ഓവൻ	13,500	12% നഷ്ടം	
മര അലമാര		13% നഷ്ടം	6,786
സോഫസെറ്റ്		12½% ലാഭം	7,000
എയർ കണ്ടീഷണർ	32,400	7% ലാഭം	

ഉദാഹരണം 1.8

11 പേനയുടെ വാങ്ങിയ വില 10 പേനയുടെ വിറ്റ വിലയ്ക്ക് തുല്യമാണ്. ലാഭത്തിന്റെ അല്ലെങ്കിൽ നഷ്ടത്തിന്റെ ശതമാനം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഓരോ പേനയുടെയും S.P. x ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

10 പേനകളുടെ S.P. = ₹ 10 x

11 പേനകളുടെ S.P. = ₹ 11 x

തന്നിട്ടുള്ളത് : 11 പേനകളുടെ C.P. = 10 പേനകളുടെ S.P. = ₹10 x

ഇവിടെ , S.P. > C.P.

∴ ലാഭം = S.P. – C.P.

= 11x – 10x = x

$$\text{ലാഭ\%} = \frac{\text{ലാഭം}}{\text{C.P.}} \times 100 = \frac{x}{10x} \times 100 = 10\%.$$

ഉദാഹരണം 1.9

ഒരാൾ ഒരു വാച്ചിന് ₹ 594 നിരക്കിൽ രണ്ട് വാച്ചുകൾ വിറ്റു. ഒന്നിന് 10 % ലാഭവും മറ്റേതിന് 10% നഷ്ടവുമാണ്. മൊത്തത്തിൽ അയാൾക്കുണ്ടായ ലാഭത്തിന്റെയോ അല്ലെങ്കിൽ നഷ്ടത്തിന്റെയോ ശതമാനം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് :

ആദ്യത്തെ വാച്ചന്റെ S.P. = ₹ 594, ലാഭ % = 10%

$$\therefore \text{ആദ്യത്തെ വാച്ചിന്റെ C.P.} = \frac{100}{(100 + \text{ലാഭ\%})} \times \text{S.P.}$$

$$= \frac{100}{(100+10)} \times 594$$

$$= \frac{100}{110} \times 594 = ₹\ 540$$

അതുപോലെ അയാൾക്ക് 10% നഷ്ടമായ രണ്ടാമത്തെ വാച്ചിന്റെ C.P.

$$= \frac{100}{(100 - \text{നഷ്ട\%})} \times \text{S.P.}$$

$$= \frac{100}{(100-10)} \times 594 = \frac{100}{90} \times 594 = ₹\ 660$$

മൊത്തത്തിൽ ലാഭമാണോ നഷ്ടമാണോ എന്നു പറയണമെങ്കിൽ, നമുക്ക് രണ്ടിന്റേയും C.P. യും S.P. യും കാണണം.

രണ്ട് വാച്ചുകളുടെയും മൊത്തം C.P. = 540 + 660 = ₹1,200

രണ്ട് വാച്ചുകളുടെയും മൊത്തം S.P. = 594 + 594 = ₹ 1,188

നഷ്ടം = 1,200 – 1,188 = ₹ 12

$$\text{നഷ്ട \%} = \frac{\text{നഷ്ടം}}{\text{C.P.}} \times 100$$

$$= \frac{12}{1200} \times 100 = 1\%.$$

1.3.3. അധിക ചെലവുകളുടെ പ്രയോഗങ്ങൾ

മായ തന്റെ അച്ഛന്റെയൊപ്പം എയർ കൂളർ വാങ്ങാൻ പോയി. ₹18,000 യ്ക്ക് അവർ അത് വാങ്ങി. കൂളർ വാങ്ങിയ കട വീടിനടുത്തല്ല. അതിനാൽ എയർ കൂളർ വീട്ടിലേക്ക് കൊണ്ടുവരുന്നതിനുവേണ്ടി വാഹനം ഏർപ്പെടുത്തി. വാഹനത്തിന് ₹500 കൂലിയായി. അതിനാൽ എയർ കൂളറിന്റെ വാങ്ങിയവില ₹18,000 വാഹനത്തിന്റെ വാടക ₹500 കൂടെ ഉൾപ്പെടുത്തിയതിനെ യാണ് അധിക ചെലവ് എന്ന് പറയുന്നത്.

ഇവിടെ

എയർ കൂളറിന്റെ C.P.= യഥാർത്ഥ വില+ വാഹനത്തിന്റെ വാടക

$= 18,000 + 500 = ₹\ 18,500$

മറ്റൊരു സാഹചര്യം പരിഗണിക്കുക, ചെന്നൈയിലെ ഒരു വ്യാപാരിയുടെ കൈയ്യിൽ നിന്നും കിഷോറിന്റെ അച്ഛൻ ഒരു പഴയ മാരുതി കാർ ₹2,75,000 വാങ്ങിയിട്ട് ₹25000 ചെലവാക്കി ചായം പൂശി. എന്നിട്ട് അദ്ദേഹം കാറിനെ സ്വന്തം ഗ്രാമത്തിൽ എത്തിക്കുന്നതിനുവേണ്ടി ഒരു വാഹനം ഏർപ്പെടുത്തി അതിനു വീണ്ടും ₹2000 ചെലവാക്കി താഴെ പറയുന്ന ചോദ്യങ്ങൾക്ക് നിങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം നൽകാൻ കഴിയുമോ ?

(i) കാറിന്റെ മൊത്ത വാങ്ങിയവില എത്ര ?

(ii) കാറിന്റെ യഥാർത്ഥവില എത്ര ?

(iii) ഇവിടെ പ്രതിപാദിച്ചിരിക്കുന്ന അധിക ചെലവുകൾ ഏതെല്ലാം ?

മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽ ചായം പൂശിയതിന്റെ കൂലിയും, വാഹനത്തിന്റെ വാടകയുമാണ് അധികചെലവുകൾ

∴ കാറിന്റെ വാങ്ങിയ വില = യഥാർത്ഥ വാങ്ങിയ വില + അധിക ചെലവുകൾ

$= 2,75,000 + (25,000 + 2,000)$

$= 2,75,000 + 27,000 = ₹\ 3,02,000$

അതിനാൽ നമുക്ക് നിർണ്ണയിക്കാം,

ചിലപ്പോൾ സാധനങ്ങൾ വാങ്ങുമ്പോഴും, വിൽക്കുമ്പോഴും ചില അധിക ചെലവുകളുണ്ടാകും. ഈ ചെലവുകൾ വാങ്ങിയ വിലയിൽ ഉൾപ്പെടുത്തണം. ഈ ചെലവുകളെയാണ് അധിക ചെലവുകൾ എന്ന് പ്രതിപാദിക്കുന്നത്. കേടുപാടുകൾ തീർക്കുന്നതിന്, തൊഴിലാളികളുടെ കൂലികൾ, വസ്തുക്കൾ കയറ്റികൊണ്ടുപോകുന്നത് മുതലായവയ്ക്കുള്ള ചെലവുകളെ ആണ് ഇവിടെ ഉൾപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ളത്.

ഉദാഹരണം *1.10*

രാജു ₹36000 യ്ക്ക് ഒരു മോട്ടോർ സൈക്കിൾ വാങ്ങി ചില സവിശേഷ സജ്ജീകരണങ്ങൾ ചെയ്ത് മോടിപിടിപ്പിച്ചപ്പോൾ കാണാൻ നല്ല ഭംഗിയായിരുന്നു. അവൻ ബൈക്കിനെ 10 % ലാഭത്തിന് വിറ്റപ്പോൾ അവന് ₹44,000 ലഭിച്ചു. അവൻ സവിശേഷ സജ്ജീകരണങ്ങൾ വാങ്ങുന്നതിനായി എത്ര രൂപ ചെലവഴിച്ചു ?

നിർദ്ധാരണം

C.P. ₹100 ആണെന്നിരിക്കട്ടെ

ലാഭം = 10%, S.P. = ₹110

S.P. ₹110 ആണെങ്കിൽ C.P. ₹100 ആകുന്നു.

അപ്പോൾ S.P. ₹ 44000 ആകുമ്പോൾ

$$\text{C.P.} = \frac{44000 \times 100}{110} = ₹\ 40,000$$

∴ സവിശേഷ സജ്ജീകരണങ്ങൾക്ക് ചെലവായ തുക = 40,000 – 36,000 = ₹ 4,000

അഭ്യാസം 1.2

1. വാങ്ങിയ വില / വിറ്റവില കാണുക.

വാങ്ങിയവില	വിറ്റവില	ലാഭം	നഷ്ടം
(i) ₹ 7,282		₹ 208	
(ii)	₹ 572	₹ 72	
(iii) ₹ 9,684			₹ 684
(iv)	₹ 1,973	₹ 273	
(v) ₹ 6,76,000			₹ 18,500

2. അനുയോജ്യമായ രീതിയിൽ വിട്ടുപോയ കോളം പൂരിപ്പിക്കുക.

C.P.	S.P.	ലാഭം & ലാഭ %	നഷ്ടം & നഷ്ട %
(i) ₹ 320	₹ 384		
(ii) ₹ 2,500	₹ 2,700		
(iii) ₹ 380	₹ 361		
(iv) ₹ 40			₹ 2 നഷ്ടം
(v) ₹ 5,000		₹ 500 ലാഭം	

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയ്ക്ക് 5 % ലാഭം ലഭിച്ചാൽ **S.P.**. കാണുക

(i) ₹700 യ്ക്ക് ഒരു സൈക്കിളിന് ₹ 50 അധിക ചെലവോടുകൂടി

(ii) ₹1150 യ്ക്ക് കമ്പ്യൂട്ടർ മേശ, ₹50 ഗതാഗത ചെലവോടുകൂടി

(iii) ₹2560 യ്ക്ക് ഒരു ഗ്രൈൻഡർ, അതിന്റെ കേടുപാടുകൾ തീർക്കുന്നതിനുള്ള ചെലവ് ₹140

4. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ ഒരു മേശ ₹1320 വിറ്റപ്പോൾ 10 % ലാഭം ലഭിച്ചു. മേശയുടെ C.P. കാണുക.
5. 16 നോട്ടുബുക്കുകളുടെ വാങ്ങിയ വില 12 നോട്ടുബുക്കുകളുടെ വിറ്റ വിലയ്ക്ക് തുല്യമാണ്. ലാഭ ശതമാനം കാണുക.
6. ഒരാൾ രണ്ട് സാധനങ്ങൾ ഓരോന്നും ₹ 375 വിറ്റു. ആദ്യത്തെ സാധനത്തിൽ അയാൾക്ക് 25 % ലാഭം കിട്ടി, അടുത്തതിൽ 25 % നഷ്ടം ഈ ഇടപാടിൽ അദ്ദേഹത്തിനുള്ള ലാഭം അല്ലെങ്കിൽ നഷ്ടം എത്ര? കൂടാതെ ഇടപാടിലുള്ള ലാഭ ശതമാനം അല്ലെങ്കിൽ നഷ്ട ശതമാനം കാണുക.
7. അൻപരശൻ ₹17,75,000 ഒരു വീട് വാങ്ങി അതിന്റെ ഉൾഭാഗത്തിന്റെ ആഡംബരങ്ങൾക്ക് ₹1,25,000 ചിലവാക്കി. 20% ലാഭത്തിന് അദ്ദേഹം ആ വീടു വിറ്റു. വീടിന്റെ S.P. കാണുക.
8. അമല അറുപതിനായിരം രൂപ ചിലവാക്കി ഒരു വീടു പുതുക്കി പണിതതിനു ശേഷം 20% ലാഭത്തിന് വിറ്റു. വിറ്റ വില നാല്പത്തി രണ്ടു ലക്ഷം രൂപയാണെങ്കിൽ അവർ ആ വീട് വാങ്ങാൻ എത്ര ചെലവാക്കി?
9. ജയകുമാർ ₹21,00,000 സിറ്റിയിൽ നിന്ന് അകലെയായി ഒരു പുരയിടം വാങ്ങി. ₹1,45,000 ചിലവാക്കി അതിനു ചുറ്റും മതിൽ കെട്ടി. പുരയിടം ₹25,00,000 വിൽക്കുന്നതിനു വേണ്ടി ₹5000 ചെലവാക്കി പത്രത്തിൽ ഒരു പരസ്യം കൊടുത്തു. ഇപ്പോൾ, ലാഭശതമാനം കാണുക.
10. ഒരാൾ രണ്ട് ഇനത്തിലുള്ള നായ്ക്കളിൽ ഓരോന്നിനെയും ₹ 3,605 വിറ്റു. ഒന്നിൽ 15% ലാഭവും മറ്റേതിൽ 9 % നഷ്ടവും ആയി മൊത്തത്തിലുള്ള ലാഭം അല്ലെങ്കിൽ നഷ്ടം കാണുക (സൂചന ഓരോന്നിന്റെയും C.P. കാണുക).

1.3.4 കിഴിവുകളുടെ പ്രയോഗം

പൂജ അവളുടെ രക്ഷിതാക്കൾക്ക് ഒപ്പം പൊങ്കൽ ഉത്സവ ത്തിനുള്ള വസ്ത്രങ്ങൾ വാങ്ങുന്നതിനുവേണ്ടി ഇന്നലെ ഒരു കടയിൽ പോയി. കടയിൽ അവൾ ധാരാളം കൊടികൾ (Banner) കണ്ടു. പക്ഷേ അതിലെ ഉള്ളടക്കം അവൾക്ക് മനസ്സിലായില്ല.

ഇത് മനസ്സിൽ വച്ചിട്ട്, അവൾ ഒരു കടയിൽ കയറി ഒരു ഉടുപ്പു വാങ്ങി

ഉടുപ്പിന്റെ വില ₹ 550 എന്ന് അതിൽ പതിച്ചിട്ടുണ്ടായിരുന്നു. അതിനെ മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ടവില (Marked Price) എന്ന് വിളിക്കുന്നു. (ഇതിനെ ചുരുക്കി M.P.) അവൾ കടക്കാരന് ₹ 550 കൊടുത്തു. പക്ഷേ കടക്കാരൻ അവൾക്ക് ബാക്കി തുക തിരികെ കൊടുത്തിട്ട് 20% കിഴിവുണ്ടെന്ന് അറിയിച്ചു.

ഇവിടെ, 20% കിഴിവ് എന്ന് അർത്ഥമാക്കുന്നത്, അതിന്റെ മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വിലയിൽ നിന്ന് 20% കിഴിവ്.

കിഴിവ് $= \frac{20}{100} \times 550 = ₹110$

ഒരു സാധനത്തിന്റെ **മുദ്രണം** ചെയ്യപ്പെട്ട വില അല്ലെങ്കിൽ **പട്ടികയിൽ ചേർക്കപ്പെട്ട വില**യിൽ നിന്ന് കുറയ്ക്കുന്നതാണ് **കിഴിവ്.**

> ഒരു വസ്തുവിന്റെ കിഴിവ് കാണിക്കുന്നതിനു മുൻപ് അതിൽ പതിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന സാധാരണ വിലയാണ് മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില (M.P) അല്ലെങ്കിൽ പട്ടികയിൽ ചേർക്കപ്പെട്ട വില.

പൂജ കടക്കാരന് കൊടുത്ത തുക ₹ 440

= ₹ 550 – ₹ 110

= മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില – കിഴിവ്

അതിനാൽ നമുക്ക് ഇപ്രകാരം നിർണ്ണയിക്കാം :

കിഴിവ്	= മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില – വിറ്റവില
വിറ്റവില	= മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില – കിഴിവ്
മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില	= വിറ്റവില + കിഴിവ്

ഉത്സവകാലങ്ങളിലും തമിഴ് മാസമായ ആടിയിലും കിഴിവ് അല്ലെങ്കിൽ ഇളവ് 10%, 20%, 30%...., എന്നിങ്ങനെ വില്പനവർദ്ധിപ്പിക്കുന്നതിനു വേണ്ടി കോ ഓപ്ടെകസ്, ഖാദിയും മറ്റു കടകളും ഉപഭോക്താക്കൾക്ക് നൽകാറുണ്ട്.

ഉദാഹരണം *1.11*

ഒരു സൈക്കിളിൽ മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില ₹1500 അതിനെ ₹ 1350 വിറ്റു. കിഴിവ് ശതമാനം എത്ര ?

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് : മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ടവില = ₹1500, വിറ്റവില = ₹ 1350

കിഴിവ് തുക = മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ടവില – വിറ്റവില

= 1500 – 1350

= ₹150

₹1500 ന്റെ കിഴിവ് = ₹ 150

₹ 100 ന്റെ കിഴിവ് = $\frac{150}{1500} \times 100$

കിഴിവ് ശതമാനം = 10%.

മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വിലയുടെ മേൽ കിഴിവുള്ളതിനാൽ മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വിലയാണ് അടിസ്ഥാനമായി നാം ഉപയോഗിക്കേണ്ടത്.

ഉദാഹരണം *1.12*

ഒരു ഉടുപ്പിന്റെ മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ടവില ₹ 220. വില്പനയിൽ 20% കിഴിവ് അറിയിച്ചു. അതിന്റെ കിഴിവും വിറ്റവിലയും എത്ര ?

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് : ഉടുപ്പിൽ മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില = ₹ 220, കിഴിവിന്റെ നിരക്ക് = 20%

കിഴിവിന്റെ തുക = $\frac{20}{100} \times 220$

= ₹ 44

∴ ഉടുപ്പിന്റെ വിറ്റവില = മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ടവില – കിഴിവ്

= 220 – 44

= ₹ 176

ഉദാഹരണം 1.13

5% കിഴിവിൽ ഒരു അലമാര ₹ 5,225 വിറ്റു. അതിൽ മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

കൃഷ്ണ ഉപയോഗിച്ച രീതി:

കിഴിവ് ശതമാനത്തിൽ തന്നിട്ടുണ്ട്

അതിനാൽ M.P. ₹100 എന്നിരിക്കട്ടെ.

കിഴിവിന്റെ നിരക്ക് = 5%

കിഴിവിന്റെ തുക $= \frac{5}{100} \times 100$

= ₹5

വിറ്റവില = M.P. – കിഴിവ്

= 100 – 5 = ₹ 95

വിറ്റവില ₹ 95 ആണെങ്കിൽ M.P. ₹ 100 ആണ്

S.P. ₹ 5225 ആകുമ്പോൾ

M.P. $= \frac{100}{95} \times 5225$

∴ അലമാരയുടെ M.P. = ₹ 5,500

[OR]

വിഘ്നേഷ് സൂത്ര രീതി ഉപയോഗിച്ച്:

S.P. = ₹ 5225

കിഴിവ് = 5%

M.P. = ?

M.P. = $\frac{100}{(100 - \text{കിഴിവ് }\%)}$ x S.P.

$= \left(\frac{100}{100-5}\right) \times 5225$

$= \frac{100}{95} \times 5225$

= ₹ 5,500

ഉദാഹരണം 1.14

ഒരു കടക്കാരൻ അയാളുടെ ഉപഭോക്താവിന് 10% കിഴിവ് അനുവദിച്ച ശേഷവും 20% ലാഭം കിട്ടി. കടക്കാരൻ ₹450 രൂപയ്ക്ക് വാങ്ങിയ വസ്തുവിൽ മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില കാണുക

നിർദ്ധാരണം

വനിത ഉപയോഗിച്ച രീതി :

M. P. ₹100 എന്നിരിക്കട്ടെ.

കിഴിവ് = M. P. യുടെ 10%

$= \frac{10}{100}$ M.P. $= \frac{10}{100} \times 100$

= ₹ 10

S.P. = M.P. – കിഴിവ്

= 100 – 10 = ₹ 90

ലാഭം = C.P. യുടെ 20%

$= \frac{20}{100} \times 450$ = ₹ 90

S.P. = C.P. + ലാഭം

= 450 + 90 = ₹ 540

S.P. ₹90 ആണെങ്കിൽ, M.P. ₹ 100 ആണ്.

S.P. ₹ 540 ആകുമ്പോൾ,

M.P. $= \frac{540 \times 100}{90}$ = ₹ 600

∴ ഒരു വസ്തുവിന്റെ M.P. = ₹ 600

[OR]

വിമൽ സൂത്രവാക്യ രീതി ഉപയോഗിച്ചു :

കിഴിവ് = 10%, ലാഭം = 20%,

C.P. = ₹ 450, M.P. = ?

M.P. = $\frac{100 + \text{ലാഭ }\%}{(100 - \text{കിഴിവ് }\%)}$ x C.P.

$= \frac{(100+20)}{(100-10)} \times 450$

$= \frac{120}{90} \times 450$

= ₹ 600

ഉദാഹരണം 1.15

ഒരു വ്യാപാരി 10% കിഴിവ് അനുവദിച്ച ശേഷവും 10% ലാഭം ലഭിച്ചു. ₹ 220 മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട ബുക്കിന്റെ വാങ്ങിയ വില എത്ര ?

നിർദ്ധാരണം

സുഗന്ധൻ ഉപയോഗിച്ച രീതി :

M.P. = ₹ 220

കിഴിവ് = M.P. യുടെ 10%

$= \frac{10}{100} \times 220 = ₹\ 22$

S.P. = M.P. – കിഴിവ്

= 220 – 22 = ₹ 198

C.P. ₹ 100 ആണെങ്കിൽ

ലാഭം = C. P. യുടെ 10%

$= \frac{10}{100} \times 100 = ₹\ 10$

S.P. = C.P. + ലാഭം

= 100 + 10

= ₹ 110

S.P. ₹ 110 ആയാൽ, C.P. ₹ 100 ആണ്

S.P. ₹ 198,

C.P. $= \frac{198 \times 100}{110}$

= ₹ 180

[OR]

മുകുന്ദൻ സൂത്രവാക്യരീതി ഉപയോഗിച്ച് :

കിഴിവ് = 10%

ലാഭം = 10%

M.P. = ₹ 220

C.P. $= \frac{100 - \text{കിഴിവ് }\%}{(100 + \text{ ലാഭ }\%)} \times \text{M.P.}$

$= \frac{100 - 10}{100 + 10} \times 220$

$= \frac{90}{110} \times 220 = ₹180$

ഉദാഹരണം 1.16

ഒരു ടെലിവിഷൻ സെറ്റിന് യഥാക്രമം 10 % കൂടാതെ 20% തുടരെയുള്ള കിഴിവുകൾ കൊടുത്തശേഷം ₹ 14,400 വിറ്റു. മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില എത്ര ?

നിർദ്ധാരണം

വിറ്റവില = ₹ 14,400

M.P. 100 എന്നിരിക്കട്ടെ.

ആദ്യത്തെ കിഴിവ് = $10\% = \frac{10}{100} \times 100 = ₹\ 10$

ആദ്യത്തെ കിഴിവിന് ശേഷമുള്ള S.P. = 100 – 10 = ₹ 90

രണ്ടാമത്തെ കിഴിവ് = $20\% = \frac{20}{100} \times 90 = ₹\ 18$

രണ്ടാമത്തെ കിഴിവിന് ശേഷമുള്ള വിറ്റവില= 90 – 18 = ₹ 72

S.P. ₹ 72 ആണെങ്കിൽ, M.P. ₹ 100

S.P. ₹ 14,400 ആകുമ്പോൾ,

M.P. $= \frac{14400 \times 100}{72} = ₹\ 20{,}000$

M.P. = ₹ 20,000

ഉദാഹരണം 1.17

ഒരു വ്യാപാരി ₹ 1200 ന് ഒരു വസ്തു വാങ്ങി അതിൽ C.P. യുടെ 30 % വില കൂടുതൽ മുദ്രണം ചെയ്തിട്ട് 20% കിഴിവ് അനുവദിച്ച് വിറ്റു. S.P. യും ലാഭശതമാനവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം:

വസ്തുവിന്റെ C.P. ₹ 100 എന്നിരിക്കട്ടെ.

M.P. = C.P. യെക്കാൾ 30% കൂടുതൽ = ₹ 130

C.P. ₹ 100 ആണെങ്കിൽ, M.P. ₹ 130

C.P. ₹ 1200 ആകുമ്പോൾ, M.P. $= \frac{1200 \times 130}{100}$ = ₹ 1560

കിഴിവ് = 1560 ന്റെ 20% $= \frac{20}{100} \times 1560$ = ₹ 312

S.P. = M.P. – കിഴിവ്

= 1560 – 312 = ₹ 1248

ലാഭം = S.P. – C.P.

= 1248 –1200 = ₹ 48

∴ ലാഭ % $= \frac{\text{Profit}}{\text{C.P.}} \times 100$

$= \frac{48}{1200} \times 100 = 4\%$

ശ്രമിക്കുക

ഒരു കടയിൽ 20% കിഴിവ് നൽകുന്നുണ്ട്. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഓരോന്നിന്റെയും വില എന്ത് ?

(i) ₹120 മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട ഒരു ഉടുപ്പ്

(ii) ₹250 മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട ഒരു ബാഗ്

(iii) ₹750 മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട ഒരു ജോഡി ഷൂസ്

1.3.5 നികുതിയുടെ പ്രയോഗങ്ങൾ

നികുതികൾ സമയത്ത് അടച്ചുതീർക്കണമെന്ന് ആവശ്യപ്പെട്ടു കൊണ്ടുള്ള പരസ്യം നാം ഇടയ്ക്കിടെ പത്രങ്ങളിലും, ദൂരദർശനി ലും കാണാറുണ്ടല്ലോ. എന്താണ് നികുതി? സാധാരണ ജനങ്ങളിൽ നിന്നും സർക്കാർ നികുതി ശേഖരിയ്ക്കുന്നത് എന്തിനുവേണ്ടി ?

സർക്കാർ ജനങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാന സൗകര്യങ്ങളായ റോഡുകൾ, റെയിൽ പാതകൾ, ആശുപത്രികൾ, വിദ്യാലയങ്ങൾ മുതലായവയ്ക്കുള്ള പണം അനുവധിക്കുന്നു. ഇതിലേക്കുവേണ്ടിയുള്ള പണം ജനങ്ങളുടെ കൈയ്യിൽ നിന്നും വിവിധതരത്തിലുള്ള നികുതിയുടെ രൂപത്തിൽ സർക്കാർ ശേഖരിക്കുന്നു.

നികുതികൾ രണ്ട് തരത്തിലുണ്ട്.

1. പ്രത്യക്ഷ നികുതി

സർക്കാരിന് പൊതു ജനങ്ങൾ നേരിട്ട് നൽകുന്ന നികുതിയെ പ്രത്യക്ഷ നികുതി എന്നു പറയുന്നു. ഇവ വരുമാന നികുതി, സ്വത്ത് നികുതി, തൊഴിൽ നികുതി, ജല നികുതി മുതലായവയാകുന്നു.

2. പരോക്ഷ നികുതി

സർക്കാരിന് ചില നികുതികൾ നേരിട്ട് നൽകുന്നില്ല. ഇതിനെ പരോക്ഷ നികുതി എന്ന് പറയുന്നു. അവ താഴെ വിശദീകരിക്കുന്നു.

എക് സൈസ് നികുതി

നമ്മുടെ രാജ്യത്ത് ഉണ്ടാകുന്ന ചില വസ്തുക്കളുടെ മേൽ ചുമത്തുന്ന നികുതിയെ എക്സൈസ് നികുതി എന്നു പറയുന്നു. ഇത് ഭാരത സർക്കാർ ശേഖരിക്കുന്നു.

സേവന നികുതി

ഹോട്ടലുകൾ, സിനിമ തീയേറ്ററുകൾ, ചാർട്ടേഡ് അക്കൗണ്ടന്റുകളുടെ സേവനങ്ങൾ, ടെലിഫോൺ ബില്ലുകൾ, മുതലായവയുടെ മേൽ ചുമത്തുന്ന നികുതിക്ക് **സേവന നികുതി** എന്നു പറയുന്നു. സേവനം നൽകുന്നയാൾ ഉപഭോക്താവിൽ നിന്ന് ഈ നികുതി ശേഖരിച്ച് സർക്കാരിന് നൽകുന്നു.

വരുമാന നികുതി

ഒരു നിശ്ചിത വരുമാനത്തിൽ കൂടുതൽ വാർഷിക വരുമാനമുള്ള ഓരോ പൗരനിൽ നിന്നും സർക്കാർ ശേഖരിയ്ക്കുന്ന നികുതിയെ വരുമാന നികുതി എന്നു പറയുന്നു. ഇത് സർക്കാരിന്റെ ഒരു പ്രധാനപ്പെട്ട നികുതിയുടെ ഉറവിടമാണ് നമ്മുടെ രാജ്യത്തെ, ഓരോ യഥാർത്ഥ പൗരനും നമ്മുടെ കടമകളെക്കുറിച്ചും ബോധവാന്മാരായിരിക്കണം.

വില്പന നികുതി / വാറ്റ് നികുതി

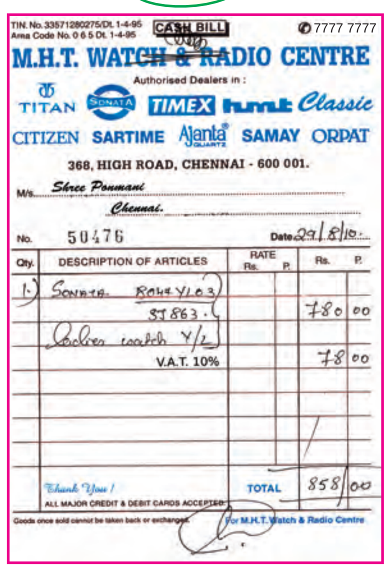
വിൽക്കുന്ന ഓരോ വസ്തുവിനും സർക്കാർ ചുമത്തുന്നതാണ് വിൽപ്പന നികുതി

വില്പന നികുതി

വിൽക്കുന്ന ഓരോ ഉല്പന്നങ്ങൾക്കും വില്പനക്കാരൻ ചുമത്തുന്ന നികുതിയാണ്. വില്പനനികുതി. ഉപഭോക്താക്കൾ ഉല്പന്നങ്ങൾ വാങ്ങുമ്പോൾ ഉല്പന്നങ്ങളുടെ വിലയ്ക്ക് ഒപ്പം വിലപ്ന നികുതിയും ചേർത്ത് നല്കണം

വിൽക്കുന്ന വിലയോട് സർക്കാർ ചുമത്തുന്ന വില്പന നികുതിയും ചേർത്ത് ബില്ല് നൽകുന്നു.

ഇപ്പോൾ **വിലയ്ക്ക് ഒപ്പം നികുതിയും ചേർക്കുന്നതിനെ വാറ്റ്** എന്ന് പറയുന്നു. ഇതിനർത്ഥം നാം അടയ്ക്കുന്ന തുക ബില്ലിലെ തുകയും വാറ്റും ചേർന്നതാണ്



പ്രവർത്തി

2011 ലെ ചില ഉല്പന്നങ്ങളുടെ വില്പന നികുതി നിങ്ങൾക്ക് കാണാൻ കഴിയുമോ ?

1. വൈദ്യുത ഉപകരണങ്ങൾ ______ %
2. പെട്രോൾ ______ %
3. ഡീസൽ ___ %
4. ഗൃഹോപകരണങ്ങൾ ______ %
5. രാസ വസ്തുക്കൾ ______ %

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

അരി, പഞ്ചസാര, പാൽ, ഉപ്പ്, പേന, പെൻസിലുകൾ, ബുക്കുകൾ മുതലായവയ്ക്ക് വില്പന നികുതിയിൽ നിന്ന് സർക്കാർ ഒഴിവാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

വില്പന നികുതി കണക്കാക്കൽ

$$\text{വില്പന നികുതിയുടെ തുക} = \frac{\text{വില്പന നികുതിയുടെ നിരക്ക്}}{100} \times \text{ഇനങ്ങളുടെ വില}$$

$$\text{വില്പന നികുതിയുടെ നിരക്ക്} = \frac{\text{വില്പന നികുതിയുടെ തുക}}{\text{ഇനങ്ങളുടെ വില}} \times 100$$

$$\text{ബില്ലിലെ തുക} = \text{ഇനങ്ങളുടെ വില} + \text{വില്പന നികുതിയുടെ തുക}$$

ഉദാഹരണം *1.18*

വിനോദ് ₹ 12,000 ന് സംഗീതോപകരണങ്ങൾ വാങ്ങി അതിന്റെ വില്പന നികുതി 8% ആണെങ്കിൽ വില്പന നികുതിയും അവൻ അടച്ച ആകെ തുകയും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

സംഗീതോപകരണത്തിന്റെ മൂല്യം = ₹12,000

വില്പന നികുതി നിരക്ക് = 8%

$$\text{വില്പന നികുതിയുടെ തുക} = \frac{8}{100} \times 12000$$

$$= ₹\ 960$$

$$\text{വില്പന നികുതി ഉൾപ്പെടെ വിനോദ് അടച്ച ആകെ തുക} = 12,000 + 960$$

$$= ₹\ 12,960$$

ഉദാഹരണം *1.19*

വില്പന നികുതി ഉൾപ്പെടെ ഒരു ഫ്രിഡ്ജ് ₹ 14,355 യ്ക്ക് വാങ്ങി. ഫ്രിഡ്ജിന്റെ യഥാർത്ഥ വില ₹ 13,050 ആണെങ്കിൽ വില്പന നികുതി നിരക്ക് കണക്കാക്കുക

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് : ഫ്രിഡ്ജിന്റെ ബില്ലിലെ വില = ₹ 14,355, യഥാർത്ഥ വില = ₹13,050

$$\text{വില്പന നികുതി} = \text{ബില്ലിലെ തുക} - \text{ഇനത്തിന്റെ വില}$$

$$= 14,355 - 13,050 = ₹\ 1,305$$

$$\text{വില്പനനികുതി നിരക്ക്} = \frac{\text{വില്പന നികുതി}}{\text{ഇനത്തിന്റെ വില}} \times 100$$

$$= \frac{1305}{13050} \times 100 = 10\%$$

ഉദാഹരണം 1.20

പ്രിയ ₹ 2730 യ്ക്ക് ഒരു സ്യൂട്ട്കേയ്സ് വാങ്ങി. ഇതിന്റെ വാറ്റ് 5%. വാറ്റ് ചുമത്തുന്നതിനുമുമ്പ് സ്യൂട്ട്കേയ്സിന്റെ വില എത്ര ? വാറ്റ് എത്രയെന്ന് പ്രസ്താവിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് : വാറ്റ് 5 %

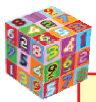
വാറ്റ് ചുമത്തുന്നതിനു മുമ്പുള്ള വില ₹ 100 എങ്കിൽ വാറ്റ് ചുമത്തിയതിനുശേഷമുള്ള വില ₹ 105.

ഇപ്പോൾ വാറ്റ് ഉൾപ്പെടെയുള്ള വില ₹ 105. സ്യൂട്ട്കെയ്സിന്റെ യഥാർത്ഥവില ₹100.

നികുതി ഉൾപ്പടെയുള്ള വില ₹ 2730 ആണെങ്കിൽ.

$$= \frac{100}{105} \times 2730 = ₹\ 2,600$$

സ്യൂട്ട് കെയ്സിന്റെ യഥാർത്ഥ വില $= ₹\ 2,600$



ശ്രമിക്കുക

$\therefore$ വാറ്റ് $= 2,730 - 2,600 = ₹\ 130$

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ വാങ്ങുമ്പോൾ 5% വില്പന നികുതി ചേർത്തു വാങ്ങുകയാണെങ്കിൽ ഓരോന്നിന്റെയും വാങ്ങിയ വില കാണുക:
   (i) ₹ 60 ന് തലയിണ (ii) ₹ 25 വീതമുള്ള രണ്ട് ബാർ സോപ്പുകൾ.
2. വിലയിൽ 8 % വാറ്റ് ഉൾപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. യഥാർത്ഥ വില കാണുക :
   (i) ₹ 14,500യ്ക്ക് വാങ്ങിയ വൈദ്യുത വാട്ടർ ഹീറ്റർ (ii) ₹ 200 യ്ക്കു വാങ്ങിയ ഗൃഹോപകരണങ്ങൾ.

അഭ്യാസം 1.3

1. ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക:

(i) _______ ൽ നിന്ന് കിഴിവ് കണക്കാക്കുന്നു.
(A) മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില (B) വാങ്ങിയ വില (C) വിറ്റ വില (D) പലിശ

(ii) M.P. = ₹ 140, S.P. = ₹ 105 ആണെങ്കിൽ കിഴിവ് = ________.
(A) ₹ 245 (B) ₹ 25 (C) ₹ 30 (D) ₹ 35

(iii) _______ = മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില- കിഴിവ്
(A) വാങ്ങിയവില (B) വിറ്റവില (C) മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില (D) കമ്പോളവില

(iv) ഉല്പന്നത്തിന്റെ മൂല്യത്തോടു നികുതി കൂടി ചേർക്കുന്നതിനെ _______ നികുതി എന്ന് പറയുന്നു.
(A) വില്പന നികുതി (B) വാറ്റ് (C) എക്സൈസ് നികുതി (D) സേവന നികുതി

(v) ഒരു വസ്തുവിന്റെ S.P. ₹ 240 കൂടാതെ അതിൻമേൽ തന്നിട്ടുള്ള കിഴിവ് ₹ 28, എങ്കിൽ M.P. _______ആണ്.
(A) ₹ 212 (B) ₹ 228 (C) ₹ 268 (D) ₹ 258

2. ഒരു ബുക്കിൽ മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില ₹450 യാണ് ഒരു പുസ്തക പ്രദർശന വേളയിൽ കടക്കാരൻ അതിൻമേൽ 20% കിഴിവ് നൽകിയിട്ടുണ്ട്. വിറ്റവില എത്ര ?

3. 10 %, 20% എന്നിവ ക്രമത്തിലുള്ള കിഴിവുകൾക്കുശേഷം ഒരു ടെലിവിഷൻ സെറ്റ് ₹5,760 രൂപയ്ക്ക് വിറ്റു മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില എത്ര ?

4. ശേഖർ ഒരു കമ്പ്യൂട്ടർ ₹38,000 യ്ക്കും പ്രിന്റർ ₹ 8000 യ്ക്കും വാങ്ങി, ഈ രണ്ട് ഇനങ്ങളുടെയും വില്പന നികുതി നിരക്ക് 7% ഇത് രണ്ടും വാങ്ങുന്ന ഒരാൾക്ക് എത്ര നൽകേണ്ടിവരും.

5. ഒരു പാചക ഉപകരണത്തിന്റെ വാറ്റും ചേർത്തുള്ള വിറ്റവില ₹ 19,610 യാണ്. വാറ്റ് 6 % ആണെങ്കിൽ പാചക ഉപകരണത്തിന്റെ യഥാർത്ഥ വില എത്ര ?

6. റിച്ചാർഡ് ഒരു സ്യൂട്ട് 10 % കിഴിവിൽ വാങ്ങി സ്യൂട്ടിൽ മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില ₹ 5000 അയാൾ വാങ്ങിയ വിലയുടെ 10 % വില്പന നികുതി കൊടുക്കേണ്ടി വന്നാൽ. അയാൾ എത്ര രൂപ കൊടുത്തിരിക്കണം.

7. 9% നിരക്കിൽ ഒരു റഫ്രിജിറേറ്റിൻമേലുള്ള വില്പന നികുതി ₹ 1170 യാണ്. യഥാർത്ഥത്തിലുള്ള വിറ്റവില കാണുക

8. ഒരു വ്യാപാരി തന്റെ ചരക്കുകളിൽ വാങ്ങിയ വിലയെക്കാൾ 40 % വില കൂടുതൽ മുദ്രണം ചെയ്തു. അയാൾ 5 % കിഴിവിൽ അവ വിറ്റു. അയാളുടെ നഷ്ടം അല്ലെങ്കിൽ ലാഭ ശതമാനം എത്രം ?

9. മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില ₹ 11,500 ഉള്ള ഒരു ടി.വി. 10% കിഴിവിൽ വിറ്റു. ഉത്സവകാലം പ്രമാണിച്ച് കച്ചവടക്കാരൻ വീണ്ടും 5 % കിഴിവ് അനുവദിച്ചു. ടി.വി.യുടെ വിറ്റ വില കാണുക

10. ഒരാൾ ₹ 3500 വിലയുള്ള ഒരു കൂളർ ₹ 2800 ന് വാങ്ങി കിഴിവ് ശതമാനം കാണുക.

11. ദീപ ഒരു ഉടുപ്പിന് ₹ 1200 നിരക്കിൽ 15 ഉടുപ്പുകൾ വാങ്ങി, അവ ഓരോന്നും 5 % ലാഭത്തിന് വിറ്റു. വാങ്ങിയ ആൾ 4% വില്പന നികുതി കൊടുക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഒരു ഉടുപ്പിന്റെ വില എത്ര ?

12. കിഴിവ്, കിഴിവ് ശതമാനം, വിറ്റവില, മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ടവില ഇവ കാണുക.

ക്രമ നമ്പർ	ഇനങ്ങൾ	M. P	കിഴിവുകളുടെ നിരക്ക്	കിഴിവുകളുടെ തുക	S. P
(i)	സാരി	₹ 2,300	20%		
(ii)	പേനകളുടെ സെറ്റ്	₹ 140			₹105
(iii)	ഊണ് മേശ		20%		₹16,000
(iv)	വാഷിംങ് മെഷീൻ	₹14,500			₹13,775
(v)	ഗൃഹോപകരണങ്ങൾ	₹ 3,224	12½%		

ശ്രമിക്കുക

ഏതാണ് മെച്ചമായ വാഗ്ദാനം ? തുടരെയുള്ള രണ്ടു കിഴിവുകൾ 20% ഉം 5% അല്ലെങ്കിൽ 25 % ഒറ്റ കിഴിവാണോ ? കൃത്യമായ കാരണം തരുക

ഗണിതം

1.4. കൂട്ടു പലിശ

നാം ഏഴാം ക്ലാസ്സിൽ സാധരണ പലിശ അവയുടെ സൂത്രവാക്യം, സാധാരണ പലിശയും തുകയും കണക്കാകുന്നവിധം ഇവയെകുറിച്ച് പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഈ അദ്ധ്യാത്തിൽ കൂട്ടുപലിശയുടെ ആശയം കൂട്ടു പലിശയും തുകയും ഒരു പ്രത്യേക കാലയളവിൽ പലിശ കണക്കാക്കുന്നവിധം എന്നിവയെ കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യാം.

വിനയ് ഒരു ബാങ്കിൽ നിന്ന് 2 വർഷത്തേക്ക് 4 % വാർഷിക പലിശ നിർക്കിൽ ₹ 50,000 വായ്പ വാങ്ങി.

വിനയ് ആദ്യ വർഷം അടയ്ക്കേണ്ടത്,

$$\text{സാധാരണ പലിശ} = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$= \frac{50000 \times 1 \times 4}{100} = ₹\ 2{,}000$$

ഒരു പക്ഷേ സാധാരണ പലിശയായ ₹2000 ആദ്യ വർഷ അവസാനത്തിൽ അടയ്ക്കാൻ കഴിഞ്ഞില്ലെങ്കിൽ ഈ തുക മുതലായ ₹50,000 യുടെ കൂടെ കൂട്ടി ചേർക്കും. ഇപ്പോൾ തുക P + I = ₹ 52,000 ഇത് രണ്ടാമത്തെ വർഷത്തെ മുതലാണ് ഇനി രണ്ടാമത്തെ വർഷം അവൻ അടയ്ക്കേണ്ട പലിശയാണ് കണക്കാക്കേണ്ടത്.

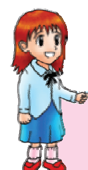
രണ്ടാമത്തെ വർഷം അവൻ അടയ്ക്കേണ്ട പലിശ

$$S.I. = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$= \frac{52000 \times 1 \times 4}{100} = ₹\ 2{,}080$$

അതിനാൽ രണ്ടാമത്തെ വർഷം വിനയ് കൂടുതൽ പലിശ നൽകേണ്ടതായി വരുന്നു.

ഇങ്ങനെ പലിശ കണക്കാക്കുന്ന രീതിയെ കൂട്ടുപലിശ എന്ന് പറയുന്നു.



നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

മുതലിനുമാത്രം പലിശ കൊടുത്താൽ അതിന്റെ സാധാരണ പലിശ എന്ന് പറയുന്നു. പക്ഷേ മുതലിനും അതിന്റെ പലിശയ്ക്കും ചേർത്ത് പലിശ അടയ്ക്കുന്നതിന് കൂട്ടുപലിശ എന്ന് പറയുന്നു.

കൂട്ടു പലിശ

പൊതുവായി ബാങ്കുകൾ, ഇൻഷുറൻസ് കമ്പനികൾ, പോസ്റ്റ് ഓഫീസുകൾ മറ്റു പണമിടപാടു സ്ഥാപനങ്ങളിൽ എല്ലാം കൂട്ടു പലിശ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ആണ് പലിശ കണക്കാക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണം 1.21

ഒരു ഫൈനാൻസ് കമ്പനിയിൽ ₹ 8000, 15 % വാർഷിക പലിശ നിരക്കിൽ 3 വർഷത്തേയ്ക്ക് രാം ലാൽ നിക്ഷേപിച്ചു. 3 വർഷത്തിനു ശേഷം രാംലാലിനു ലഭിക്കുന്ന കൂട്ടുപലിശ എത്ര ?

നിർദ്ധാരണം

വഴി 1: ഒന്നാമത്തെ വർഷത്തെ മുതൽ = ₹ 8,000

ഒന്നാമത്തെ വർഷത്തെ പലിശ $= \frac{P \times n \times r}{100}$

$$= \frac{8000 \times 1 \times 15}{100} = ₹\ 1{,}200$$

ആദ്യ വർഷ അവസാനത്തെ തുക = P + I = 8,000 + 1,200 = ₹ 9,200

വഴി 2: ആദ്യ വർഷ അവസാനത്തെ തുകയാണ് രണ്ടാമത്തെ വർഷത്തെ മുതൽ

രണ്ടാമത്തെ വർഷത്തെ മുതൽ = ₹ 9,200

രണ്ടാമത്തെ വർഷത്തെ പലിശ $= \frac{P \times n \times r}{100}$

$= \frac{9200 \times 1 \times 15}{100} =$ ₹ 1,380

രണ്ടാമത്തെ വർഷ അവസാനത്തെ തുക $= P + I = 9{,}200 + 1{,}380 =$ ₹ 10,580

വഴി 3: രണ്ടാം വർഷ അവസാന തുകയാണ് മൂന്നാം വർഷത്തെ മുതൽ

മൂന്നാമത്തെ വർഷത്തെ മുതൽ = ₹ 10,580

മൂന്നാമത്തെ വർഷത്തെ പലിശ $= \frac{P \times n \times r}{100}$

$= \frac{10580 \times 1 \times 15}{100} =$ ₹ 1,587

മൂന്നാമത്തെ വർഷ അവസാനത്തെ തുക $= P + I$

$= 10{,}580 + 1{,}587 =$ ₹ 12,167

അതിനാൽ മൂന്നു വർഷത്തിനുശേഷം രാംലാലിന് കിട്ടുന്ന കൂട്ടുപലിശ

$A - P = 12{,}167 - 8{,}000 =$ ₹ 4,167

കൂട്ടുപലിശയുടെ സൂത്ര വാക്യത്തിന്റെ അനുമാനം

മുകളിൽ പറഞ്ഞ രീതിയിൽ കൂട്ടുപലിശകാണുന്ന വിധം വളരെ നീണ്ടതും, ക്ലേശകരവും പ്രത്യേകിച്ച് നീണ്ട കാലയളവും വേണ്ടിവരുന്നു.

അതിനാൽ നമുക്ക് തുകയും കൂട്ടുപലിശയും കണക്കാക്കുന്നതിന് ഒരു സൂത്രവാക്യം രൂപീകരിക്കാം.

മുതൽ P, രൂപയും വാർഷിക പലിശ നിരക്ക് r % കാലയളവ് അല്ലെങ്കിൽ വർഷങ്ങളുടെ എണ്ണം 'n', ആണെങ്കിൽ നമുക്ക് താഴെ പറയുന്ന വിധം കൂട്ടു പലിശയുടെ സൂത്രവാക്യം അനുമാനിക്കാം:

വഴി 1 : ആദ്യ വർഷത്തെ മുതൽ $= P$

ആദ്യ വർഷത്തെ പലിശ $= \frac{P \times n \times r}{100}$

$= \frac{P \times 1 \times r}{100} = \frac{Pr}{100}$

ആദ്യ വർഷ അവസാനത്തെ തുക $= P + I$

$= P + \frac{Pr}{100}$

$= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)$

വഴി 2 :

രണ്ടാം വർഷത്തെ മുതൽ $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)$

രണ്ടാം വർഷത്തെ പലിശ $= \dfrac{P\left(1+\frac{r}{100}\right)\times 1\times r}{100}$

(S.I. യുടെ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച്)

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)\times\frac{r}{100}$

രണ്ടാം വർഷ അവസാന തുക $= P + I$

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right) + P\left(1+\frac{r}{100}\right)\times\frac{r}{100}$

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)$

$= \mathbf{P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2}$

വഴി 3 :

മൂന്നാം വർഷത്തെ മുതൽ $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

മൂന്നാം വർഷത്തെ പലിശ $= \dfrac{P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times 1\times r}{100}$

(S.I.യുടെ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച്)

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times\frac{r}{100}$

മൂന്നാം വർഷ അവസാനത്തെ തുക $= P + I$

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 + P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\times\frac{r}{100}$

$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left(1+\frac{r}{100}\right)$

$= \mathbf{P\left(1+\frac{r}{100}\right)^3}$

അതുപോലെ , 'n' വർഷ അവസാനതുക A $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

കൂടാതെ 'n' വർഷ അവസാനത്തെ തുക C. I. തന്നിട്ടുണ്ട് A – P

(i. e.) $C.I. = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - P$

കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുന്നത്

കേസ് 1: വാർഷിക കൂട്ടിചേർക്കൽ

ഓരോ വർഷത്തിന്റെയും അവസാനത്തിൽ മുതലിന്റെ കൂടെ പലിശ കൂട്ടിചേർക്കുന്നതിനെ പലിശ വാർഷിക കൂട്ടി ചേർക്കൽ എന്നു പറയുന്നു.

ഇവിടെ $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ കൂടാതെ C.I. = A – P

കേസ് 2: അർദ്ധ വാർഷിക കൂട്ടിച്ചേർക്കൽ

അർദ്ധ വാർഷിക കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുമ്പോൾ ഒരു വർഷത്തിൽ രണ്ട് കാലമുണ്ട്. ഓരോ ആറുമാസം കഴിയുമ്പോഴും ഒരു കാലം. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ അർദ്ധവാർഷിക നിരക്ക് എന്നത് വാർഷിക നിരക്കിന്റെ പകുതിയാണ്, അതായത് $\left(\frac{r}{2}\right)$.

ഇവിടെ, $A = P\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{2n}$ കൂടാതെ C.I. = A – P

കേസ് 3: കാൽ വാർഷിക കൂട്ടിച്ചേർക്കൽ

കാൽ വാർഷിക കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുമ്പോൾ ഒരു വർഷത്തിൽ നാലു കാലങ്ങളുണ്ട്. കൂടാതെ കാൽ വാർഷിക നിരക്ക് എന്നത് വാർഷിക നിരക്കിന്റെ നാലിൽ ഒന്നാണ്, അതായത് $\left(\frac{r}{4}\right)$.

ഇവിടെ, $A = P\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{4n}$ കൂടാതെ C.I. = A – P

കേസ് 4: വർഷങ്ങൾ ഒരു ഭിന്നമാകുമ്പോഴുള്ള കൂട്ടിച്ചേർക്കൽ

വാർഷിക കൂട്ടുപലിശ കാണുമ്പോൾ കാലം ഒരു ഭിന്നമായിരിക്കും

ഇവിടെ വാർഷിക കൂട്ടുപലിശ കാണുമ്പോൾ കാലം ഒരു വർഷത്തിന്റെ ഭിന്നമായിരിക്കും, $5\frac{1}{4}$ വർഷങ്ങൾ തുക A എന്നത്

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{5}\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{100}\right)\right]$$ കൂടാതെ C.I. = A – P

↓ 5 വർഷത്തേയ്ക്ക് ↓ ¼ വർഷത്തേയ്ക്ക്

ഉദാഹരണം *1.22*

₹ 15,625 യ്ക്ക് 8% വാർഷിക നിരക്കിൽ 3 വർഷത്തേയ്ക്കുള്ള C.I. കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

നമുക്കറിയാം,

3 വർഷങ്ങൾക്കുശേഷമുള്ള തുക $= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{3}$

$= 15625\left(1 + \frac{8}{100}\right)^{3}$

$= 15625\left(1 + \frac{2}{25}\right)^{3}$

$= 15625\left(\frac{27}{25}\right)^{3}$

$= 15625 \times \frac{27}{25} \times \frac{27}{25} \times \frac{27}{25}$

= ₹ 19,683

ഇപ്പോൾ കൂട്ടുപലിശ = A – P = 19,683 – 15,625

= ₹ 4,058

വാർഷിക അല്ലെങ്കിൽ അർദ്ധ വാർഷിക കൂട്ടു പലിശ കാണുക

ഒരു വർഷത്തേക്ക് ₹ 100 യ്ക്കുള്ള വാർഷിക പലിശയും അർദ്ധവാർഷിക പലിശയും നമുക്ക് നോക്കാം.

ക്രമ സംഖ്യ	വാർഷികം	അർദ്ധ വാർഷികം
1	P = ₹100 വാർഷികനിരക്ക് 10% വാർഷിക പലിശ	P = ₹100 അർദ്ധ വാർഷിക 10% വാർഷിക പലിശ
2	കാലയളവ് 1 വർഷമാണ്	കാലയളവ് 6 മാസം അല്ലെങ്കിൽ ½ വർഷം
3	$I = \frac{100 \times 10 \times 1}{100}$ = ₹ 10	$I = \frac{100 \times 10 \times 1/2}{100}$ = ₹ 5
4	A = ₹100 + ₹10 = ₹110	A = ₹100 + ₹ 5 = ₹105 അടുത്ത ആറു മാസങ്ങൾക്ക് P = ₹105 അതുകൊണ്ട്, $I = \frac{105 \times 10 \times 1/2}{100}$ = ₹ 5.25 A = ₹105 + 5.25 = ₹110.25
5	A = ₹110	A = ₹110.25

ഇങ്ങനെ, അർദ്ധ വാർഷിക പലിശ കണക്കാക്കുമ്പോൾ പലിശ രണ്ടുപ്രാവശ്യം കാണണം നിരക്ക് വാർഷിക നിരക്കിന്റെ പകുതിയാണ്.

ഉദാഹരണം *1.23*

അർദ്ധവാർഷിക കൂട്ടുപലിശ ₹1000 ത്തിന് 10% വാർഷിക നിരക്കിൽ 18 മാസത്തേയ്ക്ക് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ, P = ₹1000, r = 10% ഒരു വർഷത്തേയ്ക്ക്

കൂടാതെ n = 18 മാസങ്ങൾ = $\frac{18}{12}$ വർഷങ്ങൾ = $\frac{3}{2}$ വർഷങ്ങൾ = $1\frac{1}{2}$ വർഷങ്ങൾ

∴ 18 മാസങ്ങൾക്കുശേഷമുള്ള തുക $= P\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{2n}$

$$= 1000\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{10}{100}\right)\right]^{2\times\frac{3}{2}}$$

$$= 1000\left(1+\frac{10}{200}\right)^{3}$$

$$= 1000\left(\frac{21}{20}\right)^{3}$$

$$= 1000\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}$$

= ₹1157.625 = ₹1157.63

C. I. = A – P = 1157.63 – 1000 = ₹157.63

ശ്രമിക്കുക

> **ഒരു തുക 8% വാർഷിക നിരക്കിൽ ഓരോ മൂന്നു മാസങ്ങൾക്കുശേഷവും കൂട്ടുപലിശ കാണുന്നുവെങ്കിൽ ഒരു വർഷത്തിൽ എത്ര പ്രാവശ്യം പലിശ ചുമത്തണം**

ഉദാഹരണം 1.24

₹20,000 ന് 15% വാർഷക നിരക്കിൽ $2\frac{1}{3}$ വർഷങ്ങൾക്കുള്ള കൂട്ടുപലിശ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ, P = ₹ 20,000, r = 15% വാർഷികത്തിൽ $n = 2\frac{1}{3}$ വർഷങ്ങൾ.

$2\frac{1}{3}$ വർഷങ്ങൾക്കു ശേഷമുള്ളതുക = A

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{r}{100}\right)\right]$$

$$= 20000\left(1+\frac{15}{100}\right)^2\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{15}{100}\right)\right]$$

$$= 20000\left(1+\frac{3}{20}\right)^2\left(1+\frac{1}{20}\right)$$

$$= 20000\left(\frac{23}{20}\right)^2\left(\frac{21}{20}\right)$$

$$= 20000\times\frac{23}{20}\times\frac{23}{20}\times\frac{21}{20}$$

$$= ₹\ 27,772.50$$

$$\text{C.I.} = A - P$$

$$= 27,772.50 - 20,000$$

$$= ₹\ 7,772.50$$

കൂട്ടുപലിശക്കു മേലുള്ള വിപരീത കണക്കുകൾ

നാം നേരത്തെ പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞ സൂത്രമാണ് $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$,

ഇവിടെ, A, P, r , n എന്ന നാലു ചരങ്ങൾ ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. ഈ നാലു ചരങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് ചരങ്ങൾ അറിയാമെങ്കിൽ നമുക്ക് നാലാമത്തെ ചരം കാണാൻ കഴിയും

ഉദാഹരണം 1.25

₹ 640 ന് 2 വർഷത്തെ കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കിയപ്പോൾ കിട്ടിയ തുക ₹ 774.40 ആണെങ്കിൽ വാർഷിക നിരക്ക് എത്ര

നിർദ്ധാരണം:

തന്നിട്ടുള്ളത് : P = ₹ 640, A = ₹ 774.40, n = 2 വർഷങ്ങൾ , r = ?

നമുക്കറിയാം,

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$774.40 = 640\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{774.40}{640} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{77440}{64000} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\frac{121}{100} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{11}{10}\right)^2 &= \left(1+\frac{r}{100}\right)^2\\
\frac{11}{10} &= 1+\frac{r}{100}\\
\frac{r}{100} &= \frac{11}{10}-1\\
\frac{r}{100} &= \frac{11-10}{10}\\
\frac{r}{100} &= \frac{1}{10}\\
r &= \frac{100}{10}
\end{aligned}
$$

വാർഷിക നിരക്ക്, $r = 10\%$

ഉദാഹരണം 1.26

₹ 1600 ന് 5 % വാർഷിക നിരക്കിൽ കൂട്ടുപലിശയും ചേർത്ത് തുക ₹ 1852.20 ആകണമെങ്കിൽ എത്രകാലം വേണ്ടിവരും

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് : P = ₹ 1600, A = ₹ 1852.20 , r = 5% വാർഷിക നിരക്കിൽ , n = ?

നമുക്കറിയാം,

$$
\begin{aligned}
A &= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n\\
1852.20 &= 1600\left(1+\frac{5}{100}\right)^n\\
\frac{1852.20}{1600} &= \left(\frac{105}{100}\right)^n\\
\frac{185220}{160000} &= \left(\frac{21}{20}\right)^n\\
\frac{9261}{8000} &= \left(\frac{21}{20}\right)^n\\
\left(\frac{21}{20}\right)^3 &= \left(\frac{21}{20}\right)^n
\end{aligned}
$$

$\therefore n = 3$ വർഷങ്ങൾ

ശ്രമിക്കുക

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള കണക്കുകൾക്ക് കാലയളവും നിരക്കും കാണുക :

1. ഒരു തുകയ്ക്ക് 8% വാർഷിക നിരക്കിൽ 2 വർഷത്തേക്ക് അർദ്ധവാർഷികമായി പലിശകണക്കാക്കുക.
2. ഒരു തുകയ്ക്ക് 4% വാർഷിക നിരക്കിൽ 1½ വർത്തേയ്ക്ക് അർദ്ധ വാർഷികമായി പലിശ കണക്കാക്കുക

1.5 സാധാരണ പലിശക്കും കൂട്ടുപലിശയ്ക്കും തമ്മിലുള്ള വ്യാത്യാസം

P മുതലും, n = 2 വർഷങ്ങൾ r പലിശ നിരക്ക് 2 വർഷത്തേയ്ക്ക്

C. I. യ്ക്കും S. I. യ്ക്കും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം $= P\left(\frac{r}{100}\right)^2$

ഉദാഹരണം 1.27

₹ 8000 ന് 10% വാർഷിക നിരക്കിൽ 2 വർഷത്തേയ്ക്ക് സാധാരണ പലിശക്കും കൂട്ടുപലിശയ്ക്കും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ, P = ₹ 8000, n = 2 വർഷങ്ങൾ, r = 10% വാർഷിക നിരക്കിൽ

രണ്ടു വർഷത്തേയ്ക്ക് കൂട്ടുപലിശയ്ക്കും സാധാരണ പലിശയ്ക്കും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം $= P\left(\frac{r}{100}\right)^2$

$$= 8000\left(\frac{10}{100}\right)^2$$

$$= 8000\left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$= 8000 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = ₹\ 80$$

അഭ്യാസം 1.4

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ നിന്ന് കൂട്ടുപലിശയും തുകയും കാണുക:

ക്രമസംഖ്യ	മുതൽ രൂപയിൽ	വാർഷിക നിരക്ക് %	കാലയളവ്
(i)	1000	5%	3
(ii)	4000	10%	2
(iii)	18,000	10%	$2\frac{1}{2}$ വർഷങ്ങൾ

2. സംഗീത ₹8,000 അലക്സിൽ നിന്ന് 2 വർഷത്തേയ്ക്ക് 12½ % വാർഷിക നിരക്കിൽ കടം വാങ്ങി. വാർഷിക കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുകയാണെങ്കിൽ സംഗീത എത്ര രൂപ പലിശയിനത്തിൽ അലക്സിന് കൊടുക്കണം.
3. ഒരു വ്യാപരത്തിന് മറിയ ₹8000 നിക്ഷേപിച്ചു.വാർഷിക കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുമ്പോൾ അവൾക്ക് വാർഷിക നിരക്ക് 5% ലഭിക്കേണ്ടതാണ് (i) രണ്ടാം വർഷ അവസാനത്തിൽ അവൾക്ക് ലഭിക്കേണ്ട തുക (ii) മൂന്നാം വർഷത്തെ പലിശ എന്നിവ കാണുക.
4. ₹24,000 അർദ്ധ വാർഷിക കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കിയാൽ 1 ½ വർഷത്തേയ്ക്ക് 10% വാർഷിക നിരക്കിൽ ലഭിക്കുന്ന കൂട്ടുപലിശ കാണുക.
5. അർദ്ധ വാർഷിക കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുന്നതിൽ ₹8,192 ന് 18 മാസത്തേയ്ക്ക് 12 ½% വാർഷിക പലിശനിരക്കിൽ ദ്രാവിഡ് നിക്ഷേപിക്കുകയാണെങ്കിൽ അവന് ലഭിക്കുന്ന തുക കാണുക.
6. കാൽ വാർഷിക കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുമ്പോൾ ₹15,625 ന് 16% വാർഷിക നിരക്കിൽ 9 മാസത്തേയ്ക്ക് ലഭിക്കുന്ന കൂട്ടുപലിശ കാണുക.
7. 2 വർഷത്തേയ്ക്ക് 4% വാർഷിക് നിരക്കിൽ ₹1,632 പലിശ ലഭിക്കുകയാണെങ്കിൽ മുതൽ കാണുക.
8. വാർഷിക കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുന്ന ഒരു ബാങ്കിൽ നിന്ന് വിക്കി ₹ 26,400 ന് 15% വാർഷിക നിരക്കിൽ സ്കൂട്ടർ വാങ്ങുന്നതിനായി വായ്പ വാങ്ങി. 2 വർഷവും 4 മാസവും കഴിയുമ്പോൾ അവൻ വായ്പ അടച്ചു തീർക്കേണ്ട തുക എത്ര ?
9. ആരിഫ് ഒരു ബാങ്കിൽ നിന്ന് ₹80,000 വായ്പ എടുത്തു. വാർഷിക പലിശ നിരക്ക് 10% ആണെങ്കിൽ, (i) വാർഷിക കൂട്ടുപലിശയും (ii) അർദ്ധവാർഷിക കൂട്ടുപലിശയും കാണക്കാക്കുന്നുവെങ്കിൽ 1½ വർഷത്തിനു ശേഷം ഇവയുടെ തുകയ്ക്കു തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കാണുക.
10. 2 വർഷത്തേയ്ക്ക് 5% വാർഷിക പലിശ നിരക്കിൽ ₹ 2,400യുടെ സാധാരണ പലിശയും കൂട്ടുപലിശയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കാണുക.
11. 2 വർഷത്തേയ്ക്ക് 6 ¼ % വാർഷിക പലിശ നിരക്കിൽ ₹6,400 നുള്ള സാധാരണ പലിശയ്ക്കും കൂട്ടുപലിശയ്ക്കും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കാണുക.

12. 5% വാർഷിക പലിശ നിരക്കിൽ 2 വർഷത്തേയ്ക്ക് കടം കൊടുത്ത ഒരു തുകയുടെ സാധാരണ പലിശയ്ക്കും കൂട്ടുപലിശയ്ക്കും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 5 രൂപ. കടം കൊടുത്ത തുക കാണുക.
13. സുജാത ₹ 12,500 ന് 12 % വാർഷിക നിരക്കിൽ 3 വർഷത്തേയ്ക്ക് സാധാരണ പലിശയ്ക്ക് കടം വാങ്ങി. രാധിക അതേ തുക അതേ കാലയളവിൽ 10% വാർഷിക നിരക്കിൽ കൂട്ടു പലിശയിൽ കടം വാങ്ങി. ആരാണ് കൂടുതൽ പലിശ നൽകേണ്ടത് അത് എത്ര കൂടുതൽ ?
14. അർദ്ധവാർഷിക കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുമ്പോൾ 4 % വാർഷിക നിരക്കിൽ 1½ വർഷത്തേയ്ക്ക് ലഭിച്ച തുക ₹1,32,651 ആണെങ്കിൽ മുടക്ക് മുതൽ എത്ര ?
15. ഗായത്രി ₹12,000 ന് 5% വാർഷിക നിരക്കിൽ കൂട്ടുപലിശയുള്ള സ്ഥാപനത്തിൽ നിക്ഷേപിച്ചു. 'n' വർഷങ്ങൾക്കുശേഷം ₹13,230 അവർക്ക് ലഭിച്ചു. 'n'ന്റെ മൂല്യം കാണുക.
16. ₹ 640 ന് 2 വർഷത്തേയ്ക്ക് കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കിയപ്പോൾ ലഭിച്ച തുക ₹777.40 തുക എങ്കിൽ വാർഷികനിരക്ക് എത്ര.
17. ആറുമാസത്തേയ്ക്ക് കൂട്ടു പലിശ കണക്കാക്കുമ്പോൾ ₹2,000 ന് ഒന്നര വർഷത്തേയ്ക്ക് ലഭിച്ച തുക ₹2, 315.25 ആകുന്നു എങ്കിൽ വാർഷിക നിരക്ക് കാണുക.

1.5.1 വിലക്കയറ്റവും വിലയിടിവും

a) വിലക്കയറ്റം

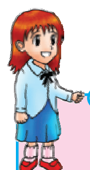
ജനസംഖ്യാ വർദ്ധനവ്, ബാക്ടീരിയകളുടെ വളർച്ച, സമ്പാദ്യത്തിന്റെ വർദ്ധനവ്, ചില വിലപ്പെട്ട വസ്തുക്കളുടെ വില വർദ്ധനവ് ഇതുപോലുള്ള സന്ദർഭങ്ങളിൽ താഴെ പറയുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുന്നു

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

b) വിലയിടിവ്

യന്ത്രങ്ങൾ, വാഹനങ്ങൾ, ചില വസ്തുക്കൾ, കെട്ടിടങ്ങൾ മുതലായവയുടെ വില കുറയുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ താഴെ പറയുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാൻ കഴിയും.

$$A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$$



നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

ലോക ജനസംഖ്യ

വർഷം	ജനസംഖ്യ
1700	600,000,000
1800	900,000,000
1900	1,500,000,000
2000	6,000,000,000

3 നൂറ്റാണ്ടുകളിൽ, ജനസംഖ്യ 10 മടങ്ങായി.

ഉദാഹരണം *1.28*

ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ ജനസംഖ്യയിൽ ഓരോ വർഷവും 7% നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുന്നു. ഇപ്പോഴത്തെ ജനസംഖ്യ 90000 ആണെങ്കിൽ 2 വർഷങ്ങൾക്കുശേഷമുള്ള ജനസംഖ്യ എത്രയായിരിക്കും ?

നിർദ്ധാരണം

ഇപ്പോഴത്തെ ജനസംഖ്യ $P = 90,000$, വർദ്ധന നിരക്ക് $r = 7\%$,

വർഷങ്ങളുടെ എണ്ണം $n = 2$.

'n' വർഷങ്ങൾക്കു ശേഷമുള്ള ജനസംഖ്യ $= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

$\therefore$ 2 വർഷങ്ങൾക്കുശേഷമുള്ള ജനസംഖ്യ $= 90000\left(1 + \frac{7}{100}\right)^2$

$$= 90000\left(\frac{107}{100}\right)^2$$

$$= 90000 \times \frac{107}{100} \times \frac{107}{100}$$

$$= 103041$$

രണ്ടു വർഷങ്ങൾക്കുശേഷമുള്ള ജനസംഖ്യ = 1,03,041

ഉദാഹരണം 1.29

ഒരു യന്ത്രത്തിന്റെ വില ഓരോ വർഷവും 5% വീതം കുറയുന്നു. ഒരാൾ ₹ 30,000 ആ യന്ത്രത്തിന് ചെലവാക്കിയാൽ മൂന്ന് വർഷങ്ങൾക്കുശേഷം അതിന്റെ വില കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

യന്ത്രത്തിന്റെ ഇപ്പോഴത്തെ വില P = ₹ 30,000, നിരക്കിലുള്ള കുറവ് $r = 5\%$,

വർഷങ്ങളുടെ എണ്ണം $n = 3$

'n' വർഷങ്ങൾക്ക് ശേഷമുള്ള യന്ത്രത്തിന്റെ മൂല്യം $= P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$

$\therefore$ 3 വർഷങ്ങൾക്ക് ശേഷമുള്ള യന്ത്രത്തിന്റെ മൂല്യം $= 30000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3$

$$= 30000\left(\frac{95}{100}\right)^3$$

$$= 30000 \times \frac{95}{100} \times \frac{95}{100} \times \frac{95}{100}$$

$$= 25721.25$$

മൂന്ന് വർഷങ്ങൾക്ക് ശേഷമുള്ള യന്ത്രത്തിന്റെ മൂല്യം = ₹ 25,721.25

ഉദാഹരണം 1.30

ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ ജനസംഖ്യ ഓരോ വർഷവും 5% സ്ഥിര വർദ്ധനവുണ്ടാകുന്നു. ഇപ്പോഴത്തെ ജനസംഖ്യ 1,04,832 ആണ്. രണ്ടു വർഷങ്ങൾക്ക് മുമ്പുള്ള ജനസംഖ്യ എത്ര ?

നിർദ്ധാരണം

രണ്ടു വർഷങ്ങൾക്ക് മുമ്പുള്ള ജനസംഖ്യ P ആണെന്നിരിക്കട്ടെ .

$$\therefore P\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 = 104832$$

$$P\left(\frac{105}{100}\right)^2 = 104832$$

$$P \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} = 104832$$

$$P = \frac{104832 \times 100 \times 100}{105 \times 105}$$

$$= 95085.71$$

$= 95,086$ (പൂർണ്ണമാക്കിയാൽ)

$\therefore$ രണ്ടു വർഷങ്ങൾക്ക് മുമ്പുള്ള ജനസംഖ്യ 95,086 ആയിരുന്നു.

അഭ്യാസം 1.5

1. ഒരു വിദ്യാലയത്തിൽ ചേർത്തിട്ടുള്ള വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം 2000. ഓരോ വർഷവും ചേർക്കുന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ നിരക്ക് 5% വർദ്ധിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, രണ്ടുവർഷങ്ങൾക്കുശേഷം എത്ര വിദ്യാർത്ഥികളുണ്ടായിരിക്കും?

2. ₹ 3,50,000 വിലയുള്ള ഒരു കാറിന്റെ വിലയുടെ നിരക്ക് വർഷന്തോറും 10% കുറയുന്നു. മൂന്ന് വർഷങ്ങൾക്കുശേഷം കാറിന്റെ വില എത്ര ആയിരിക്കും?

3. ഒരു മോട്ടോർ സൈക്കിൾ ₹50,000 യ്ക്ക് വാങ്ങി. അതിന്റെ മൂല്യത്തിന്റെ നിരക്ക് വർഷന്തോറും 8% കുറയുന്നു. ഒരു വർഷത്തിനുശേഷമുള്ള മൂല്യം കാണുക.

4. ഒരു പരീക്ഷണശാലയിൽ ഒരു പ്രത്യേക പരീക്ഷണത്തിൽ ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണം ഓരോ മണിക്കൂറിനും 2.5% നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുന്നു. ബാക്ടീരിയകളുടെ ആദ്യത്തെ എണ്ണം 5,06,000 ആണെങ്കിൽ 2 മണിക്കൂറുകൾക്കുശേഷം അവയുടെ എണ്ണം കാണുക.

5. തൊഴിലില്ലായ്മ കാരണം ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ ജനങ്ങൾ മുഴുവൻ അവിടെ നിന്ന് അടുത്തുള്ള പട്ടണത്തിലേക്ക് മാറി താമസിച്ചു. രണ്ടു വർഷങ്ങൾക്കു മുമ്പ് ഗ്രാമത്തിലെ ജനസംഖ്യ 6000. വർഷന്തോറും കുടിയേറി പാർക്കുന്ന ജനസംഖ്യയുടെ നിരക്ക് 5% ഇപ്പോഴത്തെ ജനസംഖ്യ കാണുക

6. ഒരു ഓയിൽ യന്ത്രത്തിന്റെ ഇപ്പോഴത്തെ വില ₹14,580 ഓരോ വർഷവും അതിന്റെ മൂല്യത്തിന്റെ നിരക്കിൽ 10% കുറവുണ്ടാവുകയാണെങ്കിൽ 3 വർഷങ്ങൾക്ക് മുമ്പ് യന്ത്രത്തിന്റെ വില എന്തായിരുന്നു?

7. ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ ജോലി സാധ്യതയെ മുൻനിർത്തി ആ ഗ്രാമത്തിലെ ജനസംഖ്യ നിരക്കിൽ 9% വർദ്ധനവ് എല്ലാ വർഷവുമുണ്ട്. ഇപ്പോഴത്തെ ജനസംഖ്യ 1,1881 ആണെങ്കിൽ രണ്ടു വർഷങ്ങൾക്കു മുമ്പുള്ള ജനസംഖ്യ എത്ര ?

1.6 സ്ഥിര നിക്ഷേപങ്ങളും ആവർത്തന നിക്ഷേപങ്ങളും

ബാങ്കുകൾ, പോസ്റ്റ് ഓഫീസുകൾ മറ്റു പണമിടപാടു സ്ഥാപനങ്ങൾ എല്ലാം വ്യത്യസ്ത പലിശ നിരക്കിൽ പൊതുജനങ്ങളിൽ നിന്ന് നിക്ഷേപങ്ങൾ സ്വീകരിക്കാറുണ്ട്. ഈ സ്ഥാപനങ്ങളിൽ ജനങ്ങൾ സൂക്ഷിക്കുന്നത് കൃത്യമായ കാലഘട്ടത്തിൽ വരുമാനം ലഭിക്കുന്നതിനാണ്.

ഈ സ്ഥാപനങ്ങളിൽ പല നിക്ഷേപ പദ്ധതികളുമുണ്ട്. അവയിൽ ചില പദ്ധതികൾ.

(i) സ്ഥിര നിക്ഷേപങ്ങൾ (ii) ആവർത്തന നിക്ഷേപങ്ങൾ

(i) സ്ഥിര നക്ഷേപങ്ങൾ

ഇത്തരം നിക്ഷേപത്തിൽ, ജനങ്ങൾ ഒരു നിശ്ചിത തുക നിശ്ചിത കാലത്തേക്ക് നിക്ഷേപിക്കുന്നു. ഇത്തരം നിക്ഷേപത്തെ സ്ഥിരനിക്ഷേപം എന്ന് പറയുന്നു. (ഇതിനെ ചുരുക്കി, F.D) എന്ന് വായിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ് : നിക്ഷേപം ചുരുങ്ങിയ കാലത്തേക്കോ ദീർഘ കാലത്തേക്കോ ആയിരിക്കാം. നിക്ഷേപ കാലത്തിൻമേലാണ് അവർക്ക് പലിശയുടെ നിരക്ക് ലഭിക്കുന്നത്.

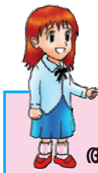
(ii) ആവർത്തന നിക്ഷേപങ്ങൾ

ആവർത്തന നിക്ഷേപം (ഇതിനെ ചുരുക്കി, R.D എന്ന് വായിക്കാം). സ്ഥിരനിക്ഷേപത്തിൽ നിന്ന് തികച്ചും വ്യത്യസ്തമാണ്.

ഈ പദ്ധതിയിൽ, നിക്ഷേപകന് അവന്റെ കഴിവ് അനുസരിച്ചുള്ള തുക നിക്ഷേപിക്കാം അതേ സംഖ്യ തന്നെ എല്ലാ മാസത്തിലും ഒരു പ്രത്യേക കാലഘട്ടത്തേക്ക് ബാങ്കിലോ പോസ്റ്റ് ഓഫീസിലോ നിക്ഷേപിക്കണം.

ആ കാലഘട്ടത്തിന്റെ അവസാനത്തിൽ ബാങ്ക് അല്ലെങ്കിൽ പോസ്റ്റ് ഓഫീസ് നിക്ഷേപിച്ച തുകയും പലിശയും ചേർത്തു തിരിച്ചു നൽകും. ഇത്തരം നിക്ഷേപങ്ങളെ ആവർത്തന നിക്ഷേപം എന്ന് പറയുന്നു.

കുറിപ്പ് : ആവർത്തന നിക്ഷേപത്തിന്റെ പലിശ കണക്കാക്കുന്നത് സാധാരണ പലിശ രീതിയിലാണ്.



നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

ആവർത്തന നിക്ഷേപത്തിന് (R.D.) മാസത്തിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു ദിവസം നൽകിയാൽ മതിയാകും.

R.D. യുടെ പലിശയും കാലവധി കഴിഞ്ഞ തുകയും കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം കാണുക.

n മാസങ്ങളിൽ അടച്ച തുകയുടെ പലിശ നിരക്ക് r % വും മാസത്തവണ p യും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\text{പലിശ} = \frac{PNr}{100},\ \text{ഇവിടെ}\ N = \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\ \text{വർഷങ്ങൾ}$$

$$\text{കാലാവധികഴിഞ്ഞ ആകെ തുക}\ A = Pn + \frac{PNr}{100}$$

ഉദാഹരണം 1.31

തരുൺ ഒരു ബാങ്കിൽ 5 വർഷത്തേയ്ക്ക് രണ്ടു ലക്ഷം രൂപ നിക്ഷേപിച്ചു. ഒരു വർഷത്തെ പലിശ നി രക്ക് 8 % ആണെങ്കിൽ കാലാവധി കഴിഞ്ഞ തുക കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

നക്ഷേപിച്ച തുക $P = ₹\ 2,00,000,\ n = 5$ വർഷങ്ങൾ, $r = 8\%$ വാർഷിക നിരക്കിൽ

$$\text{പലിശ} = \frac{Pnr}{100} = 200000 \times 5 \times \frac{8}{100}$$

$$= ₹\ 80,000$$

$\therefore$ 5 വർഷത്തിനുശേഷം കിട്ടിയ തുക $= 2,00,000 + 80,000 = 2,80,000$ രൂപ.

ഉദാഹരണം 1.32

വൈദീഷ് 5 വർഷങ്ങളായി എല്ലാ മാസ ആരംഭത്തിലും ഒരു പോസ്റ്റ് ഓഫീസിൽ ₹50 നിക്ഷേപിച്ചു. പലിശ നിരക്ക് 7.5% ആണെങ്കിൽ 5-ാ മത്തെ വർഷ അവസാനത്തിൽ അയാൾക്ക് ലഭിക്കുന്ന തുക കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഓരോ മാസവും നിക്ഷേപിക്കുന്ന തുക, $P = ₹\ 500$

മാസങ്ങളുടെ എണ്ണം, $n = 5 \times 12 = 60$ മാസങ്ങൾ

പലിശനിരക്ക്, $r = 7\frac{1}{2}\% = \frac{15}{2}\%$

ആകെ നിക്ഷേപിച്ചത് $= Pn = 500 \times 60$

$= ₹\ 30,000$

ആവർത്തന നിക്ഷേപത്തിന്റെ കാലാവധി, $N = \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ വർഷങ്ങൾ

$= \frac{1}{24} \times 60 \times 61 = \frac{305}{2}$ വർഷങ്ങൾ

പലിശ, I $= \frac{PNr}{100}$

$= 500 \times \frac{305}{2} \times \frac{15}{2 \times 100}$

$=$ ₹ 5,718.75

നിയമാനുസൃതം ലഭിക്കേണ്ട ആകെ തുക $= Pn + \frac{PNr}{100}$

$= 30{,}000 + 5{,}718.75$

$=$ ₹ 35,718.75

ഉദാഹരണം *1.33*

വിശാൽ 5 വർഷങ്ങളായി ഓരോ മാസവും ₹200 വീതം ഒരു പോസ്റ്റോഫീസിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. അദ്ദേഹത്തിന് ₹13,830 ലഭിച്ചുവെങ്കിൽ പലിശ നിരക്ക് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

കാലാവധി കഴിഞ്ഞതുക, A = ₹13,830, P = ₹200, $n = 5 \times 12 = 60$ മാസങ്ങൾ

കാലം N $= \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ വർഷങ്ങൾ

$= \frac{1}{12} \times 60 \times \frac{61}{2} = \frac{305}{2}$ വർഷങ്ങൾ

നിക്ഷേപിച്ച തുക = Pn $= 200 \times 60 =$ ₹ 12, 000

കാലവധിക്കുശേഷം ലഭിച്ച തുക $= Pn + \frac{PNr}{100}$

$13830 = 12000 + 200 \times \frac{305}{2} \times \frac{r}{100}$

$13830 - 12000 = 305 \times r$

$1830 = 305 \times r$

$\therefore r = \frac{1830}{305} = 6\%$

1.6.1 വില തവണകളായി അടച്ചു തീർത്ത് സാധനം വാങ്ങുന്ന സമ്പ്രദായം

ഇന്നത്തെ ഉപഭോക്താക്കളെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നതിന് വേണ്ടി ബാങ്കുകളും പണമിടപാടു സ്ഥാപനങ്ങളും ഒരു സമ്പ്രദായം ആവിഷ്കരിച്ചു അതിന്റെ പേരാണ് വില തവണകളായി അടച്ചുതീർത്ത് സാധനം വാങ്ങുന്ന സമ്പ്രദായം.

തവണ വ്യവസ്ഥയിൽ സാധനം വാങ്ങുന്ന സമ്പ്രദായം:

ഈ വ്യവസ്ഥ അനുസരിച്ച് ഒരു നിശ്ചിത കാലത്തേക്ക് സാധനം, വാങ്ങുന്നയാളുടെ സ്വന്തമായിരിക്കുകയില്ല. നാം വാങ്ങിയ സാധനത്തിന്റെ വില മുഴുവനായി അടച്ചു തീർത്താൽ മാത്രമേ അത് നമുക്ക് സ്വന്തമാവുകയുള്ളൂ.

തവണ :

സാധനങ്ങളുടെ വില പലിശയും മറ്റു ചില ചാർജ്ജുകളും ചേർത്ത് നാം തിരിച്ച് അടയ്ക്കണം. ആകെ തുകയെ വായ്പ അടയ്ക്കേണ്ട കാലത്തെ മാസങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിക്കണം അങ്ങനെ കിട്ടുന്ന തുകയെ തവണ എന്ന് പറയുന്നു.

തുല്യമാക്കിയ മാസത്തവണ

തുല്യമാക്കിയ മാസത്തവണ എന്നത് തവണ വ്യവസ്ഥ തന്നെയാണ് സാധനങ്ങളുടെ വില പലിശയും മറ്റു ചില ചാർജ്ജുകളും ചേർത്ത് നാം തിരിച്ചടക്കണം. ഇതെല്ലാം ചേർത്തു കിട്ടുന്ന ആകെ തുകയെ മാസങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന തുകയാണ് തുല്യമാക്കിയ മാസത്തവണ.

$$\text{E.M.I} = \frac{\text{മുതൽ + പലിശ}}{\text{മാസങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$$

തവണ വ്യവസ്ഥയിൽ സാധനങ്ങൾ വാങ്ങുന്ന സമ്പ്രദായത്തിന്റെ വ്യത്യസ്ത പദ്ധതികൾ

1. **0% പലിശ സമ്പ്രദായം** : കമ്പനികൾ നടത്തിപ്പു ചെലവും 4 അല്ലെങ്കിൽ 5 തവണകളുടെ തുക മുൻകൂറായും ആവശ്യപ്പെടുന്നു.
2. **100% ധനസഹായം** : കമ്പനികൾ പലിശയും വാങ്ങിയ വിലയുടെ നടത്തിപ്പുചെലവും ചേർക്കുന്നു.
3. **ഡിസ്ക്കൗണ്ട് വില്പന**: വില്പന വർദ്ധിപ്പിക്കുന്നതിനുവേണ്ടി തവണ വ്യവസ്ഥയിലുള്ള പദ്ധതികൾക്ക് ഡിസ്കൗണ്ട് നൽകുന്നു.
4. **പ്രാരംഭമായി ഒരു തുക അടയ്ക്കൽ** : ആകെ വിലയുടെ കുറച്ചുഭാഗം മുൻകൂറായി അടച്ചു വാങ്ങാവുന്നതാണ് ഇത് കാഷ് ഡൗൺ പേയ്മെന്റ് എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു.

ഉദാഹരണം *1.34*

ഒരു അലക്കുയന്ത്രത്തിന്റെ വാങ്ങിയ വില ₹18,940 യാണ് തവണ വ്യവസ്ഥയിൽ അത് വാങ്ങുന്നതിന് വ്യത്യസ്തങ്ങളായ പദ്ധതികൾ വിശദീകരിച്ച് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഏറ്റവും നല്ല പദ്ധതി തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

ക്രമ സംഖ്യ	വ്യത്യസ്ത പദ്ധതികൾ	വിറ്റവില	പ്രാരംഭമായി അടയ്ക്കേണ്ടത്	പലിശയുടെ നിരക്ക്	നടത്തിപ്പു ചെലവ്	കാലവധി
(i)	75% ധനസഹായം	18,940	25%	12%	1%	24 മാസങ്ങൾ
(ii)	100% ധനസഹായം	18,940	ഇല്ല	16%	2%	24 മാസങ്ങൾ
(iii)	0% ധനസഹായം	18,940	4 E. M. I. മുൻകൂറായി	ഇല്ല	2%	24 മാസങ്ങൾ

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പദ്ധതികളിലെ E. M. I. , തുക എന്നിവ കണക്കാക്കുക

നിർദ്ധാരണം

(i) 75% ധനസഹായം

P = ₹18, 940, പ്രാരംഭമായി അടയ്ക്കേണ്ടത് = 25%, നിരക്ക് = 12%,

നടത്തിപ്പ് ചെലവ് = 1%

നടത്തിപ്പ് ചെലവ് = ₹ 18, 940 യുടെ 1%

$$= \frac{1}{100} \times 18940 = ₹189.40 = ₹189$$

പ്രാരംഭമായി അടയ്ക്കേണ്ടത് = 18,940 ന്റെ 25%

$$= \frac{25}{100} \times 18940 = ₹\ 4,735$$

വായ്പാ തുക $= 18{,}940 - 4{,}735 = ₹\ 14{,}205$

പലിശ $= \dfrac{14205 \times 12 \times 2}{100}$

$= ₹\ 3{,}409.\ 20 \simeq ₹\ 3{,}409$

E. M. I. $= \dfrac{\text{വായ്പാ തുക + പലിശ}}{\text{മാസങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$

$= \dfrac{14205 + 3409}{24} = \dfrac{17614}{24}$

$= ₹\ 733.92 \simeq ₹\ 734$

∴ അടയ്ക്കേണ്ട ആകെ തുക $= 4{,}735 + 14{,}205 + 3{,}409 + 189$

$= ₹\ 22{,}538$

(ii) 100% ധനസാഹായം

നടത്തിപ്പ് ചെലവ് = ₹18,940 യുടെ 2%

$= \dfrac{2}{100} \times 18940 = ₹378.80 \simeq ₹\ 379$

പലിശനിരക്ക് = 16%

പലിശ $= 18940 \times \dfrac{16}{100} \times 2$

$= ₹\ 6060.80 \simeq ₹\ 6{,}061$

E. M. I. $= \dfrac{\text{വായ്പാ തുക + പലിശ}}{\text{മാസങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$

$= \dfrac{18940 + 6061}{24} = \dfrac{25001}{24}$

$= ₹1{,}041.708 \simeq ₹\ 1{,}041.71$

$= ₹\ 1{,}042$

അടയ്ക്കേണ്ടതുക $= 6{,}061 + 18{,}940 + 379 = ₹\ 25{,}380$

(iii) 0% പലിശ സമ്പ്രദായം

നടത്തിപ്പ് ചെലവ് = ₹ 18,940 യുടെ 2%

$= \dfrac{2}{100} \times 18940 = ₹\ 378.80 \simeq ₹\ 379$

E. M. I. $= \dfrac{\text{വായ്പാ തുക + പലിശ}}{\text{മാസങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$

$= \dfrac{18940 + 0}{24} = \dfrac{18940}{24}$

$= ₹\ 789.166 \simeq ₹\ 789$

അടയ്ക്കേണ്ടതുക $= 18{,}940 + 3{,}156 + 379 = ₹\ 22{,}475$

മുൻകൂറായി അടച്ച E. M. I. $= ₹\ 789 \times 4 = ₹\ 3{,}156$

അതിനാൽ, 0% പലിശ സമ്പ്രദായമാണ് ഏറ്റവും നല്ല പദ്ധതി.

ഉദാഹരണം *1.35*

ഒരു കമ്പ്യൂട്ടറിന്റെ വാങ്ങിയ വില ₹20,000 യാണ്. കമ്പനി 36 മാസങ്ങൾക്ക് 10 % പലിശ ചുമത്തി. അത് വാങ്ങുന്നയാൾ മാസത്തവണ എത്ര അടയ്ക്കണം എന്ന് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

കമ്പ്യൂട്ടറിന്റെ വില = ₹ 20,000, പലിശ = 10% ഒരു വർഷത്തേയ്ക്ക്,

കാലാവധി = 36 മാസങ്ങൾ (3വർഷങ്ങൾ)

$$\text{ആകെ പലിശ} = 20000 \times \frac{10}{100} \times 3$$

$$= ₹\ 6,000$$

$$\therefore \text{ ആകെ അടക്കേണ്ട തുക} = 20,000 + 6,000$$

$$= ₹\ 26,000$$

$$\text{മാസത്തവണ} = \frac{\text{ആകെ തുക}}{\text{മാസങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$$

$$= \frac{26000}{36}$$

$$= ₹\ 722.22$$

$$\simeq ₹\ 722$$

അഭ്യാസം 1.6

1. ശ്വേത ഒരു ബാങ്കിൽ 2 വർഷത്തേക്ക് ₹ 25,000 നിക്ഷേപിച്ചു. വാർഷിക പലിശ നിരക്ക് 4 % ആണെങ്കിൽ കാലാവധി കഴിയുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന തുക കാണുക.
2. നിധിൻ ₹ 75,000 യ്ക്ക് 3 വർഷത്തേക്ക് ഒരു ബാങ്കിൽ സ്ഥിരമായി നിക്ഷേപിച്ചു. വാർഷിക പലിശ നിരക്ക് 5 % ആണെങ്കിൽ കാലാവധി കഴിയുമ്പോൾ ലഭിക്കേണ്ട തുക കാണുക.
3. ഇമ്രാൻ ഓരോ മാസവും 400 രൂപ ഒരു പോസ്റ്റ് ഓഫീസിൽ R.D. യായി 2 വർഷം നിക്ഷേപിച്ചു. പലിശ നിര്ക്ക് 12% ആണെങ്കിൽ 2-ാം വർഷ അവസാനം അയാൾക്ക് ലഭിക്കേണ്ട തുക കണക്കാക്കുക.
4. ഒരു മൈക്രോ ഓവന്റെ വില ₹ 6000 പൂരണിക്ക് അത് 5 തവണകളായി വാങ്ങണം. 10% സാധാരണ പലിശ നിരക്കിൽ നൽകാമെന്ന് കമ്പനി തീരുമാനിച്ചു. എങ്കിൽ E.M.I.യും ആകെ അടയ്ക്കേണ്ട തുകയും കാണുക.
5. ഒരു റഫ്രിജറേറ്ററിന്റെ വാങ്ങിയവില ₹ 16,800 രഞ്ജിത്തിന് അത് 0% ധനസഹായ പദ്ധതിയിൽ 3 E.M.I.മുൻകൂറായി അടയ്ക്കണം. നടത്തിപ്പ് ചെലവ് 3%വും രഞ്ജിത്തിൽ നിന്ന് ശേഖരിച്ചു. 24 മാസത്തിനുള്ളിൽ തിരിച്ച് അടയ്ക്കേണ്ട E.M.I. യും ആകെ തുകയും കാണുക.
6. ഒരു ഊണ് മേശയുടെ വില ₹ 8,400 വെങ്കിടിന് അത് 10 തവണകളിലായി വാങ്ങണം. കമ്പനി S.I. ൽ 5% വാർഷിക നിരക്കിൽ നൽകിയാൽ അദ്ദേഹം അടയ്ക്കേണ്ട ആകെ തുകയും E.M.I.യും കാണുക.

1.7 മിശ്ര വ്യതിയാനം

മുൻ ക്ലാസ്സുകളിൽ അനുലോമ പ്രതിലോമ വ്യതിയാനങ്ങളെക്കുറിച്ച് നേരത്തെ തന്നെ നാം പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. നമുക്ക് അവ ഒന്നുകൂടി ഓർമ്മിക്കാം.

അനുലോമ വ്യതിയാനം

രണ്ട് അളവുകളിൽ ഒരു മൂല്യം കൂടുമ്പോൾ അല്ലെങ്കിൽ കുറയുമ്പോൾ മറ്റേതും കൂടുന്നു അല്ലെങ്കിൽ കുറയുന്നു, എങ്കിൽ അവ അനുലോമ വ്യതിയാനത്തിൽ മാറുന്നു എന്ന് പറയാം.

അനുലോമ വ്യതിയാനത്തിന് ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ :

1. ദൂരവും സമയും അനുലോമ വ്യതിയാനത്തിലാണ്, എന്തെന്നാൽ കൂടുതൽ ദൂരം യാത്ര ചെയ്യുന്നതിന്, കൂടുതൽ സമയമെടുക്കുന്നു. (വേഗത സ്ഥിരമായിരുന്നാൽ)
2. മുതലും പലിശയും അനുലോമ വ്യതിയാനത്തിലാണ്, എന്തെന്നാൽ മുതൽ കൂടുതലാണെങ്കിൽ അതിനുള്ള പലിശയും കൂടുതലാണ്.
3. വാങ്ങുന്ന സാധനങ്ങളും അവയ്ക്കുളള ചെലവും അനുലോമ വ്യതിയാനത്തിലാണ്, എന്തെന്നാൽ വാങ്ങുന്ന സാധനങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുമ്പോൾ വിലയും കൂടുന്നു.

പ്രതിലോമ വ്യതിയാനം

രണ്ടു അളവുകളിൽ ഒന്നു കൂടുമ്പോൾ മറ്റേത് അതെ അനുപാതത്തിൽ കുറയുന്നു. ഒന്ന് കുറയുമ്പോൾ അതെ അനുപാതത്തിൽ മറ്റേത് കൂടുന്നു, ഇത്തരത്തിൽ രണ്ട് അളവുകൾ ഒന്നിനൊന്ന് പ്രതിലോമമായി മാറിയാൽ അതിനെ പ്രതിലോമ വ്യതിയാനം എന്ന് പറയുന്നു.

പ്രതിലോമ വ്യതിയാനത്തിന് ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ:

1. ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണവും സമയവും പ്രതിലോമ വ്യതിയാനത്തിലാണ്, ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം വർദ്ധിച്ചാൽ, ആ ജോലി ചെയ്തു തീർക്കാൻ എടുക്കുന്ന സമയം കുറവായിരിക്കും.
2. വേഗതയും സമയവും പ്രതിലോമ വ്യതിയാനത്തിലാണ്, എന്തെന്നാൽ ഒരു നിശ്ചിത ദൂരം സഞ്ചരിക്കുന്നതിന്, വേഗത വർദ്ധിപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ സമയം കുറച്ചു മതി.
3. ജനസംഖ്യയും ഭക്ഷണത്തിന്റെ അളവും പ്രതിലോമ വ്യതിയാനത്തിലാണ്, എന്തെന്നാൽ ജനസംഖ്യ വർദ്ധിക്കുമ്പോൾ ഭക്ഷണത്തിന്റെ ലഭ്യത കുറയുന്നു.

മിശ്ര വ്യതിയാനം

രണ്ടോ അതിലധികമോ വ്യതിയാനങ്ങൾ ഉൾകൊള്ളുന്ന ഒരു ചങ്ങലപോലുള്ള പ്രത്യേക പ്രശ്നങ്ങളെ, മിശ്ര വ്യതിയാനം എന്ന് പറയുന്നു.

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ രണ്ടു വ്യതിയാനങ്ങളും ഉൾപ്പടുന്ന ചില സാധ്യതകൾ തന്നിട്ടുണ്ട്.

വ്യതിയാനം I	വ്യതിയാനം II
അനുലോമം	അനുലോമം
പ്രതിലോമം	പ്രതിലോമം
അനുലോമം	പ്രതിലോമം
പ്രതിലോമം	അനുലോമം

മിശ്രവ്യതിയാനത്തെ ഉദാഹരിക്കുന്ന ചില പ്രശ്നങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം.

ഉദാഹരണം 1.36

112 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു ചുവർ 20 ജോലിക്കാർ 6 ദിവസം കൊണ്ട് നിർമ്മിക്കുന്നു എങ്കിൽ 25 ജോലിക്കാർ 3 ദിവസം കൊണ്ട് അതേ ചുമരിന്റെ എത്ര നീളം വരെ നിർമ്മിക്കും.

നിർദ്ധാരണം :

രീതി 1: ഈപ്രശ്നത്തിൽ 3 ചരങ്ങൾ, ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട് അവ ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം, ദിവസങ്ങൾ ചുമരിന്റെ നീളം.

ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	ദിവസങ്ങൾ	ചുമരിന്റെ നീളം
20	6	112
25	3	x

വഴി 1 : ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണവും ചുമരിന്റെ നീളവും പരിഗണിക്കുക. ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം 20 ൽ നിന്ന് 25 ആയി, വർദ്ധക്കുന്നതിനാൽ ചുമരിന്റെ നീളവും വർദ്ധിക്കുന്നു. അതിനാൽ ഇത് അനു ലോമ വ്യതിയാനം ആണ്.

അതിനാൽ $20 : 25 :: 112 : x$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ് ...... (1)

വഴി 2: ദിവസങ്ങളും ചുമരിന്റെ നീളവും പരിഗണിക്കുക ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം 6 ൽ നിന്ന് 3, ആയി കുറയുന്നതിനാൽ ചുമരിന്റെ നീളവും കുറയുന്നു, അതിനാൽ ഇത് അനുലോമ വ്യതിയാനം ആണ്

അതിനാൽ അനുപാതം $6 : 3 :: 112 : x$ ..... (2)

(1), (2), കൂട്ടിചേർത്ത് നമുക്ക് ഇങ്ങനെ എഴുതാം

$$\left.\begin{matrix}20:25\\6:3\end{matrix}\right\}::112:x$$

അഗ്ര പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം = മധ്യത്തിലുള്ള പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം

അഗ്രപദങ്ങൾ		മധ്യത്തിലുള്ളപദങ്ങൾ		അഗ്രപദങ്ങൾ
20	:	25 ::112	:	x
6	:	3		

അതിനാൽ, $20 \times 6 \times x = 25 \times 3 \times 112$

$$x = \frac{25 \times 3 \times 112}{20 \times 6} = 70 \text{ മീറ്ററുകൾ.}$$

രീതി 2

ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	ദിവസങ്ങൾ	ചുമരിന്റെ നീളം മീറ്ററിൽ ഗുണന ഘടകം മീറ്ററുകൾ
20	6	112
25	3	x

വഴി 1: ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണവും ചുമരിന്റെ നീളവും പരിഗണിക്കുക. ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം 20 ൽ നിന്ന് 25 ആയി, വർദ്ധിക്കുന്നതിനാൽ ചുമരിന്റെ നീളവും വർദ്ധിക്കുന്നു. അതിനാൽ ഇത് അനുലോമ വ്യതിയാനത്തിലാണ്.

$$\text{ഗുണന ഘടകം} = \frac{25}{20}$$

വഴി 2: ദിവസങ്ങളും ചുമരിന്റെ നീളവും പരിഗണിക്കുക ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം 6 ൽ നിന്ന് 3 ആയി, കുറയുന്നതിനാൽ ചുമരിന്റെ നീളവും കുറയുന്നു അതിനാൽ ഇത് അനുലോമ വ്യതിയാനത്തിലാണ്

$$\text{ഗുണന ഘടകം} = \frac{3}{6}.$$

$$\therefore x = \frac{25}{20} \times \frac{3}{6} \times 112 = 70 \text{ മീറ്ററുകൾ}$$

ഉദാഹരണം *1.37*

6 ജോലിക്കാർ ദിവസേന 10 മണിക്കൂർ വീതം ഒരു ജോലി ചെയ്തു തീർക്കാൻ 24 ദിവസങ്ങൾ വേണം. എങ്കിൽ 9 ജോലിക്കാർ ദിവസേന 8 മണിക്കൂർ വീതം ജോലി ചെയ്താൽ എത്ര ദിവസങ്ങൾ കൊണ്ട് ആ ജോലി പൂർത്തിയാക്കും?

നിർദ്ധാരണം

രീതി 1: ഈ പ്രശ്നത്തിൽ 3 ചരങ്ങൾ ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്, അവ ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം, ജോലി ചെയ്യാൻ ദിവസേന എടുക്കുന്ന മണിക്കൂർ, ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം.

ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	ദിവസേനയുള്ള മണിക്കൂർ	ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം
6	10	24
9	8	x

വഴി 1: ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണവും ദിവസങ്ങളും പരിഗണിക്കുക. ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം 6 ൽ നിന്ന് 9 ആയി, വർദ്ധിക്കുന്നതിനാൽ ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം കുറയുന്നു. അതിനാൽ ഇത് പ്രതിലോമ വ്യതിയാനമാണ്,

അതിനാൽ അനുപാതം $9 : 6 :: 24 : x$ ..... (1)

വഴി 2: മണിക്കൂറുകളുടെ എണ്ണവും ദിവസങ്ങളും പരിഗണിച്ചാൽ മണിക്കൂറുകളുടെ എണ്ണം 10 ൽ നിന്ന് 8 ആയി, കുറയുന്നതിനാൽ ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം വർദ്ധിക്കുന്നു. അതിനാൽ പ്രതിലോമ വ്യതിയാനത്തിലാണ്.

അതിനാൽ അനുപാതം $8 : 10 :: 24 : x$ ..... (2)

(1) (2), കൂട്ടിചേർത്ത് നമുക്കിങ്ങനെ എഴുതാം

$$\left.\begin{matrix} 9:6 \\ 8:10 \end{matrix}\right\} :: 24 : x$$

നമുക്കറിയാം, അഗ്രപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം = മധ്യപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം

അഗ്രപദങ്ങൾ		മധ്യപദങ്ങൾ		അഗ്രപദങ്ങൾ
9	:	6 : : 24	:	x
8	:	10		

അതിനാൽ , $9 \times 8 \times x = 6 \times 10 \times 24$

$$x = \frac{6 \times 10 \times 24}{9 \times 8} = 20 \text{ ദിവസങ്ങൾ}$$

കുറിപ്പ് : 1. അനുലോമ വ്യതിയാനത്തെ ഇങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കാം ↓ (താഴോട്ടുള്ള അമ്പടയാളം)
2. പ്രതിലോമ വ്യതിയാനത്തെ ഇങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കാം ↑ (മേലോട്ടുള്ള അമ്പടയാളം)
3. ഗുണന ഘടകങ്ങളെ അമ്പടയാളത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ എഴുതാം. അംശത്തിലെ അമ്പടയാളങ്ങളുടെ തലകളുടെ എണ്ണവും ഛേദത്തിലെ അമ്പടയാളങ്ങളുടെ പൂവുകളുടെ എണ്ണവും കണക്കിലെടുക്കുക.

രണ്ടാമത്തെ രീതിക്ക് മുകളിലെ കുറിപ്പിൽ തന്നിട്ടുള്ള നിർദ്ദേശങ്ങൾ പ്രയോജനപ്പെടുത്തുക.

രീതി 2 : അമ്പടയാളങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്

ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	ദിവസേനയുള്ള മണിക്കൂറുകൾ	ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം
6	10	24
9	8	x

വഴി 1 : ജോലിക്കാരെയും ദിവസങ്ങളേയും പരിഗണിക്കുക ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം 6 ൽ നിന്ന് 9 ആയി, വർദ്ധിക്കുന്നതിനാൽ ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം കുറയുന്നു. അത് പ്രതിലോമ വ്യതിയാനത്തിലാണ്.

ഗുണന ഘടകം = $\frac{6}{9}$

വഴി 2 : ദിവസേനയുള്ള മണിക്കൂറുകളുടെ എണ്ണവും ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണവും പരിഗണിക്കുക. ദിവസേനയുള്ള മണിക്കൂറുകളുടെ എണ്ണം 10 ൽ നിന്ന് 8 ആയി, കുറയുന്നതിനാൽ ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം വർദ്ധിക്കുന്നു അതിനാൽ ഇത് പ്രതിലോമ വ്യതിയാനത്തിലാണ്.

ഗുണന ഘടകം = $\frac{10}{8}$

$$\therefore x = \frac{6}{9} \times \frac{10}{8} \times 24 = 20 \text{ ദിവസങ്ങൾ.}$$

അഭ്യാസം 1.7

1. 12 ആശാരിമാർ ദിവസേന 10 മണിക്കൂർ വീതം 18 ദിവസങ്ങൾ കൊണ്ട് പണി പൂർത്തിയാക്കുന്നു. എങ്കിൽ 15 ആശാരിമാർ ദിവസേന 6 മണിക്കൂർ വീതം ജോലി ചെയ്താൽ അതെ ജോലി പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന് എത്ര ദിവസങ്ങൾ എടുക്കും.
2. എൺപത് യന്ത്രങ്ങൾക്ക് 6 മണിക്കൂറുകൾക്കുള്ളിൽ ഒരേപോലുള്ള 4,800 മൊബൈലുകൾ നിർമ്മിക്കാൻ കഴിയും എങ്കിൽ 1 യന്ത്രം 1 മണിക്കൂറുകൊണ്ട് എത്ര മൊബൈലുകൾ നിർമ്മിക്കും. കൂടാതെ 25 യന്ത്രങ്ങൾ 5 മണിക്കൂറുകൊണ്ട് എത്ര മൊബൈലുകൾ നിർമ്മിക്കും?
3. 4 രചയിതാക്കൾ 5 മണിക്കൂറുകൾ കൊണ്ട് ഒരു പുസ്തകത്തിന്റെ 70 പുറങ്ങൾ രചിക്കുന്നു, എങ്കിൽ 9 മണിക്കൂറുകൾ കൊണ്ട് 100 പുറങ്ങൾ രചിക്കുന്നതിന് എത്ര രചയിതാക്കൾ വേണം?
4. 2400 ച.മീ. നിലം 12 ജോലിക്കാർ 10 ദിവസങ്ങൾ കൊണ്ട് ഉഴുന്നു, 5,400 ച.മീ. നിലം 18 ദിവസങ്ങൾ കൊണ്ട് ഉഴുന്നതിന് എത്ര ജോലിക്കാർ ആവശ്യമാണ്.
5. ദിവസേന 4 മണിക്കൂർ വീതം സ്വാതി 5 സാരികൾക്ക് 18 ദിവസങ്ങൾ കൊണ്ട് പൂക്കൾ തുന്നുന്നു, 10 സാരികൾക്ക് പൂക്കൾ തുന്നുന്നതിന് 6 മണിക്കൂർ വീതം എത്ര ദിവസങ്ങൾ വേണ്ടിവരും?
6. ഒരാൾ 6 മാസങ്ങൾക്ക് 100 രൂപ പലിശ കിട്ടുന്ന ഒരു ബാങ്കിൽ ₹ 2,500 നിക്ഷേപിച്ചു. എങ്കിൽ ₹3,200 യ്ക്ക് അതേ പലിശ നിരക്കിൽ 9 മാസങ്ങൾക്ക് എത്ര രൂപ പലിശ ലഭിക്കും?

1.8 സമയവും പ്രവർത്തിയും

പല ആൾക്കാരുടെ ജോലി നാം പരിഗണിക്കുമ്പോൾ ഓരോ മനുഷ്യനും ഒരു ദിവസം പൂർത്തിയാക്കേണ്ട ജോലിയുടെ തുക നിശ്ചയിക്കേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്. സമയവും പ്രവർത്തിയും പ്രതിലോമ വ്യതിയാനത്തിലാണ് കൂടാതെ കൂടുതൽ ആൾക്കാർ ഒരു ജോലി ചെയ്യാൻ ചേരുമ്പോൾ, കുറഞ്ഞ കാലയളവിൽ ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ സാധിക്കും.

ഇവിടെ പ്രശ്നങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ, താഴെ പറയുന്ന കാര്യങ്ങൾ ഓർമ്മിക്കണം:

1. ഒരാൾ മുഴുവൻ ജോലിയും 'n' ദിവസങ്ങൾക്കുള്ളിൽ, തീർക്കുകയാണെങ്കിൽ ഒരു ദിവസത്തിൽ മുഴുവൻ ജോലിയുടെ '$\frac{1}{n}$'ഭാഗം തീർക്കാൻ കഴിയും. ഉദാഹരണത്തിനായി, ഒരാൾ ഒരു ജോലി 4 ദിവസങ്ങളിൽ, തീർക്കുന്നു എങ്കിൽ ഒരു ദിവസം അയാൾ പൂർത്തിയാക്കിയ ജോലി $\frac{1}{4}$ ആണ്.
2. ഒരു ദിവസം ചെയ്ത ജോലിയുടെ അളവ് തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ, ജോലി പൂർത്തിയാക്കുന്നതിനുവേണ്ടി എടുത്ത ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം = 1/(ഒരു ദിവസത്തെ ജോലി) ഉദാഹരണമായി, ഒരാൾ $\frac{1}{10}$ ഭാഗം ജോലി 1 ദിവസം പൂർത്തിയാക്കുകയാണെങ്കിൽ, ജോലി പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന്‌വേണ്ടി എടുത്ത ദിവസങ്ങൾ.
$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)} = 1 \times \frac{10}{1} = 10 \text{ ദിവസങ്ങൾ.}$$

ഉദാഹരണം *1.38*

A യ്ക്ക് ഒരു ജോലി ചെയ്യാൻ 20 ദിവസങ്ങൾ വേണം B യ്ക്ക് അതേ ജോലിക്ക് 30 ദിവസങ്ങൾ വേണം. രണ്ടുപേരും കൂടെ ചേർന്ന് ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ എത്ര കാലം വേണ്ടിവരും ?

നിർദ്ധാരണം

1 ദിവസം A ചെയ്യുന്ന ജോലി $= \frac{1}{20}$, 1 ദിവസം B ചെയ്യുന്ന ജോലി $= \frac{1}{30}$

A യും B യും ചേർന്ന് 1 ദിവസം ചെയ്യുന്ന ജോലി $= \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$

$= \frac{3+2}{60} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ ഭാഗം ജോലി

A യും B യും ചേർന്ന് ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ എടുത്ത ആകെ ദിവസങ്ങൾ

$= \frac{1}{1/12} = 12$ ദിവസങ്ങൾ

ഉദാഹരണം *1.39*

A യും B യും ചേർന്ന് ഒരു ജോലി 8 ദിവസങ്ങളിൽ പൂർത്തിയാക്കി, A യ്ക്ക് മാത്രമായി ആ ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ 12 ദിവസങ്ങൾ വേണം. അതേ ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ B യ്ക്ക് എത്ര ദിവസങ്ങൾ വേണ്ടിവരും

നിർദ്ധാരണം

A യും B യും ചേർന്ന് 1 ദിവസം പൂർത്തിയാക്കിയ ജോലി $= \frac{1}{8}$ ഭാഗം ജോലി

A മാത്രം 1 ദിവസം ചെയ്ത ജോലി $= \frac{1}{12}$ ഭാഗം ജോലി

B മാത്രം 1 ദിവസം ചെയ്ത ജോലി $= \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{3-2}{24} = \frac{1}{24}$

ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ B എടുത്ത ആകെ ദിവസങ്ങൾ $= \frac{1}{1/24} = 24$ ദിവസങ്ങൾ.

ഉദാഹരണം 1.40

രണ്ടാൾക്കാരായ A യും B യും ഒരു ജോലി ചെയ്യുന്നു. A 12 ദിവസങ്ങളിലും അതേ ജോലി B 20 ദിവസങ്ങളിലും പൂർത്തിയാക്കുന്നു. അവർ ഇരുവരും. 3 ദിവസങ്ങൾ ഒരുമിച്ച് ജോലി ചെയ്തിട്ട് A പിരിഞ്ഞുപോയി. B എത്ര ദിവസത്തിനുള്ളിൽ ബാക്കി ജോലി പൂർത്തിയാക്കും ?

ശ്രമിക്കുക

A, B, C എന്നിവർ ഒറ്റയ്ക്ക് ജോലി ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ അതു പൂർത്തിയാക്കാൻയഥാക്രമം 20,5,4 ദിവസങ്ങൾവേണ്ടി വരും എങ്കിൽ മൂന്നു പേരും ചേർന്ന് ആ ജോലി, എത്രദിവസങ്ങളിൽപൂർത്തിയാക്കും.

നിർദ്ധാരണം

A 1 ദിവസം ചെയ്ത ജോലി $= \frac{1}{12}$

B 1 ദിവസം ചെയ്ത ജോലി $= \frac{1}{20}$

A യും B യും ചേർന്ന് 1 ദിവസം ചെയ്ത ജോലി $= \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$

$= \frac{5+3}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$

A യും B യും ചേർന്ന് 3 ദിവസം പൂർത്തിയാക്കിയ ജോലി $= \frac{2}{15} \times 3 = \frac{2}{5}$

ബാക്കി ജോലി $= 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

ബാക്കി ജോലി പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന് B എടുത്ത ദിവസങ്ങൾ $= \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{20}} = \frac{3}{5} \times \frac{20}{1}$

$=$ 12 ദിവസങ്ങൾ

ഉദാഹരണം 1.41

A യും B യും ചേർന്ന് ഒരു ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ 12 ദിവസങ്ങളും, B യ്ക്കും C യ്ക്കും 15 ദിവസങ്ങളും, C യ്ക്കും A യ്ക്കും 20 ദിവസങ്ങളും വേണ്ടി വന്നു. അവർ ഒരുമിച്ചും പ്രത്യേകിച്ചും ആ ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ എത്ര ദിവസങ്ങൾ വേണ്ടിവരും?

നിർദ്ധാരണം

A യും B യും ചേർന്ന് 1 ദിവസം പൂർത്തിയാക്കിയ ജോലി $= \frac{1}{12}$

B യും C യും ചേർന്ന് 1 ദിവസം പൂർത്തിയാക്കിയ ജോലി $= \frac{1}{15}$

C യും A യും ചേർന്ന് 1 ദിവസം പൂർത്തിയാക്കിയ ജോലി $= \frac{1}{20}$

(A+B)+(B+C)+(C+A) 1 ദിവസം പൂർത്തിയാക്കിയ ജോലി $= \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}$

(2A + 2B + 2C) 1 ദിവസം പൂർത്തിയാക്കിയ ജോലി $= \frac{5+4+3}{60}$

2(A + B + C)1 ദിവസം പൂർത്തിയാക്കിയ ജോലി $= \frac{12}{60}$

A യും B യും C യും 1 ദിവസം പൂർത്തിയാക്കിയ ജോലി $= \frac{1}{2} \times \frac{12}{60} = \frac{1}{10}$

$\therefore$ A, B മറ്റും C യും 10 ദിവസങ്ങളിൽ ജോലി പൂർത്തിയാക്കും.

A 1 ദിവസം പൂർത്തിയാക്കിയ ജോലി

.(i.e.)[(A + B + C) യുടെ ജോലി– (B + C)യുടെ ജോലി] $= \frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{3-2}{30} = \frac{1}{30}$

$\therefore$ A 30 ദിവസങ്ങളിൽ ജോലി പൂർത്തിയാക്കും

B 1 ദിവസം പൂർത്തിയാക്കിയ ജോലി

(i.e.)[(A + B + C)യുടെ ജോലി – (C + A)യുടെ ജോലി] $= \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{2-1}{20} = \frac{1}{20}$

$\therefore$ B 20 ദിവസങ്ങളിൽ ജോലി പൂർത്തിയാക്കും.

C 1 ദിവസം പൂർത്തിയാക്കിയ ജോലി

(i.e.)[(A + B + C)യുടെ ജോലി – (A + B)യുടെ ജോലി] $= \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{6-5}{60} = \frac{1}{60}$

$\therefore$ C 60 ദിവസങ്ങളിൽ ജോലി പൂർത്തിയാക്കും.

ഉദാഹരണം *1.42*

A യ്ക്ക് ഒരു ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ 10 ദിവസങ്ങളും B യ്ക്ക് 15 ദിവസങ്ങളും വേണ്ടിവരും. രണ്ടുപേരും കൂടെ ജോലി പൂർത്തിയാക്കിയപ്പോൾ ₹ 1500 പ്രതിഫലമായി ലഭിച്ചു. എങ്കിൽ ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര പ്രതിഫലം കിട്ടി?

നിർദ്ധാരണം

1 ദിവസം A ചെയ്ത ജോലി $= \frac{1}{10}$

1 ദിവസം B ചെയ്ത ജോലി $= \frac{1}{15}$

ജോലിയുടെ അനുപാതം $= \frac{1}{10} : \frac{1}{15} = 3 : 2$

ആകെ പ്രതിഫലം = ₹ 1500

A യുടെ പ്രതിഫലം $= \frac{3}{5} \times 1500$ = ₹ 900

B യുടെ പ്രതിഫലം $= \frac{2}{5} \times 1500$ = ₹ 600

ഉദാഹരണം *1.43*

രണ്ട് പൈപ്പുകൾക്ക് ഒരു ടാങ്ക് നിറയ്ക്കുന്നതിന് 30 മിനിറ്റ് കൂടാതെ 40 മിനിറ്റുകളിൽ സാധിക്കും. മറ്റൊരു പൈപ്പിന് ടാങ്കിനെ കാലിയാക്കാൻ 24 മിനിറ്റുകളിൽ സാധിക്കും, ടാങ്ക് കാലിയാണെങ്കിൽ മൂന്ന് പൈപ്പുകളും ഒരേസമയം തുറന്നാൽ ടാങ്ക് നിറയുന്നതിന് എത്ര സമയം വേണ്ടി വരും?

നിർദ്ധാരണം

ആദ്യത്തെ പൈപ്പ് ഒരു മിനിറ്റിൽ നിറച്ച വെള്ളത്തിന്റെ അളവ് $= \frac{1}{30}$

രണ്ടാമത്തെ പൈപ്പ് ഒരു മിനിറ്റിൽ നിറച്ച വെള്ളത്തിന്റെ അളവ് $= \frac{1}{40}$

മൂന്നാമത്തെ പൈപ്പ് ഒരു മിനിറ്റിൽ പുറത്തേക്ക് ഒഴുക്കുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ അളവ് $= \frac{1}{24}$

മൂന്ന് പൈപ്പുകളും ഒരേ സമയം തുറന്നിരുന്നാൽ, 1 മിനിറ്റിൽ നിറയുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ അളവ് $\Big\} = \frac{1}{30} + \frac{1}{40} - \frac{1}{24}$

$$= \frac{4+3-5}{120} = \frac{7-5}{120}$$

$$= \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

ടാങ്ക് നിറയാൻ ആവശ്യമായ സമയം $= \frac{1}{1/60} =$ 60 മിനിട്ടുകൾ

= 1 മണിക്കൂർ

അഭ്യാസം 1.8

1. ഒരു പുരുഷന് ഒരു ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ 4 ദിവസങ്ങളും, ഒരു സ്ത്രീക്ക് അതേ ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ 12 ദിവസങ്ങളും, വേണ്ടിവരുന്നു. രണ്ടുപേരും ഒരുമിച്ച് ജോലി ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ, ആ ജോലി പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന് എത്ര ദിവസങ്ങൾ വേണ്ടിവരും ?

2. രണ്ട് ആൺ കുട്ടികൾ ഒരുമിച്ച് ജോലി ചെയ്ത് ഒരു ജോലി 10 ദിവസങ്ങളിൽ പൂർത്തിയാക്കുന്നു. ആദ്യത്തെ ആൺകുട്ടി മാത്രം ജോലി ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ ആ ജോലി പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന് 15 ദിവസങ്ങൾ വേണ്ടിവരും. രണ്ടാമത്തെ ആൺകുട്ടി എത്ര ദിവസങ്ങൾകൊണ്ട് ആ ജോലി ചെയ്തു തീർക്കും?

3. A,B മറ്റും C എന്നീ പുരുഷന്മാർ ഒരു ജോലി യഥാക്രമം 8, 12 കൂടാതെ 16 ദിവസങ്ങൾ കൊണ്ട് പൂർത്തിയാക്കും A യും B യും ഒരുമിച്ച് 3 ദിവസങ്ങൾ ജോലിചെയ്തു അതിനുശേഷം B ജോലി വിടുകയും C ജോലിയിൽ ചേരുകയും ചെയ്തു. A യും C യും ഒരുമിച്ചു ജോലി ചെയ്താൽ എത്ര ദിവസങ്ങൾ കൊണ്ട് ആ ജോലി പൂർത്തിയാക്കും ?

4. 10 മിനിട്ടുകൾ കൊണ്ട് A എന്ന പൈപ്പ് ഒരു ഡ്രമ്മിനെ നിറയ്ക്കുന്നു. B എന്ന പൈപ്പ് 20 മിനിട്ടുകൾക്കൊണ്ട് ഡ്രമ്മിനെ നിറയ്ക്കുന്നു. C എന്ന പൈപ്പ് 15 മിനിട്ടുകൾ കൊണ്ട് കാലിയാക്കുന്നു. ഡ്രം കാലിയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. എല്ലാ പൈപ്പുകളും തുറന്ന് ഇരിക്കുകയാണെങ്കിൽ എത്ര സമയം കൊണ്ട് ഡ്രം നിറയും?

5. A ഒരു ജോലി 20 ദിവസം കൊണ്ട് പൂർത്തിയാക്കുന്നു. B അതേ ജോലി 30 ദിവസങ്ങൾകൊണ്ട് പൂർത്തിയാക്കുന്നു. രണ്ടുപേരും ഒരുമിച്ചു ജോലി പൂർത്തിയാക്കുമ്പോൾ വേതനമായി ₹600, ലഭിച്ചാൽ ഓരോരുത്തരുടെയും ഓഹരി എത്ര ?

6. A, B മറ്റും C യും ഒരു ജോലി യഥാക്രമം 12, 24 കൂടാതെ 8 ദിവസങ്ങൾ കൊണ്ട് പൂർത്തിയാക്കുന്നു. എല്ലാപേരും ഒരുമിച്ച് ഒരു ദിവസം ജോലി ചെയ്യുന്നു അതിനുശേഷം C ജോലി വിടുന്നു എങ്കിൽ A യും B യും ചേർന്ന് എത്ര ദിവസങ്ങൾ കൊണ്ട് ബാക്കി ജോലി പൂർത്തിയാക്കും?

7. ഒരു പൈപ്പ് 15 മിന്നിട്ടുകൾ കൊണ്ട് ഒരു ടാങ്ക് നിറയ്ക്കുന്നു. വേറൊരു പൈപ്പ് 20 മിനിറ്റുകൾ കൊണ്ട് അത് കാലിയാക്കുന്നു. ആരംഭത്തിൽ ടാങ്ക് കാലിയാണ്. രണ്ടു പൈപ്പുകളും ഒരുമിച്ച് പ്രവർത്തിക്കുകയാണെങ്കിൽ എത്ര സമയം കൊണ്ട് ടാങ്ക് നിറയും?

ചുരുക്കം

C.P. = വാങ്ങിയവില, S.P. = വിറ്റവില

M.P. = മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില

P = മുതൽ , r =പലിശ നിരക്ക്, n = കാലയളവ്, A =തുക, C.I. = കൂട്ടു പലിശ

Concept Summary

- ശതമാനമെന്നാൽ നൂറ്റിന് എന്നാണർത്ഥം. ഛേദത്തിൽ 100 ഉള്ള ഭിന്നത്തെ ശതമാനമെന്ന് വിളിക്കാം.
- ലാഭത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ നമുക്കറിയാം

  ലാഭം $= S.P. - C.P.$ ലാഭശതമാനം $= \frac{\text{ലാഭം}}{C.P} \times 100$

  $S.P. = \left(\frac{100 + \text{ലാഭ}\%}{100} \times C.P\right)$ $C.P. = \left(\frac{100}{100 + \text{ലാഭ}\%} \times S.P.\right)$
- നഷ്ടത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ നമുക്കറിയാം

  നഷ്ടം $= C.P. - S.P.$ നഷ്ട ശതമാനം $= \frac{\text{നഷ്ടം}}{C.P} \times 100$

  $S.\ P. = \left(\frac{100 - \text{നഷ്ട}\%}{100} \times C.P.\right)$ $C.P. = \left(\frac{100}{100 - \text{നഷ്ട}\%} \times S.P.\right)$
- കിഴിവ് എന്നത് മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വിലയ്ക്ക് നൽകപ്പെടുന്ന കുറവാണ് .
- മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വിലയിൽ നിന്ന് കിഴിവ് കുറച്ച് നൽകേണ്ട വിലയാണ് വിറ്റവില.
- കിഴിവ് $= M.P. - S.P.$
- $M.P. = \frac{100}{(100 - \text{കിഴിവ്}\ \%)} \times S.P.$ $S.P. = \frac{100 - \text{കിഴിവ്}\%}{100} \times M.P.$
- $C.P. = \frac{100 - \text{കിഴിവ്}\%}{(100 + \text{ലാഭ}\ \%)} \times M.P.$ $M.P. = \frac{100 + \text{ലാഭ}\ \%}{(100 - \text{കിഴിവ്}\ \%)} \times C.P.$
- കിഴിവ് ശതമാനം $= \frac{\text{കിഴിവ്}}{M.P} \times 100$
- പലിശ കാണുന്നതിന്

  (i) വാർഷിക കൂട്ടുപലിശ, $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

  (ii) അർദ്ധവാർഷിക കൂട്ടുപ്പലിശ, $A = P\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{2n}$

  (iii) കാൽ വാർഷിക കൂട്ടുപലിശ, $A = P\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{100}\right)\right]^{4n}$
- വിലക്കയറ്റം, $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$ വിലയിടിവ്, $A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$
- S. I. യ്ക്കും C. I. യ്ക്കും 2 വർഷത്തേക്കുള്ള വ്യത്യാസം $= P\left(\frac{r}{100}\right)^2$
- A യുടെ ഒരു ദിവസത്തെ ജോലി $A = \frac{1}{\text{A എടുത്ത ദിവസം}}$
- 'x' ദിവസങ്ങളിൽ പൂർത്തിയാക്കപ്പെട്ട ജോലി $=$ ഒരു ദിവസത്തെ ജോലി $\times\ x$.

ജ്യാമിതി

2

2.1 ആമുഖം

2.2 ത്രികോണത്തിലെ സംഗാമി

2.3 പൈതഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്തം

2.4 വൃത്തങ്ങൾ

പൈതഗോറസ്

(582 - 497 BC)

എല്ലാ കാലത്തേയും ഗണിത ശാസ്ത്ര ജ്ഞന്മാരിൽ മികച്ച ഗണിത ശാ സ്ത്രജ്ഞനായ പൈതഗോറസ് തന്റെ പേര് പ തിപ്പിച്ച സമകോണ ത്രികോണ ബന്ധങ്ങ ളിലാണ് അദ്ദേഹം കൂടുതലായി അറിയപ്പെടുന്നത്.

2.1 ആമുഖം

ജ്യാമിതിയുടെ വളർച്ചയ്ക്ക് കാരണം ക്രിസ്തുവിന് 1000 വർഷങ്ങൾക്ക് മുമ്പ് ജീവിച്ചിരുന്ന ഈജിപ്തുകാരാണ്, നൈൽ നദിയിൽ വർഷം തോറും ഉണ്ടാകാറുള്ള വെള്ളപൊക്കത്തിനുശേഷം നില അതിർത്തികളെ പുനഃസ്ഥാപിക്കുന്നതിനായി പുരാതന ഈജിപ്തുകാർ ജ്യാമിതീയ ആശയങ്ങളെ വികസിപ്പിച്ചെടുത്തു.

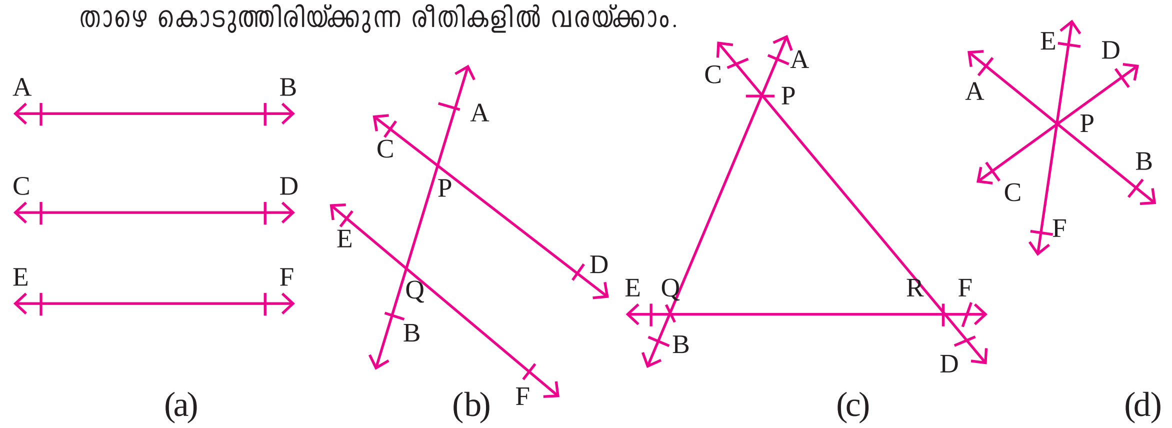
ജ്യാമിതി നമ്മുടെ നിത്യജീവിതത്തിൽ പല വഴികളിലായി പ്രധാനപ്പെട്ട പങ്കുവഹിക്കുന്നു. പ്രത്യേകിച്ച് നാം ത്രികോണങ്ങളെ പല വിധത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ബഹുഭുജ രൂപത്തിലുള്ള ഒരു സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ആ സ്ഥലത്തെ ത്രികോണങ്ങളായി തിരിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്. സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം, ത്രികോണങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ കൂട്ടുത്തുകയാണ്. ത്രികോണങ്ങൾ സമകോണത്രികോണങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ വിസ്തീർണ്ണം എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്. ഇല്ലെങ്കിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ പാദത്തിൽ നിന്ന് ശീർഷകത്തിലേക്ക് ലംബം വരച്ച് വിസ്തീർണ്ണം കാണാവുന്നതാണ്.

ഇവിടെ നമുക്ക് ത്രികോണങ്ങളുടെ സർവ്വ സമത്വത്തെയും അവയുടെ ചില സവിശേഷതകളെയും നോക്കാം.

2.2 ത്രികോണത്തിലെ സംഗാമി

ഒരു തലത്തിൽ മൂന്നോ അതിൽ കൂടുതലോ രേഖകൾ വരയ്ക്കുക. ഏതൊക്കെ രീതികളിൽ വരയ്ക്കാൻ സാദ്ധ്യതയുണ്ട്?

താഴെ കൊടുത്തിരിയ്ക്കുന്ന രീതികളിൽ വരയ്ക്കാം.



ചിത്രം (a), ൽ AB ,CD കൂടാതെ EF എന്നിവ സമാന്തര രേഖകളാകുന്നു. അതിനാൽ അവ ഒരിടത്തും സന്ധിയ്ക്കുന്നില്ല.

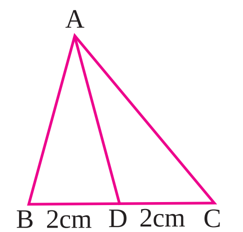
ചിത്രം (b), ൽ AB യും CD യും P യിലും AB യും EF ഉം Q വിലും സന്ധിയ്ക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് P, Q എന്നിവ രണ്ട് ഛേദകബിന്ദുക്കൾ ആകുന്നു.

ചിത്രം (c), ൽ P, Q, R എന്നിവ 3 ഛേദകബിന്ദുക്കൾ ആകുന്നു.

ചിത്രം (d), ൽ ഒരു ഛേദകബിന്ദു P മാത്രമാണ്. ഇവിടെ AB, CD, EFഎന്നിവ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്ന് പോകുന്നു. ഈ രേഖകളെ സംഗാമിരേഖകൾ എന്നും P യെ സംഗമ ബിന്ദു എന്നും പറയുന്നു.

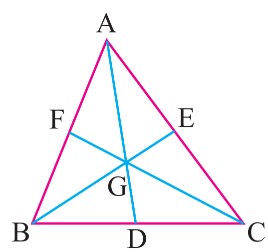
ഒരു ത്രികോണത്തിൽ പ്രത്യേക പ്രാമുഖ്യമുള്ള വിവിധ സംഗമബിന്ദുക്കൾ നിർവചിക്കാൻ കഴിയും. അത്തരം ചില ബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രകം , ലംബകേന്ദ്രം, അന്തഃകേന്ദ്രം, പരിവൃത്തകേന്ദ്രം എന്നിവയാകുന്നു. ഇപ്പോൾ നമുക്ക് ഒരു ത്രികോണത്തിൽ ഈ ബിന്ദുക്കൾ എങ്ങനെയാണ് ലഭിയ്ക്കുന്നത് എന്നതിനെക്കുറിച്ച് പഠിയ്ക്കാം.

2.2.1 ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം



അടുത്തുള്ള ചിത്രത്തിൽ, ത്രികോണം ABC
BC യുടെ മദ്ധ്യ ബിന്ദു D. AD യെ യോജിപ്പിക്കുക.
ഇവിടെ AD ത്രികോണം ABC യിലെ ഒരു മധ്യമം ആകുന്നു.

മധ്യമം എന്നത് ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ശീർഷത്തേയും അതിന്റെ എതിർവശത്തുള്ള മധ്യബിന്ദുവിനേയും യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡം ആകുന്നു.

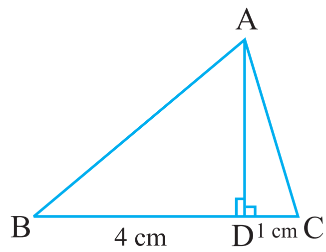


ഇവിടെ അടുത്തുള്ള ചിത്രം പരിഗണിക്കാം, AD, BE, CF എന്നിവ ΔABC യിലെ മൂന്ന് മധ്യമങ്ങൾ ആകുന്നു.

ഇവ മൂന്നും G എന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഗമിയ്ക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുവിനെ കേന്ദ്രകം എന്ന് പറയുന്നു. ഒരു ത്രികോണത്തിലെ മൂന്ന് മധ്യമങ്ങളും ഒരു ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുന്നു. ഈ സംഗമബിന്ദുവിനെ ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം എന്നു പറയുന്നു. അതിനെ G എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് കുറിയ്ക്കുന്നു.

കുറിപ്പ് : (i) **കേന്ദ്രകം ഓരോ മധ്യമത്തേയും 2:1 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു.**
(ii) **ഒരു ത്രികോണത്തിൽ കേന്ദ്രകം എന്നത് ഭൂഗുരുത്വത്തിന്റെ ഭൗതീകകേന്ദ്രമാണ്.**

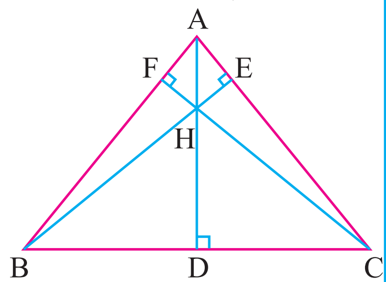
2.2.2 ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രം



സമീപ ചിത്രങ്ങളിൽ ABC ഒരു ത്രികോണം A യിൽ നിന്ന് BC യ്ക്ക് ഒരു ലംബം വരയ്ക്കുക. BC യ്ക്ക് AD ലംബം.

$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$. ഇവിടെ D മദ്ധ്യബിന്ദു ആകണമെന്നില്ല. ഇവിടെ AD എന്നത്, ശീർഷം A യിൽ നിന്ന് വരയ്ക്കുന്ന ഉന്നതിയാകുന്നു.

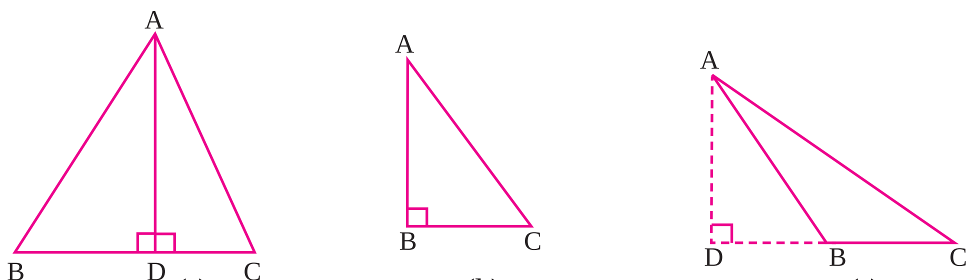
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ശീർഷത്തിൽ നിന്നും ആ ശീർഷത്തിന് എതിരേയുള്ള വശത്തിലേയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബരേഖാ ഖണ്ഡത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി എന്ന് പറയുന്നു. ത്രികോണം ABC യിൽ AD, BE, CF എന്നിവ ഉന്നതികൾ.



അവ H എന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുവിനെ ലംബകേന്ദ്രം എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് ഉന്നതികൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സംഗമിയ്ക്കുന്നു. ഈ സംഗമബിന്ദുവിനെ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രം എന്ന് പറയുന്നു.

ലംബകേന്ദ്രത്തിന്റെ വിവിധ നിലകൾ



(a) (b) (c)

കേസ്സ് (i) : ചിത്രം (a) യിൽ, ABC ഒരു ന്യൂനകോണ ത്രികോണം
ലംബകേന്ദ്രം $\hat{\Delta}$ ABC യ്ക്ക് ഉള്ളിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

കേസ്സ് (ii) : ചിത്രം (b) യിൽ, ABC ഒരു സമകോണ ത്രികോണം
ലംബകേന്ദ്രം സമകോണിന്റെ ശീർഷത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

കേസ്സ് (iii) : ചിത്രം(c) യിൽ, ABC ഒരു ബൃഹത്കോണ ത്രികോണം
ലംബകേന്ദ്രം Δ ABC യുടെ വെളിയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

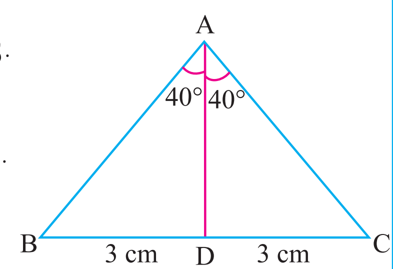
2.2.3 ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തഃകേന്ദ്രം

അടുത്തുള്ള ചിത്രത്തിൽ, ABC ഒരു ത്രികോണം.

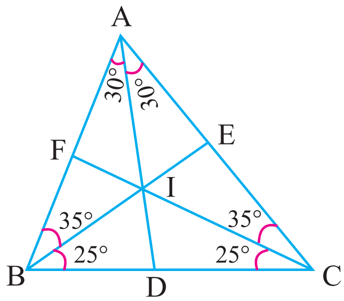
AD എന്ന രേഖ $\angle A$ യെ രണ്ട് സമഭാഗങ്ങളായി പിരിയ്ക്കുന്നു.

അതിനാൽ $\angle BAD = \angle DAC$.

ഇവിടെ $\angle A$ യെ AD യുടെ കോണ ദ്വിഭാജി എന്ന് പറയുന്നു.



ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണ ദ്വിഭാജി എന്നത് ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ കോണിനെ രണ്ടായി ഭാഗിക്കുന്ന ഒരു രേഖാഖണ്ഡമാകുന്നു.



ചിത്രത്തിൽ AD, BE, CF എന്നിവ $\triangle ABC$ യിലെ കോണ ദ്വിഭാജകങ്ങൾ ആകുന്നു.

ഇവ I എന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഗമിയ്ക്കുന്നു.

ഈ ബിന്ദുവിനെ ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തഃകേന്ദ്രം എന്ന് പറയുന്നു.

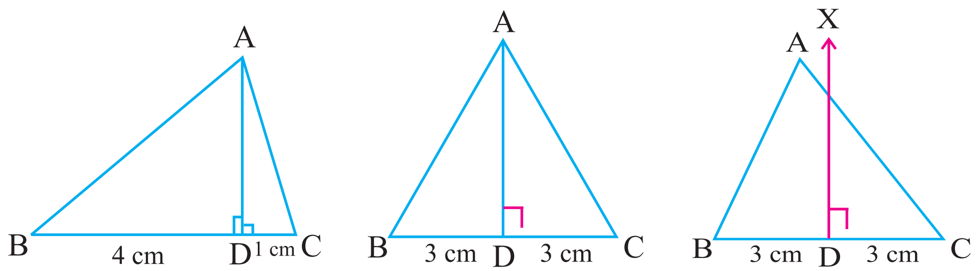
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മുന്ന് കോണ ദ്വിഭാജികൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സംഗമിയ്ക്കുന്ന സംഗമ ബിന്ദുവിനെ **അന്തഃകേന്ദ്രം** എന്ന് പറയുന്നു.

2.2.4 ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം

നമ്മൾ കഴിഞ്ഞ ക്ലാസ്സിൽ ലംബദ്വിഭാജകങ്ങളെക്കുറിച്ച് പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബദ്വിഭാജകം എന്നാൽ എന്ത് ?

തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങൾ പരിശോധിക്കുക.



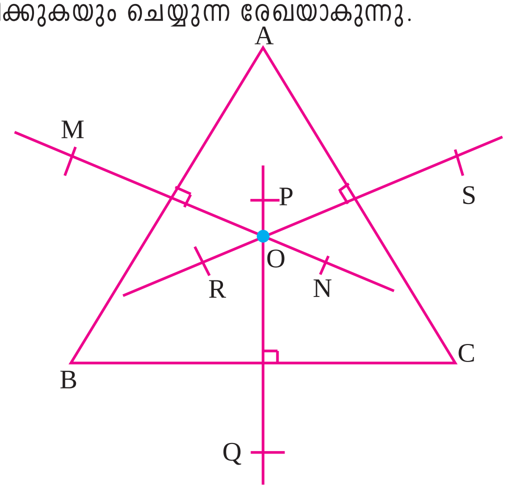
(a) (b) (c)

ചിത്രം (a) ൽ AD എന്നത് BC യ്ക്ക് A യിൽ നിന്ന് വരച്ചിട്ടുള്ള ലംബം എന്നാൽ BC യെ രണ്ട് സമഭാഗങ്ങളായി വിഭജിയ്ക്കുന്നില്ല.

ചിത്രം (b) ൽ AD,BC യെ രണ്ടായി വിഭജിക്കുന്നു. എന്നാൽ BD = DC. AD എന്നത് BC യ്ക്ക് ലംബം.

ചിത്രം (c) ൽ DX,BC യ്ക്ക് ലംബം BC കൂടാതെ DX യെ രണ്ട് സമഭാഗങ്ങളായി വിഭജിയ്ക്കുന്നു. BD = DC എന്നാൽ DX ശീർഷം 'A' വഴികടന്ന് പോകുന്നില്ല.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ ലംബദ്വിഭാജകം എന്നത് ആ വശത്തിന് ലംബവും അതിനെ രണ്ടായി വിഭജിക്കുകയും ചെയ്യുന്ന രേഖയാകുന്നു.



ഇപ്പോൾ മുകളിലുളള ചിത്രം ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഇവിടെ BC, AC കൂടാതെ AB എന്നീ വശങ്ങളുടെ ലംബ ദ്വിഭാജകങ്ങൾ PQ, RS കൂടാതെ MN എന്നിവ O എന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഗമിയ്ക്കുന്നു.

O യെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം എന്ന് പറയുന്നു.

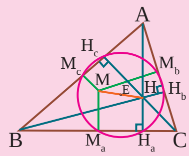
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് ലംബദ്വിഭാജകങ്ങൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സംഗമിയ്ക്കുന്നു. ഈ സംഗമ ബിന്ദുവിനെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം എന്ന് പറയുന്നു.

കുറിപ്പ് :

(i) ഏതൊരു ത്രികോണം ABC യിലും പരിവൃത്തകേന്ദ്രം (O), കേന്ദ്രകം (G), ലംബ കേന്ദ്രം (H) എന്നിവ ഒരേ നേർരേഖയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ ഇതിനെ യൂളർരേഖ (Euler line) എന്ന് പറയുന്നു. കൂടാതെ OG : GH = 1 : 2

(ii) സമഭുജത്രികോണത്തിൽ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം (O), അന്തഃകേന്ദ്രം(I), ലംബകേന്ദ്രം (H) കേന്ദ്രകം (G) എന്നിവ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു.

യൂളർ (1707-1783)



2.3 പൈതഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്തം

പൈതഗോറസ്സ് (ഏകദേശം 582-497 ബി.സി.) എക്കാലത്തെയും ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരിൽ അഗ്രഗണ്യനാണ് അദ്ദേഹത്തിന്റെ പേരിൽ അറിയപ്പെടുന്ന സമകോണ ത്രികോണ ബന്ധം മൂലമാണ് അദ്ദേഹം പ്രസിദ്ധനായത്.

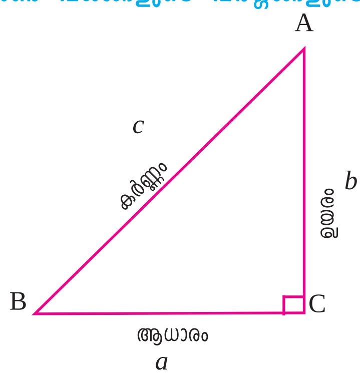
2.3.1 പൈതഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്തം

ഒരു സമകോണ ത്രികോണത്തിൽ കർണ്ണത്തിന്റെ വർഗ്ഗം മറ്റ് രണ്ട് വശങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമായിരിക്കും.

$\triangle ABC$ യെ പരിഗണിക്കാം. $\angle C = 90^\circ$.

$BC = a, CA = b$ കൂടാതെ $AB = c$.

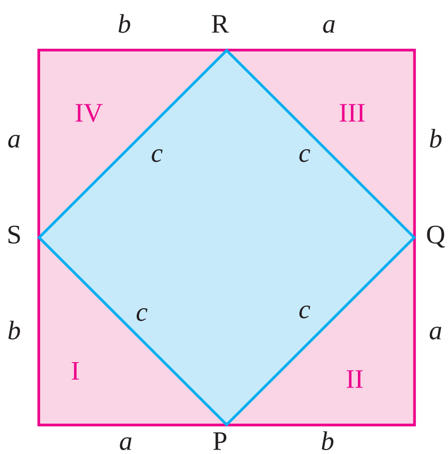
എങ്കിൽ, $a^2 + b^2 = c^2$.



പല ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻമാരും ഇതിനെ വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ തെളിയിച്ചിരിയ്ക്കുന്നു.

നമുക്ക് എളുപ്പ വഴിയിൽ പൈതഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചിരിക്കുന്നത് കാണാം.

ഇവിടെ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിയ്ക്കുന്നത്പോലെ വശം$(a + b)$ഉള്ള സമചതുരം വരച്ച് പൈതഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്തം തെളിയിക്കാം



$a^2 + b^2 = c^2$ എന്ന് നമുക്ക് തെളിയിക്കാം ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം. വശം $(a + b)$ ഉള്ള സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $(a + b)^2$

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് വശം $(a + b)$ ഉള്ള സമചതുരത്തിന്റെ

വിസ്തീർണ്ണം $= (a + b)^2$

= ത്രികോണം I,II,III, IV ഇവയുടെ വിസ്തീർണ്ണം + സമചതുരം PQRS ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം.

i.e., $(a+b)^2 = 4$ (സമകോണ ത്രികോണം D യുടെ വിസ്തീർണ്ണം + സമചതുരം PQRS ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം)

$$(a+b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\times a\times b\right) + c^2$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

നാം പൈതഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു.

പ്രവർത്തി

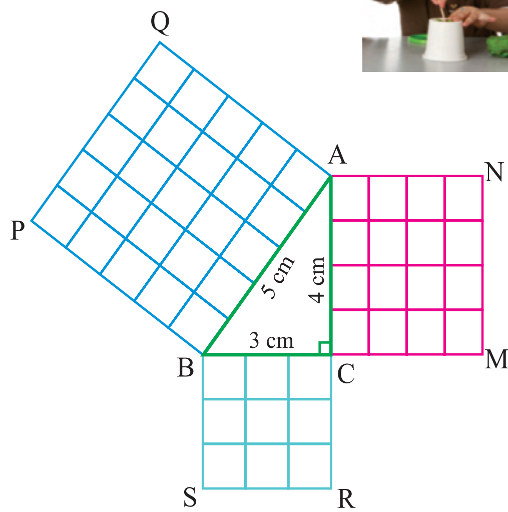
പൈതഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്തം

സമകോണ ത്രികോണം ABC വരയ്ക്കുക $\angle C = 90^\circ$, AB = 5 സെ.മീ., AC = 4 സെ.മീ., BC = 3 സെ.മീ.

ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങളിലും ഓരോ സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

ഓരോ സമചതുരത്തിനേയും വിസ്തീർണ്ണം ഒരു ചതുര സെ.മീ. അളവുള്ള സമചതുരങ്ങളായി വിഭജിക്കുക.

ചെറിയ സമചതുരങ്ങളെ എണ്ണുമ്പോൾ പൈതഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു കഴിയും.



ABPQ ലുള്ള സമചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം = 25

BCRS ലുള്ള സമചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം = 9

ACMN ലുള്ള സമചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം = 16

$\therefore$ ABPQ ലുള്ള സമചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം = BCRS ലുള്ള സമചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം + ACMN ലുള്ള സമചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം

ഈ സംഖ്യകൾ പൈതഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്തത്തിനെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു. അതിനാൽ ഈ സംഖ്യകളെ Pythagorean Triplets എന്ന് പറയുന്നു.

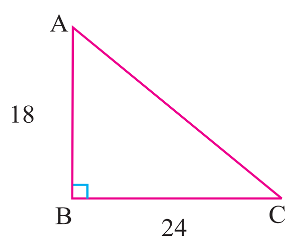
ഉദാഹരണം *2.1*

$\triangle ABC, \angle B = 90^\circ$, AB = 18 സെ.മീ. കൂടാതെ BC = 24 സെ.മീ. AC യുടെ നീളം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

പൈതഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്തം,

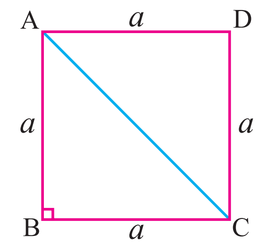
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= 18^2 + 24^2$$
$$= 324 + 576$$
$$= 900$$
$$AC = \sqrt{900} = 30 \text{ സെ.മീ.}$$



ഉദാഹരണം *2.2*

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 40 സെ.മീ. എങ്കിൽ കർണ്ണങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

നിർദ്ധാരണം



സമചതുരത്തിന്റെ വശം 'a' എന്നിരിക്കട്ടെ. കർണ്ണം AC

സമചതുരം ABCD യുടെ ചുറ്റളവ് = 4 a മാത്രകൾ

4a = 40സെ.മീ. [തന്നിട്ടുള്ളത്]

$a = \frac{40}{4} = 10$ സെ.മീ.

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ഓരോ കോണും 90^o ആണെന്ന് നമുക്കറിയാം അതിനാൽ കർണ്ണങ്ങളും സമം

$\triangle ABC$ യിൽ, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 10^2 + 10^2 = 100 + 100$

$= 200$

$\therefore AC = \sqrt{200}$

$= \sqrt{2 \times 100} = 10\sqrt{2}$

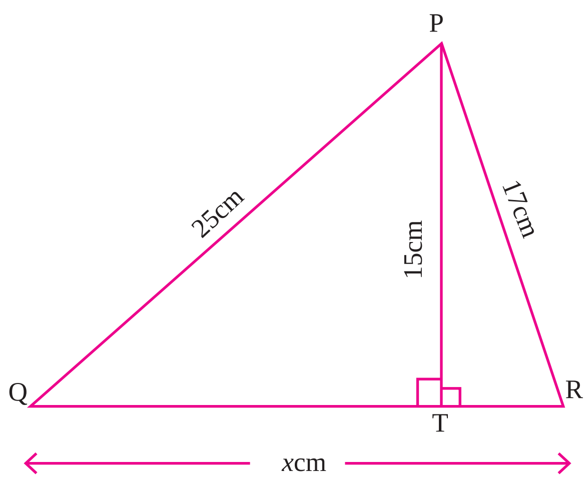
$= 10 \times 1.414 = 14.14$ സെ.മീ.

കർണ്ണം AC = കർണ്ണം BD

ഇവിടെ, കർണ്ണങ്ങളുടെ തുക =14.14 + 14.14 = 28.28 സെ.മീ.

ഉദാഹരണം 2.3

ചിത്രത്തിൽ ത്രികോണം PQRൽ PT ഉന്നതി, PQ = 25സെ.മീ., PR = 17സെ.മീ., PT = 15 സെ.മീ. QR = x സെ.മീ. എങ്കിൽ xന്റെ മൂല്യം കാണുക



നിർദ്ധാരണം ചിത്രത്തിൽ നിന്നും നമുക്ക്

QR = QT + TR,

കാണുക: QT കൂടാതെ TR

സമകോണത്രികോണം PTQ ൽ

$\angle PTQ = 90^o$ [PT ഉന്നതി]

പൈതഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്തപ്രകാരം,

$PQ^2 = PT^2 + QT^2 \quad \therefore PQ^2 - PT^2 = QT^2$

$\therefore QT^2 = 25^2 - 15^2 = 625 - 225 = 400$

$QT = \sqrt{400} = 20$ സെ.മീ. .....(1)

അതുപോലെ സമകോണത്രികോണം PTR ൽ,

പൈതഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്തപ്രകാരം, $PR^2 = PT^2 + TR^2$

$\therefore TR^2 = PR^2 - PT^2$

$= 17^2 - 15^2$

$= 289 - 225 = 64$

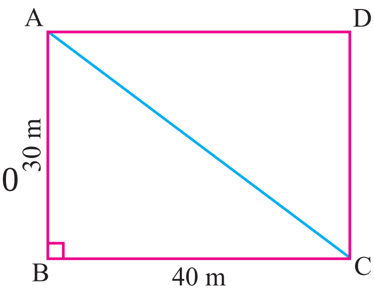
$TR = \sqrt{64} = 8$ സെ.മീ. ..... (2)

സമീകരണം(1), (2) ൽ നിന്ന് QR = QT + TR = 20 + 8 = 28 സെ.മീ.

ഉദാഹരണം 2.4 ഒരു ദീർഘചതുര വയലിന്റെ അളവുകൾ 40 മീ. , 30 മീ. എന്നിവയാണ് വയലിന്റെ ഒരു മൂലയിൽ നിന്ന് എതിർദിശയിലെ മൂലയ്ക്കു ചെല്ലാൻ കർണ്ണം വഴി നടന്നാൽ എത്ര ദൂരം ലാഭിക്കാം.

നിർദ്ധാരണം

സങ്കല്പം : ദീർഘചതുരം ABCD യുടെ നീളം 40 മീ., വീതി = 30 മീ., $\angle B = 90^\circ$



സമകോണ ത്രികോണം ABC യിൽ,

പൈതഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= 30^2 + 40^2 = 900 + 1600$$
$$= 2500$$
$$\therefore AC = \sqrt{2500} = 50 \text{ മീ.}$$

A മുതൽ C വരെയുള്ള ദൂരം B വഴികണക്കാക്കിയാൽ = 30 + 40 = 70 മീ.

ലാഭിയ്ക്കുന്ന ദൂരം = 70 – 50 = 20 മീ.

അഭ്യാസം 2.1

1 ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക

(i) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മാധ്യമങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദു അറിയപ്പെടുന്നത്

(A) അന്തഃകേന്ദ്രം (B) പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം (C) ലംബകേന്ദ്രം (D) കേന്ദ്രകം

(ii) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതികളുടെ സംഗമബിന്ദു അറിയപ്പെടുന്നത്

(A) അന്തഃകേന്ദ്രം (B) പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം (C) ലംബകേന്ദ്രം (D) കേന്ദ്രകം

(iii) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണദ്വിഭാജകങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദു അറിയപ്പെടുന്നത്

(A) അന്തഃകേന്ദ്രം (B) പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം (C) ലംബകേന്ദ്രം (D) കേന്ദ്രകം

(iv) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബ ദ്വിഭാജകങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദു അറിയപ്പെടുന്നത്

(A) അന്തഃകേന്ദ്രം (B) പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം (C) ലംബകേന്ദ്രം (D) കേന്ദ്രകം

2. ഒരു ദ്വിസമഭുജത്രികോണത്തിൽ AB = AC $\angle B = 65^\circ$, എങ്കിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ വശം ഏത് ?

3. സമകോണത്രികോണം PQR ൽ $\angle P$ സമകോൺ PQ = 10 സെ.മീ. കൂടാതെ PR = 24 സെ. മീ., എങ്കിൽ QR കാണുക.

4. AB = 25 സെ.മീ., BC = 24 സെ.മീ., AC = 7സെ.മീ. എന്നീ അളവുകൾ ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

5. ത്രികോണം PQR ൽ $\angle Q=25^\circ$, $\angle R=65^\circ$. ത്രികോണം PQR ഒരു സമകോണത്രികോണമാണോ ? കൂടാതെ PQ = 4 സെ.മീ., PR = 3 സെ.മീ. എങ്കിൽ QR കാണുക.

6. തറയിൽ നിന്നും 12 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു ജനാലയിൽ 15 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു ഏണി ചാരി വച്ചിരിയ്ക്കുന്നു. തറയ്ക്കും ഏണിയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ദൂരം x മീ. എങ്കിൽ x കാണുക.

7. 10 സെ.മീ. വശമുള്ള ഒരു സമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി കാണുക ?

8. 12, 5, 13 എന്നീ സംഖ്യകൾ പൈതാഗോറസ് ട്രിപ്പറ്റ് ആണോ ?

9. ഒരു പെയിന്റർ ഒരു ഏണിയെ ഒരു ഇരുനില കെട്ടിടത്തിന്റെ ചുവരിൽ 16 അടി ഉയരത്തിൽ തൊടത്തക്ക വണ്ണം തറയിൽ ചാരി വച്ചിരിയ്ക്കുന്നു. ഏണിയുടെ ചുവട് ചുമരിൽ നിന്നും 12 അടി ദൂരത്തിൽ ആണ് ഇരിയ്ക്കുന്നത്. പെയിന്റർ പെയിന്റ് കലക്കിക്കൊണ്ടിരിക്കുമ്പോൾ ഒരു നായ ആ ഏണിയെ തട്ടി നീക്കി ഏണിയുടെ ചുവട് 2 അടി പുറകോട്ട് നീങ്ങി എങ്കിൽ ഇപ്പോൾ ഏണി തറയിൽ നിന്നും എത്ര ദൂരത്തിൽ ചുമരിനെ തൊടുന്നു എന്ന് കാണുക.

2.4 വൃത്തങ്ങൾ

നിങ്ങൾക്ക് സുപരിചിതമായ ചില വസ്തുക്കളുടെ ആകൃതികൾ

(a) സൈക്കിളിന്റെ ചക്രം

(b) ദേശീയ ചിഹ്നത്തിലെ അശോകചക്രം

(c) പൂർണ്ണ ചന്ദ്രൻ

തീർച്ചയായും നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം വൃത്തമായിരിക്കും.

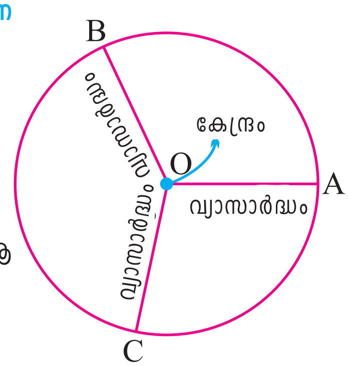
നിങ്ങൾക്കറിയാം ഒരു തലത്തിലെ P എന്ന ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് നിശ്ചിത അകലത്തിൽ ചലിക്കുമ്പോൾ അവയ്ക്കിടയിലുള്ള ദൂരം സ്ഥിരമായിട്ടിരിക്കും.

വൃത്തത്തിന്റെ നിർവ്വചനം

ഒരു തലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് തുല്യ അകലത്തിൽ ചലിക്കുന്ന ബിന്ദുപഥത്തെ വൃത്തം എന്നു പറയുന്നു.

ആ നിശ്ചിത ബിന്ദുവിന് കേന്ദ്രം എന്നു പറയുന്നു.

നിശ്ചിത ദൂരത്തിനെ വ്യാസാർദ്ധം എന്നു പറയുന്നു.



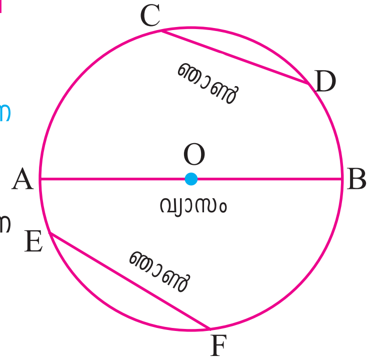
ചിത്രത്തിൽ ‘O’ വൃത്തകേന്ദ്രവും OA, OB, OC എന്നിവ ആ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളും ആകുന്നു.

ഇവിടെ, OA = OB = OC = r

കുറിപ്പ് : ഒരു വൃത്തത്തിലെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളെല്ലാം തുല്യമാണ്.

ഞാൺ

വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ ഞാൺ എന്നു പറയുന്നു.



ചിത്രത്തിൽ CD, AB, EF എന്നിവ ഞാണുകളാണ് AB എന്ന ഞാൺ വൃത്തകേന്ദ്രം വഴി കടന്നുപോകുന്നു.

വ്യാസം

വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഞാണിനെ വ്യാസം എന്നു പറയുന്നു. ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ ഞാൺ വ്യാസമാകുന്നു.

ചിത്രത്തിൽ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം AOB, O എന്നത് AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു.

OA= OB = വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം

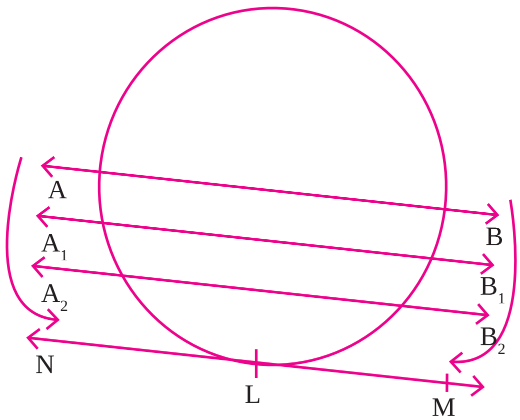
അതിനാൽ, വ്യാസം = 2 × വ്യാസാർദ്ധം (അല്ലെങ്കിൽ) വ്യാസാർദ്ധം = (വ്യാസം) ÷ 2

കുറിപ്പ് : (i) **വൃത്തകേന്ദ്രം വ്യാസത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു ആകുന്നു.**

(ii) **വൃത്തത്തിലെ വ്യാസങ്ങൾ സർവ്വസമമായാൽ അവയുടെ സംഗമബിന്ദു വൃത്തകേന്ദ്രമാകുന്നു.**

വൃത്തഛേദകം

വൃത്ത പരിധിയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്ന രേഖയെ വൃത്തഛേദകം എന്നു പറയുന്നു.



ചിത്രത്തിൽ AB വൃത്തഛേദകം A യും B യും വൃത്തപരിധിയിലെ ഛേദക ബിന്ദുക്കൾ.

ഇവിടെ ഛേദകം AB താഴോട്ട് ചലിച്ചാൽ A_1 B_1, A_2 B_2, ... എന്നീ പുതിയ നിലകളിൽ എത്തി ച്ചേരുന്നു.

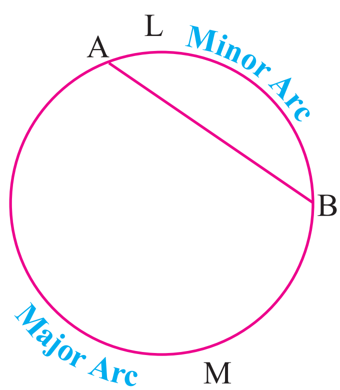
ഛേദകം AB താഴേയ്ക്ക് ചലിക്കുന്നതിനനുസ രിച്ച് Aയും Bയും

പരസ്പരം അടുത്തടുത്തായി നീങ്ങുന്നു.

അതിനാൽ ക്രമേണ A,B എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള ദൂരം കുറയുന്നു.

ഒരു നിലയിൽ ഛേദകം A,B വൃത്തത്തെ 'L' എന്ന ഒരു ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. ഈ നിലയിൽ രേഖ LM വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖയാകുന്നു കൂടാതെ അത് വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു.

സ്പർശരേഖ



ചിത്രത്തിൽ AB ഞാൺ ഇത് വൃത്തത്തെ രണ്ട് ഭാഗങ്ങളായി പിരിയ്ക്കുന്നു. ALB, AMB എന്നീ വൃത്ത ഭാഗങ്ങളെ ചാപം എന്ന പറയുന്നു. ചാപം ARCS എന്നതിനെ'⌒'എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ട് കുറിയ്ക്കുന്നു.

ചെറിയ വൃത്ത ചാപം $\overset{\frown}{ALB}$ യെ ലഘുവൃത്തചാപം എന്നും.

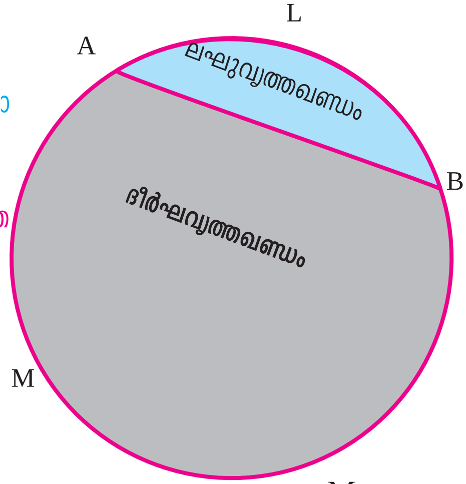
വലിയ വൃത്ത ചാപം $\overset{\frown}{AMB}$ യെ ദീർഘവൃത്തചാപം എന്നും പറയുന്നു.

വൃത്തഖണ്ഡം

ഒരു ഞാൺ വൃത്തത്തെ രണ്ടായിപിരിക്കുന്നു. ഓരോ ഭാഗത്തെയും വൃത്തഖണ്ഡം എന്നു പറയുന്നു.

ചെറിയ വൃത്ത ചാപമുള്ള ഭാഗത്തെ ലഘു വൃത്തഖണ്ഡം എന്നു പറയുന്നു.

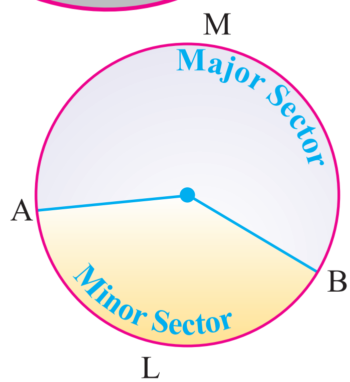
വലിയ ചാപമുള്ള ഭാഗത്തെ ദീർഘ വൃത്തഖണ്ഡം എന്നു പറയുന്നു.



വൃത്തഖണ്ഡം

രണ്ട് വ്യാസാർദ്ധങ്ങളും വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ ഉൾകൊള്ളുന്ന ചാപവും ചുറ്റപ്പെട്ട ഭാഗത്തെ വൃത്തഖണ്ഡം എന്നുപറയുന്നു.

ചെറിയ വൃത്തഖണ്ഡം OALB യെ ലഘു വൃത്തഖണ്ഡം എന്നും വലിയ വൃത്തഖണ്ഡം OAMB യെ ദീർഘ വൃത്തഖണ്ഡം എന്നും പറയുന്നു.



അഭ്യാസം 2.2

1. ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക :

(i) കേന്ദ്രം മുതൽ പരിധിവരെയുള്ള ദൂരം .... എന്ന് പറയുന്നു

(A) വൃത്തഖണ്ഡം (B) ഖണ്ഡം (C) വ്യാസം (D) വ്യാസാർദ്ധം

(ii) വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിനും വ്യാസാർദ്ധത്തിനും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം..............

(A) വ്യാസാർദ്ധം = 2 × വ്യാസം (B) വ്യാസാർദ്ധം = വ്യാസം + 2

(C) വ്യാസം = വ്യാസാർദ്ധം + 2 (D) വ്യാസം = 2 (വ്യാസാർദ്ധം)

(iii) ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ ഞാൺ ....

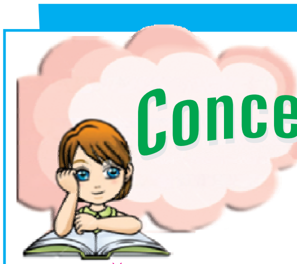
(A) വ്യാസാർദ്ധം (B) വൃത്തഛേദകം (C) വ്യാസം (D) സ്പർശരേഖ

2. രണ്ട് വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടെ തുക 200 മി. മീ. എങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം സെന്റീമീറ്ററിൽ കാണുക.

3. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വൃത്തഖണ്ഡവും വൃത്തഭാഗവും നിർവചിക്കുക.

4. വൃത്തചാപം നിർവചിക്കുക.

5. വൃത്തത്തിന്റെ ഛേദകരേഖ, സ്പർശരേഖ നിർവചിക്കുക.



Concept Summary

- **കേന്ദ്രകം** : മൂന്ന് മധ്യമങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദുവാണ് കേന്ദ്രകം.
- **ലംബകേന്ദ്രം** : മൂന്ന് ഉന്നതികളുടെ സംഗമബിന്ദുവാണ് ലംബകേന്ദ്രം.
- **അന്തഃകേന്ദ്രം** : മൂന്ന് കോണ ദ്വിഭാജകങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദുവാണ് അന്തഃകേന്ദ്രം.
- **പരിവൃത്തകേന്ദ്രം** : മൂന്ന് വശങ്ങളുടെയും ലംബദ്വിഭാജകങ്ങൾ സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദുവാണ് പരിവൃത്തകേന്ദ്രം.
- **വൃത്തം** : ഒരു തലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിൽ ചലിക്കുന്ന ബിന്ദുപഥം.
- **ഞാൺ** : വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ ഞാൺ എന്നു പറയുന്നു.
- **വ്യാസം** : വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഞാണിനെ വ്യാസം എന്നു പറയുന്നു.
- വൃത്തപരിധിയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുചെല്ലുന്ന രേഖയെ വൃത്തച്ഛേദകം എന്നു പറയുന്നു.
- വൃത്ത പരിധിയിലെ ഒരു ബിന്ദു വഴി ചെല്ലുന്ന രേഖയ്ക്ക് സ്പർശരേഖ എന്നും ആ ബിന്ദുവിന് സ്പർശബിന്ദു എന്നും പറയുന്നു.
- ഒരു ഞാൺ വൃത്തത്തെ രണ്ട് ഭാഗങ്ങളായി പിരിക്കുന്നു. ഓരോന്നിനെയും വൃത്തഖണ്ഡം എന്നു പറയുന്നു.
- രണ്ട് വ്യാസാർദ്ധങ്ങളും വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ ഉൾകൊള്ളുന്ന ചാപവും ചുറ്റപ്പെട്ട ഭാഗത്തെ വൃത്തഖണ്ഡം എന്നു പറയുന്നു.

ഗണിത സമാജ പ്രവൃത്തി

പൈതാഗോറസ് ട്രിപ്ലറ്റ്

പൈതഗോറസ് ട്രിപ്ലറ്റ് നിയമം അനുസരിച്ച് നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാം

$m^2 + n^2, m^2 - n^2, 2mn$ ഇവിടെ $m > n; m, n \in \mathbb{N}$. If $m = 2$ and $n = 1$ then

$m^2 + n^2 = 2^2 + 1^2 = 5, m^2 - n^2 = 2^2 - 1^2 = 3, 2mn = 2 \times 2 \times 1 = 4$

5 , 3 , 4 എന്നിവ പൈതാഗോറസ് ട്രിപ്ലറ്റുകൾ ആകുന്നു.

പൈതാഗോറസ് ട്രിപ്ലറ്റിന്റെ ഗുണനഫലം പൈതാഗോറസ് ട്രിപ്ലറ്റുകൾ ആകുന്നു

. ഉദാ: (5 , 3 , 4) : (10, 6, 8) , (15 , 9, 12), (20 , 12 , 16) , ... എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലവും

പൈതാഗോറസ് ട്രിപ്ലറ്റ് ആകുന്നു

ഇതുപോലെ നിരവധി പൈതഗോറസ് ട്രിപ്ലറ്റുകളെ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

3

വിവര നിർവ്വഹണം

3.1 ആമുഖം

3.2 ആവൃത്തിസാരണിയുടെ രൂപവത്കരണം ഓർമ്മ പുതുക്കൽ

3.3 ആവൃത്തി വിതരണത്തെ ഹിസ്റ്റോഗ്രാമിലും ആവൃത്തി ബഹുഭുജത്തിലും പ്രതിനിധീകരിക്കൽ

3.4 സിമ്പിൾ പൈ ചാർട്ടിന്റെ നിർമ്മിതി

3.5 കേന്ദ്ര പ്രവണതയുടെ അളവുകൾ

ആർ.എ. ഫിഷർ

[17th Feb., 1890 - 29th July, 1962]

ഫിഷറിന് വ്യതിക്രമ സിദ്ധാന്തത്തിലുള്ള താല്പര്യം സാംഖ്യക പ്രശ്നങ്ങളെക്കുറിച്ച് സൂക്ഷ്മ പരിശോധന നടത്തുന്നതിലേയ്ക്ക് നയിച്ചു. 1915 നും 1919 നും ഇടയ്ക്ക് അദ്ദേഹം ഗണിതത്തിലും ഭൗതീക ശാസ്ത്രത്തിലും അദ്ധ്യാപകനായിരുന്നു. അദ്ദേഹം യാദൃച്ഛികതയ്ക്ക് മുഖവുര നൽകുകയും വ്യതിയാന സമ്പ്രദായങ്ങളെ വിശകലനം ചെയ്യുകയും വഴി പരീക്ഷണങ്ങൾ നടത്തിയ പഠനം ഇപ്പോൾ ലോകം മുഴുവൻ പ്രയോജനപ്പെടുന്നു. അദ്ദേഹം ആധുനിക സ്ഥിതി വിവിര ശാസ്ത്രത്തിന്റെ പിതാവ് എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

3.1 ആമുഖം

മാധ്യമങ്ങളിലൂടെയും പത്രങ്ങളിലൂടെയും ദിവസവും നാം വ്യത്യസ്ത വിവരങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള വസ്തുതകൾ സംഖ്യാ രൂപത്തിൽ കാണാറുണ്ട്.

ഈ വസ്തുതകൾ നമ്മുടെ രാജ്യത്തെ ഭക്ഷണ ഉല്പാദനം, ലോക ജനസംഖ്യ, പല രാജ്യങ്ങളിലേയും കയറ്റുമതി, ഇറക്കുമതി, നമ്മുടെ സംസ്ഥാനത്തിലെ വിദ്യാലയത്തിലെ കുട്ടികളുടെ കൊഴിഞ്ഞു പോകൽ, അപകടമരണങ്ങൾ, തുടങ്ങിയവയെ കുറിച്ചുള്ളതായിരിക്കും.

ഈ വിവരങ്ങൾക്കെല്ലാം നാം സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഈ സംഖ്യകളെ ദത്തം എന്നു പറയുന്നു. ഈ ദത്തം നമ്മെ തീരുമാനങ്ങളെടുക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു. അവ ഓരോ പൗരന്റെയും ദൈനം ദിന ജീവിതത്തിൽ സാരമായ പങ്കുവഹിക്കുന്നു. അങ്ങനെ വളരെ ഉചിതവും വ്യക്തവുമായ വസ്തുതകൾ ഇത്തരം ദത്തത്തിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്നു.

കണക്കാക്കപ്പെട്ട ദത്തം വായിക്കുന്നതിനും മനസ്സിലാക്കുന്നതിനും അതിനെക്കുറിച്ച് വിശകലനം ചെയ്യുന്നതിനും യോജിക്കണമെന്നില്ല. ദത്തം കൈകാര്യം ചെയ്യുമ്പോൾ അത് പലതരത്തിലായിരിക്കും. സാധാരണക്കാരന് കണ്ട ഉടൻ വിവരങ്ങൾ മനസ്സിലാകുന്ന തരത്തിൽ വിവരങ്ങൾ പ്രതിനിധീകരിക്കേണ്ടതാണ്.

3.2 ആവൃത്തി സാരണിയുടെ രൂപവത്ക്കരണം ഓർമ്മ പുതുക്കൽ

നാം ആവൃത്തിസാരണി രൂപപ്പെടുത്തുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് ഏഴാം ക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ച് കഴിഞ്ഞു. അതിനെ വീണ്ടും ഒന്ന് ഓർത്ത് നോക്കാം.

3.2.1 വർഗ്ഗം തിരിക്കാത്ത ഒരു ദത്തത്തിനുള്ള ആവൃത്തി സാരണി

ഉദാഹരണം *3.1*

തന്നിട്ടുള്ള ദത്തത്തെ പരിഗണിക്കാം:

15, 17, 17, 20, 15, 18, 16, 25, 16, 15,

16, 18, 20, 28, 30, 27, 18, 18, 20, 25,

16, 16, 20, 28, 15, 18, 20, 20, 20, 25. ആവൃത്തി സാരണിയിൽ തയ്യാറാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ആവൃത്തി സാരണി ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു:

സംഖ്യകൾ (x)	റ്റാലി അടയാളം	ആവൃത്തി (f)
15	||||	4
16	|||| (5)	5
17	||	2
18	|||| (5)	5
20	|||| (5) ||	7
25	|||	3
27	|	1
28	||	2
30	|	1
	ആകെ	**30**

3.2.2 വർഗ്ഗം തിരിച്ച ദത്തത്തിനുള്ള ആവൃത്തി സാരണി

ഉദാഹരണം: *3.2*

50 വിദ്യാർത്ഥികൾ ഒരു കണക്ക് പരീക്ഷയിൽ 100 ന് നേടിയ മാർക്കുകൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു

43, 88, 25, 93, 68, 81, 29, 41, 45, 87, 34, 50, 61, 75, 51, 96, 20, 13, 18, 35,
25, 77, 62, 98, 47, 36, 15, 40, 9, 25, 39, 60, 37, 50, 19, 86, 42, 29, 32, 61,
45, 68, 41, 87, 61, 44, 67, 30, 54, 8.

മുകളിലുള്ള ദത്തത്തിന്റെ വർഗ്ഗാന്തര ദൈർഘ്യം നിശ്ചയിച്ച് ആവൃത്തി സാരണി തയ്യാറാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ആകെ ദത്തം = 50

റേഞ്ച് = ഏറ്റവും കൂടിയ മൂല്യം – ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യം

= 98 – 8 = 90

തന്നിട്ടുള്ള ദത്തത്തെ 10 വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളായി വിഭജിക്കുക

∴ വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ ദൈർഘ്യം = $\frac{\text{റേഞ്ച്}}{\text{വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$

$= \frac{90}{10} = 9$

50 വിദ്യാർത്ഥികൾ ഒരു കണക്കു പരീക്ഷയിൽ നേടിയ മാർക്കുകളുടെ ആവൃത്തി സാരണിയാണ് താഴെയുള്ളത്:

വർഗ്ഗാന്തങ്ങൾ (C.I)	**റ്റാലി അടയാളങ്ങൾ**	**ആവൃത്തി (*f*)**
0 - 10	||	2
10 - 20	||||	4
20 - 30	~~||||~~ |	6
30 - 40	~~||||~~ ||	7
40 - 50	~~||||~~ ||||	9
50 - 60	||||	4
60 - 70	~~||||~~ |||	8
70 - 80	||	2
80 - 90	~~||||~~	5
90 - 100	|||	3
	ആകെ	**50**

തന്നിട്ടുള്ള ദത്തത്തെ വർഗ്ഗം തിരിച്ച് താഴെ തന്നിട്ടുള്ളതുപോലെ പട്ടികയാക്കാം:

വർഗ്ഗാന്തരം (C.I)	0-10	10-20	20- 30	30-40	40- 50	50- 60	60- 70	70- 80	80-90	90-100
ആവൃത്തി (f)	2	4	6	7	9	4	8	2	5	3

3.3 ആവൃത്തി വിതരണത്തെ ഹിസ്റ്റോഗ്രാമിലും ആവൃത്തി ബഹു ഭുജത്തിലും പ്രതിനിധീകരിക്കൽ

സ്ഥിതിവിവര കണക്കുകളെ ചിത്ര രൂപത്തിലും ജ്യാമിതീയ രൂപത്തിലും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിന് ആലേഖനങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. വിവരങ്ങളെ ഗ്രാഫിൽ രേഖപ്പെടുത്തുമ്പോൾ എളുപ്പത്തിൽ വായിക്കാനും വളരെ കുറഞ്ഞ സമയം കൊണ്ട് എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാനും സാധിക്കുന്നു. ആലേഖന രീതിയിൽ സംഖ്യകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന പല രീതികൾ ഉണ്ട്. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രണ്ട് രീതികളിൽ പഠിയ്ക്കാം:

(i) ഹിസ്റ്റോഗ്രാം
(ii) ആവൃത്തി ബഹുഭുജം

3.3.1 ഹിസ്റ്റോഗ്രം

ഒരു ദ്വിമാന ഗ്രാഫിൽ തുടർച്ചയായുള്ള ആവൃത്തിയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിനെ ഹിസ്റ്റോഗ്രാം എന്നു പറയുന്നു.

ഹിസ്റ്റോഗ്രാമിൽ ബാറിന്റെ വശങ്ങൾ ഒന്നിനൊന്ന് ചേർന്നിരിക്കുന്നു. അതായത്, ഹിസ്റ്റോഗ്രാം അടുത്തടുത്തു വരുന്ന വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ദീർഘചതുരങ്ങളാണ്. ദീർഘചതുരങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം അവയുടെ ആവൃത്തിയ്ക്ക് ആനുപാതികമായിരിക്കും.

3.3.1 (a) തുടർച്ചയായിട്ടുള്ള ആവൃത്തിവിതരണത്തിന് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കൽ

നിർമ്മിതി :

വഴി 1: തന്നിട്ടുള്ള ദത്തം തുടർച്ചയായിട്ടുള്ളതല്ലെങ്കിൽ അതിനെ തുടർച്ചയായിട്ടുള്ളതാക്കി മാറ്റണം.

വഴി 2: വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളെ X അക്ഷത്തിൽ അനുയോജ്യമായ സ്കെയിലളവിൽ കുറിയ്ക്കുക.

വഴി 3: ആവൃത്തികളെ Y അക്ഷത്തിൽ അനുയോജ്യമായ സ്കെയിലളവിൽ കുറിയ്ക്കുക.

വഴി 4: അടുത്തടുത്ത് വരുന്ന വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളെ ആധാരമാക്കിയും അവയോട് ബന്ധപ്പെട്ട ആവൃത്തികളെ ഉയരമാക്കിയും ദീർഘ ചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഉദാഹരണത്തിൽ ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുന്നതിന്റെ രീതി വിവരിച്ചിരിക്കുന്നു.

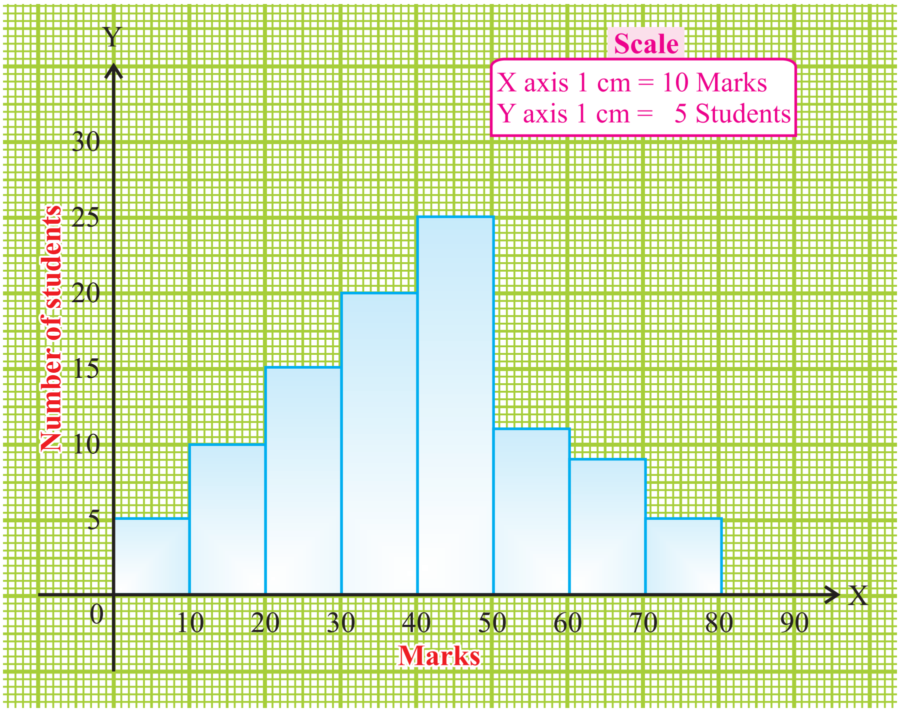
ഉദാഹരണം *3.3*

ഒരുപരീക്ഷയിൽ 100 വിദ്യാർത്ഥികൾ കരസ്ഥമാക്കിയ മാർക്കുകൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. ഈ വിവരങ്ങൾക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുക:

മാർക്ക്	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	5	10	15	20	25	12	8	5

നിർദ്ധാരണം

ഓരോവർഗ്ഗാന്തരത്തിലും 10മാർക്ക് വീതമുണ്ട്. നമുക്ക് ഈ വർഗ്ഗാന്തരത്തെ Xഅക്ഷത്തിൽ കുറിക്കാം. വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണത്തെ Y അക്ഷത്തിലും അനുയോജ്യമായ തോതിൽ കുറിക്കാം. ഹിസ്റ്റോഗ്രാം താഴെ കൊടുത്തിരിയ്ക്കുന്നു.



ചിത്രം. *3.1*

കുറിപ്പ് : മുകളിലുള്ള ചിത്രത്തിൽ ബാറുകൾ തുടർച്ചയായി വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഒരു ആവൃത്തി പട്ടികയിലെ ഓരോ ക്ലാസിന്റെയും ആവൃത്തിയ്ക്കു ആനുപാതികമായ ഉയരത്തിൽ ചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കണം, ഓരോ വർഗ്ഗാന്തങ്ങളും തുല്യം, ഓരോ ബാറിന്റെയും വിസ്തീർണ്ണം ഓരോ വർഗ്ഗത്തിലുമുള്ള ആവൃത്തികളുടെ അനുപാതം അനുസരിച്ചായിരിക്കും.

3.3.1 (b) തുടർച്ച അല്ലാത്ത വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കൽ

ഉദാഹരണം *3.4*

ഒരു വനത്തിലുള്ള മരങ്ങളുടെ ഉയരങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഈ വിവരങ്ങൾക്ക് ഒരു ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുക.

ഉയരം (മീറ്റർ)	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
മരങ്ങളുടെ എണ്ണം	10	15	25	30	45	50	35	20

നിർദ്ധാരണം

ഈ കണക്കിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ തുടർച്ചയായിട്ടുള്ളതല്ല. ഇതിന് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരച്ചാൽ, വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾക്കിടയിൽ അകലം ഉണ്ടായിരിക്കും. പക്ഷേ ഒരു ഹിസ്റ്റോഗ്രാമിൽ ബാറുകൾക്കിടയിൽ അകലം ഇല്ലാതെ തുടർന്ന് വരേണ്ടതാണ്. അതിനാൽ നാം വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളെ തുടർച്ചയുള്ളതാക്കിമാറ്റണം. അതിന് ചില മാറ്റങ്ങൾ വരുത്തേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്.

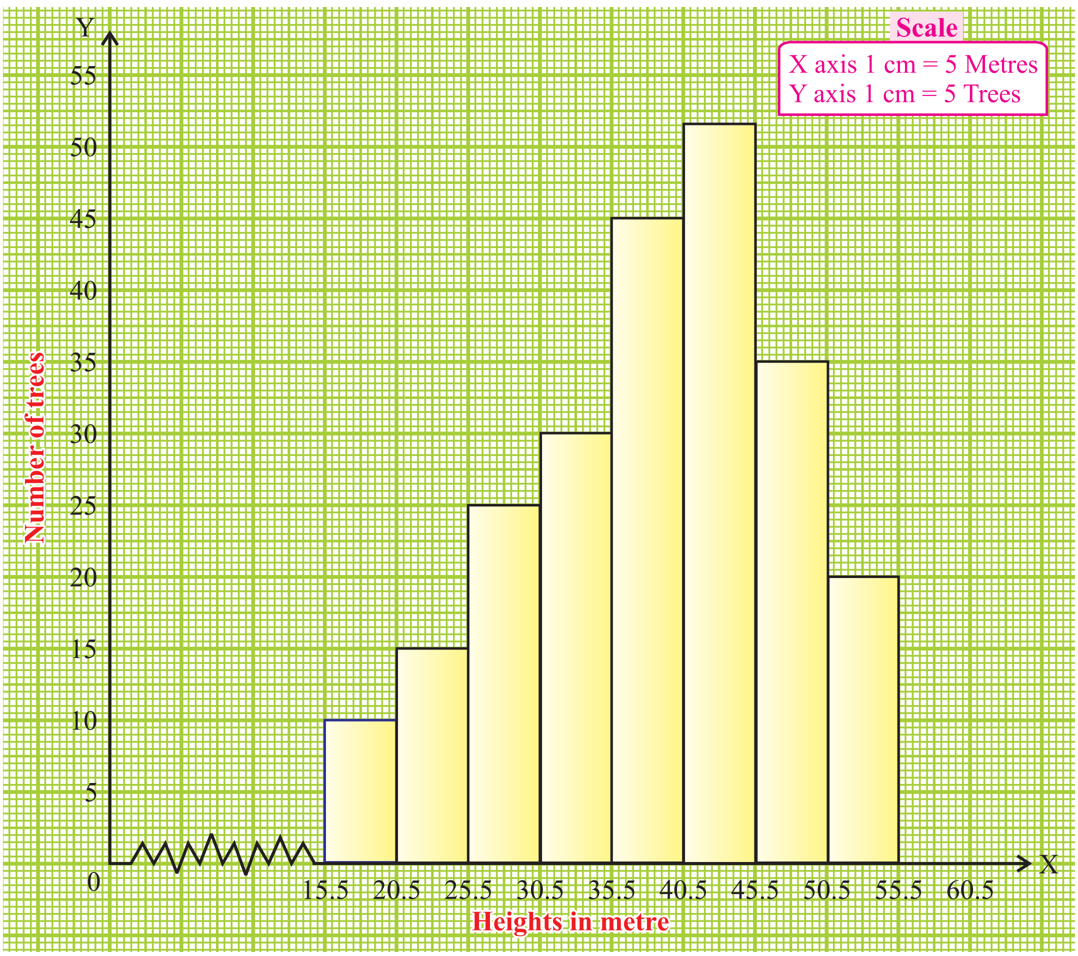
മാറ്റേണ്ട ഘടകം = $\frac{1}{2}$ [(ഒരു വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ നീചപരിധി) – (ആ വർഗ്ഗാന്തരത്തിനു തൊട്ടുമുമ്പുള്ള വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ ഉച്ച പരിധി)]

$$= \frac{1}{2}(21 - 20) = 0.5$$

മുകളിലെ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളിൽ ഓരോ നീചപരിധിയിൽ നിന്നും 0.5 കുറയ്ക്കുകയും ഓരോ ഉച്ച പരിധിയോട് 0.5 കൂട്ടുകയും ചെയ്യണം. ഇപ്രകാരം നമുക്ക് പട്ടികയെ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ തിരുത്തി എഴുതാം.

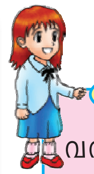
ഉയരം (മീറ്ററിൽ)	15.5-20.5	20.5-25.5	25.5-30.5	30.5-35.5	35.5-40.5	40.5-45.5	45.5-50.5	50.5-55.5
മരങ്ങളുടെ എണ്ണം	10	15	25	30	45	50	35	20

ഇപ്പോൾ തുടർച്ചയായ ആവൃത്തി വിതരണം മുകളിലെ പട്ടികയിൽ കാണാം. ഹിസ്റ്റോഗ്രാം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം. *3.2*

കുറിപ്പ് : ഈ ഹിസ്റ്റോഗ്രാമിൽ (ചിത്രം 3.2) X അക്ഷത്തിൽ ആദ്യത്തെ മൂല്യം 15.5, ആയതുകൊണ്ട് മൂല ബിന്ദുവിന് അടുത്തായിട്ട് 15.5 കുറിയ്ക്കണം. എന്നാൽ മൂല ബിന്ദുവിൽ തുടങ്ങരുത്.



നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

വർഗ്ഗാന്തരത്തെ Zig - Zag curve എന്ന് കുറിയ്ക്കുന്നു.

3.3.2 ആവൃത്തി ബഹുഭുജം

ആവൃത്തി വിതരണത്തെ പ്രതിനിധീകരിച്ച് ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കലാണ് ആവൃത്തി ബഹുഭുജത്തിന്റെ മറ്റൊരുരീതി.

തന്നിട്ടുള്ള തുടർച്ചയായ ദത്തത്തിന് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുക. അടുത്തടുത്തുള്ള ഓരോ ദീർഘചതുരത്തിന്റെയും മുകൾഭാഗത്ത് മദ്ധ്യ ബിന്ദുക്കളെ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കളെ ഒരു രേഖാഖണ്ഡം വരച്ച് യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ, നമുക്ക് ഒരു ബഹുഭുജം കിട്ടുന്നു. ഇതിനെ ആവൃത്തി ബഹുഭുജം എന്ന് പറയുന്നു. ഒന്നാമത്തെ വർഗ്ഗാന്തരത്തിനു മുമ്പുള്ള വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുവും അവസാന വർഗ്ഗാന്തരത്തിനടുത്തുള്ള വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുവിനെ അടിസ്ഥാന രേഖയുമായി യോജിപ്പിക്കുക.

ആവൃത്തി ബഹുഭുജത്തിനെ രണ്ടുരീതിയിൽ വരയ്ക്കാം

(i) ഹിസ്റ്റോഗ്രാം ഉപയോഗിച്ച്

(ii) ഹിസ്റ്റോഗ്രാം ഉപയോഗിക്കാതെ

3.3.2 (a) ഹിസ്റ്റോഗ്രാം ഉപയോഗിച്ച് ആവൃത്തി ബഹുഭുജം വരയ്ക്കൽ

നിർമ്മിതി :

വഴി 1 : തന്നിട്ടുള്ള ദത്തത്തിന് ആവൃത്തി വിതരണം തയ്യാറാക്കി ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുക.

വഴി 2 : ഹിസ്റ്റോഗ്രാമിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള ദീർഘ ചതുരങ്ങളുടെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുക്കളെ ഒരു രേഖാ ഖണ്ഡം മൂലം യോജിപ്പിക്കുക.

വഴി 3 : ആരംഭ വർഗ്ഗാന്തരത്തിനു മുമ്പും അവസാന വർഗ്ഗാന്തരത്തിനു പിൻപും ഉള്ള വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളുടെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുക്കളെ **ഇമേജിൻഡ് ക്ലാസ്സ് ഇന്റർവെൽ** എന്നു പറയുന്നു.

വഴി 4 : ആദ്യ വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുമുതൽ അവസാന വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുവരെയുള്ള ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ ഹിസ്റ്റോഗ്രാം പൂർണ്ണമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.5

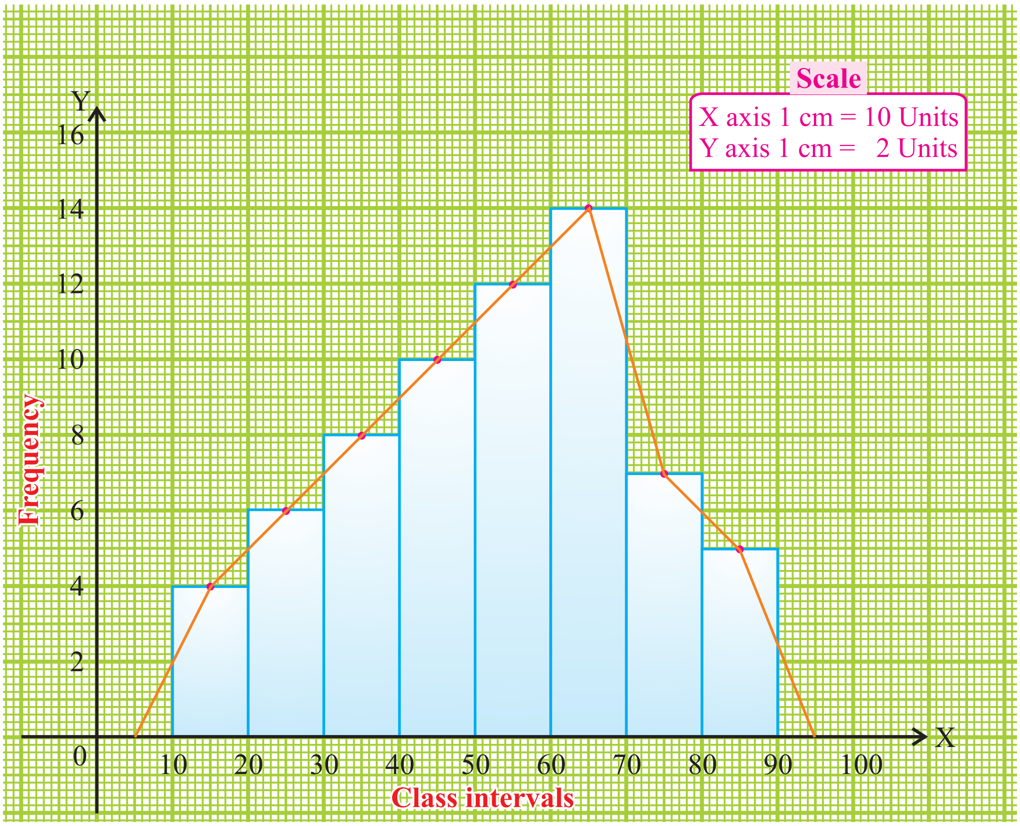
തന്നിട്ടുള്ള വിതരണങ്ങൾക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം നിർമ്മിച്ച് ആവൃത്തി ബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക

വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
ആവൃത്തി	4	6	8	10	12	14	7	5

നിർദ്ധാരണം

ചിത്രം 3.3 ൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതുപോലെ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളെ x അക്ഷത്തിലും ആവൃത്തികളെ y അക്ഷത്തിലും അനുയോജ്യ തോത് നിർണ്ണയിച്ച് കുറിയ്ക്കുക

തന്നിട്ടുള്ള ദത്തങ്ങൾക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുക. സമീപ ദീർഘചതുരങ്ങളുടെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുക്കളെ കുറിയ്ക്കുക. 0-10 എന്ന വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുവിനെയും 90-100 എന്ന വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിനെയും കുറിയ്ക്കുക ഒരു സ്കെയിലിന്റെ സഹായത്തോടെ ഈ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുക. ഇപ്പോൾ നമുക്ക് ആവൃത്തി ബഹുഭുജം ലഭിക്കുന്നു.



ചിത്രം. *3.3*

ഉദാഹരണം *3.6*

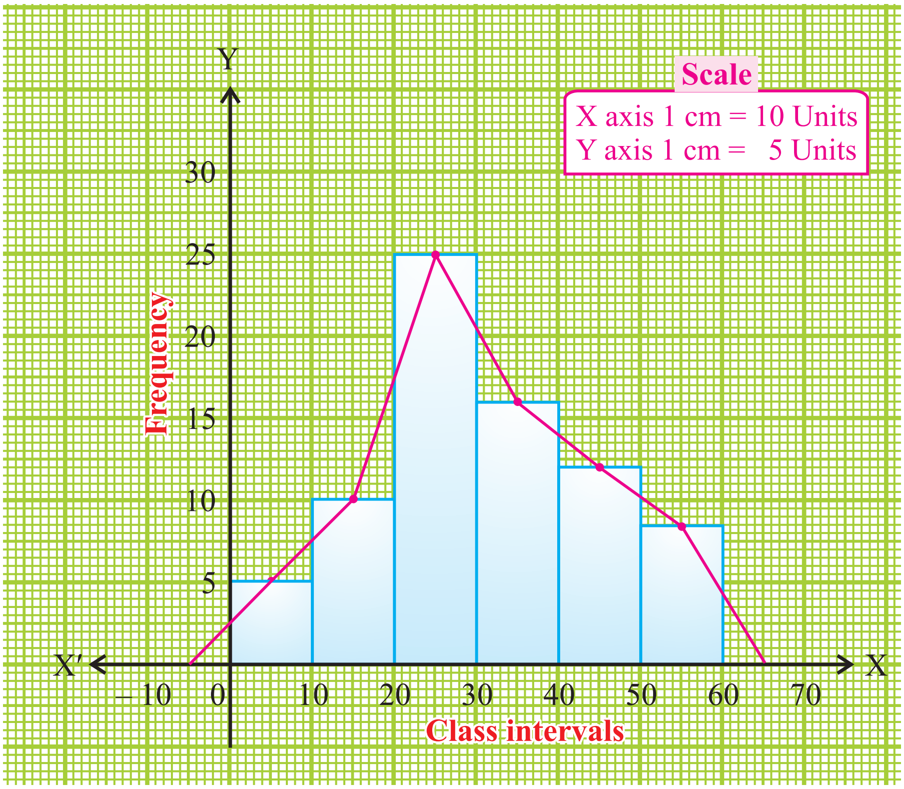
തന്നിട്ടുള്ള ദത്തത്തിന് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരച്ച് ആവൃത്തി ബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക.

വർഗ്ഗാന്തരം	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
ആവൃത്തി	5	10	25	16	12	8

നിർദ്ധാരണം

ചിത്രം 3.4 ൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതുപോലെ അനുയോജ്യമായ തോത് നിർണ്ണയിച്ച് വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളെ x അക്ഷത്തിലും ആവൃത്തികളെ y അക്ഷത്തിലും കുറിയ്ക്കുക.

തന്നിട്ടുള്ള ദത്തങ്ങൾക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുക. സമീപ ദീർഘചതുരങ്ങളുടെ മുകൾ വശത്തിന്റെ മദ്ധ്യ ബിന്ദു കുറിക്കുക (-10) - 0 എന്ന വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുവിനെയും (60-70) എന്ന വർഗ്ഗാന്തര ത്തിന്റെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുവിനെയും കുറിക്കുക ഒരു സ്കെയിലിന്റെ സഹായത്തോടെ ഈ മദ്ധ്യ ബിന്ദു ക്കളെ യോജിപ്പിക്കുക. ഇപ്പോൾ നമുക്ക് ആവൃത്തി ബഹുഭുജം ലഭിക്കുന്നു. (ചിത്രം 3.4 ശ്രദ്ധിക്കുക)



ചിത്രം. *3.4*

കുറിപ്പ് : ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ സങ്കല്പ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ നിലവിൽ ഇല്ലെങ്കിൽ, ഉദാഹരണമായി ഒരു പരീക്ഷയിൽ വിദ്യാർത്ഥികൾ നേടിയ മാർക്കുകളെ 0 ന് താഴെയും ഉയർന്ന മാർക്കിനപ്പുറവും അട യാളപ്പെടുത്താൻ സാധിയ്ക്കാത്ത ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ അങ്ങേ അറ്റത്തെ രേഖാഖണ്ഡങ്ങൾ ഭാഗി ഗമായി മാത്രം വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കുന്നു. അങ്ങനെ വരുമ്പോൾ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും ദീർഘചതുരങ്ങളുടെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുക്കളുമായി രേഖാ ഖണ്ഡത്തിന്റെ അഗ്രങ്ങളെ യോജിപ്പിക്കുക

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഉദാഹരണത്തിന് ഈ കുറിപ്പ് ഉപയോഗിച്ച് ആവൃത്തി ബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക.

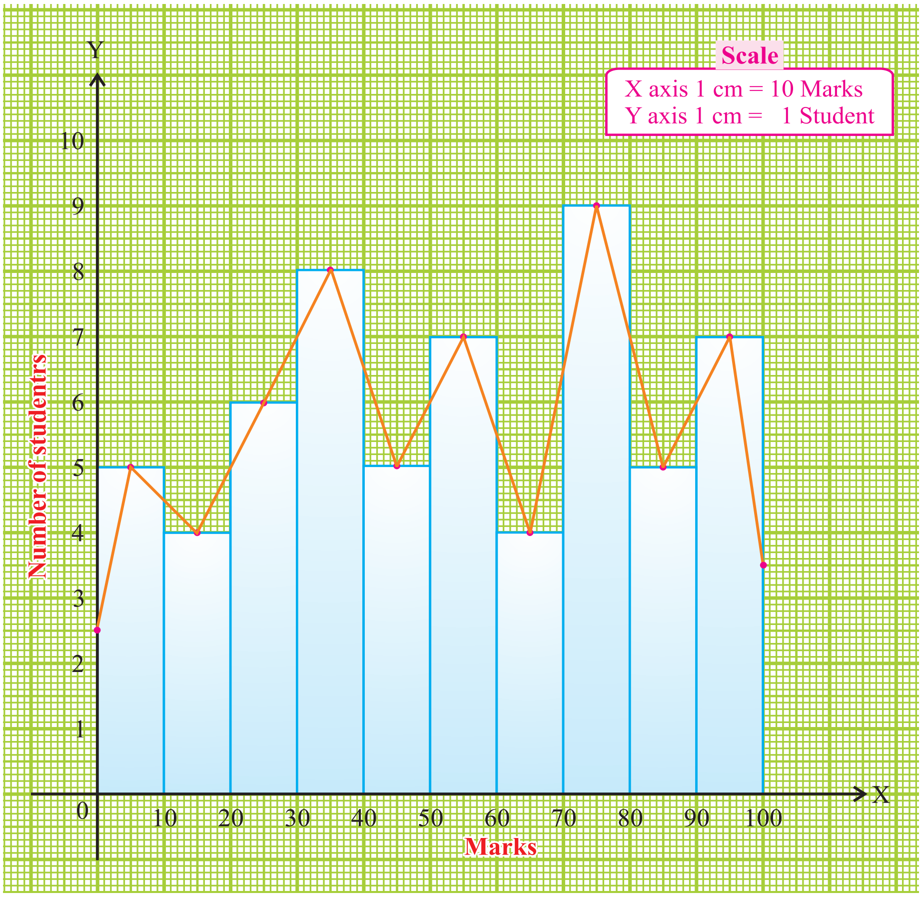
ഉദാഹരണം *3.7*

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ദത്തങ്ങൾക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം ഉപയോഗിച്ച് ആവൃത്തി ബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക.

മാർക്ക്	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
വിദ്യാർത്ഥിക ളുടെ എണ്ണം	5	4	6	8	5	7	4	9	5	7

നിർദ്ധാരണം

വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളെ X അക്ഷത്തിലും വിദ്യാത്ഥികളുടെ എണ്ണത്തെ Y അക്ഷത്തിലും രേഖപ്പെടുത്തക. തന്നിട്ടുള്ള ദത്തങ്ങൾക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുക. സമീപദീർഘ ചതുരങ്ങളുടെ മുകൾ വശത്തുള്ള മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളെ കുറിയ്ക്കുക. ഒരു സ്കെയിലിന്റെ സഹായത്തോടെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുക. എന്നിട്ട് ആവൃത്തി ബഹുഭുജത്തിന്റെ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും അഗ്രങ്ങൾ, ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും ദീർഘചതുരങ്ങളുടെ ലംബവശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിക്കുക.



ചിത്രം. *3.5*

3.3.2 (b) ഹിസ്റ്റോഗ്രാം ഉപയോഗിക്കാതെ ആവൃത്തി ബഹുഭുജം വരയ്ക്കൽ

നിർമ്മിതി :

വഴി 1 : തന്നിട്ടുള്ള ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളുടെ മദ്ധ്യ ബിന്ദു കണക്കാക്കുക.

വഴി 2 : മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളെ x അക്ഷത്തിലും ആവൃത്തിയെ y അക്ഷത്തിലും പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

വഴി 3 : ഓരോ മദ്ധ്യബിന്ദുവിനും അനുയോജ്യമായ ആവൃത്തിയെ ബിന്ദുക്കളായിട്ട് കുറിയ്ക്കുക.

വഴി 4 : ഈ ബിന്ദുക്കളെ ഒരു നേർരേഖമൂലം യോജിപ്പിക്കുക.

വഴി 5 : നേർരേഖയുടെ അഗ്രങ്ങളെ x അക്ഷത്തിലുള്ള നീച പരിധിയുടെയും ഉച്ചപരിധിയുടെയും അക്ഷങ്ങളുമായി യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ (ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ആവൃത്തി പൂജ്യം) ബഹുഭുജം ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം *3.8*

തന്നിട്ടുള്ള ദത്തങ്ങൾക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം ഉപയോഗിയ്ക്കാതെ, ആവൃത്തി ബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക

വർഗ്ഗാന്തരം	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
ആവൃത്തി	4	6	8	10	12	14	7	5

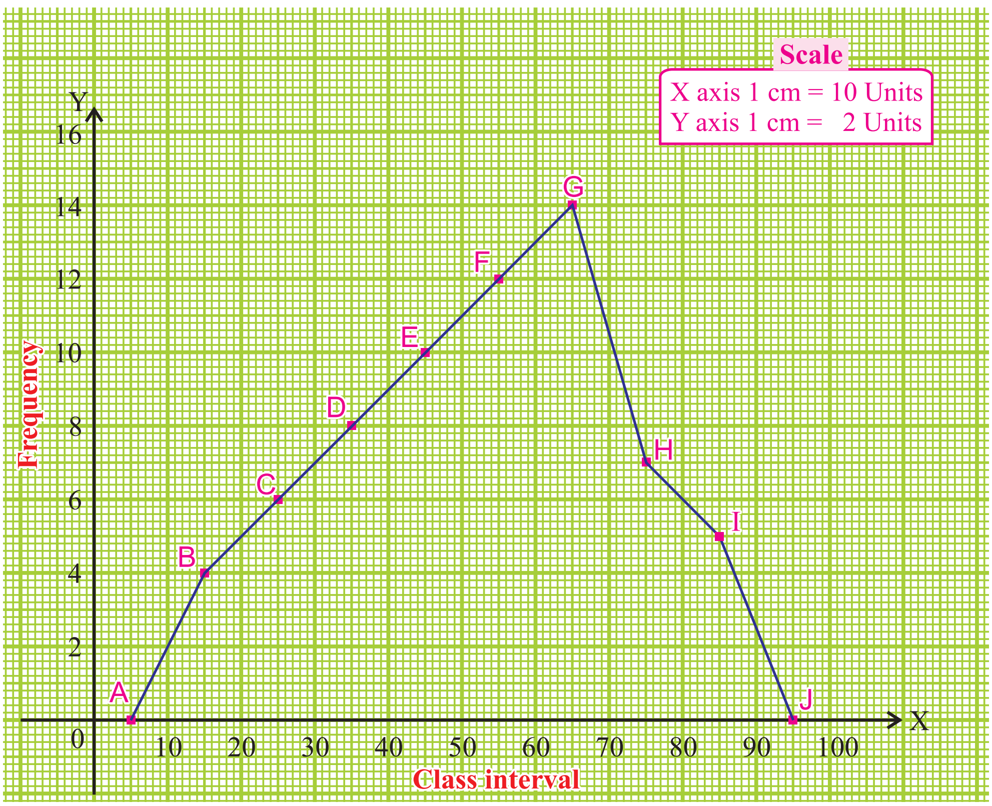
നിർദ്ധാരണം

വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളെ X അക്ഷത്തിലും ആവൃത്തിയെ Y അക്ഷത്തിലും കുറിയ്ക്കുക. ആവൃത്തി പൂജ്യം ആയിട്ടുള്ള സാങ്കല്പിക വർഗ്ഗാന്തരം, 0-10 ആരംഭത്തിലും 90-100 അവസാനവും കുറിയ്ക്കുക. ദത്തത്തെ പട്ടികയിലുള്ളതുപോലെ രൂപീകരിക്കുക

സമീപത്തുള്ള പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് ബിന്ദുക്കളെ കുറിയ്ക്കുക

വർഗ്ഗാന്തരം	മദ്ധ്യബിന്ദു	ആവൃത്തി
0-10	**5**	**0**
10-20	15	4
20-30	25	6
30-40	35	8
40-50	45	10
50-60	55	12
60-70	65	14
70-80	75	7
80-90	85	5
90-100	**95**	**0**

A (5, 0), B (15, 4), C (25, 6), D (35, 8), E (45, 10), F (55, 12), G (65, 14), H (75, 7), I (85, 5), J (95, 0)എന്നിവയെ രേഖാഖണ്ഡം മൂലം യോജിപ്പിക്കുക ആവശ്യപ്പെട്ട ആവൃത്തി ബഹുഭുജം AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ ചിത്രം 3.6 ൽ കാണുന്നതുപോലെ ലഭിക്കുന്നു. ABCDEFGHIJ.



ചിത്രം. *3.6*

അഭ്യാസം 3.1

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾക്ക് ഒരു ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുക

വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ആവൃത്തി	8	12	6	14	10	5

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുക

ഓരോ ഏക്കറിലേയും വിളവ് (ക്വിന്റൽ)	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36 - 40
നിലങ്ങളുടെ എണ്ണം	3	5	18	15	6	4

3. ഒരു ക്രിക്കറ്റ് കളിയിലെ പ്രേക്ഷകരുടെ വിവരണത്തിന് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുക.

വയസ്സ്	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
പ്രേക്ഷകരുടെ എണ്ണം	4	6	12	10	8	2

4. ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ പ്രേമേഹരോഗികളുടെ വിവരം താഴെ കൊടുത്തിരിയ്ക്കുന്നു.

വയസ്സ് (വർഷങ്ങളിൽ)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
രോഗികളുടെ എണ്ണം	3	6	13	20	10	5

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം ഉപയോഗിച്ച് ആവൃത്തി ബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക

5. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരച്ച് ആവൃത്തി ബഹുഭുജം നിർമ്മി യ്ക്കുക.

വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ആവൃത്തി	7	10	23	11	8	5

6. ബുദ്ധിപരമായ ഒരു പരീക്ഷയിൽ പങ്കെടുത്ത 150 അപേക്ഷകരുടെ പ്രകടനങ്ങൾ താഴെകൊടു ത്തിരിയ്ക്കുന്നു. ഈ വിവരണത്തിന് ഹിസ്റ്റോഗ്രാമും, ആവൃത്തി ബഹുഭുജവും വരയ്ക്കുക

പ്രകടനഫലം	55-70	70-85	85-100	100-115	115-130	130-145
അപേക്ഷകരുടെ എണ്ണം	20	40	30	35	10	15

7. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം ഉപയോഗിച്ച് ആവൃത്തി ബഹുഭുജം നിർമ്മിയ്ക്കുക

മാർക്ക്	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
വിദ്യാർത്ഥിക ളുടെ എണ്ണം	9	3	4	6	2	3	4	5	7	8

8. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം ഉപയോഗിക്കാതെ ആവൃത്തി ബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക

വയസ്സ് (വർഷങ്ങൾ)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
ആളുകളുടെ എണ്ണം	6	11	25	35	18	12	6

9. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം ഉപയോഗിക്കാതെ ആവൃത്തി ബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക.

വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59
ആവൃത്തി	12	16	20	8	10	4

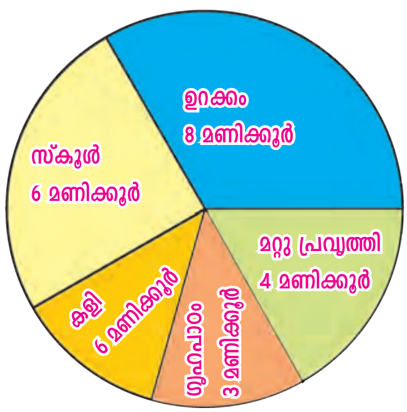
10. ഒരു ഇംഗ്ലീഷ് പരീക്ഷയിൽ 40 വിദ്യാർത്ഥികൾ (50 മാർക്കിന്) നേടിയ മാർക്കുകൾ താഴെ കൊടുത്തിരിയ്ക്കുന്നു. ഈ വിവരങ്ങൾക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാമും, ആവൃത്തിബഹുഭുജവും വരയ്ക്കുക.

29, 45, 23, 40, 31, 11, 48, 1, 30, 24, 25, 29, 25, 32, 31, 22, 9, 49, 19, 13, 32, 39, 25, 3, 27, 41, 12, 13, 2, 44, 7, 43, 15, 35, 40, 3, 12, 48, 49, 18.

3.4 പൈ ചാർട്ടിന്റെ നിർമ്മിതി

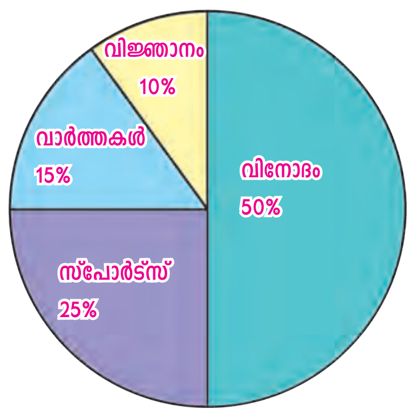
വൃത്താകൃതിയിൽ വിവരങ്ങൾ പ്രതിനിധീകരിച്ചിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങൾ 3.7കൂടാതെ 3.8 ഇവ ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഒരു വിദ്യാർത്ഥി ഒരു ദിവസത്തിൽ ചെലവഴിയ്ക്കുന്ന സമയം (24 മണിക്കൂർ)



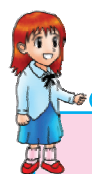
ചിത്രം.*3.7*

ടി.വിയിൽ വിവിധ ചാനലുകൾ നിരീക്ഷിക്കുന്നവർ



ചിത്രം.*3.8*

ഒന്നുപോലെയുള്ള ഇത്തരം ചിത്രങ്ങളെ **വൃത്താകാര ഗ്രാഫുകൾ** എന്നു പറയുന്നു. മൊത്തമായും ഭാഗീഗമായും ഉള്ള ബന്ധത്തെ ഈ ഗ്രാഫ് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഒരു വൃത്തത്തെ പലവൃത്തഖണ്ഡങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു. ഓരോ വൃത്തഖണ്ഡവും പ്രവൃത്തികളെ ആനുപാതികമായി പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. പല വൃത്തഖണ്ഡങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് പൈ ഇതിനെ **പൈചാർട്ട്** എന്ന് പറയുന്നു.



നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

പൈ എന്നത് ഒരു അമേരിക്കൻ ഭക്ഷ്യ വസ്തു

ഉദാഹരണത്തിനായി പൈചാർട്ട് 3.7

ഉറക്കത്തിന് ചെലവഴിക്കുന്ന സമയത്തിന്റെ അനുപാതം $= \dfrac{\text{ഉറങ്ങുന്ന സമയം}}{\text{ഒരു ദിവസം}} = \dfrac{\text{8 മണിക്കൂർ}}{\text{24 മണിക്കൂർ}} = \dfrac{1}{3}$

അതുകൊണ്ട് ഈ വൃത്തഖണ്ഡം ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമായി വരയ്ക്കണം.

സ്കൂളിൽ ചെലവഴിക്കുന്ന സമയത്തിന്റെ അനുപാതം $= \dfrac{\text{സ്കൂൾ സമയം}}{\text{ഒരു ദിവസം}} = \dfrac{\text{6 മണിക്കൂർ}}{\text{24 മണിക്കൂർ}} = \dfrac{1}{4}$

അതിൽ ഈ വൃത്ത ഖണ്ഡം വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗം ആകുന്നു.

കളികളിൽ മുഴുകുന്ന സമയത്തിന്റെ അനുപാതം $= \dfrac{\text{കളിക്കുന്ന സമയം}}{\text{ഒരു ദിവസം}} = \dfrac{\text{3 മണിക്കൂർ}}{\text{24 മണിക്കൂർ}} = \dfrac{1}{8}$

അതിൽ ഈ വൃത്തഖണ്ഡം വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗം ആകുന്നു.

ഗൃഹപാഠത്തിന് ചെലവഴിച്ച സമയത്തിന്റെ അനുപാതം $= \dfrac{\text{ഗൃഹപാഠത്തിന് ചെലവഴിച്ചസമയം}}{\text{ഒരു ദിവസം}} = \dfrac{\text{3 മണിക്കൂർ}}{\text{24 മണിക്കൂർ}} = \dfrac{1}{8}$

അതിൽ ഈ വൃത്തഖണ്ഡം വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗം ആകുന്നു.

മറ്റ് പ്രവൃത്തികൾക്ക് ചെലവഴിച്ച സമയത്തിന്റെ അനുപാതം $= \dfrac{\text{മറ്റ് പ്രവൃത്തികൾക്ക് ചെലവഴിച്ചസമയം}}{\text{ഒരു ദിവസം}} = \dfrac{\text{4 മണിക്കൂർ}}{\text{24 മണിക്കൂർ}} = \dfrac{1}{6}$

അതിൽ ഈ വൃത്തഖണ്ഡം വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗം ആകുന്നു.

ഈ ഭിന്നങ്ങളെ കൂട്ടിയാൽ ആകെയുള്ള സമയം ലഭിക്കുന്നു.

ആകെ നമുക്ക് കിട്ടുന്നത് $= \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{6}$

$$= \frac{8+6+3+3+4}{24} = \frac{24}{24} = 1.$$

ഈ ഭിന്നങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക ഒന്ന് ആകുന്നു. ഒരു വിദ്യാർത്ഥിയുടെ ഒരു ദിവസത്തെ പ്രവർത്തികളെ ഒരു വൃത്തത്തിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുമ്പോൾ വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ഒന്ന് എന്ന് എടുക്കുന്നു. വിദ്യാർത്ഥികളുടെ വ്യത്യസ്ത പ്രവർത്തികളെ പല വൃത്ത ഖണ്ഡങ്ങളിൽ ആനുപാതികമായി പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഈ അനുപാതം കോണളവ് ഉപയോഗിച്ച് കണക്കിടുന്നു. കോണുകളുടെ കൂട്ടുതുക കേന്ദ്രകോണായ 360^0 ആകുന്നു. ഓരോ വൃത്ത ഖണ്ഡത്തിനേയും കോണളവ് ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് പ്രതിനിധീകരിയ്ക്കാം.

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്ന് കോണളവ് ഉപയോഗിച്ച് ഒരു പൈ ചാർട്ട് നിർമ്മിക്കുന്ന രീതി മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം *3.9*

ഒരു വിദ്യാർത്ഥി ഒരു ദിവസം ചെയ്ത പ്രവർത്തികളുടെ കാല അളവ് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. കോൺ അളവ് ഉപയോഗിച്ച് പൈ ചാർട്ട് നിർമ്മിക്കുക.

പ്രവർത്തി	ഉറക്കം	സ്കൂൾ	കളി	ഗൃഹപാഠം	മറ്റുള്ളവ
മണിക്കൂർ	8	6	3	3	4

നിർദ്ധാരണം

ഒരു ദിവസമായ 24 മണിക്കൂറിൽ ചെയ്ത പ്രവർത്തികളെ 360° യുടെ ഘടകങ്ങളായി മാറ്റുന്നു. ഇവിടെ ഉറങ്ങാൻ 8 മണിക്കൂർ എന്നതിനെ $\frac{8}{24}\times 360^0 = 120°$ എന്ന് പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

അതിനെ വൃത്ത ഖണ്ഡത്തിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുമ്പോൾ ഉറങ്ങാൻ എടുത്ത സമയത്തിന്റെ കോണളവ് 120°.

ഇതുപോലെ മറ്റു പ്രവർത്തികളായ വിദ്യാലയം, കളി, ഗൃഹപാഠം മറ്റുപ്രവർത്തി ഇവയെ വൃത്ത ഖണ്ഡങ്ങളായി കോൺ അളവിൽ കണക്കാക്കുന്ന രീതി താഴെയുള്ള പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

പ്രവർത്തി	സമയം മണിക്കൂറിൽ	കേന്ദ്രകോൺ
ഉറക്കം	8	$\frac{8}{24}\times 360^0 = 120^0$
വിദ്യാലയം	6	$\frac{6}{24}\times 360^0 = 90^0$
കളി	3	$\frac{3}{24}\times 360^0 = 45^0$
ഗൃഹപാഠം	3	$\frac{3}{24}\times 360^0 = 45^0$
മറ്റുള്ളവ	4	$\frac{4}{24}\times 360^0 = 60^0$
ആകെ	24	360^0

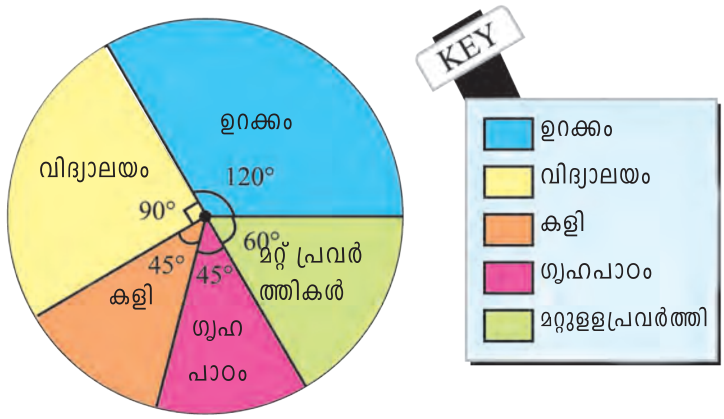
പൈ ചാർട്ട് വരയ്ക്കുന്നവിധം

സൗകര്യപ്രദമായ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക ഈ വൃത്തത്തിൽ 120^0 കോണളവിൽ വൃത്തഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തഖണ്ഡം ഉറങ്ങാൻ ചെലവഴിച്ച സമയത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

120^0 യ്ക്ക് അടുത്തായി 90^0 കോണളവിൽ മറ്റൊരു വൃത്തഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക. ഇത് വിദ്യാലയത്തിൽ ചെലവഴിച്ച സമയത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു ഇതേ രീതിയിൽ, കളി, ഗൃഹ പാഠം, മറ്റുപ്രവർത്തികൾ ഇവയ്ക്കും വൃത്തഖണ്ഡങ്ങൾ നിർമ്മിക്കുക.

ഈ വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളെ തിരിച്ചറിയുന്നതിന് വ്യത്യസ്ത നിറങ്ങൾ കൊടുക്കുക. പൈ ചാർട്ടിന്റെപൂർണ്ണ രൂപം മുകളിലുള്ള ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് ലഭ്യമാകുന്നു.

ഒരു ദിവസത്തിൽ ഒരു വിദ്യാർത്ഥി ഓരോ പ്രവൃത്തിക്കും ചെലവഴിച്ച സമയം



ചിത്രം. *3.9*

കുറിപ്പ് : ഒരു പൈ ചാർട്ട് എന്നത് പല പ്രവർത്തികളെ ഒരു വൃത്തത്തിനുള്ളിലെ പല വൃത്ത ഖണ്ഡങ്ങളായി പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതാണ് വൃത്തകോണായ 360^0 യെ പ്രവർത്തികളുടെ കാല അളവ് അനുസരിച്ച് വിഭജിക്കുന്നു.

$$\text{പ്രവർത്തിയുടെ കേന്ദ്രകോൺ} = \left[\frac{\text{പ്രവർത്തിയുടെ കാലയളവ്}}{\text{ആകെ കാലയളവ്}} \times 360^0\right]$$

ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ കാല അളവ് ശതമാനത്തിൽ ആയിരിക്കും അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ

$$\text{പ്രവർത്തിയുടെ കേന്ദ്രകോൺ} = \left[\frac{\text{പ്രവർത്തിയുടെ കാലയളവ് ശതമാനത്തിൽ}}{100} \times 360^0\right].$$

തന്നിട്ടുള്ള ദത്തങ്ങൾക്ക് പൈ ചാർട്ട് നിർമ്മിക്കുന്നതിനുള്ള വഴികൾ:

1. മുകളിലുള്ള സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് ഓരോ പ്രവർത്തിയുടെയും കേന്ദ്രകോൺ അളവ് കണക്കാക്കുക.
2. അനുയോജ്യമായ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കുക.
3. വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ വ്യാസാർദ്ധം വരയ്ക്കുക.
4. ആദ്യ പ്രവർത്തിയുടെ കാലയളവിനുവേണ്ടി കേന്ദ്രകോണളവിന് വ്യാസാർദ്ധം വരച്ച് ഉണ്ടാകുന്ന വൃത്തഖണ്ഡം ആദ്യ പ്രവർത്തിയുടെ കാലയളവിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഈ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ നിന്ന് അടുത്ത കേന്ദ്രകോണളവിന് വ്യാസാർദ്ധം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തഖണ്ഡം രണ്ടാമത്തെ പ്രവർത്തിയുടെ കാലയളവിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ നമുക്ക് എല്ലാ പ്രവർത്തികളെയും കുറിക്കാം.
5. ഓരോ വൃത്ത ഖണ്ഡത്തിനും വ്യത്യസ്ഥ നിറങ്ങൾ കൊടുക്കുക
6. മാതൃക നൽകുക.
7. തലക്കെട്ട് കൊടുക്കുക.

ഇപ്രകാരം തന്നിട്ടുളള വിവരങ്ങൾക്ക് പൈചാർട്ട് ലഭിച്ചു.

ഉദാഹരണം *3.10*

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ ഒരു കുടുംബത്തിന്റെ ഒരു മാസത്തെ ചെലവ് കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

വിവരങ്ങൾ	ആഹാരം	വീട്ടു വാടക	വസ്ത്രം	വിദ്യാഭ്യാസം	സമ്പാദ്യം	മറ്റുള്ളവ
ചെലവ് (₹)	4800	2400	1600	800	1000	1400

കോൺ അളവ് ഉപയോഗിച്ച് പൈചാർട്ട് വരയ്ക്കുക.

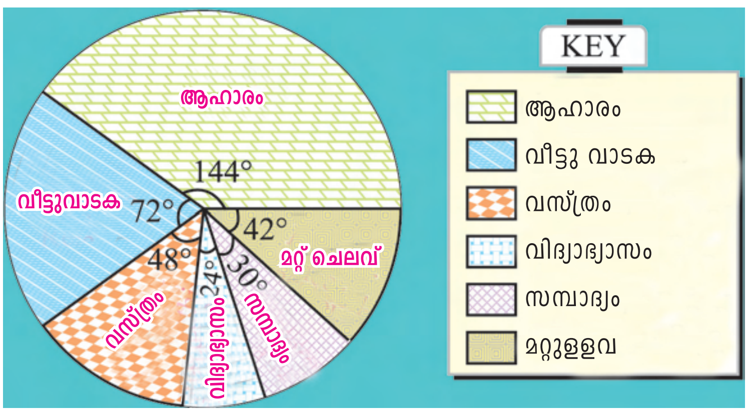
നിർദ്ധാരണം

വിവിധ ചെലവുകൾക്കായി കേന്ദ്രകോണിനെ കണക്കിട്ടിരിക്കുന്നു.

വിവരങ്ങൾ	ചെലവുകൾ (₹)	കേന്ദ്രകോൺ
ആഹാരം	4800	$\frac{4800}{12000} \times 360° = 144°$
വീട്ടുവാടക	2400	$\frac{2400}{12000} \times 360° = 72°$
വസ്ത്രം	1600	$\frac{1600}{12000} \times 360° = 48°$
വിദ്യാഭ്യാസം	800	$\frac{800}{12000} \times 360° = 24°$
സമ്പാദ്യം	1000	$\frac{1000}{12000} \times 360° = 30°$
മറ്റുള്ളവ	1400	$\frac{1400}{12000} \times 360° = 42°$
ആകെ	**12000**	**360°**

ആവശ്യപ്പെട്ട പൈ ചാർട്ട് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു

ഒരു കുടുംബത്തിന്റെ മാസചെലവ്



ചിത്രം. *3.10*

ഉദാഹരണം 3.11

ഒരു വിദ്യാലയത്തിലെ എസ്.എസ്.എൽ.സി. പരീക്ഷാഫലം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഫലം	ഫസ്റ്റ് ക്ലാസ്സിൽ ജയിച്ചവർ	സെക്കന്റ് ക്ലാസ്സിൽ ജയിച്ചവർ	തേർഡ് ക്ലാസ്സിൽ ജയിച്ചവർ	തോറ്റവർ
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ശതമാനം	25%	35%	30%	10%

മുകളിലുള്ള വിവരങ്ങൾക്ക് ഒരു പൈചാർട്ട് വരയ്ക്കുക

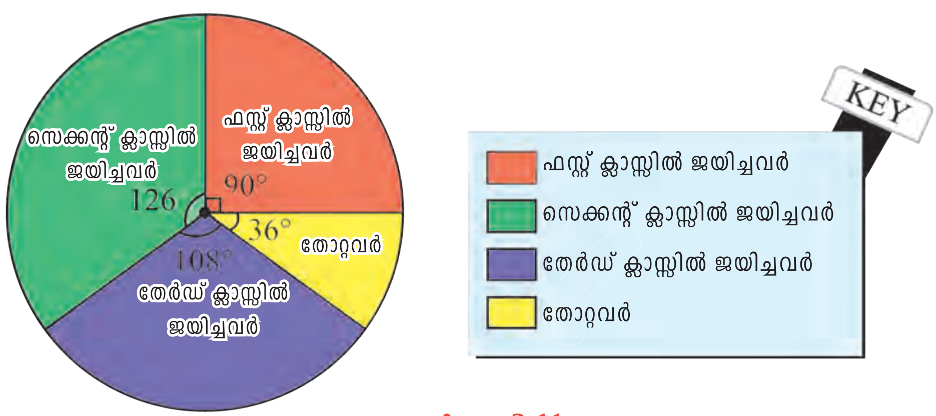
നിർദ്ധാരണം

$$\text{വിവരങ്ങളുടെ കേന്ദ്രകോൺ} = \frac{\text{വിവരങ്ങളുടെ ശതമാന മൂല്യം}}{100} \times 360^0$$

നമുക്ക് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വ്യത്യസ്ത വിവരങ്ങളിലൂടെ കേന്ദ്രകോൺ അളവ് കണക്കാക്കാം :

ഫലം	വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ശതമാനം	കേന്ദ്രകോൺ
ഫസ്റ്റ് ക്ലാസ്സിൽ ജയിച്ചവർ	25%	$\frac{25}{100} \times 360^0 = 90^0$
സെക്കന്റ് ക്ലാസ്സിൽ ജയിച്ചവർ	35%	$\frac{35}{100} \times 360^0 = 126^0$
തേർഡ് ക്ലാസ്സിൽ ജയിച്ചവർ	30%	$\frac{30}{100} \times 360^0 = 108^0$
തോറ്റവർ	10%	$\frac{10}{100} \times 360^0 = 36°$
ആകെ	100%	360^0

എസ്.എസ്.എൽ.സി. ഫലം ഫസ്റ്റ് ക്ലാസ്സിൽ ജയിച്ചവർ



ചിത്രം. *3.11*

അഭ്യാസം 3.2

1. യുഗേന്ദ്രന്റെ പ്രോഗ്രസ് കാർഡിലുള്ള മാർക്കുകൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു

വിഷയങ്ങൾ	തമിഴ്	ഇംഗ്ലീഷ്	കണക്ക്	സയൻസ്	സോഷ്യൽ സയൻസ്
മാർക്കുകൾ	72	60	84	70	74

2. വ്യത്യസ്ഥ വിഷയങ്ങൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ പൈ ചാർട്ടിൽ വരയ്ക്കുക
എട്ടാം ക്ലാസ്സിൽ 36 വിദ്യാർത്ഥികളുണ്ട് അവരെല്ലാം വിവിധ ക്ലബ്ബുകളിലെ അംഗങ്ങളാണ് :

ക്ലബ്	ഗണിതം	എൻ.സി.സി.	ജെ.ആർ.സി.	സ്കൗട്ട്
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	12	6	10	8

ഈ വിവരങ്ങൾക്ക് പൈചാർട്ട് വരയ്ക്കുക.

3. ഒരു ഹോസ്റ്റലിൽ വ്യത്യസ്ത ഭാഷകൾ സംസാരിക്കുന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു :

ഭാഷകൾ	തമിഴ്	തെലുങ്ക്	മലയാളം	കന്നട	ഇംഗ്ലീഷ്	മറ്റു ഭാഷ
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	36	12	9	6	5	4

ഈ വിവരങ്ങൾക്ക് പൈ ചാർട്ട് വരയ്ക്കുക.

4. ഒരു വിദ്യാലയത്തിൽ എട്ടാം ക്ലാസിൽ വിവിധ വിനോദങ്ങളിലേർപ്പെട്ട വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.
പൈ ചാർട്ട് വരയ്ക്കുക.

വിനോദം	സംഗീതം	പദ്യം	ഡാൻസ്	നാടകം	സാമൂഹ്യ സേവനം
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	20	25	27	28	20

5. ഒരു ലോഹ സങ്കരത്തിന്റെ ലോഹങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഈ വിവരങ്ങൾക്ക് പൈ ചാർട്ട് വരയ്ക്കുക.

ലോഹം	സ്വർണം	ലെഡ്	വെള്ളി	ചെമ്പ്	സിങ്ക്
ഭാരം (ഗ്രാം)	60	100	80	150	60

6. ഒരു ബേക്കറി കടയിൽ ഒരു ദിവസത്തിൽ വിറ്റ (₹)വിവരങ്ങളുടെ പട്ടിക താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. പൈ ചാർട്ട് വരയ്ക്കുക.

വിവരങ്ങൾ	സാധാരണ ബ്രെഡ്	ഫ്രൂട്ട് ബ്രെഡ്	കേക്ക്	ബിസ്ക്കറ്റ്	മറ്റുള്ളവ
വില (₹)	320	80	160	120	40

7. ഒരു പ്രകാശകൻ ഒരു പുസ്തകത്തിന് വേണ്ടി ചെലവഴിച്ച രൂപയുടെ വിവരം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു:

വിവരം	പേപ്പർ	അച്ചടി	ബൈൻഡിംഗ്	പ്രചരണം	പ്രതിഫലം
ചെലവ് (₹)	25	12	6	9	8

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുളള വിവരങ്ങളെ ഒരു പൈ ചാർട്ടിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

8. ഒരു കൃഷിക്കാരൻ കൃഷിക്ക് വേണ്ടി ചെലവാക്കിയ തുക താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.:

വിവരം	ഉഴവ്	കൂട്ടുവളം	വിത്ത്	കീടനാശിനി	ജലസേചനം
തുക(₹)	2000	1600	1500	1000	1100

ഈ വിവരങ്ങൾക്ക് പൈ ചാർട്ട് വരയ്ക്കുക.

9. ഒരു മൃഗശാലയിലെ 900 ജീവികളുടെ വിവരം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ജീവികൾ	കാട്ടിലെ മൃഗങ്ങൾ	പക്ഷികൾ	അന്യനാട്ടിലെ മൃഗങ്ങൾ	വെള്ളത്തിൽ വസിക്കുന്ന മൃഗങ്ങൾ	ഇഴജന്തുക്കൾ
ജീവികളുടെ എണ്ണം	400	120	135	170	75

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുളള ഈ വിവരങ്ങൾക്ക് പൈ ചാർട്ട് വരയ്ക്കുക.

10. ഒരു ഫാക്ടറി ഒരു വർഷത്തിൽ അഞ്ച് വിധത്തിലുള്ള വാഹനങ്ങൾ നിർമ്മിക്കുന്നു അവയുടെ വിവരം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

വാഹനങ്ങൾ	സ്കൂട്ടർ	മോട്ടോർ ബൈക്ക്	കാർ	ജീപ്പ്	വാൻ
എണ്ണം	3000	4000	1500	1000	500

ഈ വിവരങ്ങൾക്ക് പൈ ചാർട്ട് വരയ്ക്കുക

11. ഒരു ഭക്ഷണ പദാർത്ഥത്തിൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന പോഷകങ്ങളുടെ അളവ് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

പോഷകങ്ങൾ	പ്രോട്ടീൻ	കൊഴുപ്പ്	കാർബോഹൈഡ്രേറ്റ്	വൈറ്റമിൻ	ധാതു
ശതമാനം	30%	10%	40%	15%	5%

ഈ വിവരങ്ങൾക്ക് പൈ ചാർട്ട് വരയ്ക്കുക

12. ഒരു വിദ്യാലയത്തിലെ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് നൽകിയ വിവിധ തരത്തിലുള്ള ഐസ്ക്രീമിന്റെ ശതമാനം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഫ്ളാവർ	ചോക്ലേറ്റ്	വാനില	സ്ട്രാബെറി	മറ്റുള്ളവ
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ശതമാനം	40%	30%	20%	10%

പൈ ചാർട്ട് വരയ്ക്കുക.

13. വിവിധ വാഹനങ്ങളിൽ വിദ്യാലയത്തിൽ എത്തുന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ വിവരം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

വാഹനം	ബസ്സ്	സൈക്കിൾ	നടന്നു വരുന്നവർ	സ്കൂട്ടർ	കാർ
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ശതമാനം	40%	30%	15%	10%	5%

ഈ വിവരങ്ങൾക്ക് പൈ ചാർട്ട് വരയ്ക്കുക

14. രാജൻ ബാബു തന്റെ വരുമാനത്തിന്റെ 20 % വീട്ടുവാടകയ്ക്കും 30 % ആഹാരത്തിനും 10 % കുട്ടികളുടെ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനും 25% സമ്പാദ്യത്തിനും ബാക്കിയുള്ളവ മറ്റ് ചെലവുകൾക്കും ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഈ വിവരങ്ങൾക്ക് പൈ ചാർട്ട് വരയ്ക്കുക.

15. ഒരു സംസ്ഥാനത്തിൽ വിവിധ ജോലികളിൽ ഏർപ്പെട്ടിരിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം ശതമാനത്തിൽ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു

വിവിധതരം ജോലിക്കാർ	കൃഷിക്കാർ	കൂലി തൊഴിലാളി	ഫാക്ടറി തൊഴിലാളി	കച്ചവടക്കാർ	മറ്റുള്ളവർ
ശതമാനം	40%	25%	12.5%	10%	12.5%

ഈ വിവരങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിച്ച് ഒരു പൈ ചാർട്ട് വരയ്ക്കുക.

3.5 കേന്ദ്രപ്രവണതയുടെ അളവുകൾ

ശേഖരിച്ച വിവരങ്ങളെ ആവൃത്തിപ്പട്ടികയാക്കുമ്പോൾ അവയുടെ തൃപ്തികരമായ ചിത്രം നമുക്ക് ലഭിയ്ക്കുന്നു. ഒരു നിശ്ചിത മൂല്യത്തെ കേന്ദ്രീകരിച്ച വിവരങ്ങൾ വ്യത്യാസപ്പെടാനുള്ള പ്രവണതയെക്കുറിച്ച് അറിയുന്നതിന് മുഴുവൻ വിവരങ്ങളേയും പ്രതിനിധീകരിക്കത്തക്ക ചില അളവുകളുണ്ട് അത്തരം അളവുകളെ കേന്ദ്ര പ്രവണതയുടെ അളവുകൾ എന്ന് പറയുന്നു. അത്തരം ചില അളവുകളാണ്.

(i) **സമാന്തര മാധ്യം** (ii) **മീഡിയൻ** (iii) **മോഡ്**

3.5.1 സമാന്തര മാധ്യം (A.M)

സമാന്തരമാധ്യം എന്നത് എല്ലാ നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ തുകയ്ക്കും, അവയുടെ എണ്ണങ്ങൾക്കും തമ്മിലുള്ള അനുപാതമാണ്.

3.5.1. (a) തരംതിരിക്കാത്ത വിവരങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യം

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ എന്ന x ചരമായിട്ടുള്ള n നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\bar{x}$ തന്നിട്ടുള്ളത്

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}.$$

ഗണിതത്തിൽ ഗ്രീക്ക് അക്ഷരമായ Σ, എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇതിനെ സിഗ്മ എന്ന് പറയുന്നു. ഈ അടയാളം തുകയെ സൂചിപ്പിക്കാനായി ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഈ ചിഹ്നം കൊണ്ട് $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ എന്നതിന്റെ തുകയെ $\sum_{i=1}^{n} x_i$ അഥവാ എളുപ്പത്തിൽ Σx_i. എന്നും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അപ്പോൾ, $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$.

കുറിപ്പ് : സമാന്തരമാധ്യം എന്നതിനെ ശരാശരി അല്ലെങ്കിൽ മാധ്യം എന്ന് പറയുന്നു.

കൂടുതൽ വിവരങ്ങൾ : Σ

$$\sum_{k=1}^{3} k = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\sum_{n=3}^{6} n = 3 + 4 + 5 + 6 = 18$$

$$\sum_{n=2}^{4} 2n = 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 = 18$$

$$\sum_{k=1}^{3} 5 = \sum_{k=1}^{3} 5 \times k^0 = 5 \times 1^0 + 5 \times 2^0 + 5 \times 3^0 = 5 + 5 + 5 = 15$$

$$\sum_{K=2}^{4} (k-1) = (2-1) + (3-1) + (4-1) = 6$$

ഉദാഹരണം *3.12*

ഒരു പരീക്ഷയിൽ 10 വിദ്യാർത്ഥികൾ നേടിയ മാർക്കുകൾ 15, 75, 33, 67, 76, 54, 39, 12, 78, 11. സമാന്തരമാധ്യം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ എണ്ണം, $n = 10$

$$\text{A. M} = \bar{x} = \frac{15 + 75 + 33 + 67 + 76 + 54 + 39 + 12 + 78 + 11}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{460}{10} = 46.$$

ഉദാഹരണം 3.13

9, 6, 7, 8, 5 , x എന്നീ വിവരങ്ങളുടെ ശരാശരി 8 എങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള മൂല്യങ്ങൾ 9, 6, 7, 8, 5, x കൂടാതെ $n = 6$

സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് , A.M. $= \bar{x} = \frac{9+6+7+8+5+x}{6} = \frac{35+x}{6}$

തന്നിട്ടുള്ളത്, $\bar{x} = 8$

$$\frac{35+x}{6} = 8$$

i.e. $35 + x = 48$

$$x = 48 - 35 = 13.$$

ഉദാഹരണം 3.14

ഒരു ക്ലാസ്സിലുള്ള 10 വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ശരാശരി ഉയരം 166 സെ.മീ. എന്ന കണക്കാക്കി. ഇതിനെ ഒത്തുനോക്കിയപ്പോൾ 150 ന് പകരം 160 എന്ന് തെറ്റായി എടുത്തിരിക്കുന്നു എന്ന് മനസ്സിലായി. എങ്കിൽ ശരിയായ ശരാശരി ഉയരം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ, $\bar{x} = 166$ സെ.മീ കൂടാതെ $n = 10$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{\Sigma x}{10}$$

i.e. $166 = \frac{\Sigma x}{10}$ അല്ലെങ്കിൽ $\Sigma x = 1660$

തെറ്റായ $x = 1660$

ശരിയായ x = തെറ്റായ x – തെറ്റായ മൂല്യം + ശരിയായ മൂല്യം

$= 1660 - 160 + 150 = 1650$

ശരിയായ A.M. $= \frac{1650}{10} = 165$ സെ.മീ.

3.5.1 (b) തരം തിരിച്ച വിവരങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യം

തരം തിരിച്ച വിവരങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യം കാണുന്നതിന് രണ്ട് രീതിയുണ്ട്

(i) പ്രത്യക്ഷരീതി , (ii) അഭ്യൂഹമാധ്യരീതി

(i) സമാന്തരമാധ്യം (പ്രത്യക്ഷ രീതി)

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ആവൃത്തി സാരണിയെ നമുക്ക് നോക്കാം.

നിരീക്ഷണങ്ങൾ	x_1	x_2	x_3	…	x_n
ആവൃത്തി	f_1	f_2	f_3	…	f_n

ഈപട്ടികയെ താഴെ കൊടിത്തിരിയ്ക്കുന്നതുപോലെ വ്യാഖ്യാനിക്കാം.

മൂല്യം : x_1 എന്നത് f_1 പ്രാവശ്യം

x_2 എന്നത് f_2 പ്രാവശ്യം

x_3 എന്നത് f_3 പ്രാവശ്യം

....

....

x_n എന്നത് f_n പ്രാവശ്യം. ആവർത്തിക്കുന്നു

ഇവിടെ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ എന്നിവ ചരം x ന്റെ സ്പഷ്ടമായ മൂല്യങ്ങളാകുന്നു.

ഈ സന്ദർഭത്തിൽ നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ ആകെ എണ്ണത്തിനെ N എന്ന് കുറിയ്ക്കുന്നു.

(i.e.,) $f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = \mathrm{N}$ (അല്ലെങ്കിൽ) $\sum_{i=1}^{n} f_i = \mathrm{N}$

നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ ആകെ മൂല്യങ്ങൾ

$$= (x_1 + x_1 + x_1 + \cdots f_1 \text{ പ്രാവശ്യം} + (x_2 + x_2 + x_2 + \cdots f_2 \text{ പ്രാവശ്യം}$$
$$+ \cdots + (x_n + x_n + x_n + \cdots f_n \text{ പ്രാവശ്യം}$$
$$= f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_n \times x_n = \Sigma f_i x_i$$

അതിനാൽ, $\bar{x} = \dfrac{\text{നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ ആകെ മൂല്യം}}{\text{ആവൃത്തികളുടെ തുക}} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

ഇതിനെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം $\bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \dfrac{\Sigma fx}{N}$, ഇവിടെ $\mathrm{N} = \Sigma f$.

ഉദാഹരണം *3.15*

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യം പ്രത്യക്ഷരീതിയിൽ കാണുക

x	5	10	15	20	25	30
f	4	5	7	4	3	2

നിർദ്ധാരണം

x	f	fx
5	4	20
10	5	50
15	7	105
20	4	80
25	3	75
30	2	60
ആകെ	N = 25	$\Sigma fx = 390$

സമാന്തര മാധ്യം, $\bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{N}$

$$= \frac{390}{25} = 15.6 .$$

(ii) സമാന്തരമാധ്യം (അഭ്യൂഹമാധ്യരീതി)

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണത്തിൽ സംഖ്യകൾ വളരെ ചെറുതായതിനാൽ ഗുണനം വളരെ എളുപ്പമായിരുന്നു. സംഖ്യകൾ വലുതാണെങ്കിൽ ഗുണനം പ്രയാസമേറിയതും, ഉത്സാഹമില്ലായ്മയും തെറ്റുകൾ വരാനും സാധ്യതയുണ്ട്.

ഈ പ്രയാസത്തിനെ ദൂരീകരിക്കാൻ മറ്റൊരു എളുപ്പവഴിയുണ്ട്. ഈ രീതിയിൽ നമ്മൾ ഉചിതമായ ഒരു മൂല്യത്തെ ശരാശരി (A) എന്ന് എടുക്കുക. ഈ അഭ്യൂഹ മൂല്യത്തെ അഭ്യൂഹ ശരാശരി എന്ന് പറയുന്നു. $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ എന്ന ഓരോ നിരീക്ഷണങ്ങൾക്കും അഭ്യൂഹ ശരാശരിയ്ക്കും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ എന്ന് കണക്കാക്കുന്നു.

i.e. $d_1 = x_1 - A,\ d_2 = x_2 - A,\ d_3 = x_3 - A, \cdots, d_n = x_n - A$

$d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ ക്രമാനുസൃതം $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n$ എന്നിവയുമായി ഗുണിച്ച് കിട്ടുന്ന മൂല്യങ്ങളുടെ തുകയാണ് Σfd.

സമാന്തരമാധ്യം $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N} \quad (\text{അഭ്യൂഹശരാശരി } N = \Sigma f)$$

ഇപ്പോൾ നമുക്ക് മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള കണക്കിനെ (ഉദാഹരണം 3.15) നെ അഭ്യൂഹ മാധ്യ രീതിയിൽ സമാന്തരമായ മാധ്യം കണക്കാക്കാം.

അഭ്യൂഹ ശരാശരി A = 15

x	f	$d = x - A$	fd
5	4	– 10	– 40
10	5	– 5	– 25
15	7	0	0
20	4	5	20
25	3	10	30
30	2	15	30
ആകെ	**N = 25**		Σfd **= 15**

സമാന്തരമാധ്യം = $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N}$

$= 15 + \frac{15}{25} = 15 + \frac{3}{5} = \frac{75 + 3}{5} = \frac{78}{5}$

$= 15.6$

3.5.2 ഭാരിത സമാന്തരമാധ്യം

നിരീക്ഷണങ്ങൾക്കൊപ്പം വ്യത്യസ്ത ഭാരങ്ങളും ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന സമയങ്ങളിൽ A.M. കാണക്കാക്കുന്നതിനെ ഭാരിത സമാന്തരമാധ്യം എന്ന് പറയുന്നു.

ഭാരിത സമാന്തരമാധ്യം

ഉദാഹരണമായി നിരീക്ഷണങ്ങൾ x_1 നോട് w_1 ഭാരം ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. x_n നോട് w_2 ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു അവസാനം x_2 നോട് w_n ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു

$$\text{W. A. M.} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$

ഉദാഹരണം 3.16

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ ഭാരിത സമാന്തരമാധ്യം കാണുക

ഭക്ഷണപദാർത്ഥങ്ങൾ	അളവ് (കി. ഗ്രാമിൽ)	1കി.ഗ്രാമിന്റെ വില (₹)
അരി	25	30
പഞ്ചസാര	12	30
എണ്ണ	8	70

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ x ന്റെ മൂല്യം ഭക്ഷണ പദാർത്ഥത്തിന്റെ വിലയും ഭാരഅളവും ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

$$\text{ഭാരിത സമാന്തരമാധ്യം} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n}$$

$$= \frac{25\times 30 + 12\times 30 + 8\times 70}{25+12+8} = \frac{1670}{45}$$

$$= ₹\ 37.11\ .$$

3.5.3 മീഡിയൻ

കേന്ദ്ര പ്രവണതയുടെ മറ്റൊരു അളവാണ് മീഡിയൻ

3.5.3 (a) തരംതിരിക്കാത്ത വിവരങ്ങളുടെ മീഡിയൻ

മീഡിയൻ താഴെ പറയുന്നതു പോലെ കണക്കാക്കാം:

(i) നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒറ്റ സംഖ്യയാണെങ്കിൽ അവയെ ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണ ക്രമത്തിലോ ക്രമീകരിച്ച് കേന്ദ്രഭാഗത്തുള്ള മൂല്യത്തെ മീഡിയൻ എന്ന് എടുക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി 5 നിരീക്ഷണങ്ങളായ 33, 35, 39, 40, 43 എന്നിവ പരിഗണിക്കാം. ഈ നിരീക്ഷണ ത്തിലെ കേന്ദ്ര മൂല്യം 39 ഇതാണ് ഈ നിരീക്ഷണത്തിലെ മീഡിയൻ

(ii) നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ എണ്ണം ഇരട്ട സംഖ്യയാണെങ്കിൽ അവയെ ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണക്രമത്തിലോ ക്രമീകരിച്ച് എഴുതുക. എന്നിട്ട് കേന്ദ്രഭാഗത്തുള്ള രണ്ട് മൂല്യങ്ങളുടെ ശരാശ രിയാണ് മീഡിയൻ.

ഉദാഹരണമായി 33, 35, 39, 40, 43, 48 ന്റെ മീഡിയൻ $\frac{39+40}{2} = 39.5.$

കുറിപ്പ് : മീഡിയൻ എന്നത് എത്ര നിരീക്ഷണങ്ങൾ മീഡിയനു മുകളിലുണ്ടോ അത്രയും എണ്ണം അതിനു താഴേയ്ക്കും വരത്തക്കവിധമുള്ള നിരീക്ഷണത്തിന്റെ മൂല്യമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.17

ഒരു ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാരൻ എടുത്ത റൺസുകൾ 7, 15, 9, 13, 21, 7, 32 മീഡിയൻ കാണുക

നിർദ്ധാരണം

റൺസുകളുടെ ആരോഹണക്രമം 7, 9, 13, 15, 17, 21,32,

ഇവിടെ, $n = 7$ (ഒറ്റസംഖ്യ)

അതുകൊണ്ട് മീഡിയൻ = കേന്ദ്രമൂല്യം

$$= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th} \text{ പദം} = \left(\frac{7+1}{2}\right)^{th} \text{ പദം} = 4\text{ാം പദം}$$

ഇവിടെ, മീഡിയൻ 15 ആകുന്നു .

ഉദാഹരണം *3.18*

ഒരു ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാരൻ എടുത്ത റൺസുകൾ 13, 28, 61, 70, 4, 11, 33, 0, 71, 92. മീഡിയൻ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

റൺസുകളുടെ ആരോഹണക്രമം 0, 4, 11, 13, 28, 33, 61, 70, 71, 92

$n = 10$ (ഇരട്ട സംഖ്യ)

കേന്ദ്രമൂല്യങ്ങൾ 28, 33 എന്നിവയാകുന്നു

∴ മീഡിയൻ = രണ്ട് കേന്ദ്രമൂല്യങ്ങളുടെ ശരാശരി

$$= \frac{28 + 33}{2} = \frac{61}{2} = 30.5 .$$

3.5.3 (b) തരംതിരിച്ച വിവരങ്ങളുടെ മീഡിയൻ

സഞ്ചിതാവൃത്തി

സഞ്ചിതാവൃത്തി എന്നത് ഓരോ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾക്കും മുമ്പുള്ള ആവൃത്തിയെകൂട്ടി വർഗ്ഗാന്തരമായി എഴുതുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം *3.19*

50 വിദ്യാർത്ഥികളുടെ മാർക്കിന്റെ മീഡിയൻ കാണുക

മാർക്ക്	20	27	34	43	58	65	89
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	2	4	6	11	12	8	7

നിർദ്ധാരണം

മാർക്ക് (x)	വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം (f)	സഞ്ചിതാവൃത്തി
20	2	2
27	4	(2 + 4 =) 6
34	6	(6 + 6 =) 12
43	11	(11 + 12 =) 23
58	**12**	**(23 + 12 =) 35**
65	8	(35 + 8 =) 43
89	7	(43 + 7 =) 50

ആവൃത്തിയുടെ തുക , N $= \Sigma f = 50$

$$\therefore \frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25.$$

മീഡിയൻ എന്നത്, $\left(\frac{N}{2}\right)^{th}$ -ാം മൂല്യമാണ് = 25 -ാം മത്തെ മൂല്യം.

25–ാമത്തെ മൂല്യം സഞ്ചിതാവൃത്തിയിൽ 35–ാം വർഗ്ഗത്തിലാണ് വരുന്നത് ആ വർഗ്ഗത്തിന്റെ സമാന മൂല്യം 58 മാർക്കാണ്

ഇവിടെ, മീഡിയൻ = 58.

3.5.4 മോഡ്

മോഡ് എന്നത് കേന്ദ്ര പ്രവണതയുടെ ഒരു അളവാണ്.

താഴെ കാണുന്നത് പോലെ മോഡ് കണക്കാക്കാം

3.5.4 (a) തരംതിരിക്കാത്ത വിവരങ്ങളുടെ മോഡ്

ഒരു സെറ്റ് നിരീക്ഷണങ്ങളിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ തവണ ആവർത്തിക്കുന്ന മൂല്യത്തെ മോഡ് എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം *3.20*

മോഡ് കാണുക 2, 4, 5, 2, 1, 2, 3, 4, 4, 6, 2.

നിർദ്ധാരണം

മുകളിൽ കൊടുത്ത ഉദാഹരണത്തിൽ കൂടുതൽ തവണ ആവർത്തിക്കുന്നത് 2 ആണ് അതായത് 4 പ്രാവശ്യം അതുകൊണ്ട് മോഡ് = 2.

ഉദാഹരണം *3.21*

22, 25, 21, 22, 29, 25, 34, 37, 30, 22, 29, 25 മോഡ് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

22 എന്നത് 3 പ്രാവശ്യവും 25 എന്നത് 3 പ്രാവശ്യവും ആവർത്തിക്കുന്നു.

∴ ഈ വിവരങ്ങൾക്ക് 22 ഉം, 25 ഉം മോഡുകൾ ആണ്. തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾക്ക് രണ്ട് മോഡുകളുണ്ട് എന്ന് നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം *3.22*

15, 25, 35, 45, 55, 65 മോഡ് കാണുക

നിർദ്ധാരണം

ഓരോ മൂല്യവും ഒരു പ്രാവശ്യം മാത്രമേയുള്ളൂ. അതുകൊണ്ട് ഈ വിവരങ്ങൾക്ക് മോഡ് ഇല്ല.

3.5.4 (b) തരംതിരിച്ച വിവരങ്ങളുടെ മോഡ്

വിവരങ്ങളെ ഒരു ആവൃത്തിപ്പട്ടികാരൂപത്തിൽ സജ്ജീകരിച്ചാൽ ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തിക്ക് സമാനമായ വർഗ്ഗത്തെ മോഡ് വർഗ്ഗം എന്ന് പറയുന്നു. മോഡ് വർഗ്ഗത്തിലെ ചരത്തിന്റെ മൂല്യത്തെ മോഡ് എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം *: 3.23*

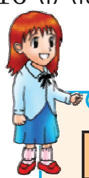
താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ആവൃത്തി പട്ടികയ്ക്ക് മോഡ് കാണുക

വേതനം (രൂപ)	250	300	350	400	450	500
തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം	10	15	16	12	11	13

നിർദ്ധാരണം

വേതനം (₹)	തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം
250	10
300	15
350	**16**
400	12
450	11
500	13

പട്ടികയിൽ നിന്നും ഏറ്റവും കൂടുതൽ ആവൃത്തി 16 എന്ന് നമുക്ക് കാണാം കൂടുതൽ ആവൃത്തി 16 ന് സമാനമായ ചരത്തിന്റെ വില 350 ആണ് ഇതാണ് ഈ വിവരങ്ങളുടെ മോഡ്.



നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

യൂണിമോഡൽ	ബൈ മോഡൽ	ട്രൈമോഡൽ	മൾട്ടി മോഡൽ
തന്നിട്ടുള്ള ശ്രേണിയിൽ **ഒരുമോഡ്** ആണെങ്കിൽ അതിനെ **യൂണി മോഡൽ** എന്ന് പറയുന്നു	തന്നിട്ടുള്ള ശ്രേണിയിൽ **രണ്ടു മോഡ്** കളുണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ **ബൈ മോഡൽ** എന്ന് പറയുന്നു.	തന്നിട്ടുള്ള ശ്രേണിയിൽ **മൂന്നു മോഡുക**ളുണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ **ട്രൈ മോഡൽ** എന്ന് പറയുന്നു	തന്നിട്ടുള്ള ശ്രേണിയിൽ **മൂന്നിൽ കൂടുതൽ മോഡുകൾ** ഉണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ **മൾട്ടി മോഡൽ** എന്ന് പറ യുന്നു
ഉദാഹരണം : 10, 15, 20, 25, 15, 18, 12, 15. ഇവിടെ, മോഡ് 15 ആകുന്നു.	ഉദാഹരണം: 20, 25, 30, 30, 15, 10, 25. ഇവിടെ, മോഡ് 25, 30 ബൈ മോഡൽ ആകുന്നു.	ഉദാഹരണം: 60, 40, 85, 30, 85, 45, 80, 80, 55, 50, 60. ഇവിടെ, മോഡ് 60, 80, 85 ട്രൈ മോഡൽ ആകുന്നു.	ഉദാഹരണം: 1, 2, 3, 8, 5, 4, 5, 3, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 2, 7, 4, 1. ഇവിടെ, 1, 2, 3, 4, 5 മൾട്ട മോഡൽ ആകുന്നു.

അഭ്യാസം 3.3

I. സമാന്തര മാധ്യത്തിന്റെ കണക്കുകൾ

1. 2, 4, 6, 8, 10 , 12, 14, 16 എന്നിവയുടെ ശരാശരി കാണുക
2. 18, 41, x , 36, 31, 24, 37, 35, 27, 36, 31. എന്നിവയുടെ ശരാശരി 31 ആണ്. എങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം കാണുക
3. ഒരു ക്ലാസ്സിലുള്ള 20 വിദ്യാർത്ഥികളിൽ 5 വിദ്യാർത്ഥികൾ 76 മാർക്കും, 7 വിദ്യാർത്ഥികൾ 77 മാർക്കും, 8 വിദ്യാർത്ഥികൾ 78 മാർക്കും നേടിയെങ്കിൽ മാധ്യം കാണുക
4. ഒരു ക്ലാസ്സിലുള്ള 20 വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഉയരം 160 സെ.മീ. എന്ന് കണക്കാക്കി. പക്ഷെ യഥാർത്ഥ വിവരങ്ങളുമായി താരതമ്യം ചെയ്തപ്പോൾ 152 എന്ന മൂല്യം 132 എന്ന് തെറ്റായി എടുത്തിരുന്നു. ഉയരത്തിന്റെ ശരിയായ മാധ്യം കാണുക.

5. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാധ്യം കാണുക ?

x	15	25	35	45	55	65	75	85
f	12	20	15	14	16	11	7	8

6. ഒരു ക്ലാസ്സിലുള്ള 40 വിദ്യാർത്ഥികളുടെ വയസ്സുകൾ താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. വിദ്യാർത്ഥികളുടെ വയസ്സിന്റെ മാധ്യം കണക്കാക്കുക.

വയസ്സ് (വർഷങ്ങിൽ)	13	14	15	16	17	18
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	3	8	9	11	6	3

7. താഴെ തന്നിട്ടുളള വിവരങ്ങളുടെ A.M കാണുക.

മാർക്ക്	65	70	75	80	85	90	95	100
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	6	11	3	5	4	7	10	4

8. ഒരു ഫാക്ടറിയിൽ ഉള്ള 12 ജോലിക്കാരുടെ ഭാരം താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിയ്ക്കുന്നു.

ഭാരം	60	64	68	70	72
ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	3	4	2	2	1

ജോലിക്കാരുടെ ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

9. ഒരു കുടുംബത്തിന്റെ ഒരു മാസത്തെ അവശ്യ സാധനങ്ങളുടെ ലിസ്റ്റ് താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിയ്ക്കുന്നു. ഓരോ സാധനങ്ങളുടേയും ഭാരം തന്നിട്ടുണ്ട്. അവയുടെ ഭാരിത സമാന്തരമാധ്യം കാണുക.

വ്യാപാര ചരക്ക്	ഭാരം	ഒരു കി. ഗ്രാമിന്റെ വില ₹
അരി	25	30
ഗോതമ്പ്	5	20
പയറുവർഗ്ഗം	4	60
പച്ചക്കറികൾ	8	25
എണ്ണ	3	65

10. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ ഭാരിത സമാന്തരമാധ്യം കാണുക :

ഇനം	ഇനങ്ങളുടെ എണ്ണം	ഇനങ്ങളുടെ വില
പൗഡർ	2	₹ 45
സോപ്പ്	4	₹ 12
പേന	5	₹ 15
ജ്യാമിതിപെട്ടി	4	₹ 25.50

II. മീഡിയൻ കാണുന്നതിനുള്ള കണക്കുകൾ

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള മൂല്യങ്ങളുടെ മീഡിയൻ കാണുക :

(i) 83, 66, 86, 30, 81.

(ii) 45, 49, 46, 44, 38, 37, 55, 51.

(iii) 70, 71, 70, 68, 67, 69, 70.

(iv) 51, 55, 46, 47, 53, 55, 51, 46.

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ മീഡിയൻ കാണുക?

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f	9	11	5	6	8	1	3	7

3. ഒരു ക്ലാസ്സിലുള്ള 50 വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഉയരങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു:

ഉയരം (സെ.മീ)	156	155	154	153	152	151	150
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	8	4	6	10	12	3	7

മീഡിയൻ കാണുക ?

4. 60 രോഗികളുടെ ഹൃദയത്തിന്റെ എക്സ്റേ പരിശോധിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയ വിവരങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു:

ഹൃദയത്തിന്റെ വ്യാസം (മി.മി)	130	131	132	133	134	135
രോഗികളുടെ എണ്ണം	7	9	15	12	6	11

മീഡിയൻ കാണുക ?

5. 43 തൊഴിലാളികളുടെ ശമ്പളം താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന

ശമ്പളം (₹ ൽ)	4000	5500	6000	8250	10,000	17,000	25,000
തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം	7	5	4	3	13	8	3

III. മോഡ് കാണുന്നതിനുള്ള കണക്കുകൾ

1. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങളുടെ മോഡ് കാണുക?

i) 74, 81, 62, 58, 77, 74.

ii) 55, 51, 62, 71, 50, 32.

iii) 43, 36, 27, 25, 36, 66, 20, 25.

vi) 24, 20, 27, 32, 20, 28, 20.

2. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ മോഡ് കാണുക:

x	5	10	15	20	25	30
f	14	25	37	16	8	5

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ആവൃത്തിപ്പട്ടികയുടെ മോഡ് കാണുക

താപ നില °C	29	32.4	34.6	36.9	38.7	40
ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം	7	2	6	4	8	3

4. വ്യത്യസ്ഥ അളവുകളിലുള്ള ഷർട്ട് ധരിക്കുന്നവരുടെ വിവരങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

അളവ്	38	39	40	41	42	43	44
ധരിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം	27	40	51	16	14	8	6

IV. മാധ്യം, മീഡിയൻ, മോഡ് ഇവ കാണുന്നതിനുള്ള കണക്കുകൾ

1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ആവൃത്തി പട്ടികയിൽ നിന്നും മാധ്യം, മീഡിയൻ മോഡ് എന്നിവ കാണുക:

x	10	20	25	30	37	55
f	5	12	14	15	10	4

2. ഒരു കമ്പനിയിലെ തൊഴിലാളികളുടെ വയസ്സ് താഴെ കൊടുത്തിരിയ്ക്കുന്നു.

വയസ്സ്	19	21	23	25	27	29	31
തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം	13	15	20	18	16	17	13

മാധ്യം, മീഡിയൻ, മോഡ് എന്നിവ കാണുക ?

3. 20 വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഭാരം താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഭാരം (കി.ഗ്രാം)	47	50	53	56	60
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	4	3	7	2	4

മാധ്യം മീഡിയൻ, മോഡ് എന്നിവ കാണുക.

Concept Summary

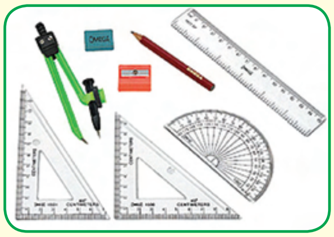
- ആവൃത്തി വിതരണത്തെ ഗ്രാഫിന്റെ രൂപത്തിൽ പ്രതിനിധീകരിയ്ക്കുന്ന രണ്ട് രീതിയാണ് ഹിസ്റ്റോഗ്രാമും, ആവൃത്തി ബഹുഭുജവും
- ഗ്രാഫ് രൂപത്തിലുള്ള ഹിസ്റ്റോഗ്രാമിലും ആവൃത്തി ബഹുഭുജത്തിലും വർഗ്ഗാന്തര ങ്ങളെ X അക്ഷത്തിലും അതിനോട് ബന്ധപ്പെട്ട ആവൃത്തിയെ Y അക്ഷത്തിലും അടയാളപ്പെടുത്തണം.
- ഒരു ഹിസ്റ്റോഗ്രാമിൽ അടുത്തടുത്ത ദീർഘചതുരങ്ങൾക്കിടയിൽ ഒഴിഞ്ഞ സ്ഥലം ഇല്ലാത്ത വിധത്തിൽ അടുത്തടുത്തു ചേർത്തു വരയ്ക്കണം.
- അടുത്തടുത്ത ദീർഘചതുരങ്ങളുടെ മുകൾഭാഗത്തെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിച്ചു കൊണ്ടും ആരംഭത്തിനു മുൻപും അവസാനത്തിനു പിൻപും ഉള്ള വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളുടെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ടും വരച്ചുണ്ടാക്കുന്ന ചിത്രമാണ് ആവൃത്തി ബഹുഭുജം.
- പ്രവർത്തിയുടെ കേന്ദ്രകോൺ $= \left[\frac{\text{പ്രവർത്തിയുടെ കാലയളവ്}}{\text{ആകെ കാലയളവ്}} \times 360^0\right]$
- നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ തുകയ്ക്കും, അവയുടെ എണ്ണങ്ങൾക്കും തമ്മിലുള്ള അനുപാത മാണ് സമാന്തരമാധ്യം.
- A.M.കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രങ്ങൾ

  (i) $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ (ii) $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

  (iii) $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$ A അഭ്യൂഹ മാധ്യം $d = x - A$
- ഭാരിത സമാന്തരമാധ്യം (W.A.M.) $= \frac{\Sigma w_i x_i}{\Sigma w_i}$.
- മീഡിയൻ എന്നത് എത്ര നിരീക്ഷണങ്ങൾ മീഡിയനും മുകളിലുണ്ടോ അത്രയും എണ്ണം അതിനു താഴേയും വരത്തക്കവിധമുള്ള നിരീക്ഷണത്തിന്റെ മൂല്യമാകുന്നു.
- നിരീക്ഷണങ്ങളിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ തവണ ആവർത്തിക്കുന്ന മൂല്യത്തെ മോഡ് എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു.

4 പ്രായോഗിക ജ്യാമിതി

4.1 ആമുഖം



4.2 ഏകകേന്ദ്ര വൃത്തങ്ങൾ

ബഹ്മ ഗുപ്ത

[598 - 670 A.D.]

7-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇൻഡ്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ബ്രഹ്മഗുപ്ത ജ്യോതിശാസ്ത്രത്തെക്കുറിച്ചും ഗണിതശാസ്ത്രത്തെക്കുറിച്ചും നിരവധി പുസ്തകങ്ങൾ എഴുതി അദ്ദേഹം രാജസ്ഥാനിലാണ് ജനിച്ചത്. അദ്ദേഹം ഉജ്ജെജെയിനിലെ ജോതിശാസ്ത്ര നിരീക്ഷണശാലയിൽ തലവനായി സേവനമനു ഷ്ഠിച്ചിട്ടുണ്ട്.

അദ്ദേഹത്തിന്റെ മികച്ച ഗ്രന്ഥങ്ങളിലൊന്നാണ് ബ്രഹ്മഗുപ്ത സിദ്ധാന്ഥ

$$\pi \simeq \sqrt{10}$$

എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക =

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

എന്നതും അദ്ദേഹം കുപിടിച്ചവയാണ്.

4.1 ആമുഖം

പുരാതന ഈജിപ്തുകാർ തങ്ങൾക്ക് ജ്യാമിതിയിലുള്ള പ്രായോഗികമായ അറിവിനെ സർവ്വേ നടത്തുന്നതിനും പദ്ധതികളുടെ നിർമ്മാണത്തിനുമായി പ്രയോഗിച്ചിരുന്നു. പുരാതന ഗ്രീക്കുകാർ അനുഭവാധിഷ്ഠിതമായ ജ്യാമിതി അവരുടെ സംസ്കാരത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. കോമ്പസ്സും, സ്കെയിലും ഉപയോഗിച്ച് വൈവിധ്യമാർന്ന ധാരാളം നിർമ്മിതികൾക്ക് അവർ രൂപം കൊടുത്തിരുന്നു.

പ്രാചീന കാലം മുതൽക്കേ ഗണിതത്തിന്റെ ഏറ്റവും പ്രധാനപ്പെട്ട ശാഖയാണ് ജ്യാമിതി ജ്യാമിതിയെ താത്വിക ജ്യാമിതി എന്നും പ്രായോഗിക ജ്യാമിതി എന്നും തരം തിരിച്ചിരിക്കുന്നു. താത്വിക ജ്യാമിതിയിൽ ജ്യാമിതിയ രൂപങ്ങളുടെ ഗുണങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള സിദ്ധാന്തങ്ങൾക്ക് അടിസ്ഥാന പ്രമാണങ്ങളും വാദങ്ങളും ഉപയോഗിച്ച് തെളിവുകൾ കണ്ടുപിടിച്ച് മാതൃകാ ചിത്രങ്ങളാണ് വരയ്ക്കുന്നത്. ജ്യാമിതിയ ഉപകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രങ്ങൾ നിർമ്മിക്കുന്നതാണ് പ്രായോഗിക ജ്യാമിതി.

ചില സമതല ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ നിർവചനം ഗുണങ്ങൾ കൂടാതെ അവയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രങ്ങൾ എന്നിവയെക്കുറിച്ച് മുൻ ക്ലാസ്സുകളിൽ നാം പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ഈ പാഠത്തിൽ ജ്യാമിതിയ ഉപകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചില സമതല ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ നിർമ്മിതിയെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് പഠിക്കാം.

4.2 ഏക കേന്ദ്ര വൃത്തങ്ങൾ

ഈ ഭാഗത്തിൽ, നമുക്ക് ഏകകേന്ദ്ര വൃത്തങ്ങളെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാം. വൃത്തങ്ങൾ മുൻപേ തന്നെ നിങ്ങൾക്ക് പരിചിതമാണ്.

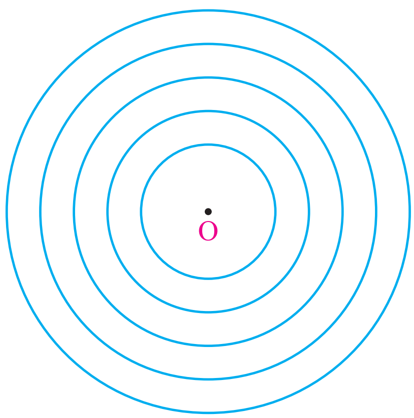
4.2.1. പ്രചോദിപ്പിക്കൽ (പ്രേരകം)

നിശ്ചല ജലത്തിൽ ഒരു ചെറിയ കല്ലിടുകയാണെങ്കിൽ വൃത്താകാര തരംഗങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നത് നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും. ഇത്തരം വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രം ഏതാണ് ? അത് കല്ല് ഇടപ്പെട്ട സ്ഥാന മല്ലേ ? അതേ,

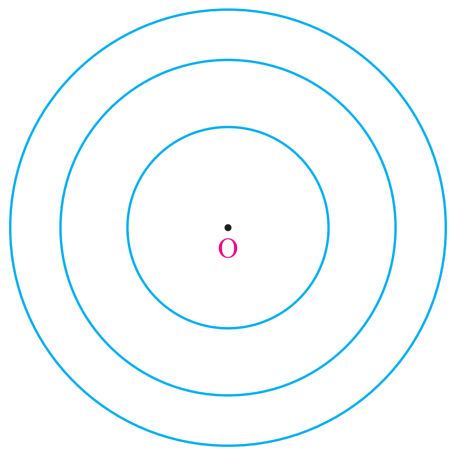
വ്യത്യസ്ത വ്യാസാർദ്ധങ്ങളും ഒരേ വൃത്തകേന്ദ്രവും ഉള്ള വൃത്തങ്ങളെ ഏക കേന്ദ്രവൃത്തങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. ഈ കേന്ദ്രത്തെ പൊതുകേന്ദ്രം എന്നു പറയുന്നു.

ഏകകേന്ദ്രവൃത്തങ്ങൾ

ഒരു തലത്തിൽ വരയ്ക്കപ്പെട്ട ഒരേ വൃത്തകേന്ദ്രവും വ്യത്യസ്ത വ്യാസാർദ്ധങ്ങളും ഉള്ള വൃത്ത ങ്ങളെ ഏകകേന്ദ്രവൃത്തങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. ചിത്രം 4.1 കൂടാതെ 4.2 ശ്രദ്ധിക്കുക.

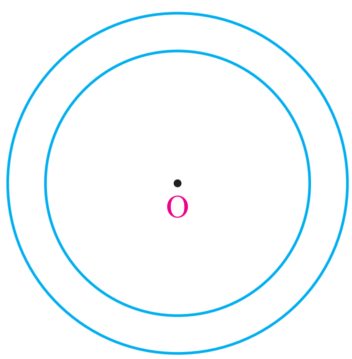


ചിത്രം.*4.1*

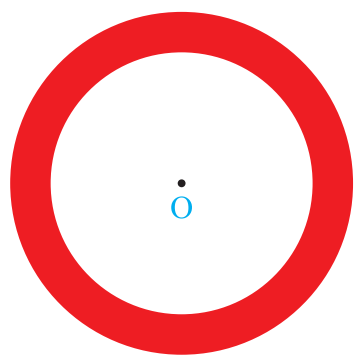


ചിത്രം.*4.2*

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കുക:



ചിത്രം.*4.3*



ചിത്രം.*4.4*

ചിത്രം 4.3 രണ്ടു ഏക കേന്ദ്രവൃത്തങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

ചിത്രം 4.4 ൽ രണ്ട് ഏകകേന്ദ്രവൃത്തങ്ങൾക്കിടിയിൽ നിറംകൊടുത്തിട്ടുണ്ട്. നിറം കൊടുക്കപ്പെട്ട ആ ഭാഗത്തെ വൃത്ത വലയം എന്നു പറയുന്നു.

വിവരണം : വൃത്തവലയം

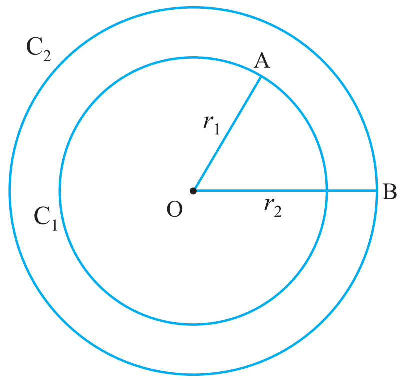
ചിത്രം 4.5 ൽ C_1 കൂടാതെ C_2 എന്നീ വൃത്തകേന്ദ്രങ്ങൾക്ക് ഒരേ വൃത്തകേന്ദ്രം O യും വ്യത്യസ്ത വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ r_1 കൂടാതെ r_2 എന്നിവയുമാണുള്ളത്

വൃത്തങ്ങൾ C_1 കൂടാതെ C_2 എന്നിവയെ ഏകകേന്ദ്രവൃത്തങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

ഈ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളാൽ ഉള്ളടക്കപ്പെട്ട ഭാഗത്തെ വൃത്തവലയം എന്നു പറയുന്നു. വൃത്തവലയത്തിന്റെ അകലം.

$$= OB - OA = r_2 - r_1$$

$$(r_2 > r_1)$$



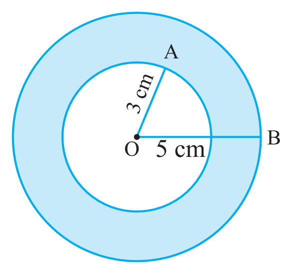
ചിത്രം.*4.5*

4.2.2. വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ ഏകകേന്ദ്രവൃത്തങ്ങളുടെ നിർമ്മിതി.

ഉദാഹരണം 4.1

3 സെ.മീ. കൂടാതെ 5 സെ.മീ. എന്നീ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുള്ള ഏക കേന്ദ്രവൃത്തങ്ങൾ വരച്ച് വൃത്തവലയം നിഴലിടുക. വൃത്ത വലയത്തിന്റെ അകലം കാണുക.

മാതൃകാചിത്രം

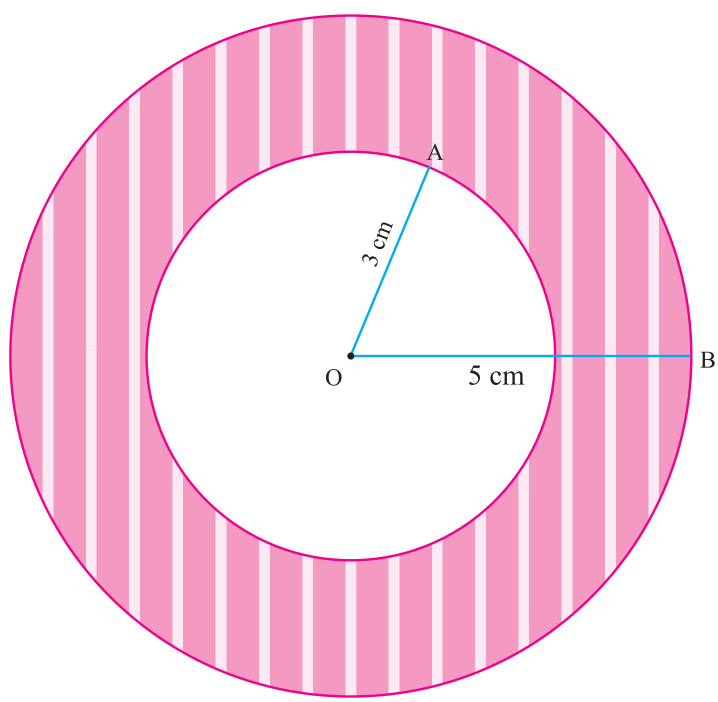


ചിത്രം.*4.6*

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവ : വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ 3 സെ.മീ. കൂടാതെ 5 സെ.മീ.

ഏകകേന്ദ്ര വൃത്തങ്ങളുടെ നിർമ്മിതി



ചിത്രം.*4.7*

നിർമ്മിതിയുടെ വഴികൾ

വഴി 1 : ഒരു മാതൃകാ ചിത്രം വരച്ച് തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ വരച്ച് തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

വഴി 2 : ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു O കേന്ദ്രം എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തുക.

വഴി 3 : O കേന്ദ്രമാക്കി OA = 3 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

വഴി 4 : O കേന്ദ്രമാക്കി OB = 5 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ മറ്റൊരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

അങ്ങനെ ഏകകേന്ദ്രവൃത്തങ്ങൾ C_1 കൂടാതെ C_2 എന്നിവ വരയ്ക്കപ്പെട്ടു.

വൃത്തവലയത്തിന്റെ അകലം = OB – OA

= 5 – 3

= 2 സെ.മീ.

അഭ്യാസം 4.1

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അളവുകളോടുകൂടിയ ഏകകേന്ദ്ര വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഒരോ വൃത്ത വലയത്തിന്റെയും അകലം കാണുക.

(i) 4 സെ.മീ. കൂടാതെ 6 സെ.മീ.

(ii) 3.5സെ.മീ. കൂടാതെ 5.5 സെ.മീ.

(iii) 4.2 സെ.മീ.കൂടാതെ 6.8 സെ.മീ.

(iv) 5 സെ.മീ. കൂടാതെ 6.5 സെ.മീ.

(v) 6.2 സെ.മീ.കൂടാതെ 8.1 സെ.മീ.

(vi) 5.3 സെ.മീ. കൂടാതെ7 സെ.മീ.

- പൊതുവായ കേന്ദ്രത്തോടും വ്യത്യസ്തങ്ങളായ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളോടും കൂടി ഒരു തല ത്തിൽ വരയ്ക്കപ്പെടുന്ന വൃത്തങ്ങളെ ഏകകേന്ദ്ര വൃത്തങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.
- രണ്ട് ഏകകേന്ദ്ര വൃത്തങ്ങളാൽ ഉള്ളടക്കപ്പെട്ട ഭാഗത്തെ വൃത്തവലയം എന്നു പറയുന്നു.
- വൃത്തവലയത്തിന്റെ വീതി. = $r_2 - r_1$, $(r_2 > r_1)$

ഉത്തരങ്ങൾ

അദ്ധ്യായം 1

അഭ്യാസം 1.1

1. i) D ii) C iii) B iv) B v) A
2. i) 200ലിറ്റർ ii) 20,000 കി.മീ iii) ₹ 1,550
   iv) 50 മിനിറ്റ് v) ₹ 50
3. ` 40,000 4. 3750

5.i)90% ii) 94% iii) 98% iv) 88% v) 95% vi) 93%

6. 5 7. ₹ 9,000 8. ₹ 1,020

9. 180, 1320 10. 6 കിലോഗ്രാം

11. i) 26,100 ii) 5,220 12. 25%, ₹ 8,600

13. കണക്കിന് 20% കൂടുതൽ ലഭിച്ചു 14. ₹ 6,250 15. 20%

അഭ്യാസം 1.2

1. i) ₹ 7490 ii) ₹ 500 iii) ₹ 9,000 iv) ₹ 2,246 v) ₹ 6,57,500
2. i) ലാഭം ₹ 64, ലാഭ % = 20% ii) ലാഭം₹ 200, ലാഭ % = 8%
   iii) നഷ്ടം ₹ 19, നഷ്ട % = 5% iv) S.P. = ₹ 38, നഷ്ട % = 5%
   v) S.P. = ₹ 5,500, ലാഭ % = 10%.

3. i) ₹ 787.50 ii) ₹ 1,260 iii) ₹ 2,835

4. ₹ 1,200 5. $33\frac{1}{3}$% 6. 25%

7. ₹ 22,80,000 8. ₹ 34,40,000

9. $11\frac{1}{9}$% 10. മൊത്തലാഭം ₹ 113.68

അഭ്യാസം 1.3

1. i) A ii) D iii) B iv) B v) C 2. ₹ 360
3.₹ 8,000 4. ₹ 49,220 5. ₹ 18,433.40 6. ₹ 4,950
7.₹ 13,000 8. 33% 9. ₹ 9,832.50 10. 20%
11. ഓരോ ഷർട്ടിനും ₹ 1,310.40

12. i) കിഴിവ് തുക = ₹ 460; S.P. = ₹ 1,840

    ii) കിഴിവ് തുക = ₹ 35; കിഴിവ് നിരക്ക് = 25%

    iii) M.P. = ₹ 20,000; കിഴിവ് തുക = ₹ 4,000

    iv) കിഴിവ് നിരക്ക് = 5%; കിഴിവ് തുക = ₹ 725

    v) കിഴിവ് തുക = ₹ 403; S.P. = ₹ 2,821

അഭ്യാസം 1.4

1. i) A = ₹ 1,157.63, പലിശ = ₹ 157.63

   ii) A = ₹ 4,840, പലിശ = ₹ 840

   iii) A = ₹ 22,869, പലിശ = ₹ 4,869

2. ₹ 2,125

3. i) ₹ 88,200 ii) ₹ 4,410

4. A = ₹ 27,783, C.I. = ₹ 3,783 5. ₹ 9,826

6. C.I. = ₹ 1,951 7. ₹ 20,000 8. ₹ 36,659.70

9. i) ₹ 92,400 ii) ₹ 92,610, വ്യത്യാസം = ₹ 210

10. ₹ 6 11. ₹ 25 12. ₹ 2,000

13. സുജ നൽകിയ കൂടുതൽ പലിശ ₹ 924.10 14. P = ₹ 1,25,000

15. 2 വർഷം 16. 10% 17. 10%

അഭ്യാസം 1.5

1. 2,205 2. ₹ 2,55,150 3. ₹ 46,000

4. 5,31,616.25 5. 5,415 6. ₹ 20,000

7. 10,000

അഭ്യാസം 1.6

1. ₹ 27,000 2. ₹ 86,250 3. ₹ 10,800

4. ₹ 1,250 5. ₹ 19,404 6. E.M.I. = ₹ 875,
ആകെ തുക = ₹ 8,750

അഭ്യാസം 1.7

1. 24 ദിവസം 2. 10; 1250 3. 36 രചയിതാക്കൾ 4. 15 ജോലിക്കാർ

5. 24 ദിവസം 6. ₹ 192

അഭ്യാസം 1.8

1. 3 ദിവസം 2. 30 ദിവസം 3. 2 ദിവസം 4. 12 മിനിട്ട്

5. A = ₹ 360, B = ₹ 240 6. 6 ദിവസം 7. 1മണിക്കൂർ

അദ്ധ്യായം 2

അഭ്യാസം 2.1

1.i)D ii) C iii) A iv) B

2.ചെറിയ വശം BC. 3. QR = 26 സെ.മീ 4. സമകോണ ത്രികോണം

5.QR = 5 സെ.മീ 6. $x = 9$ മീ 7. ഉന്നതി $x = 5\sqrt{3}$ സെ.മീ

8. ആണ് 9. $2\sqrt{51}$ അടി

അഭ്യാസം 2.2

1. i) D ii) D iii) C 2. വ്യാസാർദ്ധം = 5 സെ.മീ.

അദ്ധ്യായം 3

അഭ്യാസം 3.3

I. സമാന്തര മാധ്യമം കാണുന്നതിനുള്ള കണക്കുകൾ

1. 9 2. $x = 25$ 3. 77.15 4. 161സെ.മീ. 5. 45

6. 15.45 7. 82.1 8. 65.33 9. ₹ 33 10. ₹ 21

II. മീഡിയൻ കാണുന്നതിനുള്ള കണക്കുകൾ

1. i) 81 ii) 45.5 iii) 70 iv) 51

2. 3 3. 153 4. 132 5. ₹ 10,000

III. മോഡ് കാണുന്നതിനുള്ള കണക്കുകൾ

1. i) 74 ii) മോഡ് ഇല്ല iii) 25 കൂടാതെ 36 iv) 20

2. 15 3. 38.7°C 4. 40

IV. 1. മാധ്യം 28; മീഡിയൻ 25; മോഡ് 30

2. മാധ്യം 25; മീഡിയൻ 25; മോഡ് 23

3. മാധ്യം 53.05; മീഡിയൻ 53; മോഡ് 53

'എനിക്കും സാധിക്കും, ഞാൻ ചെയ്തു'
('I can, I did')
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ പ്രവർത്തനവിവരസൂചിക

വിഷയം

ക്രമ നമ്പർ	തിയതി	പാഠഭാഗം	പാഠത്തിന്റെ തലക്കെട്ട്	പ്രവർത്തനം	കുറിപ്പ്