Government of Tamilnadu

ഗണിതം

MATHEMATICS
MALAYALAM MEDIUM

പത്താം തരം
X - STANDARD

Untouchability is Inhuman and a Crime

Department of School Education

© Government of Tamil Nadu
First Edition - 2011
Revised Edition - 2015
(Published under Uniform System of School Education scheme)

Textbook Preparation

State Council of Educational Research and Training

College Road, Chennai - 600 006.

Textbook Printing

Tamil Nadu Textbook and Educational Services Corporation

College Road, Chennai - 600 006.

This book has been printed on 80 G.S.M. Maplitho Paper

Price : Rs.

Printed by Web Offset at :

Textbook available at

www.textbooksonline.tn.nic.in

ആമുഖം

തമിഴ്നാട്ടിൽ, സ്കൂൾ വിദ്യാഭ്യാസത്തിൽ ശ്രദ്ധാർഹമായ മാറ്റങ്ങൾ സംഭവിച്ചതിന്റെ ഫലമായി എല്ലാതരം സ്കൂളുകളിലും ഒരേ പാഠ്യപദ്ധതി എന്ന അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഐക്യരൂപപാഠ്യപദ്ധതി പ്രാബല്യത്തിൽ വരുന്നത് ചാരിതാർത്ഥ്യം നൽകുന്ന വസ്തുതയാണ്. തമിഴ്നാട് സർക്കാർ നൽകുന്ന ഈ സുവർണ്ണാവസരം തമിഴ്നാട്ടിലെ ഒട്ടുമൊത്തമുള്ള വിദ്യാഭ്യാസ പുരോഗതിക്ക് പ്രയോജനപ്പെടുന്നു.

ശാസ്ത്രങ്ങളുടെ റാണിയായ ഗണിതശാസ്ത്രം സ്വതസിദ്ധമായ സൗന്ദര്യവും, പ്രകൃതി സിദ്ധമായ മൂല്യവുമുള്ള അത്യാകർഷമായ ഒരു വിഷയമായി എന്നെന്നും നിലകൊള്ളുന്നു. ശാസ്ത്രത്തിലും, യാന്ത്രിക ശാസ്ത്രത്തിലും കൂടാതെ മറ്റേതൊരു വിഷയത്തിലും ഗണിതശാസ്ത്രം ഒഴിവാക്കാൻ പറ്റാത്ത ഒരു പങ്കാണ് വഹിക്കുന്നത്. അതിനാൽ ശാസ്ത്രമായാലും, പ്രയുക്ത ശാസ്ത്രമായാലും ഏതൊരു വ്യക്തിക്കും അയാൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന മേഖലകളിൽ നല്ലവണ്ണം ശോഭിക്കുന്നതിന് ഗണിത ശാസ്ത്രപരമായ അറിവ് അത്യന്താപേക്ഷിതമാണ്. കഠിനാഭ്യാസം കൊണ്ട് ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലുള്ള അറിവ് ലഭിക്കുന്നതോടൊപ്പം, ശിക്ഷണ ചിന്താനടപടി, സങ്കീർണ്ണ പ്രശ്ന വിശകലനം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള കഴിവ് എന്നിവയും ലഭ്യമാകുന്നു.

ഏകദേശം 2000 വർഷങ്ങൾക്ക് മുൻപ് പ്രവാചക തമിഴ് കവിയായ തിരുവള്ളുവർ ഗണിതശാസ്ത്ര പഠനത്തിന്റെ പ്രാധാന്യത്തെക്കുറിച്ച് ഇങ്ങനെ പറഞ്ഞിരുന്നു.

എണ്ണെൻപ ഏന എഴുത്തെൻപ ഇവ്വിരും
കണ്ണെൻപ വാഴും ഉയിർത്ത് - കുറൾ (392)

സംഖ്യകൾ എഴുത്തുകൾ എന്നിവ രണ്ടും
ഭൂമിയിലെ മനുഷ്യരുടെ ഇരുകണ്ണുകൾ

- കുറൾ (392)

ജീവിതത്തിൽ അനുഭവിക്കുന്ന സങ്കീർണ്ണ പ്രശ്നങ്ങളെ പരിഹരിക്കുന്നതിന് ശക്തിയും അവയെ എതിരിടുന്നതിനുള്ള ശേഷിയും നമുക്ക് അത്യന്താപേക്ഷിതമാണ്. ഗണിത ശാസ്ത്രം വെറും ഒരു പ്രശ്നനിർദ്ദാരണോപകരണം മാത്രമല്ല. അതിലുപരി അതൊരു സൃഷ്ടിപരമായ കഴിവാണ്. ഈ വാസ്തവങ്ങളെ വിദ്യാർത്ഥികൾ തിരിച്ചറിഞ്ഞ് അവരുടെ സംതൃപ്തിയ്ക്കും പുരോഗതിയ്ക്കും വേണ്ടി ഗണിതം അഭ്യസിക്കേണ്ടതാണ്.

സന്തതിപരമ്പരകൾക്കായുള്ള നല്ലൊരു തൊഴിൽ സാധ്യത ഉരുവാക്കുന്നതിനും ഗണിത ശാസ്ത്രാഭ്യാസം അത്യന്താപേക്ഷിതമാണ്. സ്കൂൾ തലത്തിൽ സ്വായത്തമാക്കിയ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങളാണ് ഗണിതത്തിലും മറ്റു ശാസ്ത്ര മേഖലകളിലും ഉള്ള ഉപരിപഠനത്തിന്റെ അടിത്തറപാകുന്നത്. കൂടാതെ ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങൾ പ്രശ്ന നിർദ്ധാരണത്തിൽ എങ്ങനെ പ്രയോഗിക്കാം എന്ന് പഠിക്കുന്നതും പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്നതാണ്.

പ്രസ്തുത പുസ്തകം ഇത്തരം ലക്ഷ്യത്തിലേക്കുള്ള ചവിട്ടു പടിയാണ്. പല സാഹചര്യങ്ങളിൽ ഗണിതം എങ്ങനെ പുരോഗമിക്കുന്നു, എങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കുന്നു എന്ന് മനസ്സിലാക്കികൊടുക്കുന്നതിന് അതീവ ശ്രദ്ധ ചെലുത്തിയിട്ടുണ്ട്. ഈ പുസ്തകത്തിലുള്ള അഭ്യാസങ്ങളിലെല്ലാം പ്രകൃതിദത്തമായ, യുക്തിയുക്തമായ ഉദാഹരണങ്ങൾ ക്രമീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. കൂടാതെ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് അഭ്യാസങ്ങളിലൂടെ ഗണിതതത്വങ്ങളെ മനസ്സിലാക്കുന്നതിനും ഓരോ അദ്ധ്യായവും ക്രമീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. വിദ്യാർത്ഥികൾ, അദ്ധ്യാപകരുടെ സഹായത്തോടെ ഗണിതത്തിലെ തത്വങ്ങളേയും അവയുടെ ബന്ധങ്ങളേയും മനസ്സിലാക്കിയശേഷം അഭ്യാസത്തിലെ കണക്കുകൾ നിർദ്ധാരണം കാണുന്നതാണ് ശരിയായ മാർഗ്ഗം എന്നു കരുതുന്നു.

എങ്ങനെയായാലും, സംഖ്യാശാസ്ത്രത്തേക്കാൾ ഗണിതശാസ്ത്രം മുന്നിലാണെന്നത് ഓർമ്മിക്കേതാണ്. ക്ലാസ്സ്റൂമിൽ അദ്ധ്യാപകർ അതിപ്രധാനമായ വ്യക്തിയാണ്. അവരുടെ സഹായവും വഴികാട്ടലും ഗണിതശാസ്ത്ര പഠനത്തിൽ ഒഴിച്ചുകൂടാനാവാത്തവയാണ്. അടിസ്ഥാന ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ നിന്ന് ഉയർന്ന ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിലേക്ക് മാറുന്ന ഘട്ടത്തിൽ അദ്ധ്യാപകർ അതി പ്രധാന പങ്ക് വഹിക്കുന്നുണ്ട്. ഈ അവസരത്തിൽ ഈ പുസ്തകം നമ്മുടെ ഉദ്ദേശത്തെ സഫലമാക്കുകയും ഒരു പ്രേരകമായി പ്രവർത്തിക്കുകയും ചെയ്യുമെന്ന് പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു.അധ്യാപകരും വിദ്യാർത്ഥികളും പരസ്പര ആശയ വിനിമയത്തിൽ ഏർപ്പെട്ടാൽ ഈ പുസ്തകം അധികം പ്രയോജനപ്രദമാണ്. ഈ ഉദ്യമം ക്ലാസ്മുറിയിൽ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് പ്രാധാന്യമുള്ള പ്രവർത്തനങ്ങൾക്ക് നിസ്സംശയം വഴിതെളിയിക്കും. കൂടാതെ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രം സൂക്ഷ്മമായി ആരായുന്നതിനുള്ള കഴിവു വളർത്തുകയും എല്ലാ ദിശകളിലും അവരുടെ നൈപുണ്യം വികസിപ്പിക്കുകയുമാണ് ഈ പാഠപുസ്തകത്തിന്റെ മുഖ്യലക്ഷ്യം. ഉദാഹരണങ്ങളിൽ ശരിയായ പരിശീലനം നേടിയ അഭ്യാസത്തിലെ കണക്കുകളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള രീതി ശരിയായി മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് വളരെ പ്രയോജനപ്പെടും. അടിസ്ഥാനതത്വങ്ങൾ പഠിക്കുക, അഭ്യാസത്തിലെ പ്രശ്നങ്ങൾ സ്വന്തമായി നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക, അതിനുശേഷം പുതിയ പ്രശ്നങ്ങൾ സ്വന്തമായി സൃഷ്ടിക്കാൻ ശ്രമിക്കുക എന്നിവ ഒരാളുടെ ഗണിത ശാസ്ത്ര അറിവിനെ പ്രബലമാക്കുന്നതിന് സഹായിക്കും.

കണക്കുകൾ ചെയ്യുന്നതിലൂടെ ഗണിതം പഠിക്കാം.

(We learn Mathematics by doing Mathematics)

ഈ പുസ്തകത്തിന്റെ പുരോഗമനത്തിനു വേണ്ടി വിദഗ്ധർ, അദ്ധ്യാപകർ, വിദ്യാർത്ഥികൾ എന്നിവർ അഭിപ്രായങ്ങൾ നൽകിയാൽ, ഞങ്ങൾ സന്തുഷ്ടരാണ്.

-Textbook Team

പാഠപദ്ധതി

വിഷയം	ഉള്ളടക്കം	പഠന ഫലങ്ങൾ	Transactional Teaching Strategy	പഠനസമയങ്ങളുടെ എണ്ണം
I. ഗണങ്ങളും ഫലനങ്ങളും	i. മുഖവുര ii. ഗണക്രിയകളുടെ സവിശേഷതകൾ iii. ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ - ഉദാഹരണം, വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് ശരിനോക്കൽ iv. സൂത്രം n(AUBUC) v. ഫലനങ്ങൾ	• ഗണക്രിയകളുടെ അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങൾ- പുനഃപരിശോധന • ഗണക്രിയകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ മനസിലാക്കൽ- മൂന്ന് ഗണങ്ങളുടെ ക്രമവിനിമേയം, സംയോജനം, വിതരണം. • പൂരകഗണങ്ങളുടെ നിയമങ്ങൾ മനസിലാക്കൽ • ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ മനസിലാക്കലും വെൻചിത്രങ്ങളുടെ പ്രദർശനവും. • സൂത്രവും വെൻചിത്രവും ഉപയോഗിച്ച് പ്രശ്നനിർദ്ധാരണം • ഫലനങ്ങളുടെ നിർവചനം, തരങ്ങൾ, പ്രതിനിധീകരണം: മനസിലാക്കൽ. • ലഘുവായ ഉദാഹരണങ്ങൾ കൊണ്ട് ഫലനങ്ങളുടെ തരങ്ങൾ മനസിലാക്കൽ.	എല്ലാ ദൃഷ്ടാന്തങ്ങൾക്കും വെൻചിത്രങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കൽ ധനതത്വശാസ്ത്രം, വൈദ്യശാസ്ത്രം, ശാസ്ത്രം എന്നിവയിൽ നിന്നുള്ള ഫലനങ്ങളുടെ ഉദാഹരണങ്ങൾ	26
II. വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ അനുക്രമങ്ങളും ശ്രേണികളും	i. മുഖവുര ii. അനുക്രമങ്ങൾ iii. കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമം (A.P) iv. ഗുണനക്രമാനുപാത അനുക്രമം (G.P) v. ശ്രേണികൾ	• ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമവും ഗുണനക്രമാനുപാത അനുക്രമവും തിരിച്ചറിയൽ. • കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തിന്റേയും ഗുണനക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തിന്റേയും n-ാം പദം കാണൽ • കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തിന്റെയും ഗുണനക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തിന്റെയും n-ാം പദത്തിന്റെ തുക കാണൽ. • ചില സവിശേഷ ശ്രേണികളുടെ തുക കാണൽ.	മാതൃകാ സമീപനം ഉപയോഗിക്കൽ. അധ്യയന സഹായിയായി ബിന്ദുമാതൃക ഉപയോഗിക്കൽ. സൂത്രം ആവിഷ്ക്കരിക്കാൻ സംഖ്യാശ്രേണി മാതൃക ഉപയാഗിക്കൽ. ജീവിത സാഹചര്യങ്ങളിൽ നിന്ന് ഉദാഹരണങ്ങൾ കൊടുക്കൽ	27
III. ബീജ ഗണിതം	i. രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം ii. ബഹുപദവ്യംജകങ്ങൾ iii. സിന്തറ്റിക് ഹരണം iv. ഉത്തമസാധാരണ ഭാജകം(GCD) ലഘുതമ സാധാരണ ഗുണിതം (LCM) v. പരിമേയ വ്യംജകങ്ങൾ vi. വർഗ്ഗമൂലം vii. ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ	• രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള ഒരുജോടി രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ ആശയം മനസിലാക്കൽ. രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള ഒരു ജോടി രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം- ഒഴിവാക്കൽ രീതി, വജ്ര ഗുണന രീതി. • ഒരു ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ മൂലങ്ങളും ഗുണോത്തരങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം മനസിലാക്കൽ.	വിശദീകരണ ഉദാഹരണങ്ങൾ – അധ്യായന സഹായിയായി charts ഉപയോഗിക്കൽ പ്രാരംഭമായി സംഖ്യകളുടെ GCD , LCM എന്നിവ ഓർമ്മിക്കൽ	

III. ബീജ ഗണിതം		• സിന്തറ്റിക് ഹരണ ക്രിയരീതിയിൽ തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദവ്യംജക ത്തിന്റെ ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കണ്ടുപിടിക്കൽ. • സിന്തറ്റിക് ഹരണ ക്രിയരീതി യിൽ തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കൽ. • പരിമേയവ്യംജകങ്ങളുടെ GCD, LCM എന്നിവയുടെ വ്യത്യാസം മനസിലാക്കൽ. • പരിമേയവ്യംജകങ്ങൾ ലഘൂകരി ക്കൽ. (ലഘുവായ പ്രശ്നങ്ങൾ) • വർഗ്ഗമൂലങ്ങൾ മനസിലാക്കൽ. • ദ്വിഘാതസമീകരണങ്ങളുടെ സ്റ്റാൻ ഡേർഡ് രൂപം മനസിലാക്കൽ. • ദ്വിഘാതസമീകരണങ്ങ ളുടെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ (വാസ്തവിക മൂലം മാത്രം) ദ്വിഘാതസൂത്ര രീതി, ഘടകരീ തിയിൽ, അഥവാ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ പൂർണ്ണമാക്കൽ രീതിയിൽ. • ദ്വിഘാതസമീകരണങ്ങൾ അടി സ്ഥാനമാക്കിയുള്ള പ്രശ്നം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ. • വിവേചകവും മൂലങ്ങളുടെ സ്വഭാ വവും തമ്മിൽ ബന്ധിപ്പിക്കൽ. • മൂലങ്ങൾ തന്നാൽ ദ്വിഘാത സമീക രണങ്ങളെ രൂപീകരിക്കൽ.	ഭിന്നങ്ങളുടെ ക്രിയ കളോടു താരതമ്യം ചെയ്യൽ സംഖ്യകളിൽ വർഗ്ഗ മൂലക്രിയകളോടു താരതമ്യം ചെയ്യൽ. മൂലങ്ങളുടെ സ്വഭാവത്തെ ബീജ ഗണിത രീതിയിലും രേഖാചിത്ര രീതിയിലും പ്രദർശിപ്പിച്ച് മന സ്സിലാക്കാൻ സഹായി ക്കൽ.	40
IV. മാട്രിക്സുകൾ	i. മുഖവുര ii. മാട്രിക്സുകൾ തരങ്ങൾ iii. സങ്കലനവും വ്യവകലനവും iv. ഗുണനം v. മാട്രിക്സ് സമീകരണം	• മാട്രിക്സുകളെ രൂപീകരിക്കൽ, ക്രമം തിരിച്ചറിയൽ. • മാട്രിക്സുകളുടെ തരങ്ങൾ തിരിച്ചറിയൽ • തന്നിട്ടുള്ള മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനവും വ്യവകലനവും • ഒരു മാട്രിക്സിനെ ഒരു അദിശം കൊണ്ടുള്ള ഗുണനവും, മാട്രി ക്സിന്റെ പരിവർത്തനവും. • മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം (2x2; 2x3; 3x2 മാട്രിക്സു കൾ). • മാട്രിക്സ് രീതി ഉപയോഗിച്ച് രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള സമീകരണങ്ങ ളുടെ നിർദ്ധാരണം.	ദീർഘചതുരാകൃതി യിൽ സംഖ്യകളെ ക്രമീ കരിക്കൽ. യഥാർത്ഥ ജീവിത സാഹചര്യങ്ങളെ ഉപയോഗിക്കൽ. ഗണിതശാസ്ത്ര ക്രിയ കൾ ഉപയോഗിക്കൽ.	16

V. വിശ്ലേഷ ജ്യാമിതി	i. മുഖവുര ആവർത്തനം: രണ്ടു ബിന്ദു കൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം ii. വിഭജന സൂത്രം, മദ്ധ്യബിന്ദു സൂത്രം, കേന്ദ്രക സൂത്രം iii. ത്രികോണത്തിന്റെയും ചതുർഭുജ ത്തിന്റെയും വിസ്തീർണ്ണം iv. നേർരേഖ	• രണ്ടു ബിന്ദുകൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം ഓർമ്മിക്കൽ, തന്നിട്ടുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുകൾക്കിടയിലുള്ള മദ്ധ്യബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം നിർണ്ണ യിക്കൽ. • വിഭജന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ കണ്ടുപിടിക്കൽ. • ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കൽ. • രണ്ടു ബിന്ദുകൾ അല്ലെങ്കിൽ സമീ കരണം തന്നിരുന്നാൽ ഒരു രേഖ യുടെ ചായ്‌വ് കണ്ടുപിടിക്കൽ. • തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന് രേഖയുടെ സമീകരണം കാണൽ • രേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയും: ചായ്‌വ്- അന്തഃഖണ്ഡ രീതി, ബിന്ദു- ചായ്‌വ് രീതി, രണ്ട് - ബിന്ദുക്കൾരീതി, അന്തഃഖണ്ഡ രീതി എന്നീ രീതികളിൽ രേഖയുടെ സമീകരണം കാണൽ. • തന്നിട്ടുള്ള ഒരു നേർ രേഖയ്ക്ക് (i)സമാന്തരം (ii) ലംബം ആയി ട്ടുള്ള ഒരു ബിന്ദു വഴികടന്നു ചെല്ലുന്ന ഒരു നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കൽ.	ത്രികോണം, ചതുർഭുജ ങ്ങൾ എന്നിവയുമായി ബന്ധമുള്ള ലഘു വായ ജ്യാമിതീയ ഫലം പരിശോധിച്ച് അവ പ്രയോഗിക്കൽ. $y = mx + c$ എന്ന രൂപം ആരംഭമായി എടുക്കൽ	25
VI. ജ്യാമിതി	i. അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തം (തെളിവോടെ) അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്ത ത്തിന്റെ വിപരീതം (തെളിവോടെ) കോണദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തം (തെളിവ്- ആന്തരികമായി വിഭജി ക്കുന്ന നില മാത്രം) ii. കോണ ദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതം (തെളിവ്-ആന്തരിക മായി വിഭജിക്കുന്ന നില മാത്രം) iii. സദൃശത്രികോണങ്ങൾ (സിദ്ധാന്ത ങ്ങൾ തെളിവില്ലാതെ) iv. പൈഥഗോറസ് പ്രമേയം സ്പർശരേഖ- ഞാൺ സിദ്ധാന്തം (തെളിവില്ലാതെ)	• സിദ്ധാന്തങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കി അവ ഉപയോഗിച്ച് ലഘു പ്രശ്നങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ.	കടലാസ് മടക്കി പ്രതിസാമ്യത കണ്ടെത്തി രൂപാന്തരണ തന്ത്രങ്ങൾ സ്വീകരിക്കൽ. ഔപചാരികമായ തെളിവ് അറിയൽ ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കൽ പടിപടിയായി വിശദീക രണ ചിത്രം ഉൾപ്പെടെ യുള്ള യുക്തിയുക്ത മായ തെളിവ് വിശദീ കരിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യൽ	20
VII. ത്രികോണമിതി	i. മുഖവുര ii. സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ iii. ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും	• ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യ ങ്ങൾ തിരിച്ചറിയൽ അവ ലഘു പ്രശ്നങ്ങളിൽ പ്രയോഗിക്കൽ. • ത്രികോണ മിതി അംശബന്ധ ങ്ങൾ മനസിലാക്കി ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും കണക്കാക്കുന്നതിന് പ്രയോഗിക്കൽ. (രണ്ട് സമകോണ ത്രികോണങ്ങളെക്കാൾ അധിക മാകരുത്)	ബീജഗണിത സൂത്ര ങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കൽ ത്രികോണമിതി സർവ്വ സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോ ഗിക്കൽ മൂല്യങ്ങളുടെ ഏകദേശ സ്വഭാവം വിശദമാക്കൽ	21

VIII. അളവുകൾ	i. മുഖവുര ii. സിലിണ്ടർ, വൃത്തസ്തൂപിക, ഗോളം, അർദ്ധഗോളം, വൃത്ത സ്തൂപികാ പീഠം എന്നിവയുടെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണവും വ്യാപ്തവും iii. മിശ്രരൂപങ്ങളുടെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണവും വ്യാപ്തവും iv. മാറ്റമില്ലാത്ത വ്യാപ്തം	• സിലിണ്ടർ, വൃത്തസ്തൂപിക, ഗോളം, അർദ്ധഗോളം, വൃത്തസ്തൂപികാപീഠം എന്നിവയുടെ വ്യാപ്തവും പ്രതല വിസ്തീർണ്ണവും കണക്കാക്കൽ. • മിശ്രരൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തവും പ്രതല വിസ്തീർണ്ണവും (രണ്ട് രൂപങ്ങൾ മാത്രം). • മാറ്റമില്ലാത്ത വ്യാപ്തങ്ങൾ ഉൾപ്പെട്ട ചില പ്രശ്നങ്ങൾ.	3D മാതൃകകൾ ഉപയോഗിച്ച് മിശ്രരൂപങ്ങൾ സൃഷ്ടിക്കൽ. മാതൃകകൾ, ചിത്രങ്ങൾ എന്നിവ, അധ്യയന സഹായികളായി ഉപയോഗിക്കൽ. യഥാർത്ഥ ജീവിത സാഹചര്യങ്ങളിൽ നിന്ന് ഉദാഹരണങ്ങൾ തെരഞ്ഞെടുക്കൽ.	24
IX. പ്രായോഗികജ്യാമിതി	i. മുഖവുര ii. വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കൽ iii. ത്രികോണനിർമ്മിതി iv. ചക്രിയ ചതുർഭുജ നിർമ്മിതി	• വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കൽ. • ആധാരം എതിർശീർഷത്തിലെ ശീർഷകോൺ (a) മധ്യമം (b) ഉന്നതി തന്നാൽ ത്രികോണ നിർമ്മിതി • ചക്രിയ ചതുർഭുജം നിർമ്മിക്കൽ	സ്പർശരേഖാഖണ്ഡങ്ങളുടെ നീളം ബീജ ഗണിത രീതിയിൽ ശരിനോക്കൽ. നിർമ്മിതിക്ക് മുൻപ് ഒരു വൃത്തത്തിലെ കോണുകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ ഓർമ്മിക്കൽ താത്വിക ജ്യാമിതിയിലെ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ ഓർമ്മിക്കുന്നു.	15
X. ഗ്രാഫുകൾ	i. മുഖവുര ii. ദ്വിഘാത ഗ്രാഫുകൾ iii. ചില പ്രത്യേക ഗ്രാഫുകൾ	• ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ ഗ്രാഫിലൂടെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ • സമീകരണങ്ങൾ ഗ്രാഫിലൂടെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ	യഥാർത്ഥ ജീവിത സാഹചര്യങ്ങളെ പരിചയപ്പെടുത്തൽ	10
XI. സാംഖ്യികം	i. കേന്ദ്രപ്രവണതയുള്ള അളവുകൾ ii. വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ അളവുകൾ iii. വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം	• വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ ആശയം മനസിലാക്കൽ പരിസരം, പ്രമാണവിചലനം, വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി (തരം തിരിച്ചതും തരം തിരിക്കാത്തതുമായ വിവരങ്ങൾ) ആശയങ്ങൾ മനസിലാക്കൽ. • വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കൽ.	പരീക്ഷകൾ കായിക വിനോദങ്ങൾ പോലെയുള്ള യഥാർത്ഥ ജീവിത സാഹചര്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കൽ.	16
XII. പ്രോബബിലിറ്റി	i. മുഖവുര ii. സംഭാവ്യത- ഉത്തമനിർവ്വചനം iii. സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലന സിദ്ധാന്തം	• യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണങ്ങൾ, സാമ്പിൾ സ്പേസ്, സംഭവങ്ങൾ, പരസ്പരവർജകം, പൂരക സംഭവങ്ങൾ, സുനിശ്ചിത സംഭവങ്ങൾ, അസാദ്ധ്യസംഭവങ്ങൾ, സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലന സിദ്ധാന്തം മനസിലാക്കൽ, ലഘുപ്രശ്നങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിൽ ഇവയെ ഉപയോഗിക്കൽ.	നാണയം ടോസ്സിടുക, പകിട എറിയുക, ഒരു പായ്ക്കറ്റ് കാർഡിൽ നിന്നും കാർഡുകൾ എടുക്കുക.	15

ഉള്ളടക്കം

1.	ഗണങ്ങളും ഫലനങ്ങളും	1-33
1.1	മുഖവുര	1
1.2.	ഗണങ്ങൾ	1
1.3.	ഗണക്രിയകൾ	3
1.4.	ഗണക്രിയകളുടെ സവിശേഷതകൾ	5
1.5.	ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ	12
1.6.	ഗണങ്ങളുടെ ഗണനസംഖ്യ	16
1.7.	ബന്ധങ്ങൾ	19
1.8.	ഫലനങ്ങൾ	20
2.	വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ അനുക്രമങ്ങളും ശ്രേണികളും	34-67
2.1.	മുഖവുര	34
2.2.	അനുക്രമങ്ങൾ	35
2.3.	കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമം	38
2.4.	ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമം	43
2.5.	ശ്രേണികൾ	49
3.	ബീജഗണിതം	68-117
3.1	മുഖവുര	68
3.2	രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണ സമ്പ്രദായം	69
3.3	ദ്വിഘാത ബഹുപദവ്യംജകങ്ങൾ	80
3.4	സിന്തറ്റിക് ഹരണം	82
3.5	ഉത്തമ സാധാരണ ഭാജകം, ലഘുതമ സാധാരണ ഗുണിതം	86
3.6	പരിമേയ വ്യംജകങ്ങൾ	93
3.7	വർഗ്ഗമൂലം	97
3.8	ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ	101
4.	മാട്രിക്സുകൾ	118-139
4.1	മുഖവുര	118
4.2	മാട്രിക്സുകളുടെ രൂപീകരണം	119
4.3	മാട്രിക്സുകളുടെ തരങ്ങൾ	121
4.4	മാട്രിക്സുകളുടെ ക്രിയകൾ	125
4.5	മാട്രിക്സ് സങ്കലനത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ	128
4.6	മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം	130
4.7	മാട്രിക്സ് ഗുണനത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ	133
5.	വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി	140-170
5.1	മുഖവുര	140
5.2	വിഭജന സൂത്രം	140

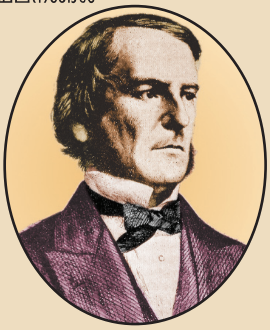
	5.3	ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം	147
	5.4	മൂന്നു ബിന്ദുക്കളുടെ സമരേഖീയത	148
	5.5	ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം	148
	5.6	നേർരേഖകൾ	151
	5.7	ഒരു നേർരേഖയുടെ സമീകരണത്തിന്റെ പൊതുരൂപം	164
6.	ജ്യാമിതി		171-195
	6.1	മുഖവുര	171
	6.2	അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തവും കോണ ദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തവും	172
	6.3	സദൃശ്യ ത്രികോണങ്ങൾ	182
	6.4	വൃത്തങ്ങളും സ്പർശരേഖകളും	189
7.	ത്രികോണമിതി		196-218
	7.1	മുഖവുര	196
	7.2	ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ	196
	7.3	ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും	205
8.	അളവുകൾ		219-248
	8.1	മുഖവുര	219
	8.2	പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം	219
	8.3	വ്യാപ്തം	230
	8.4	മിശ്രഘനരൂപങ്ങൾ	240
9.	പ്രായോഗിക ജ്യാമിതി		249- 266
	9.1	മുഖവുര	249
	9.2	ഒരു വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖ നിർമ്മിക്കൽ	250
	9.3	ത്രികോണങ്ങളുടെ നിർമ്മിതി	254
	9.4	ചക്രിയചതുർഭുജങ്ങളുടെ നിർമ്മിതി	259
10.	ഗ്രാഫുകൾ		267-278
	10.1	മുഖവുര	267
	10.2	ദ്വിഘാത ഗ്രാഫുകൾ	267
	10.3	ചില പ്രത്യേക ഗ്രാഫുകൾ	275
11.	സാംഖ്യികം		279-298
	11.1	മുഖവുര	279
	11.2	വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ അളവുകൾ	280
12.	സംഭാവ്യത		299 - 316
	12.1	മുഖവുര	299
	12.2	സംഭാവ്യതയുടെ നിർവ്വചനം	302
	12.3	സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലന സിദ്ധാന്തം	309
	ഉത്തരങ്ങൾ		317 - 327
	പലവക പ്രശ്നങ്ങൾ		328 - 329
	റെഫറൻസ്		330
	ചോദ്യപേപ്പർ രൂപരേഖ		331 - 334

1

ഗണങ്ങളും ഫലനങ്ങളും

A set is Many that allows itself to be thought of as a One
- Georg Cantor

- മുഖവുര
- ഗണം
- ഗണക്രിയകളുടെ സവിശേഷതകൾ
- ഡിമോർഗന്റെ നിയമങ്ങൾ
- ഫലനങ്ങൾ



ജോർജ്ജ് ബൂൾ
(1815-1864)
ഇംഗ്ലണ്ട്

തർക്ക ശാസ്ത്രത്തിനും ബീജ ഗണിത അടയാളങ്ങൾക്കും തമ്മിൽ ഒരു സാദൃശ്യം ഉണ്ടെന്ന് ബൂൾ വിശ്വസിച്ചിരുന്നു.

യുക്തിയുക്തമായ ബന്ധങ്ങൾ പ്രകടിപ്പിക്കുന്നതിന് അദ്ദേഹം ഗണിത അടയാളങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. അദ്ദേഹത്തിന്റെ കാലത്ത് കമ്പ്യൂട്ടർ പ്രാബല്യത്തിൽ ഇല്ലാതിരുന്നിട്ടും കമ്പ്യൂട്ടർ അങ്കഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനം ബൂളിയൻ ബീജഗണിതമാണെന്ന് അദ്ദേഹം വിശ്വസിച്ചിരുന്നു.

ബൂളിയൻ തത്വശാസ്ത്രത്തിന്റെ (അക്കങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള ആധുനിക കമ്പ്യൂട്ടർ തത്വശാസ്ത്രത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനം) കണ്ടുപിടിത്തക്കാരൻ എന്ന നിലയ്ക്ക് ബൂളിനെ കമ്പ്യൂട്ടർ ശാസ്ത്ര മേഖലയിലെ സ്ഥാപകൻ എന്നു പരിഗണിക്കാം.

1.1 മുഖവുര

ഗണം എന്ന ആശയം ഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങളിൽ ഒന്നാണ്. ഗണസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ സാങ്കേതിക ഭാഷയും അടയാളങ്ങളും ഗണിതത്തിന്റെ ഓരോ വിഭാഗത്തിലും, ശാഖകളിലും ഉപയോഗപ്രദമാണ്. അതുകൊണ്ട് ഗണസിദ്ധാന്തത്തെ ഗണിതത്തിന്റെ ഭാഷയാണെന്നു പറയാം. പത്തൊമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ അവസാനത്തിൽ ജോർജ്ജ് ബൂളിന്റേയും (1815 - 1864), ജോർജ് കാന്ററിന്റേയും (1845 - 1918) പ്രയത്ന ഫലമായി ഉത്ഭവിച്ച ഈ വിഷയത്തിന് ഇരുപതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഗണിത ശാഖയുടെ പുരോഗതിയിൽ അഗാധമായ സ്വാധീനം ഉണ്ട്. ഇത് ഛിന്നഭിന്നമായ പല നിർവ്വചനങ്ങളേയും ഏകീകരിക്കാൻ സഹായിച്ച്, ഗണിത പുരോഗതിയെ സുഗമമാക്കി.

ഒൻപതാം ക്ലാസ്സിൽ നാം ഗണഭാഷയിൽ രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ യോഗം, സംഗമം, വ്യത്യാസം എന്നിവ പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു. ഇവിടെ നമുക്ക് ഗണത്തെക്കുറിച്ച് കൂടുതൽ ആശയങ്ങളും ഗണിതത്തിന്റെ ഒരു പ്രധാന ആശയമായ ഫലനത്തെക്കുറിച്ചും പഠിക്കാം. ആദ്യമായി കുറച്ചു ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ ചില അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങളെ ഓർമിച്ചെടുക്കാം. നാം എല്ലാ ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളേയും $\mathbb{N}$ എന്നും, എല്ലാ വാസ്തമിക സംഖ്യകളേയും $\mathbb{R}$ എന്നും കുറിക്കുന്നു.

1.2 ഗണങ്ങൾ

നിർവ്വചനം

വ്യക്തമായി നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട വസ്തുക്കളുടെ കൂട്ടത്തെ ഗണം എന്നു പറയുന്നു. ഒരു ഗണത്തിലുള്ള വസ്തുവിനെ ഗണത്തിലെ അംശങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ അംഗങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

ഇവിടെ ഒരു വസ്തു ഒരു ഗണത്തിൽ ഉൾപ്പെട്ടതാണോ അല്ലയോ എന്നു നിസ്സംശയം തീരുമാനിക്കുന്നതിനുള്ള മാനദണ്ഡമാണ് 'വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ട' എന്ന വാക്കു കൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി, 'ചെന്നൈയിലെ ഉയരമുള്ള ആളുകളുടെ കൂട്ടം' എന്നത് ഒരു ഗണമാവുന്നില്ല. എന്തെന്നാൽ ഇവിടെ ഗണത്തിന്റെ മാനദണ്ഡമായ 'ഉയരമുള്ള ആളുകൾ' എന്നത് വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല. അതുകൊണ്ട് ഈ കൂട്ടം ഒരു ഗണത്തെ നിർവചിക്കുന്നില്ല.

സൂചിപ്പിക്കുന്ന രീതി

നാം സാധാരണയായി ഗണത്തിനെ A, B, X പോലെയുള്ള വലിയ അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ട് കുറിക്കുന്നു. കൂടാതെ x, y പോലെയുള്ള ചെറിയ അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ട് ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $x \in Y$ എന്നതുകൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത് x എന്നത് Y എന്ന ഗണത്തിലെ ഒരു അംഗമാണ്. $t \notin Y$ എന്നതു കൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത്, t എന്നത് Y എന്ന ഗണത്തിലെ അംഗമല്ല എന്നാണ്.

ഉദാഹരണങ്ങൾ

(i) തമിഴ്നാട്ടിലെ ഹൈസ്ക്കൂൾ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഗണം.

(ii) തമിഴ്നാട്ടിലെ ഹൈസ്ക്കൂളിലോ, കോളേജിലോ ഉള്ള വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഗണം.

(iii) ധന ഇരട്ട പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഗണം.

(iv) വർഗ്ഗം ഋണസംഖ്യയായി വരുന്ന പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഗണം.

(v) ചന്ദ്രനിൽ കാൽ കുത്തിയ ആളുകളുടെ ഗണം.

A,B,C,D,E എന്നിവ യഥാക്രമം (i), (ii), (iii), (iv), (v) എന്നീ ഗണങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഏതൊരു പൂർണ്ണാങ്കത്തിന്റെയും വർഗ്ഗം, പൂജ്യമോ, ധനപൂർണ്ണാങ്കമോ ആയിരിക്കുമെന്നതിനാൽ, പൂർണ്ണാങ്കത്തിന്റെ വർഗ്ഗം ഋണപൂർണ്ണാങ്കം ആയിരിക്കുകയില്ല. അതുകൊണ്ട് D എന്ന ഗണത്തിൽ അംഗങ്ങൾ ഒന്നും ഉണ്ടായിരിക്കുകയില്ല. അത്തരം ഗണത്തെ **ശൂന്യഗണം** എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ ϕ എന്നു കുറിക്കുന്നു.

നിർവ്വചനം

(i) ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളെ എണ്ണിതിട്ടപ്പെടുത്താൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ, ആ ഗണത്തെ **പരിമിത ഗണം** എന്നു പറയുന്നു.

(ii) ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം പരിമിതമല്ല എങ്കിൽ ആ ഗണത്തെ **അനന്തഗണം** എന്നു പറയുന്നു.

മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണത്തിൽ A എന്നത് പരിമിത ഗണത്തേയും, C എന്ന ഗണം അനന്തഗണത്തേയും സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. ശൂന്യഗണത്തിൽ അംഗങ്ങൾ ഒന്നുമില്ല. അതായത്, ശൂന്യഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം പൂജ്യമാണ്. അതിനാൽ ശൂന്യഗണവും ഒരു പരിമിതഗണമാണ്.

നിർവ്വചനം

(i) X എന്നത് ഒരു പരിമിതഗണമാണെങ്കിൽ X ന്റെ **ഗണനസംഖ്യ** എന്നത്, X ലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണമാണ്.

(ii) X എന്നത് ഒരു അനന്തഗണമാണെങ്കിൽ X ന്റെ ഗണനസംഖ്യ ∞ എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് കുറിക്കുന്നു. X എന്ന ഗണത്തിന്റെ ഗണനസംഖ്യയെ $n(X)$ എന്നു കുറിക്കുന്നു.

മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന A, B എന്നീ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ A എന്ന ഗണത്തിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും B എന്ന ഗണത്തിലേയും അംഗങ്ങളാണ്. ഇങ്ങനെ വരുമ്പോൾ A എന്നത് B യുടെ ഉപഗണമാണ് എന്നു പറയുന്നു.

ഇനി നമുക്ക് ഒൻപതാം ക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ച ചില നിർവ്വചനങ്ങൾ ഓർമ്മിച്ചെടുക്കാം.

ഉപഗണം X,Y എന്നിവ രണ്ടു ഗണങ്ങൾ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. X എന്ന ഗണത്തിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും, Y എന്ന ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളാണെങ്കിൽ X എന്നത് Y യുടെ ഉപഗണമാണ് എന്ന് പറയാം. X എന്നത് Y യുടെ ഉപഗണമാണെങ്കിൽ, $z \in X$ കൂടാതെ $z \in Y$ ആയിരിക്കും.

X എന്നത് Y യുടെ ഉപഗണമാണ് എങ്കിൽ ഇതിനെ $X \subseteq Y$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം.

സമഗണങ്ങൾ X,Y എന്നീ രണ്ടു ഗണങ്ങളിലും ഒരേ അംഗങ്ങളാണെങ്കിൽ അവയെ സമഗണങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ X=Y എന്ന് എഴുതുന്നു. അതായത് $X = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y, Y \subseteq X$.

സമാനഗണങ്ങൾ $n(X) = n(Y)$ ആണെങ്കിൽ രണ്ട് പരിമിത ഗണങ്ങൾ X,Y എന്നിവയെ സമാന ഗണങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. സമാനഗണങ്ങളിൽ ഒരേ ഗണനസംഖ്യയിൽ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടാകാം. ഉദാഹരണമായി, $P = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$, $Q = \{3, -2\}$. ഇവയിൽ P യിലും Q വിലും ഒരേ അംഗങ്ങളാണ്. അതുകൊണ്ട് P=Q. $F = \{3, 2\}$, എങ്കിൽ F ഉം Q ഉം സമാനഗണങ്ങളാണ്. എന്നാൽ $Q \neq F$.

ഘാതഗണം A ഒരു ഗണമാണെങ്കിൽ P(A) എന്നത് A എന്ന ഗണത്തിന്റെ എല്ലാ ഉപഗണങ്ങളുടേയും ഗണം ആണ്. ഗണം P(A) യെ A യുടെ ഘാതഗണം എന്നു പറയുന്നു.

$n(A) = m$, ആയാൽ $P(A)$ യിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം $n(P(A)) = 2^m$.

ഉദാഹരണം : A={a,b,c} ആയാൽ P(A)= $\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}. \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

$n(P(A)) = 8$.

രണ്ട് ഗണങ്ങൾ തന്നാൽ അവയിൽ നിന്നും പുതുതായി ഒരു ഗണം രൂപീകരിക്കുന്നതെങ്ങനെ?

രണ്ട് ഗണങ്ങളിലേയും എല്ലാ അംഗങ്ങളേയും ചേർത്ത് ഒരു പുതിയ ഗണം രൂപീകരിക്കുന്നതാണ് ഒരു സാധ്യത. മറ്റൊരു സാധ്യത, രണ്ട് ഗണങ്ങളിലും പൊതുവായിട്ടുള്ള അംഗങ്ങളെ കൊണ്ടുള്ള മറ്റൊരു ഗണം രൂപീകരിക്കുന്നതാണ്. കൂടാതെ, ഒരു ഗണത്തിൽ ഉൾപ്പെട്ട എന്നാൽ മറ്റൊരു ഗണത്തിൽ ഉൾപ്പെടാത്ത അംഗങ്ങളെക്കൊണ്ടും ഒരു ഗണം ഉണ്ടാക്കാവുന്നതാണ്. താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണങ്ങൾ ഇവയെ വ്യക്തമാക്കുന്നു. കൂടാതെ വെൻചിത്രങ്ങളുപയോഗിച്ച് ഇവയെ കൂടുതൽ വ്യക്തമാക്കാവുന്നതാണ്.

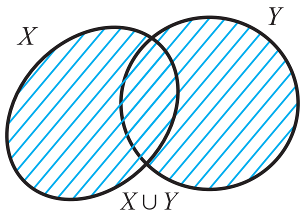
1.3 ഗണക്രിയകൾ

X,Y എന്നിവ രണ്ട് ഗണങ്ങളാണെങ്കിൽ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പുതിയ ഗണങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാം.

(i) **യോഗം** $X \cup Y = \{z \mid z \in X$ അല്ലെങ്കിൽ $z \in Y\}$

(ഇതിനെ “X യോഗം Y” എന്ന് വായിക്കാം.)

കുറിപ്പ് : $X \cup Y$ എന്ന ഗണത്തിൽ X ലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും, കൂടാതെ Y ലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും ഉൾപ്പെടുന്നു. ചിത്രം 1.1 ഇത് വ്യക്തമാക്കുന്നു. $X \subseteq X \cup Y$ കൂടാതെ $Y \subseteq X \cup Y$ എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

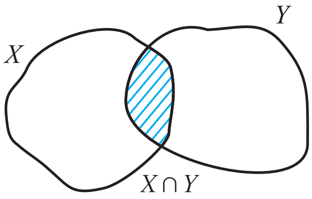


ചിത്രം. 1.1

(ii) **സംഗമം** $X \cap Y = \{z \mid z \in X$ കൂടാതെ $z \in Y\}$

(ഇതിനെ “X സംഗമം Y” എന്ന് വായിക്കാം.)

കുറിപ്പ് : $X \cap Y$ ൽ X ലും Y ലും പൊതുവായിട്ടുള്ള അംഗങ്ങൾ മാത്രമാണുള്ളത്. ചിത്രം 1.2 ഇത് വ്യക്തമാക്കുന്നു. $X \cap Y \subseteq X$ കൂടാതെ $X \cap Y \subseteq Y$ എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.



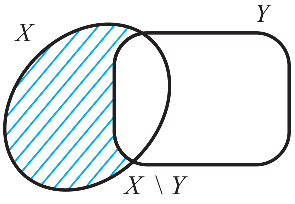
ചിത്രം. 1.2

(iii) **ഗണങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം**

$X \setminus Y = \{z \mid z \in X$ എന്നാൽ $z \notin Y\}$

(ഇതിനെ “X വ്യത്യാസം Y” എന്ന് വായിക്കാം.)

കുറിപ്പ് : $X \setminus Y$ ലുള്ള അംഗങ്ങൾ X ൽ ഉള്ളവയും എന്നാൽ Y ൽ ഇല്ലാത്തവയും ആയിരിക്കും. ചിത്രം 1.3 ഇത് വ്യക്തമാക്കുന്നു. ചില എഴുത്തുകാർ $A \setminus B$ എന്നതിനെ $A - B$ എന്നും ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിൽ വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കാവുന്ന $A \setminus B$ എന്ന ചിഹ്നത്തെ നമുക്ക് ഉപയോഗിക്കാം.



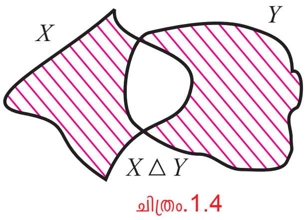
ചിത്രം.1.3

(iv) **പ്രതിസാമ്യതാ വ്യത്യാസം**

$X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$

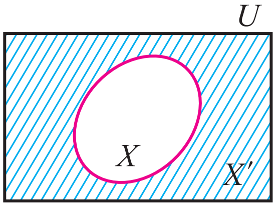
(ഇതിനെ “X പ്രതിസാമ്യതാ വ്യത്യാസം Y” എന്ന് വായിക്കാം).

കുറിപ്പ് : $X \triangle Y$ ലെ അംഗങ്ങൾ എല്ലാം $X \cup Y$ ൽ ഉള്ളതും $X \cap Y$ ൽ ഇല്ലാത്തതുമാണ്.



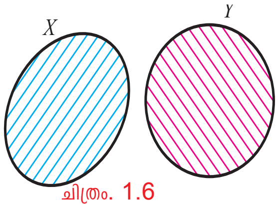
ചിത്രം.1.4

(v) **പൂരകഗണം** U എന്നത് സമസ്ത ഗണം എന്നിരിക്കട്ടെ. $X \subseteq U$ എങ്കിൽ $U \setminus X$ എന്നത് U നെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള X ന്റെ പൂരകഗണം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $U \setminus X$ അല്ലെങ്കിൽ X' എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. $A \setminus B$ എന്ന ഗണ വ്യത്യാസം A അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള B യുടെ പൂരക ഗണം എന്നു പറയാം.



ചിത്രം. 1.5

(vi) **വിയുക്ത ഗണങ്ങൾ** X ,Yഎന്നീ ഗണങ്ങളിൽ പൊതു വായ ഒരു അംഗവും ഇല്ലെങ്കിൽ അവയെ വിയുക്ത ഗണങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. $X \cap Y = \phi$ ആയാൽ X ,Y വിയുക്തഗണങ്ങളായിരിക്കും. Aയും Bയും വിയുക്തഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ ആകുന്നു.



ചിത്രം. 1.6

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

സാധാരണയായി വെൻചിത്രങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് വൃത്തങ്ങളെയാണ് ഉപയോഗിക്കാറുള്ളത്. കൂടാതെ ഏതൊരു അടഞ്ഞ രൂപത്തേയും വെൻചിത്രത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളെ എഴുതുമ്പോൾ ആവർത്തനം പാടില്ല.

ഉദാഹരണങ്ങൾ

$A = \{x \mid x$ എന്നത് 12 ൽ കുറവായ ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കം$\}$ $B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 12, 15\}$ $C = \{-2, -1, 0, 1, 3, 5, 7\}$. താഴെ പറയുന്നവയെ കാണുക.

(i) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ അല്ലെങ്കിൽ $x \in B\}$

$= \{x \mid x$ എന്നത് 12 ൽ കുറവായ ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കം അല്ലെങ്കിൽ $x = 12,$ അല്ലെങ്കിൽ $15\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15\}$.

(ii) $C \cap B = \{y \mid y \in C$ കൂടാതെ $y \in B\} = \{1, 7\}$.

(iii) $A \setminus C = \{x \mid x \in A$ എന്നാൽ $x \notin C\} = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

(iv) $A \triangle C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$

$= \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\} \cup \{-2, -1, 0\} = \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

(v) $U = \{x \mid x$ എന്നത് ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം$\}$ എന്നത് സമസ്ത ഗണമാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

0 എന്നത് ധനസംഖ്യയോ ഋണസംഖ്യയോ അല്ല. അതിനാൽ, $0 \notin A$.

$A' = U \setminus A = \{x : x$ എന്നത് ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം എന്നാൽ A ൽ ഉള്ളതാകാൻ പാടില്ല $\}$

$= \{x \mid x$ എന്നത് പൂജ്യമാകാം അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ഋണപൂർണ്ണാങ്കം അല്ലെങ്കിൽ 12 ന് സമമോ, 12 ൽ കൂടുതലോ ആയ ധനപൂർണ്ണാങ്കം$\}$

$= \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0\} \cup \{12, 13, 14, 15, \cdots\}$

$= \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 12, 13, 14, 15, \cdots\}$.

ചില ഉപയോഗപ്രദമായ ഫലങ്ങൾ നോക്കാം.

U എന്നത് ഒരു സമസ്ത ഗണമെന്നിരിക്കട്ടെ. A, B എന്നിവ Uന്റെ ഉപഗണങ്ങൾ. അപ്പോൾ

(i) $A \setminus B = A \cap B'$

(ii) $B \setminus A = B \cap A'$

(iii) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$

(iv) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

(v) $(A \setminus B) \cap B = \phi$

(vi) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1.4 ഗണക്രിയകളുടെ സവിശേഷതകൾ

നമുക്ക് ഗണക്രിയകളുടെ ചില സവിശേഷതകൾ പഠിക്കാം. A, B, C, എന്നിവ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് ഗണങ്ങളാണെങ്കിൽ താഴെ പറയുന്നവ യോജിക്കുന്നു.

(i) ക്രമ വിനിമേയ നിയമം

(a) $A \cup B = B \cup A$ (ഗണങ്ങളുടെ യോഗം ക്രമവിനിമേയമാണ്)

(b) $A \cap B = B \cap A$ (ഗണങ്ങളുടെ സംഗമം ക്രമവിനിമേയമാണ്)

(ii) സംയോജന നിയമം

(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ഗണങ്ങളുടെ യോഗം സംയോജനമാണ്)

(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ഗണങ്ങളുടെ സംഗമം സംയോജനമാണ്)

(iii) വിതരണ നിയമം

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (യോഗത്തിനുമേൽ സംഗമ വിതരണം)

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (സംഗമത്തിനുമേൽ യോഗവിതരണം)

അധികവും ഈ സവിശേഷതകളെ തന്നിട്ടുള്ള ഗണങ്ങളെക്കൊണ്ട് തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്. മുകളിൽ പറയുന്ന സവിശേഷതകൾ ഉദാഹരണങ്ങൾ മുഖേന തെളിയിക്കുന്നതിനു പകരം ഗണിത രീതിയിൽ തെളിയിക്കുന്നതാണ് എല്ലായ്പ്പോഴും ഉചിതമായത്. ഇത് ഈ പുസ്തകത്തിന്റെ പരിധിക്കുമപ്പുറത്താണ്. കഠിനമായ ഗണിത നിർവ്വചനങ്ങളെ പ്രശംസിക്കുന്നതിനും, മനസ്സിലാക്കുന്നതിനുമായി നമുക്ക് ഒരു സവിശേഷതയെ എഴുതി തെളിയിക്കാം.

I (i) യോഗത്തിന്റെ ക്രമ വിനിമേയ നിയമം

ഈ ഭാഗത്ത് A, B എന്ന ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ഗണങ്ങൾക്ക് $A \cup B$ യും $B \cup A$ യും സമമെന്ന് തെളിയിക്കേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. നമ്മുടെ സമഗണങ്ങളുടെ നിർവ്വചനമനുസരിച്ച്, രണ്ടു ഗണങ്ങൾ സമമായിരുന്നാൽ അവ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന അംഗങ്ങൾ സമമായിരിക്കും.

ആദ്യം നമുക്ക് $A \cup B$ ലെ ഓരോ അംഗങ്ങളും $B \cup A$ ലേയും അംഗങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കാം. അതുകൊണ്ട് $z \in A \cup B$ എന്നത് ഏതെങ്കിലും ഒരു അംഗം എന്നിരിക്കട്ടെ. A യുടേയും B യുടേയും യോഗനിയമമനുസരിച്ച് $z \in A$ അല്ലെങ്കിൽ $z \in B$ എന്നെഴുതാം. അതായത്,

ഓരോ $z \in A \cup B \implies z \in A$ അല്ലെങ്കിൽ $z \in B$

$\implies z \in B$ അല്ലെങ്കിൽ $z \in A$

$\implies z \in B \cup A$, $B \cup A$ യുടെ നിർവ്വചനമനുസരിച്ച് (1)

(1) എന്നത് ഓരോ $z \in A \cup B$ യ്ക്കും ശരിയായതിനാൽ മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ളതിൽ നിന്നും $A \cup B$ ലെ ഓരോ അംഗങ്ങളും $B \cup A$ ലേയും അംഗങ്ങളാണ്. ഉപഗണത്തിന്റെ നിർവ്വചനമനുസരിച്ച് $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$.

ഇനി നമുക്ക് $y \in B \cup A$ എന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു അംഗത്തെ പരിഗണിച്ച് y എന്നത് $A \cup B$ യുടേയും ഒരു അംഗമാണ് എന്ന് തെളിയിക്കാം.

ഓരോ $y \in B \cup A \implies y \in B$ അല്ലെങ്കിൽ $y \in A$

$\implies y \in A$ അല്ലെങ്കിൽ $y \in B$

$\implies y \in \mathbf{A} \cup B$, $A \cup B$ യുടെ നിർവ്വചനമനുസരിച്ച് (2)

(2) എന്നത് ഓരോ $y \in B \cup A$ യ്ക്കും ശരിയായതിനാൽ മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ളതിൽ നിന്നും $B \cup A$ ലെ ഓരോ അംഗങ്ങളും $A \cup B$ ലേയും അംഗങ്ങളാണ്. ഉപഗണത്തിന്റെ നിർവ്വചനമനുസരിച്ച് $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$

അങ്ങനെ നാം $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$ എന്നും $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$ എന്നും തെളിയിച്ചു. ഇതു സംഭവിക്കുന്നത് $(A \cup B) = (B \cup A)$ ആകുമ്പോൾ മാത്രമാണ്. മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതി പിൻതുടർന്നാൽ ഒരാൾക്ക് മറ്റു സവിശേഷതകളേയും കൃത്യമായി തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്.

ഗണിതത്തിലെ തെളിവുകൾ

ഗണിതത്തിൽ ഒരു പ്രസ്താവന എപ്പോഴും ശരിയായിരുന്നാൽ ആ പ്രസ്താവനയെ **ശരിയായ പ്രസ്താവന** എന്നു പറയുന്നു. ഏതെങ്കിലും ഒരു സന്ദർഭത്തിലെങ്കിലും ഒരു പ്രസ്താവന തെറ്റായാൽ ആ പ്രസ്താവനയെ **തെറ്റായ പ്രസ്താവന** എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന്, കുറെ പ്രസ്താവനകൾ പരിഗണിക്കാം.

(i) ഓരോ ഒറ്റ ധനപൂർണ്ണാങ്കവും ഒരു അഭാജ്യ സംഖ്യയാണ്. (ii) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ കോണുകളുടെ അളവുകളുടെ തുക 180^0 ആകുന്നു. (iii) ഓരോ അഭാജ്യ സംഖ്യയും ഒറ്റ പൂർണ്ണാങ്കമാണ്.
(iv) A, B എന്ന ഏതു രണ്ടു ഗണത്തിനും, $A \setminus B = B \setminus A$

ഇപ്പോൾ പ്രസ്താവന (1) തെറ്റാകുന്നു. എന്തെന്നാൽ ധാരാളം ഒറ്റ ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ അഭാജ്യ മാണെങ്കിലും 9, 15, 21, 45 തുടങ്ങിയ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ ധനവും ഒറ്റയുമാണ്. എന്നാൽ അഭാജ്യമല്ല.

പ്രസ്താവന (2) ശരിയാകുന്നു. എന്തെന്നാൽ ഏതൊരു ത്രികോണത്തെ പരിഗണിച്ചാലും, കോണുകളുടെ അളവുകളുടെ തുക 180^0 തന്നെയായിരിക്കും.

പ്രസ്താവന (iii) തെറ്റാണ്. എന്തെന്നാൽ 2 ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയാണ്. പക്ഷേ അത് ഒരു ഇരട്ട പൂർണ്ണാങ്കമാണ്. അതുകൊണ്ട് 2 ഒഴികെയുള്ള എല്ലാ അഭാജ്യസംഖ്യകൾക്കും പ്രസ്താവന (iii) ശരിയാകുന്നു. എന്നാൽ ഒരു പ്രസ്താവന ശരിയെന്നു തെളിയിക്കണമെങ്കിൽ അത് എല്ലാ സന്ദർഭങ്ങളിലും ശരിയായിരി ക്കേണ്ടതാണ്. ഒരു പ്രസ്താവന തെറ്റാണെന്ന് തെളിയിക്കാൻ, ഏതെങ്കിലും ഒരു സന്ദർഭത്തിന്റെ ഉദാഹരണം മാത്രം തെറ്റായിരുന്നാൽ മതിയാകും.

പ്രസ്താവന (iv) തെറ്റാണ്. നമുക്ക് ഈ പ്രസ്താവനയെ വിശകലനം ചെയ്യാം. അടിസ്ഥാന പരമായി $A\setminus B$ രൂപീകരിക്കുമ്പോൾ A യിൽ നിന്നും B യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളേയും ഒഴിവാക്കുന്നു. അതുപോലെ $B \setminus A$ ലും ചെയ്യാം. അതിനാൽ മുകളിൽ കൊടുത്ത പ്രസ്താവന തെറ്റായിരിക്കാനാണ് അധികം സാധ്യത. എങ്കിലും $A = \{2, 5, 8\}$, $B = \{5, 7, -1\}$ എന്ന ഉദാഹരണം കൂടെ നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം. ഇതിൽ, $A \setminus B = \{2, 8\}$, $B \setminus A = \{7, -1\}$. അങ്ങനെ $A \setminus B \neq B \setminus A$. അതുകൊണ്ട് പ്രസ്താവന (4) തെറ്റാണ്.

ഉദാഹരണം 1.1

$A = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$, $B = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$ എന്നീ ഗണങ്ങൾക്ക്

(i) ഗണങ്ങളുടെ യോഗം ക്രമവിനിമേയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ചും തെളിയിക്കുക.

(ii) ഗണങ്ങളുടെ സംഗമം ക്രമവിനിമേയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ചും തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

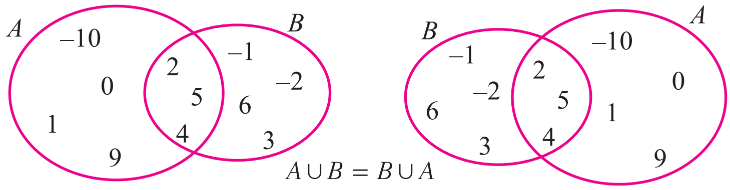
(i) ഇപ്പോൾ, $A \cup B = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\} \cup \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$

$= \{-10, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ (1)

കൂടാതെ, $B \cup A = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\} \cup \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$

$= \{-10, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ (2)

തന്നിട്ടുള്ള A, B എന്നീ രണ്ട് ഗണങ്ങൾക്ക് (1) , (2) ൽ നിന്നും $A \cup B = B \cup A$ എന്ന് തെളിയിച്ചു.



ചിത്രം. 1.7

വെൻചിത്രം മുഖേന ഗണങ്ങളുടെ യോഗം ക്രമവിനിമേയമാണെന്ന് തെളിയിച്ചു.

(ii) ഇനി നമുക്ക് സംഗമം ക്രമവിനിമേയമാണെന്ന് തെളിയിക്കാം.

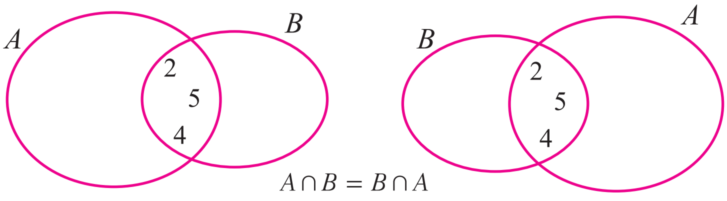
ഇപ്പോൾ, $A \cap B = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\} \cap \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$

$= \{2, 4, 5\}.$ (1)

കൂടാതെ, $B \cap A = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\} \cap \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$

$= \{2, 4, 5\}.$ (2)

(1) , (2)ൽ നിന്ന് A, B എന്നീ ഗണങ്ങൾക്ക് $A \cap B = B \cap A$ എന്ന് തെളിയിച്ചു.



ചിത്രം. 1.8

$A \cap B = B \cap A$ എന്നത് വെൻചിത്രം മുഖേന തെളിയിച്ചു.

ഉദാഹരണം 1.2

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{3, 4, 5, 6\},\ C = \{5, 6, 7, 8\}$ എന്നീ ഗണങ്ങളിൽ

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ എന്നുതെളിയിക്കുക (ii) വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച്

(i) ശരി നോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) ഇപ്പോൾ, $B \cup C = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

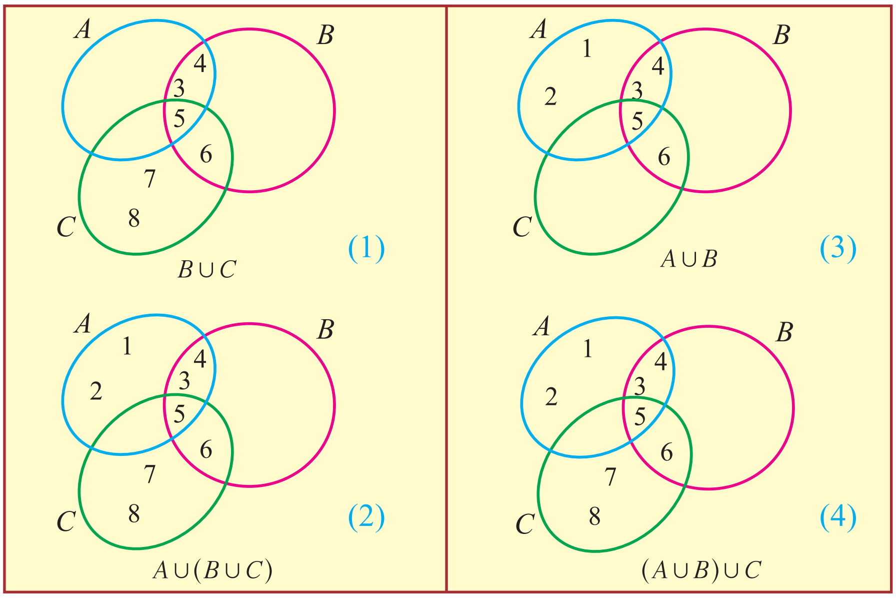
$\therefore\ A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (1)

ഇപ്പോൾ, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore\ (A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (2)

(1) , (2)ൽ നിന്നും $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ എന്ന് തെളിയിച്ചു.

(ii) വെൻചിത്രത്തിൽ നിന്നും



ചിത്രം. 1.9

ചിത്രം (2), (4) ൽ നിന്നും ഗണങ്ങളുടെ യോഗം സംയോജനമാണെന്ന് തെളിയിച്ചു.

ഉദാഹരണം 1.3

$A = \{a,b,c,d\}, B = \{a,c,e\}$, $C = \{a,e\}$ എന്നീ ഗണങ്ങളിൽ

(i) $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.(ii) വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് (i) ശരിനോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) $A = \{a,b,c,d\}, B = \{a,c,e\}, C = \{a,e\}$

$A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$ എന്നാണ് തെളിയിക്കേണ്ടത്. അതിനാൽ ആദ്യം നമുക്ക് $A\cap(B\cap C)$ പരിഗണിക്കാം.

$$B\cap C = \{a,c,e\}\cap\{a,e\} = \{a,e\} \;;$$

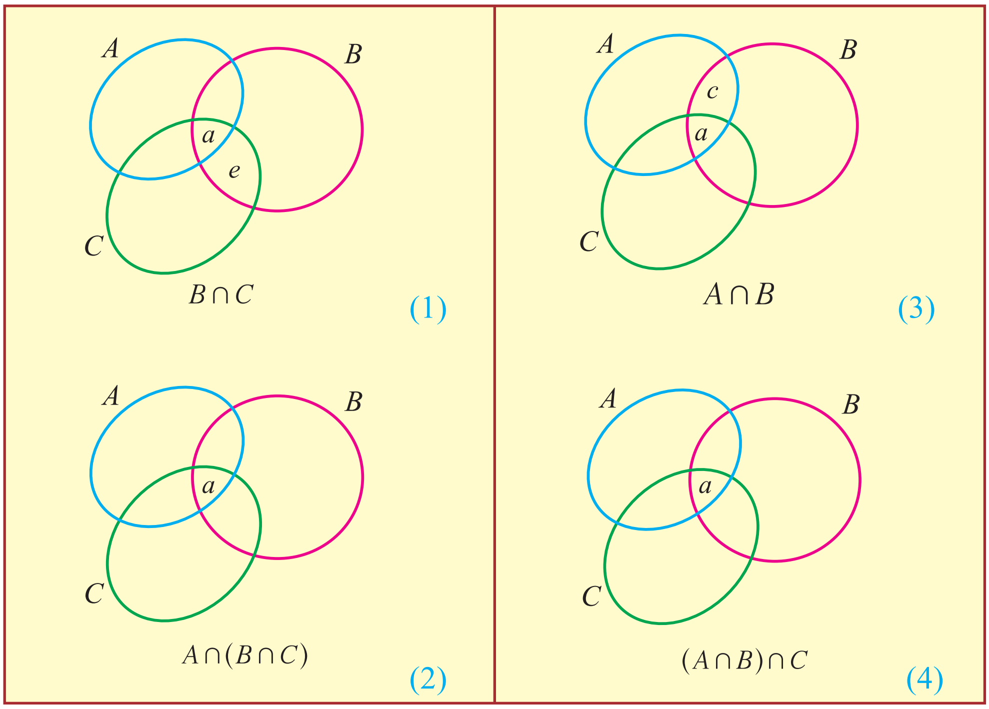
$$A\cap(B\cap C) = \{a,b,c,d\}\cap\{a,e\} = \{a\}. \quad (1)$$

$$A\cap B = \{a,b,c,d.\}\cap\{a,c,e\} = \{a,c\}.$$

$$(A\cap B)\cap C = \{a,c\}\cap\{a,e\} = \{a\} \quad (2)$$

(1) , (2) ൽ നിന്നും $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$ എന്ന് തെളിയിച്ചു.

(ii) വെൻചിത്രത്തിൽ നിന്നും



ചിത്രം. 1.10

(2) , (4) ൽ നിന്നും $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$ എന്ന് തെളിയിച്ചു.

ഉദാഹരണം 1.4

$A = \{a,b,c,d,e\}, B = \{a,e,i,o,u\}$, $C = \{c,d,e,u\}$

(i) $A\setminus(B\setminus C) \neq (A\setminus B)\setminus C$ എന്ന് തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് $A\setminus(B\setminus C) \neq (A\setminus B)\setminus C$ ശരിനോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) $A\setminus(B\setminus C)$

$$(B\setminus C) = \{a,e,i,o,u\}\setminus\{c,d,e,u\} = \{a,i,o\}.$$

അതുകൊണ്ട്, $A\setminus(B\setminus C) = \{a,b,c,d,e\}\setminus\{a,i,o\} = \{b,c,d,e\}.$ (1)

$(A\setminus B)\setminus C.$

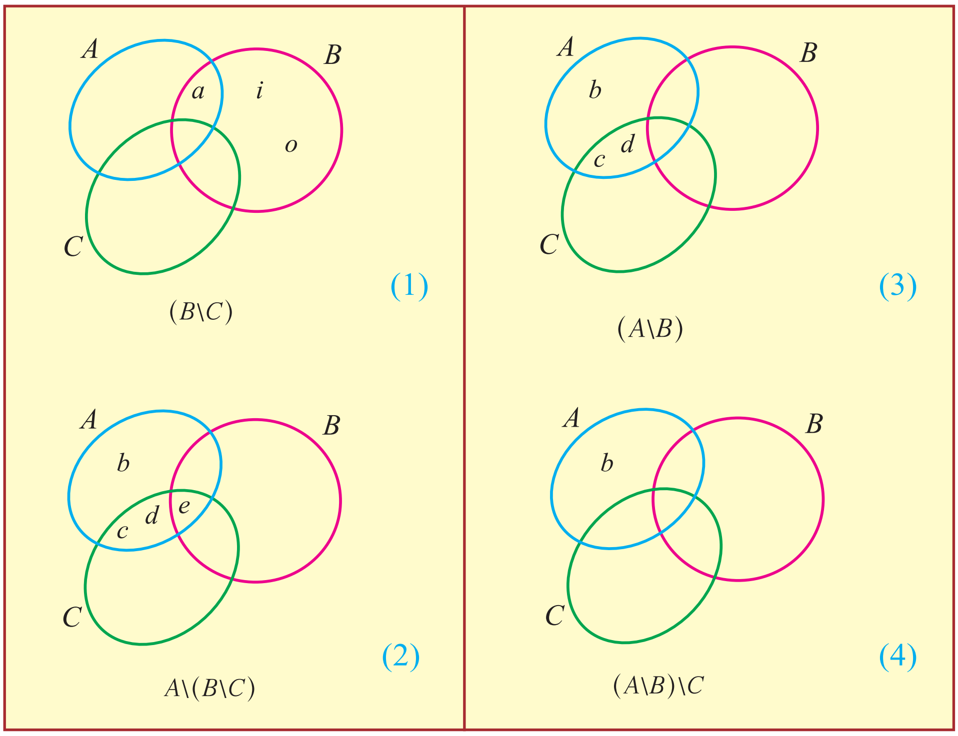
$$A\setminus B = \{a,b,c,d,e\}\setminus\{a,e,i,o,u\} = \{b,c,d\}.$$

$(A\setminus B)\setminus C = \{b,c,d\}\setminus\{c,d,e,u\} = \{b\}.$ (2)

(1) , (2) ൽ നിന്നും $A\setminus(B\setminus C) \neq (A\setminus B)\setminus C$ എന്ന് തെളിയിച്ചു.

അതിനാൽ, ഗണങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം സംയോജനമല്ല.

(ii) വെൻചിത്രത്തിൽ നിന്നും



ചിത്രം.1.11

(2) , (4) ൽ നിന്നും $A\setminus(B\setminus C) \neq (A\setminus B)\setminus C$ എന്ന് തെളിയിച്ചു.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

A, B, C എന്നിവ പരസ്പരം വിയുക്ത ഗണങ്ങളാണെങ്കിൽ $A\setminus(B\setminus C) = (A\setminus B)\setminus C$ എന്നത് തെളിയിക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. അതിനാൽ ഇതിനെ നമുക്ക് തെളിയിക്കാം. B യുംC യും പരസ്പരം വിയുക്തങ്ങളാണെങ്കിൽ $B\setminus C = B$. കൂടാതെ A യും B യും പരസ്പരം വിയുക്തങ്ങളായ തിനാൽ $A\setminus B = A$. അതിനാൽ $A\setminus(B\setminus C) = A$ വീണ്ടും $A\setminus B = A$ യും A, C എന്നിവയും പരസ്പരം വിയുക്തങ്ങളായതിനാൽ $A\setminus C = A$ ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് $(A\setminus B)\setminus C = A$. അതിനാൽ $A\setminus(B\setminus C) = (A\setminus B)\setminus C$ എന്നു തെളിയുന്നു. ഇപ്രകാരം, ഒന്നിനൊന്ന് വിയുക്തങ്ങളായ ഗണങ്ങൾക്ക് ഗണവ്യത്യാസം സംയോജനമാണ്.

ഉദാഹരണം 1.5

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, -2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{2, 4, 6, 7\}$ എങ്കിൽ

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക. (ii) വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച്

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ശരിനോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

(i)

$$B \cap C = \{1, -2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6, 7\} = \{4, 6\};$$

$$A \cup (B \cap C) = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{4, 6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}. \quad (1)$$

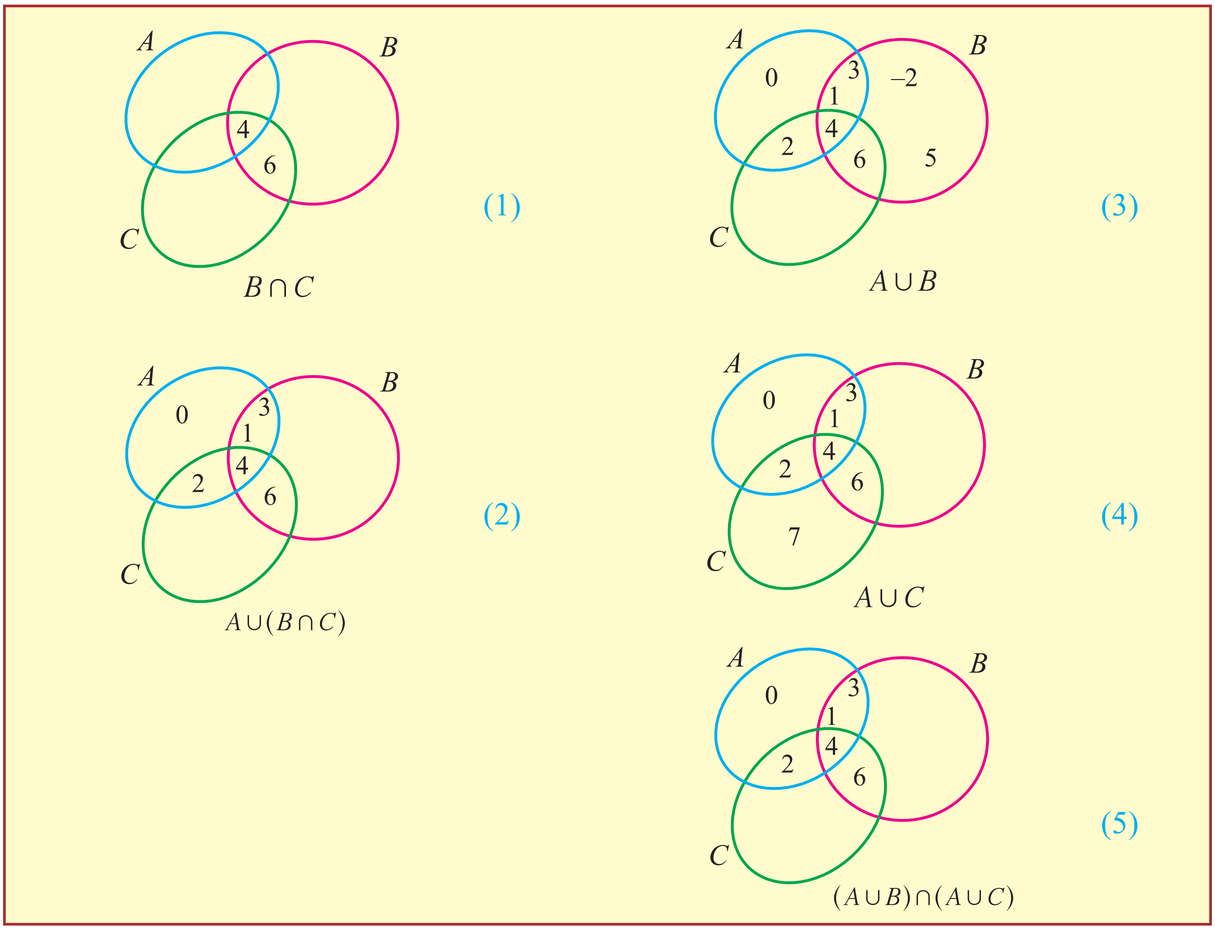
$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{1, -2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$= \{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 7\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7\}.$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7\}$$
$$= \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}. \quad (2)$$

(1) , (2) ൽ നിന്നും $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ എന്ന് തെളിയിച്ചു.

(ii) വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച്



(2) , (5) ൽ നിന്നും $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ എന്ന് തെളിയിച്ചു.

ചിത്രം. 1.12

ഉദാഹരണം 1.6

$A = \{x \mid -3 \leq x < 4, x \in \mathbb{R}\}, B = \{x \mid x < 5, x \in \mathbb{N}\}$,

$C = \{-5, -3, -1, 0, 1, 3\}$ എങ്കിൽ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം ഗണം A എന്നത് -3 ഉം അതിലധികവും 4 നേക്കാൾ കുറഞ്ഞതുമായ എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകളുമാണെന്നതു ശ്രദ്ധിക്കുക. എന്നാൽ B എന്നത് 5 ൽ കുറവായ എല്ലാ ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളും ഉൾപ്പെട്ടതാണ്. അതിനാൽ $A = \{x \mid -3 \leq x < 4, x \in \mathbb{R}\}$ അതായത് A ൽ -3 മുതൽ 4 വരെയുള്ള എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകളും അടങ്ങുന്നു. എന്നാൽ 4 ഉൾപ്പെടുത്തിയിട്ടില്ല.

കൂടാതെ , $B = \{x \mid x < 5, x \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$B \cup C = \{1,2,3,4\} \cup \{-5, -3, -1, 0, 1, 3\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, -5, -3, -1, 0\};$$

$$A \cap (B \cup C) = A \cap \{1, 2, 3, 4, -5, -3, -1, 0\}$$

$$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}. \quad (1)$$

$$A \cap B = \{x \mid -3 \leq x < 4, x \in \mathbb{R}\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3\};$$

$$A \cap C = \{x \mid -3 \leq x < 4, x \in \mathbb{R}\} \cap \{-5, -3, -1, 0, 1, 3\}$$

$$= \{-3, -1, 0, 1, 3\}.$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3,\} \cup \{-3, -1, 0, 1, 3\}$$

$$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}. \quad (2)$$

(1), (2) ൽ നിന്നും $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ എന്നു തെളിയിച്ചു.

അഭ്യാസം 1.1

1. $A \subset B$, ആണെങ്കിൽ $A \cup B = B$ എന്നു തെളിയിക്കുക. (വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച്)

2. $A \subset B$, ആണെങ്കിൽ $A \cap B$ യും $A \setminus B$ യും കാണുക. (വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച്)

3. $P = \{a, b, c\}, Q = \{g, h, x, y\}, R = \{a, e, f, s\}$ എങ്കിൽ താഴെപ്പറയുന്നവ കാണുക.

   (i) $P \setminus R$ (ii) $Q \cap R$ (iii) $R \setminus (P \cap Q)$.

4. $A = \{4, 6, 7, 8, 9\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ എങ്കിൽ താഴെപ്പറയുന്നവ കാണുക.

   (i) $A \cup (B \cap C)$ (ii) $A \cap (B \cup C)$ (iii) $A \setminus (C \setminus B)$

5. $A = \{a, x, y, r, s\}, B = \{1, 3, 5, 7, -10\}$ എങ്കിൽ ഗണങ്ങളുടെ യോഗം ക്രമവിനിമേയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക

6. ഗണങ്ങളുടെ സംഗമം, ക്രമവിനിമേയ നിയമം പരിശോധിക്കുക.
$A = \{l, m, n, o, 2, 3, 4, 7\}, B = \{2, 5, 3, -2, m, n, o, p\}$

7. $A = \{x \mid x,$ എന്നത് 42 ന്റെ ഒരു അഭാജ്യ ഘടകം$\}$, $B = \{x \mid 5 < x \leq 12, x \in \mathbb{N}\}$,
$C = \{1, 4, 5, 6\}$ എങ്കിൽ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. $P = \{a, b, c, d, e\}, Q = \{a, e, i, o, u\}, R = \{a, c, e, g\}$. ഗണങ്ങളുടെ സംഗമത്തിനുള്ള സംയോജന നിയമം പരിശോധിക്കുക.

9. $A = \{5, 10, 15, 20\};\ B = \{6, 10, 12, 18, 24\},\ C = \{7, 10, 12, 14, 21, 28\}$
എങ്കിൽ $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ എന്നത് ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. നിങ്ങളുടെ ഉത്തരത്തിന് കാരണം പറയുക.

10. $A = \{-5, -3, -2, -1\}, B = \{-2, -1, 0\}, C = \{-6, -4, -2\}$. എങ്കിൽ $A \setminus (B \setminus C)$ A യും $(A \setminus B) \setminus C$ യും കാണുക. ഗണവ്യത്യാസ ക്രിയകളെ കുറിച്ച് നിങ്ങളുടെ നിഗമനമെന്താണ്?

11. $A = \{-3, -1, 0, 4, 6, 8, 10\}, B = \{-1, -2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{-1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
എന്നാൽ (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
എന്നത് ശരിനോക്കുക (iii) വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ചും $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ശരിനോക്കുക.

1.5 ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ

അഗസ്റ്റസ് ഡിമോർഗന്റെ പിതാവ് (ബ്രിട്ടീഷുകാരൻ) ഈസ്റ്റിന്ത്യാ കമ്പനിയിൽ സേവനം അനുഷ്ഠിച്ചിരുന്നു. അഗസ്റ്റസ് ഡിമോർഗൻ (1806 - 1871) ഭാരതത്തിൽ തമിഴ്നാട് സംസ്ഥാനത്തിലെ മധുരയിലാണ് ജനിച്ചത്. അദ്ദേഹത്തിന് ഏഴുമാസം പ്രായമുള്ളപ്പോൾ കുടുംബം ഇംഗ്ലണ്ടിലേക്ക് കുടിയേറി. അദ്ദേഹം ഇംഗ്ലണ്ടിലെ കേം ബ്രിഡ്ജിലുള്ള ട്രിനിറ്റി കലാശാലയിലാണ് പഠിച്ചത്. ഡിമോർഗന്റെ നിയമങ്ങൾ, ഗണത്തിന്റെ മൂന്ന് അടിസ്ഥാനക്രിയകളായ യോഗം, സംഗമം, പൂരകം എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള ബന്ധമാണ്.

ഗണവ്യത്യാസങ്ങൾക്കുള്ള ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ

A, B, C എന്നീ മൂന്നു ഗണങ്ങൾക്ക്
(i) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (ii) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

പൂരക ഗണത്തിനുള്ള ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ

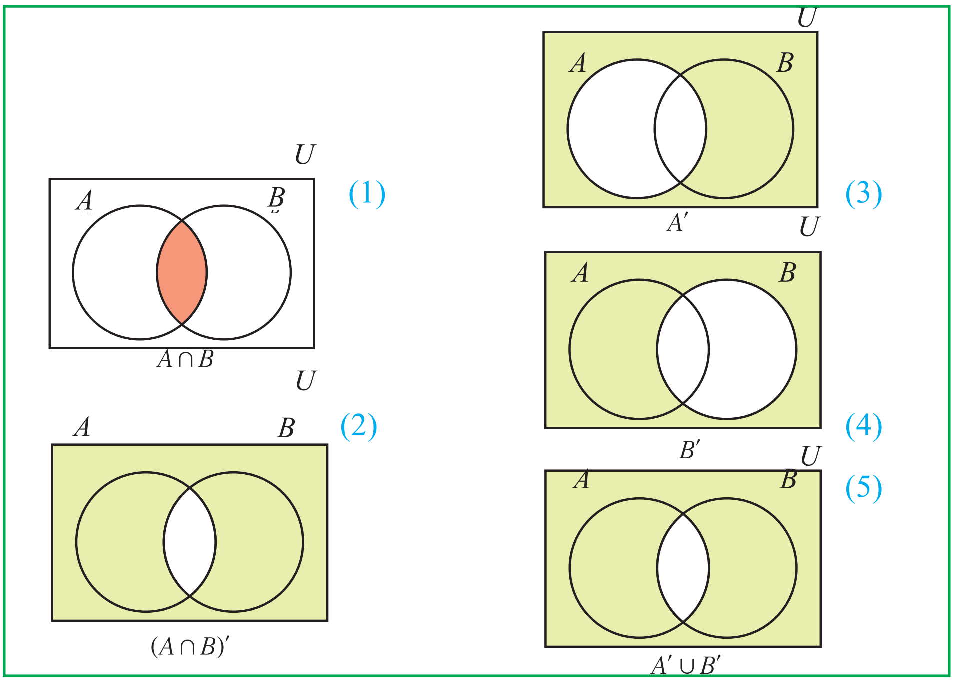
U എന്നത് A, B എന്നീ ഗണങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന സമസ്ത ഗണമാണ്. എങ്കിൽ
(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

പൂരകഗണത്തിനുള്ള നിയമങ്ങൾ ഗണവ്യത്യാസത്തെ ആശ്രയിച്ചുള്ളതാണ്. എന്തെന്നാൽ D എന്ന ഏതൊരു ഗണത്തിനും $D' = U \setminus D$. ഇതു നാം തെളിയിക്കാൻ പ്രയത്നിക്കുന്നില്ല. എന്നാൽ ഈ നിയമങ്ങളുപയോഗിച്ച് പ്രശ്ന നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നത് എങ്ങനെ എന്നതിനെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാം.

ഉദാഹരണം 1.7

വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് $(A \cap B)' = A' \cup B'$ എന്നത് പരിശോധിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം



ചിത്രം. 1.13

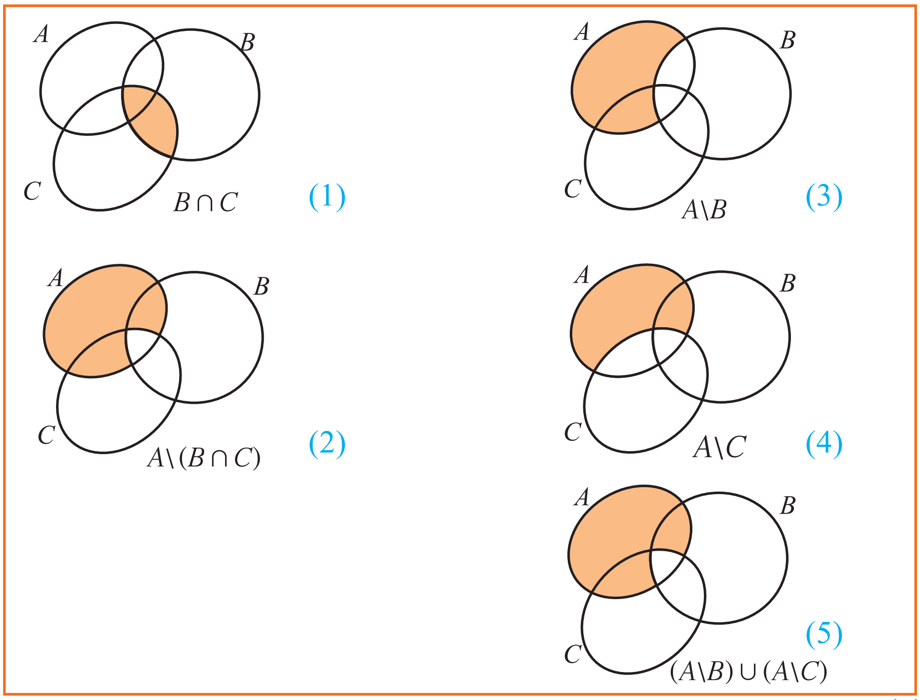
(2) , (5) ൽ നിന്നും $(A \cap B)' = A' \cup B'$ എന്ന് തെളിയിച്ചു.

ഉദാഹരണം 1.8

വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് ഗണവ്യത്യാസത്തിനുള്ള ഡിമോർഗൻ നിയമം

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ശരി നോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം



ചിത്രം. 1.14

(2), (5) ൽ നിന്നും $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ എന്ന് തെളിയിച്ചു.

ഉദാഹരണം 1.9

$U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A = \{-2, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 8, 9\}$.

എങ്കിൽ പൂരകഗണത്തിനുള്ള ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ ശരി നോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം ആദ്യമായി $(A \cup B)' = A' \cap B'$ എന്നത് പരിഗണിക്കുക.

$$A \cup B = \{-2, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 3, 5, 8, 9\} = \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\};$$

$$(A \cup B)' = U \setminus \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\} = \{-1, 0, 6, 7, 10\}. \qquad (1)$$

$$A' = U \setminus A = \{-1, 0, 1, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$B' = U \setminus B = \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 7, 10\}.$$

$$A' \cap B' = \{-1, 0, 1, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 7, 10\}$$

$$= \{-1, 0, 6, 7, 10\}. \qquad (2)$$

(1), (2)ൽ നിന്നും $(A \cup B)' = A' \cap B'$ എന്ന് തെളിയിച്ചു.

ഇതുപോലെ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ എന്ന് തെളിയിക്കാം. ഇത് വിദ്യാർത്ഥികൾക്കുള്ള പരിശീലനമായി പരിഗണിക്കുക.

ഉദാഹരണം 1.10

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, x, y, z\}$, $B = \{1, 2, c, d, e\}$, $C = \{d, e, f, g, 2, y\}$.

എങ്കിൽ $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ എന്നത് ശരിനോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$B \cup C = \{1, 2, c, d, e\} \cup \{d, e, f, g, 2, y\}$$

$$= \{1, 2, c, d, e, f, g, y\}.$$

$$A \setminus (B \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, g, x, y, z\} \setminus \{1, 2, c, d, e, f, g, y\}$$

$$= \{a, b, x, z\}. \qquad (1)$$

$$A \setminus B = \{a, b, f, g, x, y, z\}, \; A \setminus C = \{a, b, c, x, z\}$$

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{a, b, x, z\}. \qquad (2)$$

(1) , (2)ൽ നിന്നും $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

അഭ്യാസം 1.2

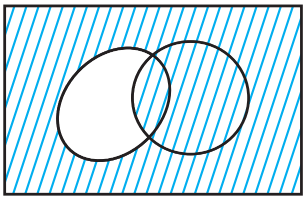
1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയെ വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുക.

   (i) $U = \{5, 6, 7, 8, ...13\}, A = \{5, 8, 10, 11\}, B = \{5, 6, 7, 9, 10$

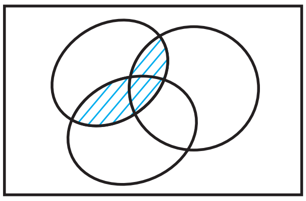
   (ii) $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, M = \{b, d, f, g\}, \; N = N\{a, b, d, e, g\}$

2. നിഴലിട്ട ഭാഗത്തെ $U, A, B, C, \cup, \cap, ', \setminus$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ ആവശ്യാനുസരണം ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രീകരിക്കുക.

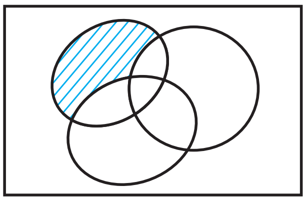
(i)



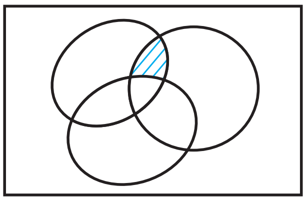
(ii)



(iii)



(iv)



3. A, B, C എന്നീ മൂന്ന് ഗണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന വെൻചിത്രം വരയ്ക്കുക.

(i) $A \cap B \cap C$

(ii) A യും B യും വിയുക്ത ഗണങ്ങളും എന്നാൽ C യുടെ ഉപഗണങ്ങളും ആണ്.

(iii) $A \cap (B \setminus C)$

(iv) $(B \cup C) \setminus A$

(v) $A \cup (B \cap C)$

(vi) $C \cap (B \setminus A)$

(vii) $C \cap (B \cup A)$

4. വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$ എന്നത് ശരിനോക്കുക.

5. $U = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$, $A = \{8, 16, 24\}$, $B = \{4, 16, 20, 28\}$ എങ്കിൽ $(A \cup B)'$, (∩ $(A \cap B)'$ എന്നിവ കാണുക.

6. $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, b, f, g\}$, $B = \{a, b, c\}$, എന്നീ ഗണങ്ങളുപയോഗിച്ച് പൂരകഗണത്തിനുള്ള ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ ശരി നോക്കുക.

7. താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഗണങ്ങളുപയോഗിച്ച് ഗണ വ്യത്യാസത്തിനുള്ള ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ ശരി നോക്കുക.

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, $B = \{1, 2, 5, 7\}$, $C = \{3, 9, 10, 12, 13\}$

8. $A = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$, $B = \{1, 5, 10, 15, 20, 30\}$

$C = \{7, 8, 15, 20, 35, 45, 48\}$ എങ്കിൽ $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ എന്ന് ശരിനോക്കുക.

9. വെൻചിത്രം മുഖേന ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

(i) $A \cap (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(iii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(iv) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(v) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

(vi) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

1.6 ഗണങ്ങളുടെ ഗണനസംഖ്യ (Cardinality of sets)

ഒൻപതാം ക്ലാസ്സിൽ നാം, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് രണ്ട് ഗണങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു. $A, B, A\cap B$ എന്നീ ഗണങ്ങളുടെ ഗണനസംഖ്യ തന്നിരുന്നാൽ $A\cup B$ എന്ന ഗണത്തിന്റെ ഗണനസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഈ സൂത്രം ഉപയോഗപ്പെടുന്നു. A, B , C എന്നീ മൂന്നു ഗണങ്ങൾ തന്നിരുന്നാൽ $A\cup B\cup C$ യുടെ ഗണനസംഖ്യ കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള സൂത്രം എന്താണ്? ഈ അവസരത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം

$$n(A\cup B\cup C)= n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C).$$

ഈ സൂത്രത്തിന്റെ ഉപയോഗം താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ വിശദീകരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 1.11

ഒരു സംഘം വിദ്യാർത്ഥികളിൽ, 65 പേർ ഫുട്ബോൾ കളിക്കുന്നവരും, 45 പേർ ഹോക്കി കളിക്കുന്നവരും, 42 പേർ ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കുന്നവരും, 20 പേർ ഫുട്ബോളും ഹോക്കിയും, 25 പേർ ഫുട്ബോളും ക്രിക്കറ്റും, 15 പേർ ഹോക്കിയും ക്രിക്കറ്റും, 8 പേർ ഈ മൂന്നു കളികളും കളിക്കുന്നവരും ആണെങ്കിൽ ആ സംഘത്തിലെ ആകെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം കാണുക. (ഓരോ വിദ്യാർത്ഥിയും കുറഞ്ഞത് ഒരു കളിയിലെങ്കിലും പങ്കെടുക്കുന്നു എന്നു കരുതുക)

നിർദ്ധാരണം F, H, C എന്നിവ യഥാക്രമം ഫുട്ബോൾ, ഹോക്കി, ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കുന്നവരുടെ ഗണം എന്നിരിക്കട്ടെ. $n(F)=65, n(H)=45, \text{and } n(C)=42.$

കൂടാതെ $n(F\cap H)=20,\ n(F\cap C)=25,\ n(H\cap C)=15,\ n(F\cap H\cap C)=8.$

ആ സംഘത്തിലെ ആകെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം $n(F\cup H\cup C)$.

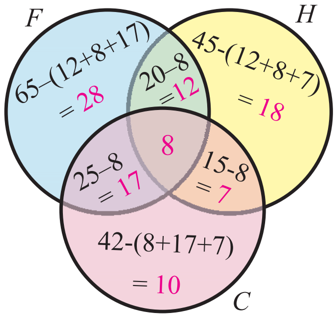
സൂത്രം അനുസരിച്ച്,

$$\begin{aligned} n(F\cup H\cup C) &= n(F)+n(H)+n(C)-n(F\cap H)\\ &\quad -n(H\cap C)-n(F\cap C)+n(F\cap H\cap C)\\ &= 65+45+42-20-25-15+8 = 100. \end{aligned}$$

അതായത്, ആ സംഘത്തിലെ ആകെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം $=100$.

മറ്റൊരു രീതി

ഇതേ പ്രശ്നത്തെ വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ചും നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം. ഇക്കാലത്ത്, നമ്മുടെ നിത്യജീവിതത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ചില പ്രശ്നങ്ങളെ വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ചും തത്വശാസ്ത്രം ഉപയോഗിച്ചും നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ സാധിക്കും. മൂന്നു ഗണങ്ങളുടെ സംഗമത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന വെൻചിത്രത്തിൽ ഓരോന്നും ഓരോ കളിയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. തന്നിട്ടുള്ള പ്രസ്താവനകളെ ചിത്രത്തിൽ ശ്രദ്ധയോടെ രേഖപ്പെടുത്തി ആ സംഘത്തിലെ ആകെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം കണ്ടെത്താം.



ചിത്രം. 1.15

സംഘത്തിലെ ആകെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം

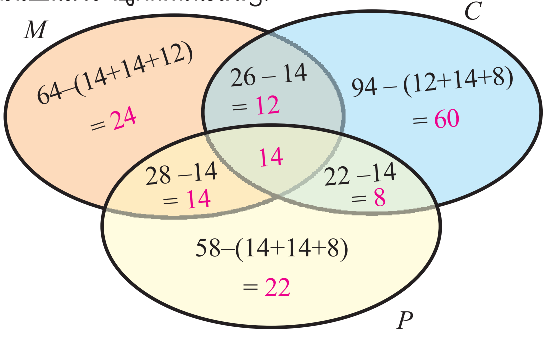
$$= 28+12+18+7+10+17+8 = 100.$$

ഉദാഹരണം 1.12

ഒരു സർവ്വകലാശാലയിലെ വിദ്യാർത്ഥികളെ നിരീക്ഷിച്ചതിൽ നിന്നും താഴെ കാണുന്ന വിവരങ്ങൾ ലഭിച്ചു. 64 പേർ ഗണിത വിഭാഗത്തിലും, 94 പേർ കമ്പ്യൂട്ടർ ശാസ്ത്രത്തിലും, 58 പേർ ഊർജ്ജതന്ത്ര വിഭാഗത്തിലും, 28 പേർ ഗണിതത്തിലും ഊർജ്ജതന്ത്രത്തിലും, 26 പേർ ഗണിതത്തിലും കമ്പ്യൂട്ടർ ശാസ്ത്രത്തിലും, 22 പേർ കമ്പ്യൂട്ടർ ശാസ്ത്രത്തിലും ഊർജ്ജതന്ത്രത്തിലും,14 പേർ ഈ മൂന്നു വിഭാഗത്തിലും ഉൾപ്പെടുന്നു. എങ്കിൽ നിരീക്ഷിച്ച വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ആകെ എണ്ണവും, ഒരു വിഭാഗത്തിൽ മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്നവരുടെ എണ്ണവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളെ വെൻചിത്രത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്താം.

M, C, P എന്നിവ യഥാക്രമം ഗണിതം, കമ്പ്യൂട്ടർ ശാസ്ത്രം, ഊർജ്ജതന്ത്രം എന്നീ വിഭാഗങ്ങളിലെ വിദ്യാർത്ഥികൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം. 1.16

$n(M \cap C \cap P') = 26 - 14 = 12$

$n(M \cap P \cap C') = 28 - 14 = 14$

$n(C \cap P \cap M') = 22 - 14 = 8$

നിരീക്ഷിച്ച ആകെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം

$= 24 + 12 + 60 + 8 + 22 + 14 + 14 = 154$

ഗണിത വിഭാഗം മാത്രം എടുത്ത വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം $= 64-(14+14+12) = 24$

കമ്പ്യൂട്ടർ വിഭാഗം മാത്രം എടുത്ത വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം $= 94 - (12+14+8) = 60$

ഊർജ്ജതന്ത്രവിഭാഗം മാത്രം എടുത്ത വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം $= 58 - (14+14+8) = 22$

ഒരുവിഭാഗത്തിൽ മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം $= 24 + 60 + 22 = 106$

ഉദാഹരണം 1.13

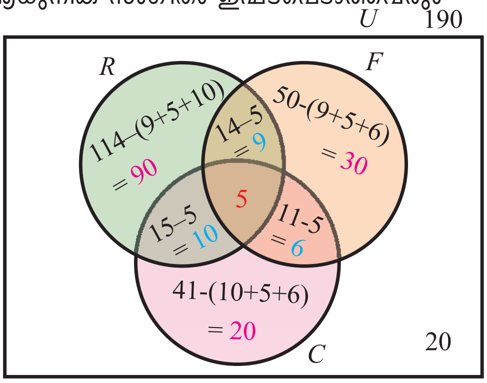
ഒരു വാർത്താ വിക്ഷേപണ കേന്ദ്രം, 190 വിദ്യാർത്ഥികളിൽ തങ്ങൾക്കിഷ്ടപ്പെട്ട സംഗീതം തീരുമാനിക്കുന്നത് നിരീക്ഷിച്ചതിൽ നിന്നും 114 പേർ ആധുനിക സംഗീതത്തേയും, 50 പേർ നാടോടി സംഗീതത്തേയും, 41 പേർ ശാസ്ത്രീയ സംഗീതത്തേയും ഇഷ്ടപ്പെടുന്നു. 14 പേർ ആധുനിക സംഗീതവും നാടോടി സംഗീതവും, 15 പേർ ആധുനിക സംഗീതവും ശാസ്ത്രീയ സംഗീതവും, 11 പേർ ശാസ്ത്രീയ സംഗീതവും നാടോടി സംഗീതവും, 5 പേർ ഈ മൂന്നു സംഗീതവും ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരുമാണ്. എങ്കിൽ

(i) മൂന്നു തരം സംഗീതത്തിലും ഒന്നു പോലും ഇഷ്ടപ്പെടാത്തവർ എത്രപേർ?

(ii) ഏതെങ്കിലും രണ്ടു തരം സംഗീതം മാത്രം ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവർ എത്ര പേർ?

(iii) നാടോടി സംഗീതം ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരും എന്നാൽ ആധുനിക സംഗീതം ഇഷ്ടപ്പെടാത്തവരും എത്ര പേർ?

നിർദ്ധാരണം R, F, C എന്നിവ യഥാക്രമം ആധുനിക സംഗീതം, നാടോടി സംഗീതം, ശാസ്ത്രീയ സംഗീതം എന്നിവ ഇഷ്ടപ്പെടുന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഗണം എന്നിരിക്കട്ടെ. തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളെ വെൻചിത്രത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്താം.



ചിത്രം. 1.17

$n(R \cap F \cap C') = 14 - 5 = 9$

$n(R \cap C \cap F') = 15 - 5 = 10$

$n(F \cap C \cap R') = 11 - 5 = 6.$

വെൻചിത്രത്തിൽ നിന്നും, മൂന്നു സംഗീതത്തിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നു മാത്രം ഇഷ്ടപ്പെടുന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം $90 + 9 + 30 + 6 + 20 + 10 + 5 = 170$.

നിരീക്ഷിച്ച വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം $= 190$.

മൂന്നു സംഗീതങ്ങളിൽ ഒന്നു പോലും ഇഷ്ടപ്പെടാത്ത വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം $= 190 - 170 = 20$

ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സംഗീതം മാത്രം ഇഷ്ടപ്പെടുന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം $= 9 + 6 + 10 = 25$.

നാടോടി സംഗീതം ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരും എന്നാൽ ആധുനിക സംഗീതം ഇഷ്ടപ്പെടാത്തവരുമായ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം $= 30 + 6 = 36$.

അഭ്യാസം 1.3

1. U എന്ന സമസ്ത ഗണത്തിലെ രണ്ടു ഗണങ്ങളാണ് A, B. $n(U) = 700$, $n(A) = 200$, $n(B) = 300$ $n(A \cap B) = 100$, എങ്കിൽ $n(A' \cap B')$ കാണുക.

2. $n(A) = 285, n(B) = 195, n(U) = 500, n(A \cup B) = 410$ എങ്കിൽ $n(A' \cup B')$ കാണുക.

3. A, B, C എന്നിവ ഏതെങ്കിലും മൂന്നു ഗണങ്ങളാണ് $n(A) = 17$ $n(B) = 17$, $n(C) = 17$, $n(A \cap B) = 7$, $n(B \cap C) = 6$, $n(A \cap C) = 5$, ($n(A \cap B \cap C) = 2$. എങ്കിൽ $n(A \cup B \cup C)$ കാണുക.

4. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗണങ്ങൾക്ക് $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ ശരി നോക്കുക.
   (i) $A = \{4,5,6\}, B = \{5,6,7,8\}, C = \{6,7,8,9\}$
   (ii) $A = \{a,b,c,d,e\}, B = \{x,y,z\}, C = \{a,e,x\}$

5. ഒരു കലാശാലയിൽ 60 വിദ്യാർത്ഥികൾ രസതന്ത്രത്തിലും, 40 പേർ ഊർജ്ജതന്ത്രത്തിലും, 30 പേർ ജീവശാസ്ത്രത്തിലും, 15 പേർ രസതന്ത്രത്തിലും ഊർജ്ജതന്ത്രത്തിലും, 10 പേർ ഊർജ്ജതന്ത്രത്തിലും ജീവശാസ്ത്രത്തിലും, 5 പേർ ജീവശാസ്ത്രത്തിലും രസതന്ത്രത്തിലും ചേർന്നിട്ടുണ്ട്. മൂന്നു വിഷയങ്ങളിലും ചേർന്നവർ ആരുമില്ല. എങ്കിൽ ഒരു വിഷയത്തിലെങ്കിലും ചേർന്നവരുടെ എണ്ണം കാണുക.

6. ഒരു പട്ടണത്തിലെ ജനങ്ങളിൽ 85% പേർ ഇംഗ്ലീഷും, 40% പേർ തമിഴും, 20% പേർ ഹിന്ദിയും 42% പേർ ഇംഗ്ലീഷും തമിഴും, 23% പേർ തമിഴും ഹിന്ദിയും, 10% പേർ ഹിന്ദിയും ഇംഗ്ലീഷും സംസാരിക്കുന്നവരുമാണ്. എങ്കിൽ ഈ മൂന്നു ഭാഷകളും സംസാരിക്കുന്നവരുടെ ശതമാനം കണക്കാക്കുക.

7. ഒരു പരസ്യ ഏജൻസിയിൽ പങ്കുചേർന്നിട്ടുള്ള 170 കക്ഷികളിൽ 115 പേർ ദൂരദർശിനി ഉപയോഗിക്കുന്നവരും, 110 പേർ റേഡിയോ ഉപയോഗിക്കുന്നവരും 130 പേർ മാസിക ഉപയോഗിക്കുന്നവരുമാണ്. 85 പേർ ദൂരദർശിനിയും മാസികയും, 75 പേർ ദൂരദർശിനിയും റേഡിയോയും, 95 പേർ റേഡിയോയും മാസികയും, 70 പേർ ഇവ മൂന്നും ഉപയോഗിക്കുന്നവരുമാണ്. ഈ വിവരങ്ങൾ വെൻചിത്രത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തി താഴെക്കൊടുത്തവ കാണുക.
   (i) റേഡിയോ മാത്രം ഉപയോഗിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം (ii) ദൂരദർശിനി മാത്രം ഉപയോഗിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം (iii) ദൂരദർശിനിയും മാസികയും ഉപയോഗിക്കുന്നവർ എന്നാൽ റേഡിയോ ഉപയോഗിക്കാത്ത വരുടെ എണ്ണം

8. 4000 വിദ്യാർത്ഥികളുള്ള ഒരു വിദ്യാലയത്തിൽ, 2000 പേർ ഫ്രഞ്ചും, 3000 പേർ തമിഴും, 500 പേർ ഹിന്ദിയും, 1500 പേർ ഫ്രഞ്ചും തമിഴും, 300 പേർ ഫ്രഞ്ചും ഹിന്ദിയും, 200 പേർ തമിഴും ഹിന്ദിയും, 50 പേർ ഈ മൂന്നു ഭാഷകളും അറിയുന്നവരാണ്.
   (i) ഈ മൂന്നു ഭാഷകളും അറിയാത്തവർ എത്ര പേർ?
   (ii) ഒരു ഭാഷയെങ്കിലും അറിയുന്നവർ എത്ര പേർ?
   (iii) രണ്ട് ഭാഷ മാത്രം അറിയുന്നവർ എത്ര പേർ?

9. 120 കുടുംബങ്ങളുള്ള ഒരു ഗ്രാമത്തിൽ, 93 കുടുംബങ്ങൾ പാചകത്തിന് വിറകും, 63 കുടുംബങ്ങൾ മണ്ണെണ്ണയും, 45 കുടുംബങ്ങൾ പാചകവാതകവും, 45 കുടുംബങ്ങൾ വിറകും മണ്ണെണ്ണയും, 24 കുടുംബങ്ങൾ മണ്ണെണ്ണയും പാചക വാതകവും, 27 കുടുംബങ്ങൾ പാചകവാതകവും വിറകും, ഉപയോഗിക്കുന്നു. എങ്കിൽ വിറകും, മണ്ണെണ്ണയും, പാചകവാതകവും ഉപയോഗിക്കുന്ന കുടുംബങ്ങൾ എത്ര?

1.7 ബന്ധങ്ങൾ

കഴിഞ്ഞ ഭാഗത്തിൽ നാം, ഗണത്തിന്റെ ആശയത്തെക്കുറിച്ച് പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു. കൂടാതെ തന്നിട്ടുള്ള ഗണങ്ങളിൽ നിന്ന്, ഗണങ്ങളുടെ യോഗം, സംഗമം, പൂരകം എന്നീ പുതിയ ഗണങ്ങൾ രൂപീകരിക്കുന്ന തിനും പഠിച്ചു. ഇവിടെ A , Bഎന്നീ രണ്ടു ഗണങ്ങൽ തന്നിരുന്നാൽ ഒരു പുതിയ ഗണം രൂപീകരിക്കുന്നതിനെ കുറിച്ച് മറ്റൊരു രീതിയിൽ പഠിക്കാം. ഈ പുതിയ ഗണം മറ്റ് പ്രധാന ആശയങ്ങളായ ബന്ധങ്ങളും ഫലനങ്ങളും നിർവ്വചിക്കുന്നതിൽ പ്രാധാന്യം വഹിക്കുന്നു.

ശൂന്യമല്ലാത്ത രണ്ട് ഗണങ്ങൾ തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ $A \times B$ എന്ന പുതിയ ഗണം രൂപീകരിക്കാം. ഇതിനെ 'A ക്രോസ് B'എന്ന് വായിക്കുന്നു. $A \times B$ യെ A, B യുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം എന്നു പറയുന്നു.

ഇതിനെ $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A$ കൂടാതെ $b \in B\}$ എന്ന് വിർവ്വചിക്കുന്നു.

ഇതുപോലെ 'B ക്രോസ് A' യും നിർവ്വചിക്കാം.

$B \times A = \{(b,a) \mid b \in B$ കൂടാതെ $a \in A\}$

കുറിപ്പ്

(i) (a, b) എന്ന ക്രമജോടിയുടെ ക്രമം പ്രാധാന്യമുള്ളതാണ്. അതായത്, $(a, b) \neq (b, a)$ എങ്കിൽ $a \neq b$.

(ii) കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം $A \times B$ യിൽ A യും B യും സമമാകാൻ സാധ്യതയുണ്ട്.

ഒരു ഉദാഹരണം നോക്കാം

ഒരു സെൽഫോൺ പീടികയിൽ C_1, C_2, C_3 എന്നീ മൂന്ന് തരത്തിലുള്ള സെൽഫോണുകൾ വിൽക്കുന്നുണ്ട് എന്ന് കരുതുക. അതിൽ C_1 ന്റെ വില ₹1200 , C_2 ന്റെ വില ₹ 2500 ഉം, C_3 യുടെ വില ₹ 2500.

$A = \{ C_1, C_2, C_3 \}$,$B = \{ 1200, 2500 \}$ എന്ന് എടുക്കാം.

ഈ സന്ദർഭത്തിൽ $A \times B = \{(C_1, 1200), (C_1, 2500), (C_2, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 1200), (C_3, 2500)\}$

എന്നാൽ $B \times A = \{(1200, C_1), (2500, C_1), (1200, C_2), (2500, C_2),(1200, C_3), (2500, C_3)$.

ഇതിൽ നിന്നും $A \neq B$. എങ്കിൽ $A \times B \neq B \times A$ എന്ന് തെളിയുന്നു.

$F = \{(C_1, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 2500)\}$ എന്ന $A \times B$ യുടെ ഒരു ഉപഗണം പരിഗണിക്കാം.

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ക്രമജോഡികളിൽ ആദ്യത്തെ അംഗം ഓരോന്നും B യുടെ ഒരേ ഒരു അംഗവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. അതായത്, ക്രമജോഡികളിൽ ആദ്യത്തെ സ്ഥാനത്തെ അംഗം രണ്ടാമത്തെ സ്ഥാനത്തിൽ ഒന്നിൽ കൂടുതൽ അംഗവുമായി ചേർത്തിട്ടില്ല.

F ലെ ഓരോ ക്രമജോഡിയിലും, അടിസ്ഥാനപരമായി രണ്ടാമത്തെ അംഗം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ആദ്യത്തെ അംഗത്തിന്റെ വിലയാണ്. അടുത്തതായി $E = \{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$ എന്ന $B \times A$ യുടെ ഒരു ഉപഗണം പരിഗണിക്കാം.

ഇവിടെ 2500 എന്ന ആദ്യത്തെ അംഗം, C_2, C_3 എന്നീ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.

നിർവ്വചനം

A , B എന്നിവ ശൂന്യമല്ലാത്ത രണ്ട് ഗണങ്ങളാണെങ്കിൽ A യിൽ നിന്ന് B യിലേയ്ക്കുള്ള ബന്ധം R എന്നത് $A \times B$ യിലുള്ള ശൂന്യമല്ലാത്ത ഒരു ഉപഗണമാണ്. അതായത് $R \subseteq A \times B$.

R ന്റെ മണ്ഡലം $= \{x \in A \,|\, (x,y) \in R$ ഏതെങ്കിലും ഒരു $y \in B\}$

R ന്റെ രംഗം $= \{y \in B \,|\, (x,y) \in R$ ഏതെങ്കിലും ഒരു $x \in A\}$

1.8 ഫലനങ്ങൾ

പീറ്റർ ഡ്രിച്ച്ലെറ്റ്
(1805-1859)
ജർമ്മനി

സംഖ്യാസിദ്ധാന്തം, വിശകലനം, യന്ത്രതന്ത്രം എന്നീ മേഖലകളിൽ ഡ്രിച്ച്ലെറ്റ് മുഖ്യമായ സംഭാവനകൾ നൽകിയിട്ടുണ്ട്. 1837ൽ അദ്ദേഹം ഫലനത്തിന്റെ ആധുനിക ആശയത്തെ $y = f(x)$ എന്ന ചിഹ്നമുപയോഗിച്ച് പരിചയപ്പെടുത്തി. അദ്ദേഹം പ്രസിദ്ധമായ പീജിയനോൾ തത്വം സൂത്രവൽക്കരിച്ചു.

A യും B യും ശൂന്യമല്ലാത്ത രണ്ട് ഗണങ്ങളാണ്.എന്നിരിക്കട്ടെ. A യിൽ നിന്ന് B യിലേയ്ക്കുള്ള ഫലനം എന്നത്, താഴെപ്പറയുന്ന നിബന്ധനകൾ അനുസരിക്കുന്ന $f \subseteq A \times B$ എന്ന ബന്ധമാണ്.

(i) f ന്റെ മണ്ഡലം = A

(ii) ഓരോ $x \in A$ യ്ക്കും, ഒരേ ഒരു $y \in B$ ആണെങ്കിൽ $(x, y) \in f$.

A യിൽ നിന്ന് B യിലേയ്ക്കുള്ള ഫലനം എന്നത് (1),(2) എന്നീ നിബന്ധനകൾ അനുസരിക്കുന്ന ഒരു പ്രത്യേകതരം ബന്ധമാണ്. ഫലനം എന്നതിനെ മാപ്പിംഗ് അല്ലെങ്കിൽ രൂപമാറ്റം എന്നും പറയാം.

$(x,y) \in f$ ആണെങ്കിൽ A യിൽ നിന്ന് B യിലേയ്ക്കുള്ള ഫലനത്തെ $f\colon A \to B$ എന്ന് കുറിക്കാം. ഇതിനെ $y = f(x)$ എന്ന് എഴുതാം.

ഫലനത്തിന്റെ നിർവ്വചനത്തെ ബന്ധത്തിന്റെ ആശയമില്ലാതെ താഴെപ്പറയുന്ന വിധം രൂപീകരിക്കാം. യഥാർത്ഥത്തിൽ കൂടുതൽ സമയവും ഈ രൂപീകരണം ഫലനത്തിന്റെ പ്രവർത്തിക്കുന്ന നിർവ്വചനമായി ഉപയോഗിക്കുന്നു.

നിർവ്വചനം

A, B എന്നിവ ശൂന്യമല്ലാത്ത രണ്ട് ഗണങ്ങളാണ്. A യിൽ നിന്നും B യിലേയ്ക്കുള്ള f എന്ന ഫലനം ഓരോ $x \in A$ യ്ക്കും ഒരേയൊരു $y \in B$ യിലേയ്ക്കുള്ള സാദൃശ്യം നിർണ്ണയിക്കുന്ന നിയമമാണ്. x ന്റെ ഫലനം y എന്നതിനെ $y = f(x)$ എന്നു കുറിക്കുന്നു.

ഗണം A യെ ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലം എന്നും, ഗണം B യെ ഫലനത്തിന്റെ സഹമണ്ഡലം എന്നും പറയുന്നു. കൂടാതെ, ഈ ഫലനത്തിൽ y യെ x ന്റെ പ്രതിബിംബമെന്നും x നെ y യുടെ ബിംബമെന്നും പറയുന്നു. f എന്ന ഫലനത്തിൽ A യിലെ അംഗങ്ങളുടെ പ്രതിബിംബങ്ങളുടെ ഗണത്തെ f ന്റെ രംഗം എന്നു പറയുന്നു. ഒരു ഫലനത്തിന്റെ രംഗം, സഹമണ്ഡലത്തിന്റെ ഉപഗണമാണ് എന്നത് ഓർമ്മിക്കുക.

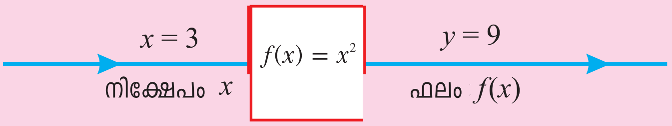
മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഫലനത്തിന്റെ ആധുനിക നിർവ്വചനം 1837 - ൽ നിക്കോളെ ലെബചെവ്സ്കിയും പീറ്റർ ഡ്രിച്ച്ലെറ്റും പ്രസിദ്ധീകരിച്ചിട്ടുള്ളതാണ്. ഫലനത്തിന് വ്യക്തമായ നിർവ്വചനമില്ലാത്തതിനാൽ, ഇതിന് പ്രാധാന്യം നൽകുകയേ വഴിയുള്ളൂ.

ഭാഗം 1.7 ൽ പരിഗണിച്ച ഉദാഹരണത്തിൽ, മുകളിൽ കൊടുത്ത നിർവ്വചനങ്ങൾക്ക് പ്രാധാന്യം നൽകിയാൽ, ഗണം $F = \{(C_1, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 2500)\}$ എന്നത് ഫലനമാണ്. എന്തെന്നാൽ $F \subseteq A \times B$ എന്നത് (i), (ii) എന്നീ നിബന്ധനകളെ അനുസരിക്കുന്നു.

എന്നാൽ $B = \{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$ എന്നത് ഫലനത്തെ കുറിക്കുന്നില്ല. എന്തെന്നാൽ $(2500, C_2), (2500, C_3) \in E$ എന്നത് നിബന്ധന (ii)നെ അനുസരിക്കുന്നില്ല.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

(i) x ൽ നിക്ഷേപിക്കുന്ന ഓരോ മൂല്യത്തിനും y ൽ ഓരോ ഫലം തരുന്ന ഒരു യന്ത്രമായി f എന്ന ഫലനത്തെ സങ്കൽപ്പിക്കാം.



(ii) ഒരു ഫലനത്തെ നിർവ്വചിക്കുന്നതിന് ഒരു മണ്ഡലം, ഒരു സഹമണ്ഡലം, മണ്ഡലത്തിലെ ഓരോ അംഗത്തിനും സഹമണ്ഡലത്തിൽ ഒരേ ഒരു അംഗവുമായി ബന്ധമുണ്ടായിരിക്കണം എന്ന നിയമം എന്നിവ നമുക്ക് ആവശ്യമാണ്.

ഉദാഹരണം 1.14

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$.

$R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 10), (4, 9)\} \subseteq A \times B$ എന്നത് ഒരു ബന്ധമാണ്. എങ്കിൽ R എന്നത് ഒരു ഫലനമാണെന്ന് കാണിക്കുക. കൂടാതെ R ന്റെ മണ്ഡലം, സഹമണ്ഡലം, രംഗം എന്നിവ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം R ന്റെ മണ്ഡലം $\{1, 2, 3, 4\} = A$.

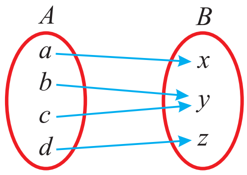
കൂടാതെ, ഓരോ $x \in A$ യ്ക്കും, ഒരേ ഒരു $y \in B$ എങ്കിൽ $y = R(x)$.

അതിനാൽ R ഒരു ഫലനമാണ്. സഹമണ്ഡലം B എന്നത് വ്യക്തമാണ്.

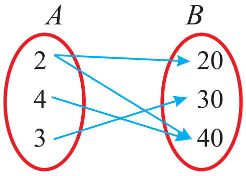
$R(1) = 3, R(2) = 6, R(3) = 10$, $R(4) = 9$, എന്നതിനാൽ R ന്റെ രംഗം $\{3, 6, 10, 9\}$.

ഉദാഹരണം 1.15

താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ള അമ്പടയാള ചിത്രങ്ങൾ ഒരു ഫലനത്തെ കുറിക്കുന്നതാണോ? വിശദീകരിക്കുക.



ചിത്രം. 1.18



ചിത്രം. 1.19

നിർദ്ധാരണം അമ്പടയാള ചിത്രം 1.18 ൽ A യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങൾക്കും ഒരേ ഒരു പ്രതിബിംബമുണ്ട്. അതിനാൽ ഇതൊരു ഫലനമാണ്. അമ്പടയാള ചിത്രം 1.19 ൽ A യിലെ 2 എന്ന അംഗത്തിന് 20, 40 എന്നീ രണ്ട് പ്രതിബിംബങ്ങളുണ്ട്. അതിനാൽ ഇതൊരു ഫലനമല്ല.

ഉദാഹരണം 1.16

$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ എങ്കിൽ താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോ ബന്ധങ്ങളും X ൽ നിന്ന് X ലേയ്ക്കുള്ള ഫലനമാണോ അല്ലയോ എന്ന് ശരി നോക്കുക. കാരണം വിശദീകരിക്കുക.

(i) $f = \{ (2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4) \}$

(ii) $g = \{ (3, 1), (4, 2), (2, 1) \}$ (iii) $h = \{ (2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 3) \}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $f = \{ (2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4) \}$

f ഒരു ഫലനമല്ല. എന്തെന്നാൽ 2 എന്ന അംഗം 3,1 എന്നീ വ്യത്യസ്തമായ അംഗങ്ങളോട് ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

(ii) $g = \{ (3, 1), (4, 2), (2, 1)\}$ എന്ന ബന്ധം ഒരു ഫലനമല്ല. എന്തെന്നാൽ 1 എന്ന അംഗത്തിന് ഒരു പ്രതിബിംബമില്ല. അതായത്, g യുടെ മണ്ഡലം $= \{2, 3, 4\} \neq X$

(iii) അടുത്തതായി നമുക്ക് $h = \{ (2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 3) \}$ പരിഗണിക്കാം.

X ലെ ഓരോ അംഗവും X ലെ ഒരേയൊരു അംഗവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. അതിനാൽ h ഒരു ഫലനമാണ്.

ഉദാഹരണം 1.17

താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബന്ധങ്ങളിൽ $A = \{ 1, 4, 9, 16 \}$ ൽ നിന്ന്

$B = \{-1, 2, -3, -4, 5, 6 \}$ ഫലനങ്ങൾ ഏവ? ഫലനമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ രംഗം എഴുതുക.

(i) $f_1 = \{ (1, -1), (4, 2), (9, -3), (16, -4) \}$

(ii) $f_2 = \{ (1, -4), (1, -1), (9, -3), (16, 2) \}$

(iii) $f_3 = \{ (4, 2), (1, 2), (9, 2), (16, 2) \}$

(iv) $f_4 = \{ (1, 2), (4, 5), (9, -4), (16, 5) \}$

നിർദ്ധാരണം (i) $f_1 = \{ (1, -1), (4, 2), (9, -3), (16, -4) \}$.

A യിലെ ഓരോ അംഗവും B യിലെ ഒരേ ഒരു അംഗവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

അതിനാൽ, f_1 ഒരു ഫലനമാണ്.

f_1 ന്റെ രംഗം $= \{-1, 2, -3, -4\}$.

(ii) $f_2 = \{ (1, -4), (1, -1), (9, -3), (16, 2) \}$.

f_2 ഒരു ഫലനമല്ല. എന്തെന്നാൽ 1 എന്നത് -4, -1 എന്നീ വ്യത്യസ്തങ്ങളായ രണ്ട് പ്രതിബിംബങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. 4 ന് പ്രതിബിംബം ഇല്ലാത്തതിനാൽ f_2 ഒരു ഫലനമല്ല.

(iii) $f_3 = \{ (4, 2), (1, 2), (9, 2), (16, 2) \}$.

A യിലെ ഓരോ അംഗവും B യിലെ ഓരോ അംഗവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

ആയതിനാൽ f_3 ഒരു ഫലനമാണ്.

f_3 ന്റെ പരിസരം $= \{ 2 \}$.

(iv) $f_4 = \{ (1, 2), (4, 5), (9, -4), (16, 5) \}$.

A യിലെ ഓരോ അംഗവും B യിലെ ഒരേയൊരു അംഗവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

അതിനാൽ, f_4 ഒരു ഫലനമാണ്.

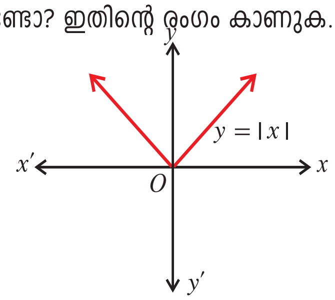
f_4 ന്റെ പരിസരം $= \{ 2, 5, -4\}$.

ഉദാഹരണം 1.18

$$|x| = \begin{cases} x\,, x \geq 0 \text{ എങ്കിൽ} \\ -x\,, x < 0 \text{ എങ്കിൽ} \end{cases}, \text{ ഇവിടെ } x \in \mathbb{R}.$$

$\{(x,y) \mid y = |x|, x \in \mathbb{R}\}$ എന്ന ബന്ധം ഒരു ഫലനത്തിനെ നിർവ്വചിക്കുന്നുണ്ടോ? ഇതിന്റെ ഗ്രാഫ് രംഗം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം x ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും $y = |x|$ എന്ന ഒരേയൊരു മൂല്യം നിലവിലുണ്ട്. അതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള ബന്ധം ഒരു ഫലനമാണ്. ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലം $\mathbb{R}$ എന്ന ഗണത്തിലെ എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകളാണ്. xന്റെ എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾക്കും $|x|$ എന്നത് എല്ലായ്പ്പോഴും പൂജ്യം അല്ലെങ്കിൽ ധനസംഖ്യ ആയിരിക്കും. കൂടാതെ ഈ ഫലനത്തിന്റെ പ്രതി ബിംബങ്ങൾ എല്ലാ ധനവാസ്തവിക സംഖ്യകളായിരിക്കും. പരിസരം ഋണമല്ലാത്ത വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ഗണമായിരിക്കും. (ധനസംഖ്യ അല്ലെങ്കിൽ പൂജ്യം)



ചിത്രം. 1.20

കുറിപ്പ്

$y = |x|$ എന്നതിനെ $|x| = \begin{cases} x\,, x \geq 0 \text{ എങ്കിൽ} \\ -x\,, x < 0 \text{ എങ്കിൽ} \end{cases}$, ഇവിടെ $x \in \mathbb{R}$.

എന്ന ഫലനം **മോഡുലസ്** അല്ലെങ്കിൽ **കേവല മൂല്യഫലനം** എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.
ഉദാഹരണമായി, $|-8| = -(-8) = 8$. കൂടാതെ $|8| = 8$

1.8.1 ഫലനങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന വിധം

ഒരു ഫലനത്തെ

(i) ക്രമജോഡികളുടെ ഗണം (ii) പട്ടികാ രൂപം (iii) അമ്പടയാള ചിത്രം

(iv) ഗ്രാഫ് എന്നീ രീതികളിൽ സൂചിപ്പിക്കാം.

$f : A \to B$ എന്നത് ഒരു ഫലനം എന്നിരിക്കട്ടെ.

(i) ഗണം $f = \{(x\,, y) : y = f(x), x \in A\}$ എന്നത് ഫലനത്തിന്റെ എല്ലാ ക്രമജോഡികളേയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

(ii) ഫലനത്തിലെ x ന്റെ മൂല്യങ്ങളും f ന്റെ പ്രതിബിംബങ്ങളും ഉപയോഗിച്ച് ഒരു പട്ടികരൂപീകരിക്കാം.

(iii) അമ്പടയാള ചിത്രം എന്നത് f ലെ മണ്ഡലത്തിലെ അംഗങ്ങളേയും അവയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന പ്രതിബിംബങ്ങളേയും അമ്പടയാളം ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നതാണ്.

(iv) $f = \{(x\,, y) : y = f(x), x \in A\}$ എന്ന ക്രമജോഡികളുടെ ശേഖരണം x-y തലത്തിൽ ബിന്ദുക്കളായി കുറിക്കാവുന്നതാണ്. അങ്ങനെയുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടേയും സമ്പൂർണ്ണതയാണ് f ന്റെ ഗ്രാഫ്.

ഫലനത്തെ വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിനെ കുറിച്ച് ചില ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ വിശദീകരിക്കാം.

ധാരാളം ഫലനങ്ങൾക്ക് നമുക്ക് അവയുടെ ഗ്രാഫ് ലഭിക്കുന്നതാണ്. എന്നാൽ എല്ലാ ഗ്രാഫുകളും ഫലനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നില്ല. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പരീക്ഷണം തന്നിട്ടുള്ള ഗ്രാഫ് ഫലനമാണോ അല്ലയോ എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു.

1.8.2 ലംബരേഖാ പരീക്ഷണം

ഒരു ഗ്രാഫ് ഒരു ഫലനത്തെ സൂചിപ്പിക്കണമെങ്കിൽ എല്ലാ ലംബരേഖകളും ഗ്രാഫിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ പ്രതിഛേദിക്കണം.

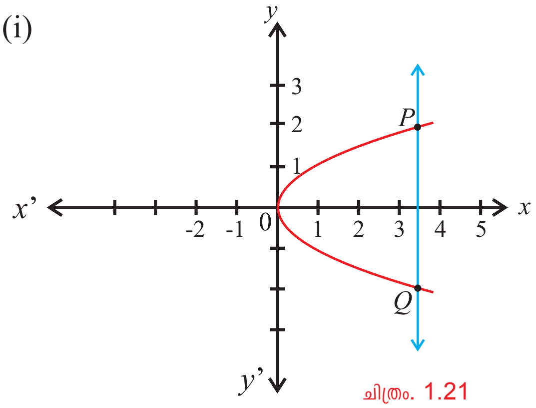
കുറിപ്പ്

ചില ലംബരേഖകൾ ഗ്രാഫിൽ പ്രതിഛേദിക്കണമെന്നില്ല. ഒരു ലംബരേഖ ഗ്രാഫിൽ ഒന്നിലധികം ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിച്ചാൽ ആ ഗ്രാഫ് ഒരു ഫലനത്തെ കുറിക്കുന്നില്ല. എന്തെന്നാൽ ഒരേ x ന് രണ്ട് മൂല്യങ്ങളെങ്കിലും ഉണ്ടായിരിക്കുന്നതാണ്. ഉദാഹരണമായി ഗ്രാഫ് $y^2 = x$ എന്നത് ഒരു ഫലനമല്ല.

ഉദാഹരണം 1.19

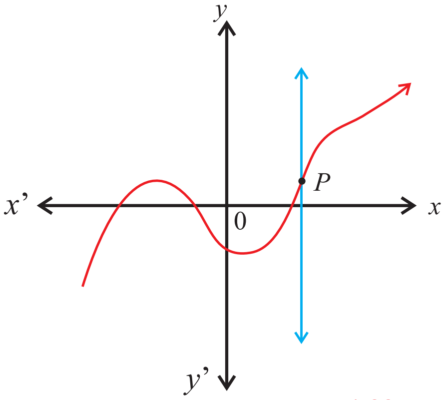
ലംബരേഖാ പരീക്ഷണം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗ്രാഫുകളിൽ ഏതൊക്കെയാണ് ഫലനത്തെക്കുറിക്കുന്നത് എന്ന് കാണുക.

(i)



ചിത്രം. 1.21

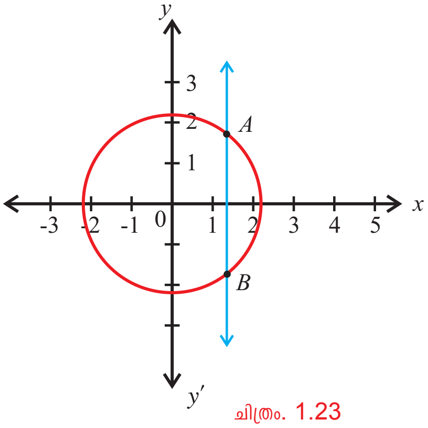
(ii)



ചിത്രം. 1.22

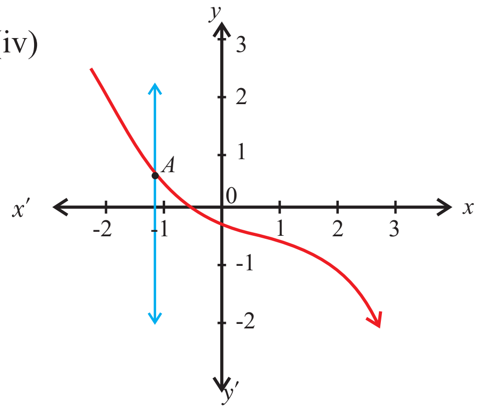
(iii)

x′



ചിത്രം. 1.23

(iv)



ചിത്രം. 1.24

നിർദ്ധാരണം

(i) ലംബരേഖ, ഗ്രാഫിൽ P, Q എന്നീ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള ഗ്രാഫ് ഒരു ഫലനമല്ല.

(ii) ലംബരേഖ, ഗ്രാഫിൽ P എന്ന ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം ഛേദിക്കുന്നതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള ഗ്രാഫ് ഒരു ഫലനമാണ്.

(iii) ഒരു ലംബരേഖ, ഗ്രാഫിൽ A , B എന്നീ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള ഗ്രാഫ് ഒരു ഫലനമല്ല.

(iv) ലംബരേഖ, ഗ്രാഫിൽ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം ഛേദിക്കുന്നതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള ഗ്രാഫ് ഒരു ഫലനമാണ്.

ഉദാഹരണം 1.20

$A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ എന്നിവ രണ്ട് ഗണങ്ങളാണ്. ഫലനം $f : A \to B$ എന്നത് $f(x) = 2x + 1$ എന്ന് കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്. ഈ ഫലനത്തെ (i) ക്രമജോഡികളുടെ ഗണം (ii) പട്ടികാരൂപം (iii) അമ്പടയാള ചിത്രം (iv) ഗ്രാഫ് എന്നീ രൂപങ്ങളിൽ കുറിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം $A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$, $f(x) = 2x + 1$

$f(0) = 2(0) + 1 = 1, f(1) = 2(1)+1 = 3, \quad f(2) = 2(2) + 1 = 5, f(3) = 2(3) + 1 = 7$

(i) ക്രമജോഡികളുടെ ഗണം

തന്നിട്ടുള്ള ഫലനം f നെ ക്രമജോഡികളുടെ ഗണമായി എഴുതാം.

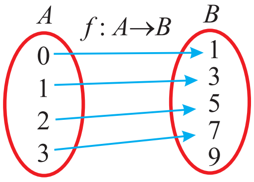
$$f = \{ (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7) \}$$

(ii) പട്ടികാരൂപം

താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ പട്ടികാരീതിയിൽ f നെ സൂചിപ്പിക്കാം.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	5	7

(iii) അമ്പടയാള ചിത്രം



ചിത്രം. 1.25

നമുക്ക് അമ്പടയാള ചിത്രമായി f നെ സൂചിപ്പിക്കാം. A, B എന്നീ ഗണങ്ങളെ രണ്ട് അടഞ്ഞ വക്രരൂപങ്ങളിൽ കുറിക്കാം. A യിലെ ഓരോ അംഗവും B യിലുള്ള ഒരേ ഒരു പ്രതിബിംബവുമായി അമ്പടയാളങ്ങളാൽ ബന്ധപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.

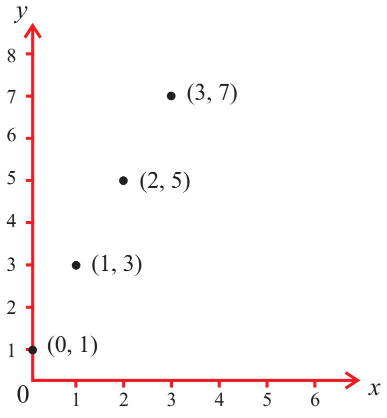
$$f = \{ (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7) \}$$

(iv) ഗ്രാഫ്

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(0,1), (1,3), (2,5), (3,7)\}$$

എന്ന് കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഇവിടെ (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ താഴെക്കാണുന്ന രീതിയിൽ തലത്തിൽ കുറിക്കാവുന്നതാണ്. ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് നിർദ്ദേശാങ്ക തലത്തിൽ ലഭിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ഗണമാണ്.

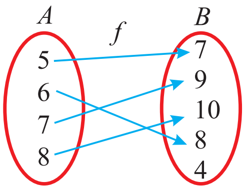


ചിത്രം. 1.26

1.8.3 ഫലനത്തിന്റെ തരങ്ങൾ

ഫലനത്തിന്റെ ചില പ്രത്യേകതകളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി പ്രധാനതരം ഫലനങ്ങളെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് പഠിക്കാം.

(i) വൺ-വൺ (One-One) ഫലനം



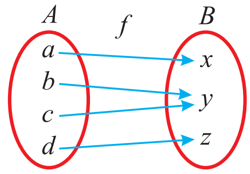
ചിത്രം.1.27

$f : A \to B$ എന്നത് ഒരു ഫലനം എന്നിരിക്കട്ടെ. A യിലെ വ്യത്യസ്തമായ അംഗങ്ങൾ B യിലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരുന്നാൽ ഫലനം f നെ ഒരു വൺ-വൺ ഫലനം എന്നു പറയാം. അതായത്, f എന്നത് ഒരു വൺ-വൺ എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ A യിലെ $u \neq v \Longrightarrow f(u) \neq f(v)$ മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, A യിലെ ഒന്നിലധികം അംഗങ്ങൾ B യിലെ അംഗവുമായി ബന്ധമില്ല.

ഒരു വൺ-വൺ ഫലനത്തെ ഇൻജെക്ടീവ് ഫലനം എന്നും വിളിക്കാം. മുകളിലെ ചിത്രം വൺ-വൺ ഫലനത്തെ ചിത്രീകരിക്കുന്നു.

(ii) ഓൺടു (Onto) ഫലനം

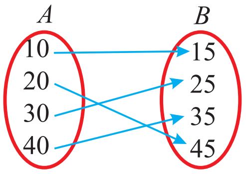
B യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങൾക്കും A യിൽ ബിംബം ഉണ്ടെങ്കിൽ ഫലനം $f : A \to B$ യെ **Onto** ഫലനം എന്നു പറയുന്നു. അതായത്, ഓരോ $b \in B$ യ്ക്കും, ഒരു അംഗമെങ്കിലും $a \in A$ എന്നത് $f(a) = b$ ആണെങ്കിൽ ഫലനം f എന്നത് ഓൺടു ഫലനം ആണ്. B യെ f ന്റെ രംഗം എന്നും പറയാം. ഒരു ഓൺടു ഫലനത്തെ സർജെക്ടീവ് **ഫലനം** എന്നും പറയാം. മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ f എന്നത് ഒരു **Onto** ഫലനമാണ്.



ചിത്രം. 1.28

(iii) വൺ - വൺ - ഓൺടു (One one Onto) ഫലനം

f ഒരു വൺ - വൺ ഫലനവും, ഓൺടു ഫലനവുമാണെങ്കിൽ, $f : A \to B$ എന്നതിനെ വൺ - വൺ - ഓൺടു ഫലനം അഥവാ ബൈജെക്ടീവ് ഫലനം എന്നു പറയുന്നു. A യിലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങൾക്ക് B യിലെ വ്യത്യസ്ത പ്രതിബിംബങ്ങളുമായി ബന്ധമുണ്ടായിരിക്കുകയും, A യിലെ എല്ലാ അംഗവും B യിലെ ചില അംഗങ്ങളുടെ പ്രതി ബിംബവും ആയിരുന്നാൽ $f : A \to B$ ഒരു വൺ - വൺ - ഓൺടു ഫലനം ആണ്.



ചിത്രം.1.29

കുറിപ്പ്

(i) $f : A \to B$ ഒരു ഓൺടു ഫലനം $\Leftrightarrow$ $B = f$ ന്റെ രംഗം.

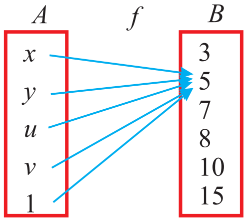
(ii) $f : A \to B$ ഒരു വൺ വൺ ഓൺടു ഫലനം $f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2$. B യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങൾക്കും A യിൽ ഒരു ബിംബമെങ്കിലും ഉണ്ടായിരിക്കണം.

(iii) $f : A \to B$ ഒരു ഫലനവും A യും B യും പരിമിത ഗണങ്ങളും ആണെങ്കിൽ $n(A) = n(B)$. ചിത്രം 1.29 ൽ ഫലനം f വൺ വൺ ഓൺടു ആണ്.

(iv) $f : A \to B$ ഒരു ബൈജെക്ടീവ് ഫലനമാണെങ്കിൽ A, B എന്നിവ സമാനഗണങ്ങളായിരിക്കും.

(v) ഒരു വൺ വൺ ഓൺടു ഫലനത്തെ ഒരു **വൺ വൺ സാദൃശ്യം** എന്നും പറയാം.

(iv) സ്ഥിര ഫലനം



ചിത്രം. 1.30

A യിലെ ഓരോ അംഗത്തിനും B യിൽ ഒരേ പ്രതിബിംബമാണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ ഫലനം $f : A \to B$ യെ **സ്ഥിര ഫലനം** എന്നു പറയുന്നു.

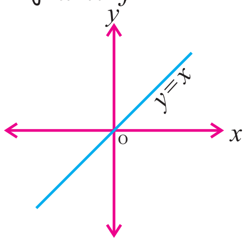
സ്ഥിര ഫലനത്തിന്റെ രംഗം ഒരു ഏകാംഗ ഗണമാണ്.

$A = \{x, y, u, v, 1\}$, $B = \{3, 5, 7, 8, 10, 15\}$ $f : A \to B$ യിലെ ഫലനത്തെ $f(x) = 5$, $x \in A$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു. തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രം സ്ഥിരഫലനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

(v) അനന്യത ഫലനം

A ശൂന്യമല്ലാത്ത ഒരു ഗണമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. എല്ലാ $a \in A$ യ്ക്കും $f(a) = a$ എങ്കിൽ $f : A \to A$ ഒരു അനന്യത ഫലനം ആണ്. അതായത്, ഒരു അനന്യത ഫലനത്തിൽ A യിലെ ഓരോ അംഗവും അതേ അംഗത്തോടു തന്നെ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $A = \mathbb{R}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. എല്ലാ $x \in \mathbb{R}$ നും $f(x) = x$ എന്നത് ഫലനം $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ഒരു അനന്യത ഫലനത്തെ നിർവ്വചിക്കുന്നു. ചിത്രം 1.31 ഒരു അനന്യത ഫലനം $\mathbb{R}$ നെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.



ചിത്രം.1.31

ഉദാഹരണം 1.21

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \mathbb{N}$ കൂടാതെ $f : A \to B$ എന്നത് $f(x) = x^2$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ f ന്റെ രംഗം കാണുക. ഏത് തരം ഫലനമാണെന്ന് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$

$f : A \to B$ കൂടാതെ $f(x) = x^2$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

$\therefore\ f(1) = 1^2 = 1$; $f(2) = 4$; $f(3) = 9$; $f(4) = 16$; $f(5) = 25$.

f ന്റെ രംഗം $= \{1, 4, 9, 16, 25\}$

A യിലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങൾ B യിലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഇതൊരു One one ഫലനമാണ്. എന്നാൽ Onto ഫലനമല്ല. കാരണം $3 \in B$ എന്നാൽ $f(x) = x^2 = 3$, $x \in A$ എന്ന തരത്തിലുള്ള ഒരംഗവും A യിലില്ല.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ എന്ന ഫലനം $g(x) = x^2$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു. ഇത് One one ഫലനമല്ല. കാരണം $u = 1$, $v = -1$ എങ്കിൽ $u \neq v$. എന്നാൽ $g(u) = g(1) = 1 = g(-1) = g(v)$ ആയതിനാൽ, ഒരു സൂത്രം ഫലനത്തെ One one അല്ലെങ്കിൽ Onto എന്ന് ഉണ്ടാക്കുന്നില്ല. ഒരു one-to-one ഉം Onto വും തീരുമാനിക്കുന്നതിന് മണ്ഡലത്തിന്റേയും സഹമണ്ഡലത്തിന്റേയും നിയമം പരിഗണിക്കേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്.

ഉദാഹരണം 1.22

$f : [1, 6) \longrightarrow \mathbb{R}$ താഴെപ്പറയുന്ന വിധം നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & 1 \leq x < 2 \\ 2x - 1 & 2 \leq x < 4 \\ 3x^2 - 10 & 4 \leq x < 6 \end{cases} \qquad (\text{ഇവിടെ}, \ [1, 6) = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 6\})$$

എങ്കിൽ (i) $f(5)$ (ii) $f(3)$ (iii) $f(1)$

(iv) $f(2) - f(4)$ (v) $2f(5) - 3f(1)$

ഇവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) *4* നും *6* നും മദ്ധ്യേ *5* സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതിനാൽ നമുക്ക് $f(x) = 3x^2 - 10$ എന്നത് ഉപയോഗിക്കാം.

$f(5) = 3(5^2) - 10 = 65$.

(ii) *2* നും *4* നും മദ്ധ്യേ *3* സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതിനാൽ നമുക്ക് $f(x) = 2x - 1$ എന്നത് ഉപയോഗിക്കാം.

അതായത്, $f(3) = 2(3) - 1 = 5$.

(iii) $1 \leq x < 2$ എന്നതിൽ *1* ഉള്ളതിനാൽ $f(x) = 1 + x$ എന്നതിൽ നിന്നും $f(1) = 1 + 1 = 2$. കിട്ടുന്നു.

(iv) $f(2) - f(4)$

ഇപ്പോൾ, $2 \leq x < 4$ ൽ 2 ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

$f(2) = 2(2) - 1 = 3$.

$4 \leq x < 6$ ൽ 4 ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

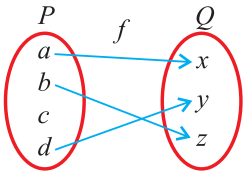
$f(4) = 3(4)^2 - 10 = 3(16) - 10 = 48 - 10 = 38$

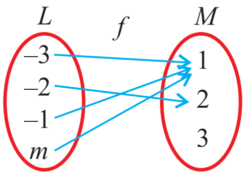
അതായത്, $f(2) - f(4) = 3 - 38 = -35$.

(v) ഇതിനു മുൻപ് കണ്ടുപിടിച്ച (i) , (iii) എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് $2\,f(5) - 3\,f(1)$ കണ്ടുപിടിക്കാം. $2\,f(5) - 3\,f(1) = 2(65) - 3(2) = 130 - 6 = 124$.

അഭ്യാസം 1.4

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അമ്പടയാള ചിത്രങ്ങൾ ഫലനമാണോ അല്ലയോ എന്ന് വ്യക്തമാക്കുക.

(i)


(ii)


2. $F = \{ (1, 3), (2, 5), (4, 7), (5, 9), (3, 1) \}$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലം, രംഗം എന്നിവ എഴുതുക.

3. $A = \{ 10, 11, 12, 13, 14 \}$; $B = \{ 0, 1, 2, 3, 5 \}$ കൂടാതെ $f_i : A \to B$, $i = 1,2,3$. താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ ഏതു തരം ഫലനമാണ് എന്ന് വ്യക്തമാക്കുക. (കാരണം നൽകുക)

$f_1 = \{ (10, 1), (11, 2), (12, 3), (13, 5), (14, 3) \}$

$f_2 = \{ (10, 1), (11, 1), (12, 1), (13, 1), (14, 1) \}$

$f_3 = \{ (10, 0), (11, 1), (12, 2), (13, 3), (14, 5) \}$

4. $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $Y = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ള A യിൽ നിന്ന് B യിലേയ്ക്കുള്ള ബന്ധങ്ങളിൽ ഏതെല്ലാമാണ് ഫലനമെന്ന് നിർണ്ണയിക്കുക. നിങ്ങളുടെ ഉത്തരത്തിന് കാരണം എഴുതുക. ഫലനമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ തരം വ്യക്തമാക്കുക.

(i) $R_1 = \{ (x, y) | y = x + 2,\ x \in X,\ y \in Y \}$

(ii) $R_2 = \{ (1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 3), (5, 5) \}$

(iii) $R_3 = \{ (1, 1), (1, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 7) \}$

(iv) $R_4 = \{ (1, 3), (2, 5), (4, 7), (5, 9), (3, 1) \}$

5. $R = \{(a, -2), (-5, b), (8, c), (d, -1)\}$ എന്നത് അനന്യത ഫലനത്തെ സൂചിപ്പിച്ചാൽ, a, b, c, d എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

6. $A = \{ -2, -1, 1, 2 \}$, $f = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x \in A\right\}$ എങ്കിൽ f ന്റെ രംഗം എഴുതുക. f എന്നത് A യിൽ നിന്നും A യിലേയ്ക്കുള്ള ഫലനമാണോ?

7. $f = \{ (2, 7), (3, 4), (7, 9), (-1, 6), (0, 2), (5, 3) \}$ എന്നത്

$A = \{ -1, 0, 2, 3, 5, 7 \}$ ൽ നിന്നും $B = \{ 2, 3, 4, 6, 7, 9 \}$ യിലേയ്ക്കുള്ള ഒരു ഫലനമാണ്. എങ്കിൽ ഇത് (i) one-one ഫലനമാണോ?
(ii) onto ഫലനമാണോ? (iii) one-one ഫലനവും onto ഫലനവും ആണോ?

8. $f = \{ (12, 2), (13, 3), (15, 3), (14, 2), (17, 17) \}$ എന്ന ഫലനത്തിൽ 2, 3 എന്നിവയുടെ ബിംബങ്ങൾ എഴുതുക.

9. താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ള പട്ടിക $A= \{ 5, 6, 8, 10 \}$ ൽ നിന്നും $B = \{ 19, 15, 9, 11 \}$ യിലേയ്ക്കുള്ള ഫലനം $f(x) = 2x - 1$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു. എങ്കിൽ a, b യുടെ ഏതെല്ലാം മൂല്യങ്ങൾക്കാണ് ഇതൊരു വൺ വൺ ഫലനമാകുന്നത്?

x	5	6	8	10
$f(x)$	a	11	b	19

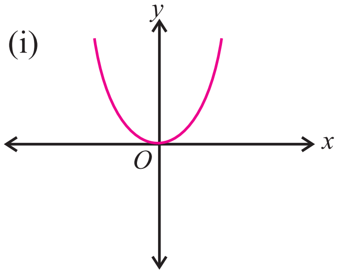
10. $A= \{ 5, 6, 7, 8 \}$; $B = \{ -11, 4, 7, -10, -7, -9, -13 \}$,

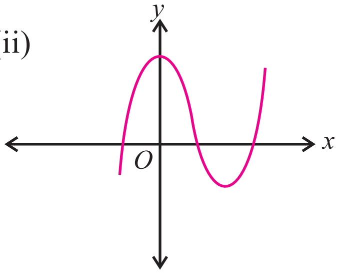
$f = \{(x, y) : y = 3 - 2x,\ x \in A,\ y \in B \}$

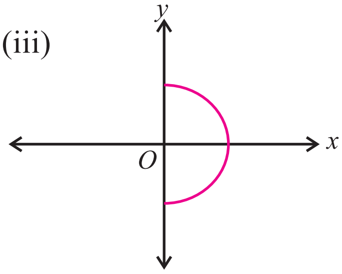
(i) f ലെ അംഗങ്ങളെ എഴുതുക. (ii) സഹമണ്ഡലം ഏത്?

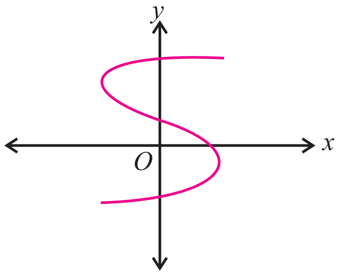
(iii) രംഗം ഏത്? (iv) ഫലനത്തിന്റെ തരം തിരിച്ചറിയുക.

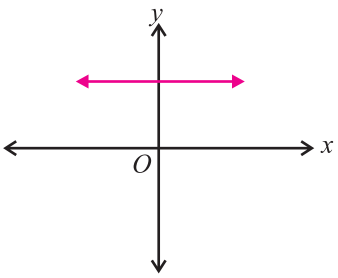
11. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഗ്രാഫുകൾ ഫലനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുണ്ടോ എന്ന് വ്യക്തമാക്കുക. നിങ്ങളുടെ ഉത്തരത്തിന് കാരണം എഴുതുക.

(i)


(ii)


(iii)


(iv)


(v)


12. $f = \{ (-1, 2), (-3, 1), (-5, 6), (-4, 3) \}$ എന്ന ഫലനത്തെ

(i) പട്ടികാ രൂപം (ii) അമ്പടയാള ചിത്രം എന്നീ രീതികളിൽ സൂചിപ്പിക്കുക.

13. $A = \{ 6, 9, 15, 18, 21 \}$; $B = \{ 1, 2, 4, 5, 6 \}$ കൂടാതെ $f : A \to B$ എന്നത്

$f(x) = \dfrac{x-3}{3}$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു. എങ്കിൽ f നെ

(i) അമ്പടയാള ചിത്രം (ii) ക്രമജോഡികളുടെ ഗണം

(iii) പട്ടികാരൂപം (iv) ഗ്രാഫ് എന്നീ രീതികളിൽ സൂചിപ്പിക്കുക.

14. $A = \{4, 6, 8, 10 \}$, $B = \{ 3, 4, 5, 6, 7 \}$. If $f : A \to B$ യെ $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു. എങ്കിൽ f നെ (i) അമ്പടയാള ചിത്രം (ii) ക്രമജോഡികളുടെ ഗണം (iii) പട്ടികാരൂപം എന്നീ രീതികളിൽ സൂചിപ്പിക്കുക.

15. ഫലനം $f : [-3, 7) \longrightarrow \mathbb{R}$ നെ താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 1; & -3 \le x < 2 \\ 3x - 2; & 2 \le x \le 4. \\ 2x - 3; & 4 < x \le 6 \end{cases}$$

(i) $f(5) + f(6)$ (ii) $f(1) - f(-3)$

(iii) $f(-2) - f(4)$ (iv) $\dfrac{f(3) + f(-1)}{2f(6) - f(1)}$ എന്നിവ കാണുക.

16. ഫലനം $f : [-7, 6) \longrightarrow \mathbb{R}$ നെ താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1; & -7 \le x < -5 \\ x + 5; & -5 \le x \le 2 \\ x - 1; & 2 < x < 6 . \end{cases}$$

(i) $2f(-4) + 3f(2)$ (ii) $f(-7) - f(-3)$ (iii) $\dfrac{4f(-3) + 2f(4)}{f(-6) - 3f(1)}$ എന്നിവ കാണുക.

അഭ്യാസം 1.5

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

1. A, B എന്ന രണ്ടു ഗണങ്ങളിൽ $A \cup B = A$ എന്നതിന് ആവശ്യമായ നിബന്ധന

(A) $B \subseteq A$ (B) $A \subseteq B$ (C) $A \neq B$ (D) $A \cap B = \phi$

2. $A \subset B$ ആണെങ്കിൽ $A \cap B =$

(A) B (B) $A \backslash B$ (C) A (D) $B \backslash A$

3. P, Q എന്ന ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ഗണങ്ങൾക്ക് $P \cap Q =$

(A) $\{x : x \in P$ അല്ലെങ്കിൽ $x \in Q\}$ (B) $\{x : x \in P$ കൂടാതെ $x \notin Q\}$

(C) $\{x : x \in P$ കൂടാതെ $x \in Q\}$ (D) $\{x : x \notin P, x \in Q\}$ }

4. $A = \{ p, q, r, s \}$, $B = \{ r, s, t, u \}$ എങ്കിൽ $A \backslash B =$

(A) $\{ p, q \}$ (B) $\{ t, u \}$ (C) $\{ r, s \}$ (D) $\{p, q, r, s \}$

5. $n[p(A)] = 64$ എങ്കിൽ $n(A) =$

(A) 6 (B) 8 (C) 4 (D) 5

6. A, B, C, എന്ന ഏതെങ്കിലും മൂന്നു ഗണങ്ങൾക്ക് $A \cap (B \cup C) =$

(A) $(A \cup B) \cup (B \cap C)$ (B) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(C) $A \cup (B \cap C)$ (D) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

7. A, B എന്ന ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ഗണങ്ങൾക്ക് $\{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\} \cap (A \cap B) =$

(A) ϕ (B) $A \cup B$ (C) $A \cap B$ (D) $A' \cap B'$

8. താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയിൽ ഏതാണ് തെറ്റ് ?

(A) $A \setminus B = A \cap B'$ (B) $A \setminus B = A \cap B$

(C) $A \setminus B = (A \cup B) \cap B'$ (D) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$

9. A, B, C എന്ന ഏതെങ്കിലും ഗണങ്ങൾക്ക് $B \setminus (A \cup C) =$

(A) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (B) $(B \setminus A) \cap (B \setminus C)$

(C) $(B \setminus A) \cap (A \setminus C)$ (D) $(A \setminus B) \cap (B \setminus C)$

10. $n(A) = 20$, $n(B) = 30$, $n(A \cup B) = 40$ എങ്കിൽ $n(A \cap B) =$

(A) 50 (B) 10 (C) 40 (D) 70.

11. $\{ (x, 2), (4, y) \}$ എന്നത് അനന്യത ഫലനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. എങ്കിൽ (x, y) എന്നത്

(A) (2, 4) (B) (4, 2) (C) (2, 2) (D) (4, 4)

12. $\{ (7, 11), (5, a) \}$ എന്നത് സ്ഥിര ഫലനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. എങ്കിൽ 'a' യുടെ മൂല്യം

(A) 7 (B) 11 (C) 5 (D) 9

13. $f(x) = (-1)^x$ എന്നത് $\mathbb{N}$ ൽ നിന്ന് $\mathbb{Z}$ ലേയ്ക്കുള്ള ഫലനമാണ്. എങ്കിൽ f ന്റെ രംഗം

(A) $\{ 1\}$ (B) $\mathbb{N}$ (C) $\{ 1, -1 \}$ (D) $\mathbb{Z}$

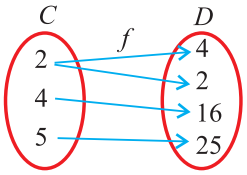
14. $f = \{ (6, 3), (8, 9), (5, 3), (-1, 6) \}$ എങ്കിൽ 3 ന്റെ ബിംബം

(A) 5 , –1 (B) 6 , 8 (C) 8 , –1 (D) 6 , 5.

15. $A = \{ 1, 3, 4, 7, 11 \}$, $B = \{-1, 1, 2, 5, 7, 9 \}$ കൂടാതെ $f : A \rightarrow B$ എന്നത്

$f = \{ (1, -1), (3, 2), (4, 1), (7, 5), (11, 9) \}$. എങ്കിൽ f ഒരു

(A) *One -one* ഫലനം (B) *Subjective* ഫലനം (C) *Bijective* ഫലനം (D) ഫലനമല്ല

16. 

തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രം സൂചിപ്പിക്കുന്നത്

(A) *Subjective* ഫലനം (B) ഒരു സ്ഥിരഫലനം

(C) *One-one* ഫലനം (D) ഫലനമല്ല

17. $A = \{ 5, 6, 7 \}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ കൂടാതെ $f : A \to B$ എന്നത് $f(x) = x - 2$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു f ന്റെ രംഗം

(A) $\{ 1, 4, 5 \}$ (B) $\{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ (C) $\{ 2, 3, 4 \}$ (D) $\{ 3, 4, 5 \}$

18. $f(x) = x^2 + 5$ എങ്കിൽ $f(-4) =$

(A) 26 (B) 21 (C) 20 (D) –20

19. ഫലനത്തിന്റെ രംഗം ഒരു ഏകാങ്കഗണം. എങ്കിൽ അത്

(A) സ്ഥിര ഫലനം (B) അനന്വത ഫലനം

(C) bijective ഫലനം (D) ഒരു one-one ഫലനം

20. $f : A \to B$ ഒരു bijective ഫലനവും $n(A) = 5$ ഉം ആണെങ്കിൽ $n(B) =$

(A) 10 (B) 4 (C) 5 (D) 25

ഓർമ്മിക്കേണ്ടവ

ഗണങ്ങൾ

- വ്യക്തമായി നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട വസ്തുക്കളുടെ ശേഖരണമാണ് ഒരു ഗണം.
  - ഗണങ്ങളുടെ യോഗം ക്രമവിനിമേയവും സംയോജനവുമാണ്.
  - ഗണങ്ങളുടെ സംഗമം ക്രമവിനിമേയവും സംയോജനവുമാണ്.
  - ഗണങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം ക്രമവിനിമേയമല്ല.
  - ഗണങ്ങൾ പരസ്പരം വിയുക്തമാണെങ്കിൽ അവയുടെ വ്യത്യാസം സംയോജനമാണ്.
- വിതരണ നിയമങ്ങൾ
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- ഗണവ്യത്യാസങ്ങൾക്കുള്ള ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ
  - $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
  - $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$
- പൂരകഗണങ്ങൾക്കുള്ള ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$
  - $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- ഗണയോഗങ്ങളുടെ ഗണനസംഖ്യാ സൂത്രം
  - $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
  - $n(A \cup B \cup C)$
    $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$

ഫലനങ്ങൾ

- A, B എന്നിവയുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം

  $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A$ കൂടാതെ $b \notin B\}$

- A യിൽ നിന്ന് B ലേയ്ക്കുള്ള R എന്ന ബന്ധം $A \times B$ യുടെ ശൂന്യമല്ലാത്ത ഉപഗണമാണ്. അതായത് $R \subseteq A \times B$.

- താഴെപ്പറയുന്ന നിബന്ധനകൾ അനുസരിച്ചാൽ $f : X \rightarrow Y$ എന്നത് ഒരു ഫലനമാണ്. എല്ലാ $x \in X$ ലും, ഒരേയൊരു $y \in Y$ മായി ബന്ധിച്ചിട്ടുണ്ട്.

- ഓരോ ഫലനത്തേയും ഒരു ഗ്രാഫ് കൊണ്ട് പ്രതിനിധീകരിക്കാവുന്നതാണ്. പൊതുവായി അതിന്റെ വിപരീതം ശരിയാകണമെന്നില്ല.

- ഓരോ ലംബരേഖയും ഗ്രാഫിൽ ഒരു ബിന്ദുവിൽ പ്രതിഛേദിച്ചാൽ അത് ഒരു ഫലനമായിരിക്കും.

- ഒരു ഫലനത്തെ

  ➢ ക്രമജോഡികളുടെ ഗണം ➢ അമ്പടയാള ചിത്രം ➢ പട്ടികാരൂപം ➢ ഗ്രാഫ് എന്നിങ്ങനെ വിവരിക്കാം.

- മോഡുലസ് അല്ലെങ്കിൽ കേവല മൂല്യഫലനം $y = |x|$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \nless 0 \end{cases}$$

- **ചില തരം ഫലനങ്ങൾ**

  - One-one ഫലനം (ഇൻജക്റ്റീവ് ഫലനം) — (വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങൾക്ക് വ്യത്യസ്ത പ്രതിബിംബം ഉണ്ട്.)
  - Onto ഫലനം (സർജക്റ്റീവ് ഫലനം) — (രംഗവും സഹമണ്ഡലവും സമമാണ്)
  - Bijective ഫലനം — (One-one ഉം Onto ഉം ആണ്)
  - സ്ഥിര ഫലനം — (രംഗം ഒരു ഏകാംഗ ഗണം)
  - അനന്യത ഫലനം — (ഓരോ നിക്ഷേപവും അതേ രീതിയിൽ തുടരുന്നു)

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

USA യിലെ Clay Mathematics സ്ഥാപനം 2000 ൽ പ്രസ്ഥാപിച്ച ഏഴ് പ്രശ്നങ്ങളാണ് Millennium Prize problems. 2010 ആഗസ്റ്റ് വരെ അവയിൽ ആറ് പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് നിർദ്ധാരണം കണ്ടെത്തിയിട്ടില്ല. ഒരു പ്രശ്നത്തിന്റെ ശരിയായ നിർദ്ധാരണത്തിന് സ്ഥാപനം US $1000,000 അവാർഡ് നൽകുന്നതാണ്. Poincare അനുമാനം മാത്രമാണ് 2010 ൽ റഷ്യൻ ശാസ്ത്രജ്ഞനായ Girigori Perelman നിർദ്ധാരണം ചെയ്തത്. എന്നാൽ അദ്ദേഹം അതിനുള്ള അവാർഡ് നിരസിക്കുകയാണ് ചെയ്തത്.

ഒരുപ്രസ്താവന തെളിയിക്കപ്പെടുകയോ തെളിയിക്കപ്പെടാതിരിക്കുകയോ ചെയ്യുന്നതുവരെ അതിനെ അനുമാനം എന്നു പറയുന്നു.

2

വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ അനുക്രമങ്ങളും ശ്രേണികളും

- മുഖവുര
- അനുക്രമങ്ങൾ
- കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമം (A.P.)
- ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമം (G.P.)
- ശ്രേണികൾ

ലിയാനാർഡോ പിസാനോ (ഫിബോനാച്ചി)

(1170-1250)

ഇറ്റലി

ആധുനിക ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിനെ പുനർജീവിപ്പിക്കാൻ ഫിബോനാച്ചി ഒരു മുഖ്യ പങ്ക് വഹിച്ചിരുന്നു.

അദ്ദേഹം കണ്ടുപിടിക്കാത്തതും എന്നാൽ ഉദാഹരണമായി ഉപയോഗിച്ച തുമായ ഒരു സംഖ്യാക്രമം അദ്ദേഹത്തി നുശേഷം ഫിബോനാച്ചി സംഖ്യകൾ എന്നറിയപ്പെട്ടതിനാൽ ആധുനിക ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻമാർക്കിടയിൽ അദ്ദേഹം പ്രശസ്തനായി.

Mathematics is the Queen of Sciences, and arithmetic is the Queen of Mathematics - C.F.Gauss

2.1 മുഖവുര

ഈ അധ്യായത്തിൽ വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ അനുക്രമങ്ങളേയും ശ്രേണികളേയും കുറിച്ച് പഠിക്കാം. ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിൽ ഒരു സുദീർഘമായ ചരിത്രം ഉള്ള അടിസ്ഥാന ഗണിത ഉപാധികളാണ് അനുക്രമങ്ങൾ. അവ പല ആശയ വികസനത്തിന്റെ ഉപാധികൾ മാത്രമല്ല, യഥാർത്ഥ ജീവിത സാഹചര്യങ്ങളെ ഗണിതവൽക്കരിക്കാനുള്ള ഉപാധികളുമാണ്.

N , R എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾ യഥാക്രമം ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഗണം, വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ഗണം എന്നത് ഓർമ്മിക്കുക. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന നിത്യജീവിതത്തെ ആസ്പദമാക്കിയുള്ളവയെ നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം.

(i) ഒരു സംഘം ISRO ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാർ സമുദ്രനിരപ്പിൽ നിന്നും ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ ഉയരത്തെ ക്രമമായ ഇടവേളകളിൽ നിശ്ചിത സമയങ്ങളിൽ നിരീക്ഷിച്ച് രേഖപ്പെടുത്തുന്നു.

(ii) റെയിൽവേ മന്ത്രിസഭ ചെന്നൈയിൽ കേന്ദ്ര റയിൽവേ നിലയത്തെ ഓരോ ദിവസവും ഉപയോഗിക്കുന്ന ആളുകളുടെ എണ്ണത്തെ കണ്ടുപിടിക്കാൻ തീരുമാനിച്ചു. അതിനാൽ, കേന്ദ്ര റെയിൽവേ നിലയത്തിൽ ദിവസേന പ്രവേശിക്കുന്ന ആളുകളുടെ എണ്ണം 180 ദിവസങ്ങൾക്ക് രേഖപ്പെടുത്തി.

(iii) ഒൻപതാം തരത്തിലെ ജിജ്ഞാസുവായ ഒരു വിദ്യാർത്ഥി $\sqrt{5} = 2.236067978\cdots$ എന്ന അപരിമേയ സംഖ്യയിലെ ദശാംശ ഭാഗത്തിന്റെ എല്ലാ അക്കങ്ങളേയും കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിൽ താൽപര്യപ്പെട്ട്, അവയെ ഇങ്ങനെ എഴുതി: $2, 3, 6, 0, 6, 7, 9, 7, 8, \cdots$

(iv) ഒരു വിദ്യാർത്ഥി അംശം 1 ൽ നിന്ന് ആരംഭിക്കുന്ന എല്ലാ ധന ഭിന്നങ്ങളേയും കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിൽ താൽപര്യപ്പെട്ട്, അവയെ ഇങ്ങനെ എഴുതി :$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$

(v) ഒരു ഗണിത അദ്ധ്യാപിക തന്റെ ക്ലാസ്സിലെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ പേരിനെ അക്ഷരമാലാക്രമത്തിൽ എഴുതി അവരുടെ മാർക്കുകളെ ഇങ്ങനെ എഴുതി : 75, 95, 67, 35, 58, 47, 100, 89, 85, 60..

(vi) അതേ അദ്ധ്യാപിക അതേ വിവരങ്ങളെ ആരോഹണക്രമത്തിൽ ഇങ്ങനെ എഴുതി :

35, 47, 58, 60, 67, 75, 85, 89, 95, 100..

മുകളിലെ ഓരോ ഉദാഹരണങ്ങളിലും , വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ചില ഗണത്തെ ചില ക്രമങ്ങളിൽ പട്ടികയിട്ടുണ്ട്.

(iii), (iv) എന്നീ പട്ടികയിൽ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം അനന്തമാണ്. (i), (ii), (v), (vi) എന്നിവയിൽ പദങ്ങൾ പരിമിതമാണ് ; എന്നാൽ (v), (vi) എന്നിവയിൽ ഒരേ ഗണത്തിലുള്ള സംഖ്യകൾ വ്യത്യസ്ത ക്രമത്തിലാണ്.

2.2 അനുക്രമങ്ങൾ

നിർവ്വചനം

വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ അനുക്രമം എന്നത് വാസ്തവിക സംഖ്യകളെ ചില ക്രമങ്ങളിൽ ക്രമീകരിക്കുന്നത് അല്ലെങ്കിൽ പട്ടികയിടുന്നതാണ്.

(i) **ഒരു അനുക്രമത്തിലെ പദങ്ങൾ പരിമിതമാണെങ്കിൽ അവയെ പരിമിത അനുക്രമം എന്നു പറയുന്നു.**

(ii) **ഒരു അനുക്രമത്തിലെ പദങ്ങൾ അനന്തമാണെങ്കിൽ അവയെ അനന്ത അനുക്രമം എന്നു പറയുന്നു.**

ഒരു പരിമിത അനുക്രമത്തെ $S : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ അല്ലെങ്കിൽ $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ എന്നും ഒരു അനന്ത അനുക്രമത്തെ $S : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ അല്ലെങ്കിൽ $S = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ എന്നും കുറിക്കുന്നു. ഇവിടെ a_k എന്നത് അനുക്രത്തിലെ k-ാം പദത്തെ കുറിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി, അനുക്രമത്തിലെ ആദ്യപദം a_1 എന്നും 7-ാം പദം a_7 എന്നും കുറിക്കുന്നു.

മുകളിലെ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ (i), (ii), (v), (vi) എന്നിവ പരിമിത അനുക്രമങ്ങളും, (iii), (iv) എന്നിവ അനന്ത അനുക്രമങ്ങളുമാണ്.

സംഖ്യകളുടെ ശേഖരണത്തെ ഒരു അനുക്രമമായി പട്ടികയിടുമ്പോൾ, അനുക്രമത്തിലുള്ള പദങ്ങൾ ആദ്യപദം, രണ്ടാം പദം, മൂന്നാം പദം, ... എന്നിങ്ങനെ അറിയപ്പെടുന്നു.

അനുക്രമങ്ങളുടെ ചില ഉദാഹരണങ്ങളെ നാം ഇതിനു മുമ്പ് കണ്ടുവല്ലോ. താഴെക്കൊടുത്ത ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടുതലായി നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം.

(i) $2, 4, 6, 8, \cdots, 2010.$ (പദങ്ങൾ പരിമിതമാണ്)

(ii) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots .$ (പദങ്ങൾ 1, -1 നും ഇടയിൽ വ്യതിചലിക്കുന്നു)

(iii) $\pi, \pi, \pi, \pi, \pi.$ (സ്ഥിര അനുക്രമങ്ങൾ)

(iv) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \cdots .$ (എല്ലാം അഭാജ്യസംഖ്യകളുടേയും പട്ടിക)

(v) $0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, 0.33333, \cdots$ (പദങ്ങൾ അനന്തമാണ്)

(vi) $S = \{a_n\}_1^{\infty}$, ഇവിടെ $a_n = 1$ അല്ലെങ്കിൽ 0 എന്നത് ഒരു നാണയത്തിന്റെ n-ാം ടോസിന്റെ ഫലം തല അല്ലെങ്കിൽ പൂവ് കിട്ടുന്നത്.

മുകളിൽ കൊടുത്ത ഉദാഹരണങ്ങളിൽ (i), (iii) എന്നിവ പരിമിത അനുക്രമങ്ങളും, ശേഷമുള്ള അനുക്രമങ്ങൾ അനന്ത അനുക്രമങ്ങളുമാണ്. (i) മുതൽ (v) വരെയുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളിൽ, പട്ടികയിൽ ഒരു നിശ്ചിതമായ മാതൃക അല്ലെങ്കിൽ നിയമം ഉള്ളതിനാൽ, അനുക്രത്തിലെ ഏതെങ്കിലും പദത്തിന്റെ പ്രത്യേക സ്ഥാനം കണ്ടുപിടിക്കാൻ നമുക്ക് സാധിക്കും.

എന്നാൽ (vi)ൽ ഒരു പ്രത്യേക പദം ഏതെന്ന് മുൻകൂട്ടി പറയാൻ സാധിക്കില്ല. എങ്കിലും, അത് 1 അല്ലെങ്കിൽ 0 എന്ന് നമുക്ക് അറിയാവുന്നതാണ്. ഇവിടെ നാം ഉപയോഗിച്ച മാതൃക എന്ന വാക്കിന്റെ അർത്ഥം അനുക്രമത്തിലെ മുമ്പേ വരുന്ന പദങ്ങളുടെ അറിവിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കി n -ാം പദം തിരിച്ചറിയുന്നു എന്നതാണ്. പൊതുവായി അനുക്രമങ്ങളെ ഫലനങ്ങളായി കാണാൻ കഴിയുന്നതാണ്.

2.2.1 അനുക്രമങ്ങളെ ഫലനങ്ങളായി കാണൽ

ഒരു പരിമിത വാസ്തവിക അനുക്രമം $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ അല്ലെങ്കിൽ $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ നെ $f(k) = a_k,\ k = 1, 2, 3, \cdots, n.$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട $f : \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\} \to \mathbb{R}$ എന്ന ഒരു ഫലനമായി കാണാം.

ഒരു അനന്ത വാസ്തവിക അനുക്രമം $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ അല്ലെങ്കിൽ $\{S_j = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ നെ $g(k) = a_k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ എന്ന ഒരു ഫലനമായി കാണാം.

ചിഹ്നം $\forall$ അർത്ഥമാക്കുന്നത് എല്ലാറ്റിനും എന്നാണ്. ഒരു അനുക്രമം $\{a_k\}_1^{\infty}$ യിലെ പൊതുപദം a_k തന്നിരുന്നാൽ പൂർണ്ണ അനുക്രമം നമുക്ക് രൂപീകരിക്കാവുന്നതാണ്.

ഇങ്ങനെ, മണ്ഡലം നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ $\{1, 2, 3, \cdots\}$ എന്ന ഗണവും അല്ലെങ്കിൽ നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ ചില ഉപഗണവും, പരിസരം വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ഉപഗണവും ആയിട്ടുള്ള ഒരു ഫലനമാണ് ഒരു അനുക്രമം.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

ഒരു ഫലനം ഒരു അനുക്രമമായിരിക്കണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി $f(x) = 2x + 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$ എന്ന് തന്നിട്ടുള്ള $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ എന്ന ഫലനം ഒരു അനുക്രമമല്ല, എന്തെന്നാൽ ഈ ഫലനത്തിന്റെ പരിസരത്തിലെ പദങ്ങളെ അനുക്രമങ്ങളായി ക്രമീകരിക്കാൻ സാധ്യമല്ല. കൂടാതെ, f ന്റെ മണ്ഡലം $\mathbb{N}$ അല്ലെങ്കിൽ $\mathbb{N}$ ന്റെ ഒരു ഉപഗണം $\{1, 2, \cdots, n\}$ അല്ല.

ഉദാഹരണം 2.1

ഒരു അനുക്രമത്തിന്റെ n-ാം പദം $c_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ എങ്കിൽ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ എഴുതുക

നിർദ്ധാരണം

$$c_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$n = 1,$ എങ്കിൽ $c_1 = \dfrac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1.$

$n = 2,$ എങ്കിൽ $c_2 = \dfrac{2(2+1)(4+1)}{6} = \dfrac{2(3)(5)}{6} = 5.$

$n = 3,$ എങ്കിൽ $c_3 = \dfrac{3(3+1)(7)}{6} = \dfrac{(3)(4)(7)}{6} = 14.$

അതായത്, അനുക്രമത്തിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ 1, 5, 14 ആണ്.

മുകളിലെ ഉദാഹരണത്തിൽ, പൊതുപദത്തിന് ഒരു സൂത്രം തന്നതിനാൽ ഏത് പ്രത്യേക പദത്തേയും കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിച്ചു. താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണത്തിൽ, ഒരു അനുക്രമത്തിനെ മറ്റൊരു രീതിയിൽ രൂപീകരിക്കുന്നതു കാണാം.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\quad n = 3, 4, \cdots.$$

ഉദാഹരണം 2.2

താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോ അനുക്രമങ്ങളുടേയും ആദ്യത്തെ അഞ്ചു രൂപങ്ങൾ എഴുതുക.

(i) $a_1 = -1,\qquad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n+2},\quad n > 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

(ii) $F_1 = F_2 = 1\ ,\quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\quad n = 3, 4, \cdots.$

നിർദ്ധാരണം

(i) $a_1 = -1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{n+2}$, $n > 1$

$$a_2 = \frac{a_1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3+2} = \frac{-\frac{1}{4}}{5} = -\frac{1}{20}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4+2} = \frac{-\frac{1}{20}}{6} = -\frac{1}{120}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{5+2} = \frac{-\frac{1}{120}}{7} = -\frac{1}{840}$$

$\therefore$ അനുക്രമത്തിലെ ആവശ്യപ്പെട്ട പദങ്ങൾ $-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{120}, -\frac{1}{840}$ ആണ്

(ii) $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $\forall n = 3, 4, 5, \cdots$

$$F_1 = 1, F_2 = 1$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

$\therefore$ അനുക്രമത്തിലെ ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങൾ 1, 1, 2, 3, 5 ആണ്

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

$F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n = 3, 4, \cdots$ എന്ന അനുക്രമത്തെ ഫിബോനാച്ചി അനുക്രമം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിന്റെ പദങ്ങൾ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, $\cdots$.ആണ്. ഒരു സൂര്യകാന്തിപ്പൂവിൽ വിത്തുകളെ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയുള്ള ഫിബോനാച്ചി അനുക്രമം പ്രകൃതിയിൽ കാണുന്നുണ്ട്. ഒരു സൂര്യകാന്തിപ്പൂവിൽ സർപ്പിളാകൃതിയിൽ (spiral) എതിർദിശയിൽ കാണപ്പെടുന്ന വിത്തുകളുടെ എണ്ണം ഫിബോനാച്ചി അനുക്രമത്തിലുള്ള അടുത്തടുത്ത സംഖ്യകളാകുന്നു.

അഭ്യാസം 2.1

1. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പൊതു പദങ്ങളുള്ള അനുക്രമങ്ങളുടെ ആദ്യത്തെ മൂന്ന് പദങ്ങൾ എഴുതുക

   (i) $a_n = \frac{n(n-2)}{3}$ (ii) $c_n = (-1)^n 3^{n+2}$ (iii) $z_n = \frac{(-1)^n n(n+2)}{4}$

2. n -ാം പദങ്ങൾ തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമങ്ങളിൽ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള പദങ്ങൾ കാണുക

   (i) $a_n = \frac{n+2}{2n+3}$; a_7, a_9 (ii) $a_n = (-1)^n 2^{n+3}(n+1)$; a_5, a_8

   (iii) $a_n = 2n^2 - 3n + 1$; a_5, a_7. (iv) $a_n = (-1)^n(1 - n + n^2)$; a_5, a_8

3. $$a_n = \begin{cases} n(n+3), & n \in \mathbb{N} \text{ ഇരട്ടസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ} \\ \dfrac{2n}{n^2+1}, & n \in \mathbb{N} \text{ ഒറ്റസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ} \end{cases}$$

എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട അനുക്രമത്തിന്റെ 18 -ാം, 25 -ാം പദങ്ങൾ കാണുക

4. $$b_n = \begin{cases} n^2, & n \in \mathbb{N}, \text{ n ഇരട്ടസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ} \\ n(n+2), & n \in \mathbb{N}, \text{ n ഒറ്റസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ} \end{cases}$$

എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട അനുക്രമത്തിന്റെ 13 -ാം, 16 -ാം പദങ്ങൾ കാണുക.

5. $$a_1 = 2, a_2 = 3 + a_1\ ,\ a_n = 2a_{n-1} + 5,\ n > 2$$

എന്ന അനുക്രമത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങൾ കാണുക

6. $$a_1 = a_2 = a_3 = 1\ ,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ ,\ \ n > 3.$$

എന്ന അനുക്രമത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ ആറു പദങ്ങൾ കാണുക

2.3 കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമം അല്ലെങ്കിൽ കൂട്ടുസമാന്തര പ്രോഗ്രഷൻ (A.P.)

ഈ ഭാഗത്തിൽ ചില സവിശേഷതരം അനുക്രമങ്ങളെ നമുക്ക് കാണാം.

നിർവ്വചനം

$a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbb{N}$, d **ഒരു സ്ഥിരാങ്കം, എങ്കിൽ** $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ **എന്ന ഒരു അനുക്രമത്തെ കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമം എന്നു പറയുന്നു. ഇവിടെ** a_1 **നെ ആദ്യപദമെന്നും, സ്ഥിരാങ്കം** d **യെ പൊതു വ്യത്യാസമെന്നും പറയുന്നു. ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തെ കൂട്ടുസമാന്തര പ്രോഗ്രഷൻ എന്നും പറയുന്നു.**

ഉദാഹരണങ്ങൾ

(i) 2, 5, 8, 11, 14, $\cdots$ ഒരു A.P. യാണ് , എന്തെന്നാൽ $a_1 = 2$, പൊതുവ്യത്യാസം $d = 3$.

(ii) $-4, -4, -4, -4, \cdots$ ഒരു A.P. യാണ് , എന്തെന്നാൽ $a_1 = -4$, $d = 0$.

(iii) 2, 1.5, 1, 0.5, 0, -0.5, -1.0, $-1.5, \cdots$ ഒരു A.P. യാണ് , എന്തെന്നാൽ $a_1 = 2, d = -0.5$.

ഒരു A.P. യുടെ പൊതുരൂപം

ഒരു A.P. യുടെ പൊതുരൂപം നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം. ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമം $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ യിലെ ആദ്യപദം a, പൊതുവ്യത്യാസം d എന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ $$a_1 = a\ ,\ a_{n+1} = a_n + d\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

n = 1, 2, 3 യ്ക്ക് ,

$$a_2 = a_1 + d = a + d = a + (2-1)d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a+d) + d = a + 2d = a + (3-1)d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a+2d) + d = a + 3d = a + (4-1)d$$

ഈ മാതൃക തുടർന്നാൽ n -ാം പദം a_n എന്നത്

$$a_n = a_{n-1} + d = [a + (n-2)d] + d = a + (n-1)d.$$

അങ്ങനെ, $a_n = a + (n-1)d, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

അതിനാൽ, ഒരു A.P. എന്നത്

$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots,\ a+(n-1)d,\ a+nd, \cdots$ എന്ന് കാണാം.

അതായത് , ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തിന്റെ പൊതുവായ പദത്തിന്റെ സൂത്രം

$t_n = a + (n-1)d \ , \forall\ n \in \mathbb{N}$.

കുറിപ്പ്

(i) ഒരു അനുക്രമം ഒരു പരിമിത അനുക്രമവും ആകാമെന്നത് ഓർമ്മിക്കുക. അതിനാൽ, ഒരു A.P. യിൽ n പദങ്ങൾ മാത്രമാണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ അവസാനപദം $l = a + (n-1)d$

(ii) $l = a + (n-1)d$ എന്നതിനെ $n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$ എന്നും എഴുതാം. ഇത് ആദ്യപദം, അവസാനം പദം, പൊതുവ്യത്യാസം എന്നിവ തന്നിരുന്നാൽ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു.

(iii) ഒരു A.P.യിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള മൂന്ന് പദങ്ങൾ $m-d,\ m,\ m+d$. ഇവയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം d

(iv) ഒരു A.P. യിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള നാല് പദങ്ങൾ $m-3d,\ m-d,\ m+d,\ m+3d$ ഇവയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം $2d$

(v) ഒരു A.P. യിലെ ഓരോ പദത്തിനോടും ഒരു സ്ഥിരാങ്കം കൂട്ടുകയോ, ഓരോ പദത്തിൽ നിന്നും ഒരു സ്ഥിരാങ്കം കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്താൽ അത് ഒരു A.P. യായിരിക്കും.

(vi) ഒരു A.P. യിലെ ഓരോ പദത്തേയും ഒരു പൂജ്യമല്ലാത്ത സ്ഥിരാങ്കം കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയോ ഹരിക്കുകയോ ചെയ്യുമ്പോൾ കിട്ടുന്നതും ഒരു A.P. തന്നെയായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 2.3

താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ള അനുക്രമങ്ങളിൽ A.P. ഏവ ?

(i) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \cdots$. (ii) $3m-1, 3m-3, 3m-5, \cdots$.

നിർദ്ധാരണം

(i) തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമത്തിലെ n -ാം പദം, t_n , $n \in \mathbb{N}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$\therefore \quad t_1 = \frac{2}{3},\ t_2 = \frac{4}{5},\ t_3 = \frac{6}{7}$

$t_2 - t_1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$

$t_3 - t_2 = \frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{30-28}{35} = \frac{2}{35}$

$t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$, ആയതിനാൽ, തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമം ഒരു A.P. അല്ല

(ii) $3m-1, 3m-3, 3m-5, \cdots$.

ഇവിടെ $t_1 = 3m-1,\ t_2 = 3m-3,\ t_3 = 3m-5, \cdots$.

$\therefore \quad t_2 - t_1 = (3m-3) - (3m-1) = -2$

$t_3 - t_2 = (3m-5) - (3m-3) = -2$

അതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമം ഒരു A.P. യാണ് ഇതിന്റെ ആദ്യപദം 3m–1, പൊതുവ്യത്യാസം –2 ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 2.4

A.P. യുടെ ആദ്യപദവും, പൊതുവ്യത്യാസവും കാണുക

(i) $5, 2, -1, -4, \cdots$. (ii) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{17}{6}$

നിർദ്ധാരണം

(i) ആദ്യപദം $a = 5$, പൊതുവ്യത്യാസം $d = 2 - 5 = -3$.

(ii) $a = \frac{1}{2}$, പൊതുവ്യത്യാസം d $= \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}$.

ഉദാഹരണം 2.5

$20, 19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}, \cdots$ എന്ന കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തിന്റെ പദം t_n ഒരു ഋണസംഖ്യയാകാനുള്ള n-ന്റെ ഏറ്റവും ചെറിയ ധനപൂർണ്ണാങ്കം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $a = 20$, $d = 19\frac{1}{4} - 20 = -\frac{3}{4}$.

ആദ്യത്തെ ധന പൂർണ്ണാങ്കം n, $t_n < 0$. കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

ഇത് $a + (n-1)d < 0$ ചെറിയ $n \in \mathbb{N}$ നു നിർദ്ധാരണം കാണുന്നതിനു സമമാണ്.

അതായത് $20 + (n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < 0$ ചെറിയ $n \in \mathbb{N}$ നു നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നത്.

$$(n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < -20$$

$\Longrightarrow (n-1) \times \frac{3}{4} > 20$ ($\because$ അസമീകരണത്തിന്റെ ഇരുവശങ്ങളും -1 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതിനാൽ)

$$\therefore \quad n - 1 > 20 \times \frac{4}{3} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$$

$$n > 26\frac{2}{3} + 1, \quad n > 27\frac{2}{3} = 27.66$$

അതായത് , അസമീകരണത്തെ തൃപ്തിയാക്കുന്ന ചെറിയ ധനപൂർണ്ണാങ്കം $n = 28$.

$\therefore$ കൂട്ടു സമാന്തര അനുക്രമത്തിൽ ആദ്യത്തെ ഋണസംഖ്യയുള്ള പദം, 28 ആകുന്നത് t_{28} ആണ്.

ഉദാഹരണം 2.6

ഒരു പൂന്തോട്ടത്തിൽ ആദ്യത്തെ വരിയിൽ 23 റോസാച്ചെടികൾ, രണ്ടാമത്തെ വരിയിൽ 21, മൂന്നാമത്തെ വരിയിൽ 19... എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്നു. അവസാനത്തെ വരിയിൽ 5 റോസാച്ചെടികളുണ്ടെങ്കിൽ പൂന്താട്ടത്തിൽ എത്രവരികളുണ്ട് ?

നിർദ്ധാരണം പൂന്തോട്ടത്തിലെ വരികളുടെ എണ്ണം n എന്നിരിക്കട്ടെ. 1, 2, 3, ..., n വരികളിലുള്ള റോസാച്ചെടികളുടെ എണ്ണം $23, 21, 19, \cdots, 5$ ആണ്.

ഇവിടെ $t_k - t_{k-1} = -2$, $k = 2, \cdots, n$.

അതിനാൽ $23, 21, 19, \cdots, 5$ എന്ന അനുക്രമം ഒരു A.P. യിലാണ്.

$a = 23, \quad d = -2,, \; l = 5.$

$\therefore \quad n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{5-23}{-2} + 1 = 10.$

അതിനാൽ, പൂന്തോട്ടത്തിൽ 10 വരികളുണ്ട്

ഉദാഹരണം 2.7

ഒരു വ്യക്തി 2010 ൽ വാർഷിക ശമ്പളം ₹ 30000 ന് ജോലിയിൽ ചേർന്നു. ശമ്പള വർദ്ധനവ് ഓരോ വർഷവും ₹ 600 ആണെങ്കിൽ ഏത് വർഷമാണ് അദ്ദേഹത്തിന് വാർഷിക ശമ്പളം ₹ 39000 ലഭിക്കുന്നത് ?

നിർദ്ധാരണം വ്യക്തിയുടെ വാർഷിക ശമ്പളം ₹39000 ൽ എത്തുന്നത് n-ാം വർഷമാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക.

2010,2011, 2012, $\cdots$, $[2010 + (n-1)]$ൽ അയാളുടെ ശമ്പളം യഥാക്രമം ₹30,000, ₹30,600, ₹31,200, $\cdots$, ₹39000 ആണ്.

ശമ്പളങ്ങളുടെ അനുക്രമം ഒരു A.P. രൂപീകരിക്കുന്നു എന്നതു ശ്രദ്ധിക്കുക

ഓരോ പദത്തേയും 100 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ 300, 306, 312, $\cdots$, 390 എന്ന A.P. കിട്ടുന്നു.

a = 300, d = 6, l = 390.

$$n = \frac{l-a}{d} + 1$$

$$= \frac{390-300}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1 = 16$$

അതായത്, വ്യക്തിയ്ക്ക് വാർഷിക ശമ്പളം ₹ 39,000ലഭിക്കുന്നത് 16-ാമത്തെ വർഷമാണ്

$\therefore$ 2025 ൽ അദ്ദേഹത്തിന് വാർഷിക ശമ്പളം ₹ 39,000 ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം 2.8

മൂന്നു സംഖ്യകളുടെ അംശബന്ധം 2 : 5 :7. രണ്ടാമത്തേതിൽ നിന്നും 7 കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ, മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യ എന്നിവ ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമം രൂപീകരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആ സംഖ്യകളേവ ?

നിർദ്ധാരണം സംഖ്യകൾ $2x, 5x, 7x, (x \neq 0)$ എന്നിരിക്കട്ടെ. തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന് $2x, 5x-7, 7x$ ഒരു A.P. യിലാണ്.

$$\therefore \; (5x-7) - 2x = 7x - (5x-7) \implies 3x - 7 = 2x + 7 \implies x = 14.$$

ആവശ്യപ്പെട്ട സംഖ്യകൾ 28, 70, 98 ആകുന്നു.

അഭ്യാസം 2.2

1. ഒരു A.P. യിലെ ആദ്യപദം 6, പൊതുവ്യത്യാസം 5 . A.P. യും പൊതുവ്യത്യാസവും കാണുക
2. 125, 120, 115, 110, $\cdots$ എന്ന A.P. യുടെ പൊതുവ്യത്യാസവും 15-ാം പദവും കാണുക
3. $24,\ 23\frac{1}{4},\ 22\frac{1}{2},\ 21\frac{3}{4}, \cdots$. എന്ന കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തിൽ 3 എത്രാം പദമാണ് ?

4. $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \cdots$. എന്ന A.P. യുടെ 12 -ാം പദം കാണുക.

5. 4, 9, 14, $\cdots$ എന്ന A.P. യുടെ 17 -ാം പദം കാണുക

6. താഴെക്കൊടുത്ത കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണികളിൽ എത്രപദങ്ങളുണ്ട്.

(i) $-1, -\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}, \cdots, \frac{10}{3}$. (ii) 7, 13, 19, $\cdots$, 205.

7. ഒരു A.P. യുടെ 9 -ാം പദം പൂജ്യമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ 19 -ാം പദത്തിന്റെ ഇരട്ടിയാണ്. 29 -ാം പദം എന്ന് തെളിയിക്കുക

8. ഒരു A.P. യുടെ 10, 18 -ാം പദങ്ങൾ യഥാക്രമം 41, 73 ആണ്. 27 -ാം പദം കാണുക

9. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രണ്ട് A.P. കളുടെ n -ാം പദങ്ങൾ സമമാണ്. n കാണുക.

1, 7, 13, 19,$\cdots$ കൂടാതെ 100, 95, 90, $\cdots$.

10. 13 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹിരിക്കാവുന്ന രണ്ടക്കസംഖ്യകൾ എത്ര ?

11. ഒരു ടി.വി. നിർമ്മാതാവ് ഏഴാം വർഷം 1000 ടി.വി കളും, പത്താം വർഷം 1450 ടി.വി. കളും നിർമ്മിക്കുന്നു. ഓരോ വർഷവും നിർമ്മാണം ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യയിൽ ഉയരുന്നു എന്ന് സങ്കല്പിക്കുക. ആദ്യവർഷവും, പതിനഞ്ചാം വർഷവും നിർമ്മിച്ച ടി.വി.കളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

12. ഒരാൾ 640 രൂപ ആദ്യമാസത്തിലും 720 രൂപ രണ്ടാമത്തെ മാസത്തിലും 800 രൂപ മൂന്നാമത്തെ മാസത്തിലും സമ്പാദിക്കുന്നു. അയാളുടെ സമ്പാദ്യം ഈ വിധം തുടർന്നാൽ, ഇരുപത്തിയഞ്ചാം മാസം അദ്ദേഹത്തിന്റെ സമ്പാദ്യം എന്താകും ?

13. ഒരു A.P. യിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ തുക 6, ഗുണനഫലം -120. ആ മൂന്നു സംഖ്യകൾ കാണുക ?

14. ഒരു A.P. യിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ തുക 18, അവയുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക 140. ആ മൂന്ന് പദങ്ങൾ കാണുക

15. ഒരു A.P. യിലെ m -ാം പദത്തിന്റെ m മടങ്ങുകൾ n -ാം പദത്തിന്റെ n മടങ്ങിന് തുല്യമാണ് A.P. യുടെ (m+n) -ാം പദം പൂജ്യം എന്ന് തെളിയിക്കുക.

16. ഒരു വ്യക്തി വർഷന്തോറും 14% സാധാരണ പലിശ നൽകുന്ന ഒരു ധന നിക്ഷേപത്തിൽ 25,000 രൂപ നിക്ഷേപിച്ചു. ഈ തുകകൾ (മുതൽ+പലിശ) ഒരു A.P. രൂപീകരിക്കുമോ ? രൂപീകരിക്കുമെങ്കിൽ 20 വർഷങ്ങൾക്കുശേഷം നിക്ഷേപിച്ച തുക കാണുക.

17. a, b, c എന്നിവ A.P. യിലാണെങ്കിൽ $(a-c)^2 = 4(b^2 - ac)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

18. a, b, c എന്നിവ A.P. യിലാണെങ്കിൽ $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ യും A.P. ലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

19. a^2, b^2, c^2 എന്നിവ A.P. യിലാണെങ്കിൽ $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ യും A.P. ലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

20. $a^x = b^y = c^z, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, $b^2 = ac$, എങ്കിൽ $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ എന്നിവ A. P. യിലാണെന്ന് കാണിക്കുക.

2.4 ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമം അല്ലെങ്കിൽ ഗുണന ക്രമാനുപാത പ്രോഗ്രഷൻ (G.P.)

നിർവ്വചനം

$a_{n+1} = a_n r\ ,\ n \in \mathbb{N},\ r\ a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n, \cdots$ **ഒരു സ്ഥിരാങ്കം, എങ്കിൽ** $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n, \cdots$ **എന്ന ഒരു അനുക്രമത്തെ ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമം എന്നു പറയുന്നു. ഇവിടെ** a_1 **നെ ആദ്യപദമെന്നും, സ്ഥിരാങ്കം** r **നെ പൊതു അനുപാതം എന്നും പറയുന്നു. ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തെ ഗുണന ക്രമാനുപാത പ്രോഗ്രഷൻ എന്നും പറയുന്നു.**

ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തിലെ ചില ഉദാഹരണങ്ങളെ പരിഗണിക്കാം.

(i) $3,\ 6,\ 12,\ 24, \cdots .$

$\{a_n\}_1^\infty$ ആണെങ്കിൽ അനുക്രമം $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r \neq 0,\ \ n \in \mathbb{N}.$

$\dfrac{6}{3} = \dfrac{12}{6} = \dfrac{24}{12} = 2 \neq 0$ ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമമാണ്

(ii) $\dfrac{1}{9},\ -\dfrac{1}{27},\ \dfrac{1}{81},\ -\dfrac{1}{243}, \cdots .$

ഇപ്പോൾ $\dfrac{-\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \dfrac{\frac{1}{81}}{-\frac{1}{27}} = \dfrac{-\frac{1}{243}}{\frac{1}{81}} = -\dfrac{1}{3} \neq 0.$

അതുകൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമം ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമമാണ്

ഒരു G.P. യുടെ പൊതുരൂപം

ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമം $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ യിലെ ആദ്യപദം aഎന്നും, പൊതു അനുപാതം r#o എന്നും സങ്കല്പിക്കുക.

അതുകൊണ്ട്, $a_1 = a\ ,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r\ ,\ n \in \mathbb{N}.$

അതിനാൽ , $a_{n+1} = r\,a_n\ ,\ n \in \mathbb{N}.$

n = 1, 2, 3 എന്നിവയ്ക്ക് ,

$$a_2 = a_1 r = ar = ar^{2-1}$$
$$a_3 = a_2 r = (ar)r = ar^2 = ar^{3-1}$$
$$a_4 = a_3 r = (ar^2)r = ar^3 = ar^{4-1}$$

ഈ മാതൃക തുടർന്നാൽ,

$$a_n = a_{n-1} r = (ar^{n-2})r = ar^{n-1}.$$

അതായത് , $a_n = ar^{n-1}$ എല്ലാ $n \in \mathbb{N}$, എന്നത് G.P. യിലെ n-ാം പദമാണ്

അതിനാൽ ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമം അല്ലെങ്കിൽ G.P. എന്നത്

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots,\ ar^{n-1},\ ar^n, \cdots .$$

എന്ന് കാണാം. അതായത്, ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തിന്റെ പൊതു പദം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം.

$$t_n = ar^{n-1},\ \ n = 1, 2, 3, \cdots .$$

ഒരു അനുക്രമത്തിലെ ആദ്യത്തെ ചില പദങ്ങൾ മാത്രം തന്നിരുന്നാൽ, തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമം ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമമാണോ, അല്ലയോ എന്ന് എങ്ങനെ നാം കണ്ടുപിടിക്കും ?

$\frac{t_{n+1}}{t_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}$, r പൂജ്യമല്ലാത്ത സ്ഥിരാങ്കം, എങ്കിൽ $\{t_n\}_1^\infty$ ഒരു G.P. ആകുന്നു

കുറിപ്പ്

(i) ഒരു അനുക്രമത്തിലെ ആദ്യത്തെ പദം ഒഴികെ ഏതൊരു പദവും അതിനു മുമ്പുള്ള പദവും തമ്മിലുള്ള അനുപാദം ഒരു പൂജ്യമല്ലാത്ത സ്ഥിരം ആണെങ്കിൽ, അതൊരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമമായിരിക്കും.

(ii) ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തിന്റെ ഓരോ പദത്തേയും പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയോ ഹരിക്കുകയോ ചെയ്യുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന അനുക്രമവും ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമമായിരിക്കും.

(iii) ഒരു G.P. യിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള മൂന്ന് പദങ്ങൾ $\frac{a}{r}, a, ar$. ഇവയുടെ പൊതു അനുപാതം r.

(iv) ഒരു G.P. യിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള നാല് പദങ്ങൾ $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$.
(ഇവിടെ പൊതു അനുപാതം r^2 ആണ്, r അല്ല)

ഉദാഹരണം 2.9

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള അനുക്രമങ്ങളിൽ ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമങ്ങൾ ഏവ ?

(i) $5, 10, 15, 20, \cdots$. (ii) $0.15, 0.015, 0.0015, \cdots$. (iii) $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, 3\sqrt{21}, \cdots$.

നിർദ്ധാരണം

(i) അടുത്തടുത്തുള്ള പദങ്ങളുടെ അനുപാതങ്ങളെ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ $\frac{10}{5} \neq \frac{15}{10}$ എന്ന് കാണാം.

അതുകൊണ്ട് പൊതുഅനുപാതം ഇല്ല. അതിനാൽ, ഇതൊരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമമല്ല.

(ii) $\frac{0.015}{0.15} = \frac{0.0015}{0.015} = \cdots = \frac{1}{10}$.

പൊതു അനുപാതം $\frac{1}{10}$. ആയതിനാൽ, തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമം ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമമാണ്

(iii) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{3\sqrt{7}} = \cdots = \sqrt{3}$. പൊതു അനുപാതം $\sqrt{3}$ ആകുന്നു.

തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമം ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമമാണ്

ഉദാഹരണം 2.10

താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ള G.P. കളിലെ പൊതു അനുപാതവും, പൊതു പദവും കാണുക

(i) $\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, \cdots$. (ii) $0.02, 0.006, 0.0018, \cdots$.

നിർദ്ധാരണം

(i) തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമം ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമമാണ്.

പൊതു അനുപാതം $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \cdots$

$$r = \frac{\frac{6}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}$$

ആദ്യം പദം $\frac{2}{5}$. അതിനാൽ, പൊതു പദം

$$t_n = ar^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

$$\Longrightarrow \qquad t_n = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

(ii) തന്നിട്ടുള്ള G.P. യുടെ പൊതു അനുപാതം

$$r = \frac{0.006}{0.02} = 0.3 = \frac{3}{10}.$$ ആദ്യപദം 0.02

അതിനാൽ, അനുക്രമം $t_n = (0.02)\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$

ഉദാഹരണം 2.11

ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തിന്റെ നാലാം പദം $\frac{2}{3}$, ഏഴാം പദം $\frac{16}{81}$. ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമം കാണുക

നിർദ്ധാരണം $t_4 = \frac{2}{3},\ t_7 = \frac{16}{81}.$

പൊതുപദം കാണുന്ന സൂത്രം $t_n = ar^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \cdots$ൽ ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$t_4 = ar^3 = \frac{2}{3},\quad t_7 = ar^6 = \frac{16}{81}.$$

ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമം കാണുന്നതിനായി a യും r ഉം കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

t_7 നെ t_4 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ,

$$\frac{t_7}{t_4} = \frac{ar^6}{ar^3} = \frac{\frac{16}{81}}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{27}.$$

$$r^3 = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \quad \therefore \quad r = \frac{2}{3}$$

$r = \frac{2}{3}$ നെ t_4 ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

$$t_4 = \frac{2}{3} \Longrightarrow ar^3 = \left(\frac{2}{3}\right).$$

$$\Longrightarrow \qquad a\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{2}{3}. \qquad \therefore \quad a = \frac{9}{4}.$$

ആവശ്യപ്പെട്ട ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമം $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots,\ ar^{n-1},\ ar^n, \cdots$

അതായത് G.P. = $\frac{9}{4},\ \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right),\ \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \cdots.$

ഉദാഹരണം 2.12

ഒരു പ്രത്യേക സംസ്ക്കരണത്തിൽ ഓരോ മണിക്കൂറും ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണം 2 മടങ്ങാകുന്നു. തുടക്കത്തിൽ സംസ്ക്കരണത്തിൽ 30 ബാക്ടീരിയകൾ കാണപ്പെട്ടു. എങ്കിൽ പതിനാലാം മണിക്കൂറിൽ എത്ര ബാക്ടീരിയകൾ കാണപ്പെടും.

നിർദ്ധാരണം

സംസ്കരണത്തിലെ ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണം തുടർന്നുള്ള മണിക്കൂറുകളുടെ അവസാനത്തിൽ 2 മടങ്ങാകുന്നു.

സംസ്ക്കരണത്തിൽ ആരംഭത്തിൽ കാണപ്പെടുന്ന ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണം $= 30$

ആദ്യത്തെ മണിക്കൂർ അവസാനിക്കുമ്പോൾ കാണപ്പെട്ട ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണം $= 2(30)$

രണ്ടാമത്തെ മണിക്കൂർ അവസാനിക്കുമ്പോൾ കാണപ്പെട്ട ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണം$= 2(2(30)) = 30(2^2)$

ഈ വഴി തുടർന്നാൽ, ഓരോ മണിക്കൂറും അവസാനിക്കുമ്പോൾ കാണപ്പെടുന്ന ബാക്ടീരിയകൾ ഒരു G.P. രൂപീകിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ പൊതു അനുപാതം $r = 2$.

അങ്ങനെ n മണിക്കൂറുകൾക്കുശേഷം ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണം t_n എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചാൽ

$t_n = 30(2^n)$ എന്നത് G.P. യുടെ പൊതുരൂപമാകുന്നു.

അതായത് 14 മണിക്കൂറുകളുടെ അവസാനത്തിൽ ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണം $t_{14} = 30(2^{14})$.

ഉദാഹരണം 2.13

10% കൂട്ടുപലിശ നൽകുന്ന ഒരു ബാങ്കിൽ വർഷന്തോറും ₹500 നിക്ഷേപിക്കുന്നു. പത്താം വർഷാവസാനം നിക്ഷേപത്തിന്റെ ആകെത്തുക എന്താകും ?

നിർദ്ധാരണം

മുതൽ ₹500 ആണ്. അതിനാൽ ഒന്നാം വർഷ പലിശ $500\left(\frac{10}{100}\right) = 50$.

രണ്ടാം വർഷ മുതൽ = ആദ്യ വർഷ മുതൽ + പലിശ

$$= 500 + 500\left(\frac{10}{100}\right) = 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)$$

രണ്ടാം വർഷ പലിശ $= \left(500\left(1 + \frac{10}{100}\right)\right)\left(\frac{10}{100}\right)$.

മൂന്നാം വർഷ പലിശ $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right) + 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)\frac{10}{100}$

$$= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^2$$

ഈ വഴി തുടർന്നാൽ, n -ാം വർഷം മുതൽ $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1}$.

(n-1) -ാം വർഷ അവസാനത്തിൽ തുക = n -ാം വർഷം മുതൽ

അതിനാൽ n -ാം വർഷ അവസാനത്തിൽ തുക $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1} + 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1}\left(\frac{10}{100}\right) = 500\left(\frac{11}{10}\right)^n$.

10 -ാം വർഷാവസാനം ആകെത്തുക $=$ ₹ $500\left(\frac{11}{10}\right)^{10}$.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

മുകളിലെ രീതി ഉപയോഗിച്ചാൽ, കൂട്ടുപലിശ പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് ആകെത്തുക കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനുള്ള ഒരു സൂത്രം ലഭിക്കും: $A = P(1 + i)^n$

A **എന്നത്** n -ാം **വർഷാവസാനത്തിൽ ലഭിക്കുന്ന ആകെ തുക,** P **മുതൽ,** $i = \frac{r}{100}$,
r **പലിശനിരക്ക്,** n **വർഷങ്ങളുടെ എണ്ണം**

ഉദാഹരണം 2.14

ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ തുക $\frac{13}{12}$, ഗുണനഫലം -1. പൊതുഅനുപാതവും പദങ്ങളും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്ന് പദങ്ങൾ $\frac{a}{r}, a, ar$ എന്ന് എഴുതാം.

$$\frac{a}{r} + a + ar = \frac{13}{12}$$

$$a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{13}{12} \implies a\left(\frac{r^2 + r + 1}{r}\right) = \frac{13}{12} \qquad (1)$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -1$$

$$\implies a^3 = -1 \qquad \therefore \quad a = -1$$

$a = -1$ എന്നതിനെ (1) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ

$$(-1)\left(\frac{r^2 + r + 1}{r}\right) = \frac{13}{12}$$

$$\implies 12r^2 + 12r + 12 = -13r$$

$$12r^2 + 25r + 12 = 0$$

$$(3r + 4)(4r + 3) = 0$$

$r = -\frac{4}{3}$ അല്ലെങ്കിൽ $-\frac{3}{4}$

$r = -\frac{4}{3}$, $a = -1$, എങ്കിൽ പദങ്ങൾ $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$.

$r = -\frac{3}{4}$, $a = -1$, എങ്കിൽ പദങ്ങൾ $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$.

ഉദാഹരണം 2.15

a, b, c, d എന്നിവ ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തിലാണെങ്കിൽ

$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം a, b, c, d എന്നിവ G.P. യിലാണ്

തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമത്തിന്റെ പൊതു അനുപാതം r എന്നിരിക്കട്ടെ. ആദ്യപദം a

അതിനാൽ, $b = ar, \quad c = ar^2, \quad d = ar^3$

ഇവിടെ, $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2$

$$= (ar - ar^2)^2 + (ar^2 - a)^2 + (ar^3 - ar)^2$$

$$= a^2[(r - r^2)^2 + (r^2 - 1)^2 + (r^3 - r)^2]$$

$$= a^2[r^2 - 2r^3 + r^4 + r^4 - 2r^2 + 1 + r^6 - 2r^4 + r^2]$$

$$= a^2[r^6 - 2r^3 + 1] = a^2[r^3 - 1]^2$$

$$= (ar^3 - a)^2 = (a - ar^3)^2 = (a - d)^2$$

അഭ്യാസം 2.3

1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള അനുക്രമങ്ങളിൽ G.P. ഏവ ? ആ G.P. കളിലെ പൊതു അനുപാതം കാണുക.

(i) $0.12,\ 0.24,\ 0.48, \cdots.$ (ii) $0.004,\ 0.02,\ 0.1, \cdots.$ (iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \cdots.$

(iv) $12,\ 1,\ \frac{1}{12}, \cdots.$ (v) $\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \cdots.$ (vi) $4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \cdots.$

2. $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, \cdots.$എന്ന ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിലെ 10-ാം പദവും പൊതു അനുപാതവും കാണുക.

3. ഒരു G.P. യുടെ 4-ാം പദം, 7-ാംപദം യഥാക്രമം 54, 1458 ആണ്. ആ G.P. കാണുക.

4. ഒരു G.P. യിലെ ആദ്യപദം$\frac{1}{3}$, 6-ാം പദം $\frac{1}{729}$ എങ്കിൽ ആ G.P. കാണുക.

5. (i) $5,\ 2,\ \frac{4}{5}, \frac{8}{25}, \cdots$, എന്ന G.P. യിലെ എത്രാം പദം $\frac{128}{15625}$?

(ii) $1,\ 2,\ 4,\ 8, \cdots$, എന്ന G.P. യിലെ എത്രാം പദം 1024 ?

6. $162,\ 54,\ 18, \cdots.$ കൂടാതെ , $\frac{2}{81}, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}, \cdots$ എന്നീ ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമങ്ങളുടെ n-ാം പദം സമമാണ്. എങ്കിൽ n ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

7. ഒരു G.P യുടെ ആദ്യപദം 3, 5-ാംപദം 1875 പൊതു അനുപാതം കാണുക.

8. ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമങ്ങളിലെ മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ തുക $\frac{39}{10}$, ഗുണനഫലം 1 പൊതു അനുപാതവും, പദങ്ങളും കാണുക.

9. ഒരു G.P. യിലെ അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം 216. അവ ജോഡികളായി എടുത്തതിന്റെ ഗുണനഫല ങ്ങളുടെ തുക 156. എങ്കിൽ ആ പദങ്ങളേവ ?

10. ഒരു G.P. യിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്ന് അടുത്തടുത്തുള്ള പദങ്ങളുടെ തുക 7, അവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ തുക $\frac{7}{4}$ പദങ്ങളേവ ?

11. ഒരു G.P. യിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നുപദങ്ങളുടെ തുക 13, അവയുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക 91. G.P. കാണുക.

12. 5% കൂട്ടുപലിശ നൽകുന്ന ഒരു ബാങ്കിൽ വർഷന്തോറും ₹1000 നിക്ഷേപിക്കുന്നു എങ്കിൽ 12-ാം വർഷാവസാനത്തിൽ കാലാവധി എത്തിയ തുക കാണുക.

13. ഒരു കമ്പനി ഒരു ഓഫീസ് പകർപ്പ് യന്ത്രം ₹50,000ന് വാങ്ങി. പകർപ്പ് യന്ത്രത്തിന്റെ വില ഓരോ വർഷവും 15% വീതം വില കുറഞ്ഞ് വരുന്നു. 15 വർഷാവസാനത്തിൽ പകർപ്പ് യന്ത്രത്തിന്റെ വില എന്ത് ?

14. a, b, c, d എന്നിവ G.P. യിലാണ് എങ്കിൽ $(a - b + c)(b + c + d) = ab + bc + cd.$

എന്ന് കാണിക്കുക

15. a, b, c, d എന്നിവ G.P. യിലാണ് എങ്കിൽ $a + b,\ \ b + c,\ \ c + d$, യും G.P. യിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക

2.5 ശ്രേണികൾ

താഴെക്കൊടുത്ത പ്രശ്നം പരിഗണിക്കാം. ഒരു വ്യക്തി 1990 ജനുവരി 1 ന് ജോലിയിൽ പ്രവേശിച്ചു. അയാളുടെ വാർഷിക ശമ്പളം ₹25000 ഉം, വാർഷിക വർദ്ധനവ് ₹ 500 ഉം ആണ്. 2010 ജനുവരി 1 വരെ അയാൾ വാങ്ങിയ ആകെ ശമ്പളം എന്ത് ?

അദ്ദേഹത്തിന്റെ വർഷ ശമ്പളം ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തെ രൂപീകരിക്കുന്നു എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക

$$25000,\ 25500,\ 26000,\ 26500, \cdots,\ (25000 + 19(500)).$$

മുകളിലെ ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരത്തിനായി 20 വർഷങ്ങളിലെ ശമ്പളങ്ങളെ കൂട്ടേണ്ടതാണ്.

ആകെ ശമ്പളം $= 25000 + 25500 + 26000 + 26500 + \cdots + (25000 + 19(500))$

അതിനാൽ, ഒരു അനുക്രമത്തിന്റെ പദങ്ങളുടെ സങ്കലനത്തിന് ഒരു ആശയം വികസിപ്പിക്കേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്.

നിർവ്വചനം.

ഒരു അനുക്രമത്തിലെ പദങ്ങളെ സങ്കലന ചിഹ്നം $(+)$ കൊണ്ട് കൂട്ടിച്ചേർത്ത് അവയുടെ സങ്കലനമായി എഴുതുന്നതിനെ ശ്രേണി എന്നു പറയുന്നു.

ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം പരിമിതമാണെങ്കിൽ, അതിനെ പരിമിതശ്രേണി എന്നു പറയുന്നു.
ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം അനന്തമാണെങ്കിൽ, അതിനെ അനന്തശ്രേണി എന്നുപറയുന്നു.

$S = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ എന്ന വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ അനുക്രമത്തെ പരിഗണിക്കുക. ഓരോ $n \in \mathbb{N}$ നും $S_n = a_1 + a_2 + , \cdots + a_n,\ n = 1, 2, 3, \cdots$ എന്ന ഒരു ഭാഗിക തുകയെ നിർവ്വചിക്കുന്നു. അതിനാൽ, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ എന്നത് അനുക്രമം $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ യുടെ ഒരു ഭാഗിക തുകയാണ്.

ക്രമജോഡി $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty})$ നെ അനുക്രമം $\{a_n\}_1^{\infty}$ ന്റെ പദങ്ങളുടെ അനന്തശ്രേണി എന്നു പറയുന്നു. ഈ അനന്തശ്രേണിയെ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, അല്ലെങ്കിൽ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ എന്നു കുറിക്കുന്നു. ചിഹ്നം $\sum$ തുകയെ കുറിക്കുന്നു. ഇതിനെ സിഗ്മ എന്ന് വായിക്കുന്നു.

പരിമിതശ്രേണി എന്നത് പരിമിത പദങ്ങളുടെ സങ്കലനമാണ് എന്ന് എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയും. ഒരു ശ്രേണിയിലെ അനന്തതവരെയുള്ള പദങ്ങളെ കൂട്ടുന്നത് എങ്ങനെയാണ്? ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ, ഉയർന്ന ക്ലാസ്സുകളിൽ ഇതിനെക്കുറിച്ച് നിങ്ങൾ പഠിക്കും. ഇപ്പോൾ നമുക്ക് പരിമിതശ്രേണികളിലേക്ക് ശ്രദ്ധ പതിപ്പിക്കാം.

ഈ ഭാഗത്തിൽ കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണികളേയും ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണികളേയും കുറിച്ച് പഠിക്കാം.

2.5.1 കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണി

ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമം രൂപീകരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആ ശ്രേണിയെ കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണി എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

ആദ്യപദം **a** യും, പൊതുവ്യത്യാസം **d** യും ഉള്ള ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമം

$a,\ a + d,\ a + 2d, ...,\ a + (n-1)d, \cdots$.പരിഗണിക്കാം.

കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തിലെ ആദ്യ **n** പദങ്ങളുടെ തുക $\mathbf{S_n}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതായത് , $S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots\ (a + (n - 1)d)$

$$\implies S_n = na + (\, d + 2d + 3d + \cdots\ + (n - 1)d\,)$$
$$= na + d(1 + 2 + 3 + \cdots\ + (n - 1)\,)$$

തുക $1 + 2 + \cdots + (n - 1)$ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ, ഈ സൂത്രത്തെ ലഘൂകരിക്കാം

ഇത്, കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമം $1, 2, 3, \cdots, (n - 1)$. ന്റെ തുകയാണ്

ആദ്യത്തെ n ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots\ + (n - 2) + (n - 1) + n. \qquad (1)$$

എന്നിരിക്കട്ടെ. മുകളിലെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനായി ഒരു ചെറിയ സൂത്രം ഉപയോഗിക്കാം

(1) നെ $S_n = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots\ + 3 + 2 + 1$ എന്നും എഴുതാം (2)

(1) ഉം (2) കൂട്ടിയാൽ, $2S_n = (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + 1) + (n + 1).$ (3)

(3) ന്റെ വലതു ഭാഗത്തെ എല്ലാ പദങ്ങളും $(n + 1)$ ആണ്.

ഓരോ (1)ലും (2) ലും n പദങ്ങളുണ്ട്. (1) നേയും (2) നേയും കൂട്ടിയാൽ n എണ്ണം $(n + 1)$ കൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

(3)നെ ലഘൂകരിക്കുമ്പോൾ $2S_n = n\,(n + 1)$ ആണ്.

അതായത്, ആദ്യ n ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ തുക

$S_n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$ അതായത്, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$ (4)

ഇത്, തുകകൾ കാണുന്നതിനുള്ള ഉപയോഗപ്രദമായ സൂത്രമാണ്.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

100 വരെയുള്ള ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കാനായി ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിന്റെ രാജകുമാരൻ എന്നറിയപ്പെടുന്ന ജെർമൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞ നായ കാൾ ഫെഡ്രറിക് ഗാസ് മുകളിലെ രീതി ആദ്യമായി ഉപയോഗിച്ചു. വെറും അഞ്ചു വയസ്സായിരിക്കുമ്പോൾ അദ്ദേഹത്തിന്റെ അദ്ധ്യാപകൻ ഈ പ്രശ്നത്തെ അദ്ദേഹത്തിനു നൽകി. ഗണിതത്തിന്റെ ഉപരി പഠനത്തിന് ചെല്ലുമ്പോൾ മുകളിലെ സൂത്രം ലഭിക്കാൻ മറ്റു രീതികൾ നിങ്ങൾ പഠിക്കും.

Carl Fredrick Gauss
(1777 – 1855)

ഇപ്പോൾ പൊതുവായ കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളെ കൂട്ടാം.

$$S_n = na + [d + 2d + 3d + \cdots\ + (n - 1)d]$$
$$= na + d[1 + 2 + 3 + \cdots\ + (n - 1)]$$

$= na + d\dfrac{n(n - 1)}{2}$ സൂത്രം (4) ഉപയോഗിച്ച്

$$= \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \qquad (5)$$

അതായത്

$$S_n = \frac{n}{2}[a + (a + (n-1)d)] = \frac{n}{2} \text{ (ആദ്യപദം + അവസാന പദം)}$$

$$= \frac{n}{2}(a + l).$$

ആദ്യപദം a, പൊതുവ്യാത്യാസം d ഉള്ള ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

(i) $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ പൊതുവ്യാത്യാസം d തന്നിരുന്നാൽ

(ii) $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$, അവസാനപദം l തന്നിരുന്നാൽ.

ഉദാഹരണം 2.16

$5 + 11 + 17 + \cdots + 95$ എന്ന കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയുടെ തുക കാണുക

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള ശ്രേണി $5 + 11 + 17 + \cdots + 95$ ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയാണ്.

$$a = 5, \quad d = 11 - 5 = 6, \quad l = 95.$$

$$n = \frac{l-a}{d} + 1$$

$$= \frac{95-5}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1 = 16.$$

$$S_n = \frac{n}{2}[l + a]$$

$$S_{16} = \frac{16}{2}[95 + 5] = 8(100) = 800.$$

ഉദാഹരണം 2.17

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots.$ എന്ന ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ $2n$ പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക

നിർദ്ധാരണം നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$ to $2n$ പദങ്ങൾ വരെ

$= 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - \cdots$ $2n$ പദങ്ങൾ വരെ

$= (1-4) + (9-16) + (25-36) + \cdots$ n പദങ്ങൾ (ഒന്നിച്ചു ചേർത്തതിനുശേഷം)

$= -3 + (-7) + (-11) + \cdots$ n പദങ്ങൾ

മുകളിലെ ശ്രേണി $a = -3$, $d = -4$ ഉള്ള ഒരു A.P. യാണ്

ആവശ്യമായ തുക $= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$= \frac{n}{2}[2(-3) + (n-1)(-4)]$$

$$= \frac{n}{2}[-6 - 4n + 4] = \frac{n}{2}[-4n - 2]$$

$$\therefore \text{S} = \frac{-2n}{2}(2n+1) = -n(2n+1).$$

ഉദാഹരണം 2.18

ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയിൽ ആദ്യത്തെ 14 പദങ്ങളുടെ തുക -203, അടുത്ത 11 പദങ്ങളുടെ തുക -572 കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണി കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$S_{14} = -203$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{14}{2}[2a + 13d] = -203$$

$$\Longrightarrow \quad 7[2a + 13d] = -203$$

$$\Longrightarrow \quad 2a + 13d = -29. \qquad (1)$$

അടുത്ത 11 പദങ്ങളുടെ തുക $= -572$.

$$S_{25} = S_{14} + (-572)$$

$$S_{25} = -203 - 572 = -775.$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{25}{2}[2a + 24d] = -775$$

$$\Longrightarrow \quad 2a + 24d = -31 \times 2$$

$$\Longrightarrow \quad a + 12d = -31 \qquad (2)$$

(1) ,(2) നിർദ്ധാരണം ചെയ്താൽ, $a = 5$, $d = -3$.

ആവശ്യപ്പെട്ട കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണി $5 + (5 - 3) + (5 + 2(-3)) + \cdots$.

$$5 + 2 - 1 - 4 - 7 - \cdots.$$

ഉദാഹരണം 2.19

$24 + 21 + 18 + 15 + \cdots$, എന്ന കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയിൽ തുർച്ചയായി എത്ര പദങ്ങളുടെ തുകയാണ് -351 ?

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയിൽ, $a = 24$, $d = -3$.

$$S_n = -351$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = -351$$

$$\frac{n}{2}[2(24) + (n-1)(-3)] = -351$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n}{2}[48 - 3n + 3] = -351$$

$$\Longrightarrow \quad n(51 - 3n) = -702$$

$$\Longrightarrow \quad n^2 - 17n - 234 = 0$$

$$(n - 26)(n + 9) = 0$$

$\therefore \; n = 26$ അല്ലെങ്കിൽ $n = -9$

ആവശ്യമായ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം n ഋണമാകാൻ സാധ്യതയില്ല. അതുകൊണ്ട്. തുക -351 ലഭിക്കാൻ 26 പദങ്ങൾ ആവശ്യമാണ്.

ഉദാഹരണം 2.20

8 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന എല്ലാ മൂന്നക്ക നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ തുക കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

8 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന മൂന്നക്ക നിസർഗ്ഗസംഖ്യകൾ 104, 112, 120, $\cdots$, 992

ഇവയുടെ തുക $S_n = 104 + 112 + 120 + 128 +, \cdots + 992$.

$$a = 104, \quad d = 8 \quad , \; l = 992.$$

$$\therefore \qquad n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{992-104}{8} + 1$$

$$= \frac{888}{8} + 1 = 112.$$

$$S_{112} = \frac{n}{2}[a + l] = \frac{112}{2}[104 + 992] = 56(1096) = 61376.$$

അതിനാൽ 3 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന മൂന്നക്ക നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ തുക = 61376.

ഉദാഹരണം 2.21

ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ ഉൾക്കോണുകളുടെ അളവുകളുടെ ക്രമം ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമം രൂപീകരിക്കുന്നു. അനുക്രമത്തിലെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ അളവ് 85°. ഏറ്റവും കൂടിയ് അളവ് 215°.തന്നിട്ടുള്ള ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം n എന്നിരിക്കട്ടെ. ഉൾക്കോണുകളുടെ അളവുകൾ ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമം രൂപീകരിക്കുന്നു. ബഹുഭുജത്തിന്റെ ഉൾക്കോണുകളുടെ തുക

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + l \;, a = 85, l = 215.$$

നമുക്ക് , $\qquad S_n = \frac{n}{2}[l + a] \qquad (1)$

ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ ഉൾക്കോണുകളുടെ തുക $(n-2)\times 180^0$ എന്നു നമുക്കറിയാം

$$S_n = (n-2)\times 180$$

(1), ൽനിന്നും $\quad \frac{n}{2}[l + a] = (n-2)\times 180$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{n}{2}[215 + 85] = (n-2)\times 180$$

$$150n = 180(n-2) \quad \Longrightarrow \quad n = 12..$$

അതായത്, ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം 12 ആണ്

അഭ്യാസം 2.4

1. തുക കാണുക (i) ആദ്യത്തെ 75 ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ (ii) ആദ്യത്തെ 125 നിസർഗ്ഗസംഖ്യകൾ
2. ഒരു A.P. യിലെ n-ാം പദം $3 + 2n$ ആണെങ്കിൽ, ആദ്യത്തെ 30 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക
3. കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണികളുടെ തുക കാണുക

   (i) $38 + 35 + 32 + \cdots + 2$. $\qquad$ (ii) $6 + 5\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2} + \cdots$ 25 പദങ്ങൾ

4. കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണികളുടെ S_n കാണുക.

(i) $a = 5, \quad n = 30, \quad l = 121$ (ii) $a = 50, \quad n = 25, \quad d = -4$

5. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$. എന്ന ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 40 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക

6. ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 11 പദങ്ങളുടെ തുക 44, അടുത്ത 11 പദങ്ങളുടെ തുക 55 കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണി കാണുക.

7. $60, 56, 52, 48, \cdots$, എന്ന കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തിൽ ആദ്യപദത്തിൽ തുടങ്ങി, തുക 368 ലഭിക്കാൻ എത്ര പദങ്ങൾ ആവശ്യമുണ്ട് ?

8. 9 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന എല്ലാ മൂന്നക്ക നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ തുകകാണുക.

9. ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയിലെ 3 -ാം പദം 7, 7 -ാം പദം അതിന്റെ 3 -ാം പദത്തിന്റെ മൂന്ന് മടങ്ങിനേക്കാൾ 2 കൂടുതലാണ്. ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

10. 300 നും 500 നും ഇടയിലുള്ള 11 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന എല്ലാ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടേയും തുക കാണുക.

11. നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക: $1 + 6 + 11 + 16 + \cdots + x = 148$.

12. 100 നും 200 നും ഇടയിലുള്ള 5 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാൻ സാധിക്കാത്ത എല്ലാ സംഖ്യകളുടേയും തുക കാണുക.

13. ഒരു നിർമ്മാണ കമ്പനി ഒരു പാലം പണി വൈകുന്നതിന് ഓരോ ദിവസവും പിഴ ഈടാക്കുന്നു. ആദ്യദിവസം പിഴ ₹4000 ഈടാക്കുകയും തുടർന്നുള്ള ഓരോ ദിവസവും പിഴ ₹1000 വർദ്ധിപ്പിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഈ വരവു ചെലവ് കണക്കിൽ കമ്പനി പരമാവധി പിഴ ₹1,65,000 ഈടാക്കുന്നു. ആ ജോലി തീർക്കാൻ താമസിക്കുന്ന പരമാവധി ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക.

14. 8%സാധാരണ പലിശ നിരക്കിൽ ഓരോ വർഷവും തുക ₹1000 നിക്ഷേപിക്കുന്നു. ഓരോ വർഷാവസാനവും പലിശ കണക്കാക്കുക. ഈ പലിശ തുകകൾ ഒരു A.P. രൂപീകരിക്കുമോ ? രൂപീകരിക്കുമെങ്കിൽ 30 വർഷങ്ങളുടെ അവസാനത്തിൽ ആകെ പലിശ കാണുക.

15. ഒരു പ്രത്യേക ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $3n^2 - 2n$. ശ്രേണി ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയാണെന്ന് കാണിക്കുക.

16. ഒരു ഘടികാരം ഒരു മണിക്ക് ഒരു പ്രാവശ്യവും 2 മണിക്ക് രണ്ടു പ്രാവശ്യവും അടിക്കുന്നു. ഇപ്രകാരം ഓരോ മണിക്കൂറിലും അടിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഒരു ദിവസം എത്ര പ്രാവശ്യം അടിക്കും ?

17. ആദ്യപദം a, രണ്ടാംപദം b അവസാനപദം c യും ഉള്ള ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയുടെ തുക $\dfrac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ എന്ന് കാണിക്കുക.

18 ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയിൽ $(2n+1)$ പദങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ ഒറ്റ പദങ്ങളുടെ തുകയും ഇരട്ട പദങ്ങളുടെ തുകയും തമ്മിലുള്ള അനുപാദം $(n+1):n$.എന്ന് തെളിയിക്കുക.

19. ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയിലെ ആദ്യ m പദങ്ങളുടെ തുകയും, ആദ്യ n പദങ്ങളുടെ തുകയും തമ്മിലുള്ള അനുപാതം $m^2 : n^2$ എങ്കിൽ m , n -ാം പദങ്ങളുടെ അനുപാതം 2m - 1: 2n - 1എന്ന് കാണിക്കുക.

20. ഒരു പൂന്തോട്ടക്കാരൻ തന്റെ പൂന്തോട്ടത്തെ ഒരു ലംബക ആകൃതിയിൽ നിർമ്മിക്കാൻ പദ്ധതിയിട്ടു. ലംബകത്തിന്റെ നീളം കൂടിയ വശം ആരംഭിക്കാൻ ഒരു വരിയിൽ 97 ഇഷ്ടികകൾ ആവശ്യമുണ്ട്. ഓരോ വരിയിലും ഇരുവശങ്ങളിലും 2 ഇഷ്ടിക വീതം കുറച്ച് 25 -ാമത്തെ വരിയിൽ നിർമ്മാണം നിർത്തുന്നു. അയാൾ എത്ര ഇഷ്ടികകൾ വാങ്ങേണ്ടതുണ്ട് ?

2.5.2 ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണി

ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമം രൂപീകരിക്കുമെങ്കിൽ ആ ശ്രേണിയെ ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണി എന്നു പറയുന്നു.

$a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}, ar^n, \cdots$, പൊതു അനുപാതം $r \neq 0$ എന്നത് ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമം എന്നിരിക്കട്ടെ. ഈ അനുക്രമത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക നാം കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ എന്നിരിക്കട്ടെ (1)

$r = 1$, എങ്കിൽ (1) ൽ നിന്ന് $S_n = na$.

$r \neq 1$, എങ്കിൽ (1) ഉപയോഗിച്ച്

$$rS_n = r(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \quad (2)$$

(1)ൽ നിന്ന് (2) കുറച്ചാൽ

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n)$$

$$\Longrightarrow \quad S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \quad r \neq 1.$$

ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}, & \text{if } r \neq 1 \\ na & \text{if } r = 1. \end{cases}$$

a ആദ്യ പദം, r പൊതു അനുപാതം

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

$-1 < r < 1$, ആണെങ്കിൽ,

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \frac{a}{1 - r}.$$

അനന്തമായ ധനസംഖ്യകളുടെ തുക ഒരു പരിമിതമൂല്യമായിരിക്കാം

ഉദാഹരണം 2.22

$16 - 48 + 144 - 432 + \cdots$ എന്ന ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $a = 16, \; r = -\frac{48}{16} = -3 \neq 1.,\; S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \; r \neq 1$ ഉപയോഗിച്ച്

$$S_{25} = \frac{16(1 - (-3)^{25})}{1 - (-3)} = \frac{16(1 + 3^{25})}{4} = 4(1 + 3^{25}).$$

ഉദാഹരണം 2.23

താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോ ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണിയുടേയും S_n കാണുക :

(i) $a = 2, \ t_6 = 486, \ n = 6$ (ii) $a = 2400, \ r = -3, \ n = 5$

നിർദ്ധാരണം

(i) $a = 2, \quad t_6 = 486, \quad n = 6$

$$t_6 = 2(r)^5 = 486$$

$$\Longrightarrow \quad r^5 = 243 \quad \therefore \quad r = 3.$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ if } r \neq 1$$

$$S_6 = \frac{2(3^6 - 1)}{3 - 1} = 3^6 - 1 = 728.$$

(ii) $a = 2400, \quad r = -3, \quad n = 5$

$$S_5 = \frac{a(r^5 - 1)}{r - 1} \text{ if } r \neq 1$$

$$= \frac{2400[(-3)^5 - 1]}{(-3) - 1}$$

$$S_5 = \frac{2400}{4}(1 + 3^5) = 600(1 + 243) = 146400.$$

ഉദാഹരണം 2.24

$2 + 4 + 8 + \cdots$, എന്ന ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിൽ 1022 എന്ന തുക കിട്ടുന്നതിനായി ആദ്യപദത്തിൽ തുടങ്ങി തുടർച്ചയായി എത്ര പദങ്ങൾ ആവശ്യമാണ്?

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണി $2 + 4 + 8 + \cdots$. ആവശ്യമായ തുക കിട്ടുന്നതിനു വേണ്ടിയുള്ള പദങ്ങളുടെ എണ്ണം n എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$a = 2, \quad r = 2, \quad S_n = 1022.$$

n കണ്ടുപിടിക്കാനായി,

$$S_n = \frac{a[r^n - 1]}{r - 1} \text{ if } r \neq 1 \text{ നെ പരിഗണിക്കാം}$$

$$= (2)\left[\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right] = 2(2^n - 1).$$

എന്നാൽ $S_n = 1022$ അതിനാൽ $2(2^n - 1) = 1022$

$$\Longrightarrow \quad 2^n - 1 = 511$$

$$\Longrightarrow \quad 2^n = 512 = 2^9.$$ അതായത്, $n = 9$.

ഉദാഹരണം 2.25

ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിലെ ആദ്യപദം 375, നാലാം പദം 192. പൊതു അനുപാതവും, ആദ്യത്തെ 14 പദങ്ങളുടെ തുകയും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള G.P. യുടെ ആദ്യപദം **a** പൊതു അനുപാദം r എന്നിരിക്കട്ടെ

$$a = 375, \quad t_4 = 192.$$

$$t_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore \quad t_4 = 375\,r^3 \implies 375\,r^3 = 192$$

$$r^3 = \frac{192}{375} \implies r^3 = \frac{64}{125}$$

$$r^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \implies r = \frac{4}{5}$$, എന്നത് ആവശ്യമായ പൊതു അനുപാതമാണ്

$$S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right], \quad r \neq 1$$

$$S_{14} = \frac{375\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{14} - 1\right]}{\frac{4}{5} - 1} = (-1)\times 5 \times 375\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{14} - 1\right]$$

$$= (375)(5)\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right] = 1875\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right].$$

കുറിപ്പ്

മുകളിലെ ഉദാഹരണത്തിൽ $S_n = a\left[\frac{1 - r^n}{1 - r}\right], r \neq 1$ എന്നതിനെ $S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right], r \neq 1$ എന്നതിന് പകരം ഉപയോഗിക്കാം

ഉദാഹരണം 2.26

പൊതു അനുപാതം ധനമായുള്ള ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിൽ 4 പദങ്ങൾ ഉണ്ട്. ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക 8, അവസാനത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക 72, ശ്രേണി കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിലെ നാല് പദങ്ങളുടെ തുക $a + ar + ar^2 + ar^3$, $r > 0$

$a + ar = 8$, $ar^2 + ar^3 = 72$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്

$$ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar) = 72$$

$$\implies r^2(8) = 72 \quad \therefore \quad r = \pm 3$$

$r > 0$, ആയതിനാൽ $r = 3.$

$$a + ar = 8 \implies a = 2$$

അതിനാൽ, ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണി $2 + 6 + 18 + 54$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 2.27

$6 + 66 + 666 + \cdots$ എന്ന ശ്രേണിയിലെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$S_n = 6 + 66 + 666 + \cdots$ n പദങ്ങൾ വരെ

$S_n = 6(1 + 11 + 111 + \cdots$ n പദങ്ങൾ വരെ)

$= \frac{6}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots$ n പദങ്ങൾ വരെ) (9 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 9 കൊണ്ട് ഹരിക്കുക)

$= \frac{2}{3}[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \cdots$ n പദങ്ങൾ വരെ]

$= \frac{2}{3}[(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots$ n പദങ്ങൾ$-$ $-n]$

$$S_n = \frac{2}{3}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right].$$

ഉദാഹരണം 2.28

ഒരു സ്ഥാപനം ഒരു നഗരത്തിലെ 26 തെരുവുകളിൽ വൃക്ഷത്തൈകൾ നട്ടുപിടിപ്പിക്കാൻ പദ്ധതിയിടുന്നു. ആദ്യത്തെ തെരുവിൽ 1 ചെടിയും, രണ്ടാമത്തേതിൽ 2 ഉം, മൂന്നാമത്തേതിൽ 4 ഉം, നാലാമത്തേതിൽ 8 ഉം ചെടികൾ നടുന്നു. ഇതു തുടർന്നാൽ, ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ എത്ര വൃക്ഷത്തൈകൾ ആവശ്യമാണ് ?

നിർദ്ധാരണം ഒരു നഗരത്തിലെ 25 തെരുവുകളിൽ നട്ടുപിടിപ്പിക്കുന്ന വൃക്ഷത്തൈകളുടെ എണ്ണം ഒരു G.P. രൂപീ കരിക്കുന്നു. ആവശ്യമായ വൃക്ഷത്തൈകളുടെ ആകെ എണ്ണം S_n എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots \text{ പദങ്ങൾവരെ}$$

$$a = 1, \quad r = 2, \quad n = 25$$

$$S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$$

$$S_{25} = (1)\,\frac{[2^{25} - 1]}{2 - 1}$$

$$= 2^{25} - 1$$

ആവശ്യമായ വൃക്ഷത്തൈകളുടെ എണ്ണം $2^{25} - 1$ ആണ്.

അഭ്യാസം 2.5

1. $\frac{5}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \cdots$ എന്ന ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിൽ ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.
2. $\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$ ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 27 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.
3. കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണിയുടെ S_n കാണുക.

   (i) $a = 3,\ t_8 = 384,\ n = 8.$ (ii) $a = 5,\ r = 3,\ n = 12.$
4. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പരിമിത ശ്രേണികളുടെ തുക കാണുക.

   (i) $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots + (0.1)^9$ (ii) $1 + 11 + 111 + \cdots$ 20 പദങ്ങൾ വരെ
5. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുളള ശ്രേണികളിൽ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ

   (i) $3 + 9 + 27 + \cdots$ തുക 1092 ലഭിക്കും ? (ii) $2 + 6 + 18 + \cdots$ തുക 728 ലഭിക്കും ?
6. ഒരു ഗുണന ശ്രേണിയിലെ രണ്ടാം പദം 3, പൊതു അനുപാതം $\frac{4}{5}$. തന്നിട്ടുള്ള ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായുള്ള ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.
7. പൊതു അനുപാതം ധനമായുള്ള ഒരു ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിൽ 4 പദങ്ങൾ ഉണ്ട്. ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക 9, ആവസാനത്തെ 2 പദങ്ങളുടെ തുക 36. ശ്രേണി കാണുക.
8. ശ്രേണികളുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

   (i) $7 + 77 + 777 + \cdots.$ (ii) $0.4 + 0.94 + 0.994 + \cdots.$
9. ഒരു പകർച്ചവ്യാധിയാൽ ആദ്യ ആഴ്ച രോഗബാധിതർ 5 പേരാണ്. അടുത്ത ആഴ്ച അവസാനത്തിൽ ഓരോ രോഗബാധിതരും ഈ സാംക്രമിക രോഗത്തിനെ മറ്റൊരു 4 പേർക്ക് പരത്തുന്നു. 15 ആഴ്ചകളുടെ അവസാനത്തിൽ പകർച്ച വ്യാധി പിടിപ്പെട്ട ആളുകളുടെ എണ്ണം എത്ര ?

10. ഒരു തോട്ടപ്പണിക്കാരൻ ഒരു ആൺകുട്ടിയ്ക്ക് അവന്റെ പ്രവൃത്തിക്ക് പ്രതിഫലമായി കുറച്ചു മാങ്ങകൾ കൊടുക്കുന്നു. അയാൾ ആ കുട്ടിക്ക് രണ്ട് സാധ്യതകൾ കൊടുക്കുന്നു. ഒരു സമയം 1000 മാങ്ങകൾ അല്ലെങ്കിൽ ആദ്യദിവസം 1 മാങ്ങ, രണ്ടാം ദിവസം 2, മൂന്നാം ദിവസം 4, നാലാം ദിവസം 8 എന്നിങ്ങനെ 10 ദിവസങ്ങളിൽ തുടരുന്നു. പരമാവധി മാങ്ങകൾ കിട്ടുന്നതിനായി ആ കുട്ടി തിരഞ്ഞെടുക്കുന്ന സാധ്യത ഏതാണ് ?

11. ഒറ്റപദങ്ങളുടെ തുകയുടെ 3 മടങ്ങ് ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിലെ എല്ലാ പദങ്ങൾക്കും തുല്യം എങ്കിൽ പൊതു അനുപാതം കാണുക.

12. S_1, S_2, S_3 എന്നിവ യഥാക്രമം ആദ്യത്തെ $n, 2n, 3n$ പദങ്ങളുടെ തുകയാണെങ്കിൽ $S_1(S_3 - S_2) = (S_2 - S_1)^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

$a = 1$ പൊതു അനുപാദം $x \neq 1$, ഉള്ള ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1.$

മുകളിൽ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ ഇടതുഭാഗം കൃതി $n - 1$ ഉള്ള ഒരു സവിശേഷ ബഹുപദ വ്യംജക മാണെന്നതു ശ്രദ്ധിക്കുക. ഈ സൂത്രം ചില ശ്രേണികളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

2.5.3 സവിശേഷ ശ്രേണികൾ $\sum_{k=1}^{n} k, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2, \sum_{k=1}^{n} k^3$

നാം ഇതിനുമുമ്പ് Σ എന്ന ചിഹ്നം സങ്കലനത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചു.

പരിമിത ശ്രേണികളെ സിമ്മ എന്ന ചിഹ്നവുപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചില ഉദാഹരണങ്ങളെ പട്ടികയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു .

ക്രമസംഖ്യ	ചിഹ്നം	വിപുലീകരണം
1.	$\sum_{k=1}^{n} k$ or $\sum_{j=1}^{n} j$	$1 + 2 + 3 + \cdots + n$
2.	$\sum_{n=2}^{6} (n - 1)$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$
3.	$\sum_{d=0}^{5} (d + 5)$	$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
4.	$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2$
5.	$\sum_{k=1}^{10} 3 = 3\sum_{k=1}^{10} 1$	$3[1 + 1 + \cdots 1$10 പദങ്ങൾ$] = 30$

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ എന്നത് തെളിയിച്ചു. ഇതിനെ $a = 1$, $d = 1$, $l = n$ എന്ന് A.P. യുടെ തുകയെ ഉപയോഗിച്ചാൽ $S_n = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{n}{\mathbf{2}}(1 + n)$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതിനാൽ സിഗ്മ ചിഹ്നമുപയോഗിച്ച് നമുക്ക് $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ എന്ന് എഴുതാം.

നമുക്ക് താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യങ്ങളെ തെളിയിക്കാം.

(i) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$, (ii) $\sum_{k=1}^{n} k^2$, (iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

തെളിവ് :

(i) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$ എന്നീ സൂത്രവാക്യങ്ങളെ തെളിയിക്കാം.

ഇത് $a = 1,\ d = 2,\ l = (2n-1)$. എന്ന n പദങ്ങള ഒരു A.P. യാണ്

$\therefore$ $S_n = \frac{n}{2}(1+2n-1) = n^2$ $\qquad (S_n = \frac{n}{2}(a+l))$

അതായത്, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ (1)

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

1. സൂത്രം (1) താഴെകൊടുത്തിട്ടുള്ള രീതിയിലും കിട്ടുന്നതാണ്

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}2k - \sum_{k=1}^{n}1 = 2\left(\sum_{k=1}^{n}k\right) - n = \frac{2(n)(n+1)}{2} - n = n^2.$$

2. (1) ൽ നിന്നും $1+3+5+\cdots+l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2$, എന്തെന്നാൽ $l = 2n-1 \Longrightarrow n = \frac{l+1}{2}$.

(ii) നമുക്ക് $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ എന്ന് അറിയാം

$\therefore\ k^3 - (k-1)^3 = k^2 + k(k-1) + (k-1)^2$ ($a = k$, $b = k-1$ എന്ന് എടുക്കാം)

$\Longrightarrow$ $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$ (2)

$k = 1,$ ആയാൽ $1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$

$k = 2,$ ആയാൽ $2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$

$k = 3,$ ആയാൽ $3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$. ഇത് തുടർന്നാൽ,

$k = n,$ ആയാൽ $n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$.

$k = 1, 2, \cdots, n$ എന്നിവയുടെ സമീകരണങ്ങളെ നിരയായി കൂട്ടിയാൽ

$$n^3 = 3[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2] - 3[1 + 2 + \cdots + n] + n$$

$$3[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2] = n^3 + 3[1 + 2 + \cdots + n] - n$$

$$3\left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (3)$$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3$

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന മാതൃകയെ നമുക്ക് നിരീക്ഷിക്കാം

$$1^3 = 1 = (1)^2$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1+2+3)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = (1+2+3+4)^2.$$

ഈ മാതൃക n പദങ്ങൾ വരെ നീട്ടിയാൽ,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [1+2+3+\cdots+n]^2$$
$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

അതായത്, $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \qquad (4)$$

(i) ആദ്യത്തെ n നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ തുക, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(ii) ആദ്യത്തെ n ഒറ്റ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ തുക, $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

(iii) ആദ്യത്തെ n ഒറ്റ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ തുക, (അവസാനം പദം l തന്നിരുന്നാൽ)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2.$$

(iv) ആദ്യത്തെ n നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(v) ആദ്യത്തെ n നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ ഘനങ്ങളുടെ തുക,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

ഉദാഹരണം 2.29

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ശ്രേണികളുടെ തുക കാണുക

(i) $26 + 27 + 28 + \cdots + 60$ (ii) $1 + 3 + 5 + \cdots$ 25 പദങ്ങൾ വരെ (ii) $31 + 33 + \cdots + 53$.

നിർദ്ധാരണം

(i) $$26 + 27 + 28 + \cdots + 60 = (1+2+3+\cdots+60) - (1+2+3+\cdots+25)$$
$$= \sum_{1}^{60} n - \sum_{1}^{25} n$$
$$= \frac{60(60+1)}{2} - \frac{25(25+1)}{2}$$
$$= (30 \times 61) - (25 \times 13) = 1830 - 325 = 1505.$$

(ii) $n = 25$

$\therefore\quad 1 + 3 + 5 + \cdots 25$ പദങ്ങൾ $= 25^2$ $\qquad\qquad (\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2)$

$= 625.$

(iii) $31 + 33 + \cdots + 53$

$= (1 + 3 + 5 + \cdots + 53) - (1 + 3 + 5 + \cdots + 29)$

$= \left(\frac{53+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{29+1}{2}\right)^2 \qquad\qquad (1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2)$

$= 27^2 - 15^2 = 504.$

ഉദാഹരണം 2.30

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ശ്രേണികളുടെ തുക കാണുക.

(i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2$ (ii) $12^2 + 13^2 + 14^2 + \cdots + 35^2$

(iii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 51^2$.

നിർദ്ധാരണം

(i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2 = \sum_{1}^{25} n^2$

$= \frac{25(25+1)(50+1)}{6} \qquad\qquad (\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$

$= \frac{(25)(26)(51)}{6}$

$\therefore\quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2 = 5525.$

(ii) $12^2 + 13^2 + 14^2 + \cdots + 35^2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 35^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 11^2)$

$= \sum_{1}^{35} n^2 - \sum_{1}^{11} n^2$

$= \frac{35(35+1)(70+1)}{6} - \frac{11(12)(23)}{6}$

$= \frac{(35)(36)(71)}{6} - \frac{(11)(12)(23)}{6}$

$= 14910 - 506 = 14404.$

(iii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 51^2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 51^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots 50^2)$

$= \sum_{1}^{51} n^2 - 2^2[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2]$

$$= \sum_{1}^{51} n^2 - 4\sum_{1}^{25} n^2$$

$$= \frac{51(51+1)(102+1)}{6} - 4 \times \frac{25(25+1)(50+1)}{6}$$

$$= \frac{(51)(52)(103)}{6} - 4 \times \frac{25(26)(51)}{6}$$

$$= 45526 - 22100 = 23426.$$

ഉദാഹരണം 2.31

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ശ്രേണികളുടെ തുക കാണുക.

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 20^3$ (ii) $11^3 + 12^3 + 13^3 + \cdots + 28^3$

നിർദ്ധാരണം

(i) $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots 20^3 = \sum_{1}^{20} n^3$$

$$= \left(\frac{20(20+1)}{2}\right)^2 \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \text{ ഉപയോഗിച്ച്}$$

$$= \left(\frac{20 \times 21}{2}\right)^2 = (210)^2 = 44100.$$

(ii) $$11^3 + 12^3 + \cdots + 28^3$$

$$= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 28^3) - (1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3)$$

$$= \sum_{1}^{28} n^3 - \sum_{1}^{10} n^3$$

$$= \left[\frac{28(28+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{10(10+1)}{2}\right]^2$$

$$= 406^2 - 55^2 = (406+55)(406-55)$$

$$= (461)(351) = 161811.$$

ഉദാഹരണം 2.32

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 4356$ എങ്കിൽ k, യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം k ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കമാണെന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 4356$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = 4356 = 6 \times 6 \times 11 \times 11$$

വർഗ്ഗമൂലം എടുത്താൽ, $$\frac{k(k+1)}{2} = 66$$

$$\Longrightarrow k^2 + k - 132 = 0 \quad \Longrightarrow (k+12)(k-11) = 0$$

$k = 11$, k ധനമായതിനാൽ

ഉദാഹരണം 2.33

(i) $1+2+3+\cdots+n = 120$, എങ്കിൽ $1^3+2^3+3^3+\cdots n^3$ കാണുക.

(ii) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = 36100$, എങ്കിൽ $1+2+3+\cdots+n$.കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) $1+2+3+\cdots+n = 120$ i.e. $\frac{n(n+1)}{2} = 120$

$\therefore \quad 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 120^2 = 14400$

(ii) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = 36100$

$$\Longrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 36100 = 19\times19\times10\times10$$

$$\Longrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 190$$

$$1+2+3+\cdots+n = 190.$$

ഉദാഹരണം 2.34

11സെ.മീ. , 12സെ.മീ. , $\cdots$, 24സെ.മീ. , എന്നീ വശങ്ങളുള്ള 14 സമചതുരങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ തുക കാണുക

നിർദ്ധാരണം സമചതുരങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ രൂപീകരിക്കുന്ന ശ്രേണി $11^2+12^2+\cdots+24^2$

ആകെ വിസ്തീർണ്ണം $= 11^2+12^2+13^2+\cdots+24^2$

$$= (1^2+2^2+3^3+\cdots+24^2)-(1^2+2^2+3^3+\cdots+10^2)$$

$$= \sum_1^{24} n^2 - \sum_1^{10} n^2$$

$$= \frac{24(24+1)(48+1)}{6} - \frac{10(10+1)(20+1)}{6}$$

$$= \frac{(24)(25)(49)}{6} - \frac{(10)(11)(21)}{6}$$

$$= 4900 - 385$$

$$= 4515 \text{ sq. cm.}$$

അഭ്യാസം 2.6

1. താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ശ്രേണികളുടെ തുക കാണുക

(i) $1+2+3+\cdots+45$ (ii) $16^2+17^2+18^2+\cdots+25^2$

(iii) $2+4+6+\cdots+100$ (iv) $7+14+21\cdots+490$

(v) $5^2+7^2+9^2+\cdots+39^2$ (vi) $16^3+17^3+\cdots+35^3$

2. k യുടെ മൂല്യം കാണുക

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 6084$ (ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 2025$

3. $1 + 2 + 3 + \cdots + p = 171$, എങ്കിൽ $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + p^3$ കാണുക.

4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 8281$, എങ്കിൽ $1 + 2 + 3 + \cdots + k$ കാണുക.

5. 12 സെ.മീ., 13 സെ.മീ., $\cdots$, 23 സെ.മീ.. എന്നീ വശങ്ങളുള്ള 12 സമചതുരങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ തുക കാണുക

6. 16സെ.മീ., 17സെ.മീ., 18സെ.മീ., $\cdots$, 30സെ.മീ. എന്നീ വശങ്ങളുള്ള 15 സമചതുരഘനികകളുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

അഭ്യാസം 2.7

ശരിയായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുക്കുക

1. തെറ്റായ പ്രസ്താവന ഏത് ?

(A) $\mathbb{N}$ ൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട ഒരു വാസ്തവിക മൂല്യഫലനമാണ് ഒരു അനുക്രമം.

(B) എല്ലാ ഫലനവും ഒരു അനുക്രമത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

(C) ഒരു അനുക്രമത്തിൽ അനന്തമായ അനേകം പദങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കാം.

(D) ഒരു അനുക്രമത്തിൽ പരിമിതമായ പദങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കാം

2. 1, 1, 2, 3, 5, 8, $\cdots$ എന്ന അനുക്രമത്തിന്റെ 8 - ാം പദം.

(A) 25 (B) 24 (C) 23 (D) 21

3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \cdots$ എന്ന അനുക്രമത്തിലെ അടുത്ത പദം.

(A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{22}$ (C) $\frac{1}{30}$ (D) $\frac{1}{18}$

4. a, b, c, l, m എന്നിവ A.P, യിലാണ് എങ്കിൽ $a - 4b + 6c - 4l + m$ ന്റെ മൂല്യം

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

5. a, b, c എന്നിവ A.P. യിലാണെങ്കിൽ $\frac{a-b}{b-c} =$

(A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{c}$ (C) $\frac{a}{c}$ (D) 1

6. ഒരു അനുക്രമത്തിന്റെ n - ാം പദം $100n+10$, എങ്കിൽ ആ അനുക്രമം

(A) ഒരു A.P. (B) ഒരു G.P. (C) ഒരു സ്ഥിര അനുക്രമം (D) A.Pയുമല്ല , G.P.യുമല്ല

7. $a_1, a_2, a_3, \cdots$ എന്നിവ A.P. യിലാണ്, $\frac{a_4}{a_7} = \frac{3}{2}$, എങ്കിൽ A.P. യിലെ പദം

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 0 (C) $12a_1$ (D) $14a_1$

8. $a_1, a_2, a_3, \cdots$ എന്ന അനുക്രമം A.P. യിലാണ്. എങ്കിൽ $a_5, a_{10}, a_{15}, \cdots$ എന്ന അനുക്രമം

(A) ഒരു G.P. (B) ഒരു A.P. (C) A.Pയുമല്ല, G.P. യുമല്ല (D) A.P യും G.P. യുമാണ്.

9. $k+2, 4k-6, 3k-2$ എന്നിവ ഒരു A.P. യിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള മൂന്ന് പദങ്ങളാണ്. എങ്കിൽ k യുടെ മൂല്യം

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

10. $a, b, c, l, m. n$ എന്നിവ A.P.,യിലാണ് . എങ്കിൽ $3a+7, 3b+7, 3c+7, 3l+7, 3m+7, 3n+7$ എന്നിവ

(A) ഒരു G.P. (B) ഒരു A.P. (C) ഒരു സ്ഥിര അനുക്രമം (D) A.P. യുമല്ല , G.Pയുമല്ല

11. ഒരു G.P യിലെ 3 - ാം പദം 2, എങ്കിൽ ആദ്യത്തെ 5 പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം

(A) 5^2 (B) 2^5 (C) 10 (D) 15

12. a, b, c എന്നിവ G.P, യിലാണെങ്കിൽ $\frac{a-b}{b-c} =$

(A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) $\frac{b}{c}$ (D) $\frac{c}{b}$

13. $x,\ 2x+2,\ 3x+3, \cdots$ എന്നിവ G.P, യിലാണെങ്കിൽ $5x,\ 10x+10,\ 15x+15, \cdots$ എന്നിവ

(A) ഒരു G.P. (B) ഒരു A.P. (C) ഒരു സ്ഥിര അനുക്രമം (D) A.P. യുമല്ല , G.Pയുമല്ല

14. $-3, -3, -3, \cdots$ എന്ന അനുക്രമം

(A) ഒരു G.P. (B) ഒരു A.P. (C) A.Pയുമല്ല, G.P. യുമല്ല (D) A.P യും G.P. യുമാണ്.

15. ഒരു G.P യിലെ ആദ്യത്തെ നാല് തുടർച്ചയായുള്ള പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം 256, പൊതു അനുപാതം 4, ആദ്യപദം ധനവുമാണെങ്കിൽ മൂന്നാംപദം

(A) 8 (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{32}$ (D) 16

16. ഒരു G.P യിലെ $t_2 = \frac{3}{5},\ t_3 = \frac{1}{5}$ എങ്കിൽ പൊതു അനുപാതം

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) 5

17. $x \neq 0$, എങ്കിൽ $1 + \sec x + \sec^2 x + \sec^3 x + \sec^4 x + \sec^5 x$

(A) $(1+\sec x)(\sec^2 x + \sec^3 x + \sec^4 x)$ (B) $(1+\sec x)(1+\sec^2 x + \sec^4 x)$

(C) $(1-\sec x)(\sec x + \sec^3 x + \sec^5 x)$ (D) $(1+\sec x)(1+\sec^3 x + \sec^4 x)$

18. ഒരു A.P. യിലെ n - ാം പദം $t_n = 3 - 5n$, ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

(A) $\frac{n}{2}[1-5n]$ (B) $n(1-5n)$ (C) $\frac{n}{2}(1+5n)$ (D) $\frac{n}{2}(1+n)$

19. $a^{m-n},\ a^m,\ a^{m+n}$ എന്ന G.P. യുടെ പൊതു അനുപാതം

(A) a^m (B) a^{-m} (C) a^n (D) a^{-n}

20. $1+2+3+...+n = k$ എങ്കിൽ $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 =$

(A) k^2 (B) k^3 (C) $\frac{k(k+1)}{2}$ (D) $(k+1)^3$

ഓർമ്മിക്കേണ്ടവ

- വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ അനുക്രമം എന്നത് വാസ്തവിക സംഖ്യകളെ ചില ക്രമങ്ങളിൽ ക്രമീകരിക്കുന്നത് അല്ലെങ്കിൽ പട്ടികയിടുന്നതാണ്.
- $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n = 3, 4, \cdots$ എന്ന അനുക്രമത്തെ ഫിബോനാച്ചി അനുക്രമം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിന്റെ പദങ്ങൾ $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$ ആണ്
- $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in \mathbb{N}$, d ഒരു സ്ഥിരാങ്കം, എങ്കിൽ $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ എന്ന ഒരു അനുക്രമത്തെ കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമം എന്നുപറയുന്നു. ഇവിടെ a_1 നെ ആദ്യപദമെന്നും, സ്ഥിരാങ്കം d യെ പൊതു വ്യത്യാസമെന്നും പറയുന്നു.

  ഒരു A.P. യുടെ പൊതുപദം (n -ാം പദം) $t_n = a + (n-1)d \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$.
- $a_{n+1} = a_n r$, $r \neq 0, rn \in \mathbb{N}$, r ഒരു സ്ഥിരാങ്കം, എങ്കിൽ $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ എന്ന ഒരു അനുക്രമത്തെ ഗുണന ക്രമാനുപാതമെന്നു പറയുന്നു

  ഒരു G.P. യുടെ പൊതുപദം (n -ാം പദം) $t_n = ar^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.
- ഒരു അനുക്രമത്തിലെ പദങ്ങളുടെ സങ്കലന ചിഹ്നം (+) കൊണ്ട് കൂട്ടിച്ചേർത്ത് അവയുടെ സങ്കലനമായി എഴുതുന്നതിന് ശ്രേണി എന്നു പറയുന്നു. ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം പരിമിതമാണെങ്കിൽ, അതിനെ പരിമിത ശ്രേണി എന്നു പറയുന്നു. ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം അനന്തമാണെങ്കിൽ, അതിനെ അനന്ത ശ്രേണി എന്നു പറയുന്നു.
- ആദ്യപദം a പൊതുവ്യത്യാസം d യുമുള്ള ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a + l)$, l അവസാന പദം
- ഒരു ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}, & r \neq 1 \\ na & r = 1. \end{cases}$$

  a ആദ്യപദം, r പൊതു അനുപാതം
- ആദ്യത്തെ n നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ തുക, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- ആദ്യത്തെ n ഒറ്റ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ തുക, $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$
- ആദ്യത്തെ n ഒറ്റ നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ തുക (അവസാനപദം l തന്നിരുന്നാൽ)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2.$$

- ആദ്യത്തെ n നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- ആദ്യത്തെ n നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ ഘനങ്ങളുടെ തുക , $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ ?

മ്യാറിൻ മെർസെനിന്റെ പേരിൽ അറിയപ്പെടുന്ന മെർസെൻ സംഖ്യ $M = 2^p - 1$ ആകുന്നു. ഇവിടെ p ഒരു ധന പൂർണ്ണാങ്കമാണ്. M ഒരു അഭാജ്യമാണെങ്കിൽ, ഇതൊരു മെർസെൻ അഭാജ്യസംഖ്യയാകുന്നു. $2^p - 1$ ഒരു അഭാജ്യമാണെങ്കിൽ, p അഭാജ്യമെന്നത് രസകരമാണ്. ഏറ്റവും വലിയ അഭാജ്യ സംഖ്യയായ $2^{43,112,609} - 1$ ഒരു മെർസെൻ അഭാജ്യസംഖ്യയാകുന്നു.

3

ബീജഗണിതം

The human mind has never invented a labour-saving machine equal to algebra - *Author unknown*

- മുഖവുര
- ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങൾ
- സിന്തറ്റിക് ഹരണം
- ഉ.സാ.ഭാ, ല.സാ.ഗു
- പരിമേയ വ്യംജകങ്ങൾ
- വർഗ്ഗമൂലം
- ദ്വിഘാത സമവാക്യങ്ങൾ

അൽ – ഖ്വാരിസ്മി

(780-850)

അറേബ്യ

ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിനും ഭൂമി ശാസ്ത്രത്തിനും അൽ-ഖ്വാരിസ്മിയുടെ സംഭാവന ബീജഗണിതത്തിന്റേയും ത്രികോണമിതിയുടേയും നവീകരണത്തിന് അടിസ്ഥാനമേകി. അദ്ദേഹം രേഖീയ ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ ആദ്യത്തെ വ്യവസ്ഥാനുസൃതമായ നിർദ്ധാരണം അവതരിപ്പിച്ചു. അദ്ദേഹത്തെ ബീജഗണിതത്തിന്റെ സ്ഥാപകനായി പരിഗണിക്കുന്നു.

ഇന്ത്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിൽ വികസിപ്പിച്ച് പാശ്ചാത്യ നാടുകളിലേയ്ക്ക് വ്യാപിപ്പിച്ച ഹിന്ദു - അറബിക് അക്കങ്ങളുടെ സമ്പ്രദായത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള അറബിക് അക്കങ്ങളെ പരിചയപ്പെടുത്തുന്നതിന് അങ്കഗണിതത്തിലുള്ള അദ്ദേഹത്തിന്റെ പരിശ്രമം കാരണമായി ഭവിച്ചു.

3.1 മുഖവുര

ബീജഗണിത സമീകരണങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനെ പ്രതിപാദിക്കുന്ന, ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിന്റെ അതിപ്രധാനവും, വളരെ പഴക്കവുമുള്ള ഒരു ശാഖയാണ് **ബീജഗണിതം.** മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഗ്രീക്ക് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഡിയോഫാന്റസ്- അനേകം പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങൾ അടങ്ങിയ **'അരിത്മെറ്റിക്'** എന്ന പുസ്തകം എഴുതി. ആറും ഏഴും നൂറ്റാണ്ടുകളിൽ ഇന്ത്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരായ **ആര്യഭട്ടയും ബ്രഹ്മഗുപ്തയും** രേഖീയ സമീകരണങ്ങളിലും ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളിലും പരിശ്രമങ്ങൾ നടത്തി അവയുടെ നിർദ്ധാരണങ്ങൾക്ക് പൊതു മാർഗ്ഗങ്ങൾ വികസിപ്പിച്ചു.

ബീജഗണിതത്തിൽ അടുത്ത മുഖ്യമായ വികസനം ഒൻപതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ അറേബ്യൻ ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരാൽ നടന്നിട്ടുണ്ട്. പ്രത്യേകിച്ച് "Compendium on calculation by completion and balancing" എന്ന അൽ-ഖ്വാരിസ്മിയുടെ പുസ്തകം ഒരു മുഖ്യമായ നാഴികക്കല്ലാണ്. ഇതിൽ ഉപയോഗിച്ച **'ആൾജബ്ര'** എന്ന പദം ലാറ്റിനിൽ **'ആൾജിബ്ര'** എന്നും ഇതിന്റെ പരിഭാഷ മത്സരം അഥവാ **പുനഃസ്ഥാപനം** എന്നും ആണ്. പതിമൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടിൽ Leonardo Fibonacci's യുടെ ബീജഗണിതത്തിലെ ഗ്രന്ഥങ്ങൾ പ്രാധാന്യമുള്ളതും സ്വാധീനമുള്ളതുമാണ്. ഇറ്റാലിയൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ Luca Pacioli (1445-1517)യുടേയും ഇംഗ്ലീഷ് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ Robert Recorde (1510-1558)യുടേയും ബീജഗണിതത്തിലെ പരിശ്രമങ്ങൾ വളരെ സ്വാധീനം ചെലുത്തുന്നവയാണ്. തുടർന്നുള്ള നൂറ്റാണ്ടുകളിൽ ബീജ ഗണിതം കൂടുതൽ സംഗ്രഹരൂപത്തിൽ വികസിപ്പിച്ചു. 19-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഈ പരിശ്രമങ്ങളിൽ ബ്രിട്ടീഷ് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാർ മുഖ്യപങ്ക് വഹിച്ചു. Peacock (ബ്രിട്ടൻ,1791-1858) അങ്കഗണിതത്തിലും ബീജഗണിതത്തിലുമുള്ള പ്രാമാണിക ചിന്തകളുടെ സ്ഥാപകനാണ്. ഇക്കാരണങ്ങളാൽ അദ്ദേഹം ബീജഗണിതത്തിന്റെ യൂക്ലിഡ് എന്നറിയപ്പെടുന്നു. അടിസ്ഥാന ക്രിയകളിൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട സംഗ്രഹിക ചിഹ്നങ്ങളെ പരിഗണിക്കുന്ന Peacockന്റെ പരിശ്രമങ്ങളെ DeMorgan (ബ്രിട്ടൻ,1806-1871) വികസിപ്പിച്ചു.

ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ രേഖീയ സമീകരണങ്ങളേയും ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടേയും നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്ന പഠനരീതികളിൽ ശ്രദ്ധ കേന്ദ്രീകരിക്കാം.

3.2 രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണ സമ്പ്രദായം

ഒൻപതാം ക്ലാസ്സിൽ ഒരു ചരമുള്ള രേഖീയ സമീകരണം $ax + b = 0,\ a \neq 0$ യെക്കുറിച്ച് പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു.

രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള ഒരു രേഖീയ സമീകരണം $ax + by = c$, a അല്ലെങ്കിൽ $b \neq 0$ നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം. $x = x_0,\ y = y_0$ എന്നീ മൂല്യങ്ങൾ സമീകരണത്തെ തൃപ്തമാക്കുന്നു. എങ്കിൽ ക്രമജോടി (x_0, y_0) നെ രേഖീയ സമീകരണത്തിന്റെ **നിർദ്ധാരണം** എന്നു പറയുന്നു.

ജ്യാമിതീയ രീതിയിൽ, $ax + by = c$ എന്ന രേഖീയ സമീകരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ഒരു തലത്തിലുള്ള ഒരു നേർരേഖയാണ്. അതുകൊണ്ട് ഈ രേഖയിലെ (x, y) എന്ന ഓരോ ബിന്ദുവും $ax + by = c$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണത്തിന് സമാനമാണ്. വിപരീതമായി, സമീകരണത്തിന്റെ ഏതൊരു നിർദ്ധാരണം (x, y) യും ഈ നേർരേഖയിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ്. അതായത്, $ax + by = c$ എന്ന സമീകരണത്തിന് അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ട്.

x, y എന്നീ രണ്ട് ചരങ്ങളിലുള്ള പരിമിത എണ്ണം രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ ഒരു ഗണത്തെ (x, y) ചരങ്ങളിലുള്ള **രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ സമ്പ്രദായം** എന്നു പറയുന്നു. ഈ സമീകരണങ്ങളുടെ സമ്പ്രദായത്തെ **ഏകകാല സമീകരണങ്ങൾ** എന്നും പറയുന്നു.

നിർവ്വചനം

$x = x_0,\ y = y_0$ എന്നീ മൂല്യങ്ങൾ ഒരു സമ്പ്രദായത്തിലെ എല്ലാ സമീകരണങ്ങളേയും തൃപ്തമാക്കുന്നു എങ്കിൽ ക്രമജോഡി (x_0, y_0) എന്നതിന് രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള ഒരു രേഖീയ സമ്പ്രദായത്തിന്റെ **നിർദ്ധാരണം** എന്നു പറയുന്നു.

രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

(i) ഈ സമീകരണങ്ങളെ x, y യുടെ ഒരു ജോഡി മൂല്യങ്ങളെങ്കിലും തൃപ്തമാക്കിയാൽ അവയെ സ്ഥിരമാണെന്ന് (consistent) പറയാം.

(ii) മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമീകരണങ്ങളെ ഒരു മൂല്യവും തൃപ്തമാക്കിയില്ലെങ്കിൽ അവയെ അസ്ഥിരമാണെന്ന് (inconsistent) പറയാം.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

(i) $ax + by = c$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഒരു സമീകരണത്തെ രേഖീയ സമീകരണമെന്നു പറയുന്നു. എന്തെന്നാൽ ചരങ്ങൾ ഏകഘാതവും സമീകരണത്തിൽ ചരങ്ങൾക്ക് ഗുണന ഫലവുമില്ല.

(ii) രണ്ടിലധികം ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമ്പ്രദായം സാധ്യമാണ്. ഇത് നിങ്ങൾ ഉയർന്ന ക്ലാസ്സുകളിൽ പഠിക്കും.

x, y എന്നീ ചരങ്ങളുള്ള,

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (1)$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (2)$$

എന്ന ഒരു രേഖീയ സമ്പ്രദായം പരിഗണിക്കാം. ഇതിൽ ഓരോ സമീകരണത്തിലും കുറഞ്ഞത് ഒരു ചരം ഉണ്ടായിരിക്കുകയും a_1, b_1, a_2, b_2 എന്നീ സ്ഥിരങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് പൂജ്യമായിരിക്കുകയും ആകാം.

ചുരുക്കത്തിൽ, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.എന്നിരിക്കേണ്ടതാണ്.

ജ്യാമിതീയ രീതിയിൽ താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ സംഭവിക്കാം.

(1) , (2) ൽ സൂചിപ്പിച്ച രണ്ട് നേർരേഖകൾ

(i) കൃത്യമായി ഒരു ബിന്ദുവിൽ പ്രതിച്ഛേദിക്കാം.

(ii) ഒരു ബിന്ദുവിലും പ്രതിച്ഛേദിക്കാതിരിക്കാം.

(iii) സന്നിപതിക്കാം.

(i) സംഭവിച്ചാൽ പ്രതിച്ഛേദബിന്ദു ആ സമ്പ്രദായത്തിന്റെ ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം തരുന്നു. (ii) സംഭവിച്ചാൽ സമ്പ്രദായത്തിന് നിർദ്ധാരണം ഇല്ല. (iii) സംഭവിച്ചാൽ രേഖയിലെ ഓരോ ബിന്ദുവും സമ്പ്രദായത്തിലെ നിർദ്ധാരണത്തെ കുറിക്കുന്നു. അങ്ങനെ സമ്പ്രദായത്തിന് അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബീജഗണിത രീതികൾ ഉപയോഗിക്കാം. (i) **ഒഴിവാക്കൽ രീതി** (ii) **വജ്ര ഗുണന രീതി**

3.2.1 ഒഴിവാക്കൽ രീതി

ഈ രീതിയിൽ ഒരു ചരത്തെ ഒഴിവാക്കത്തക്കവിധം സമീകരണങ്ങളെ യോജിപ്പിക്കേണ്ടതാണ്. ഒരു ചരത്തെ താഴെ പറയുന്ന വിധത്തിൽ ഒഴിവാക്കാം.

(i) ചരങ്ങളിൽ ഒന്നിന്റെ ഗുണോത്തരം തുല്യമാക്കാൻ വേണ്ടി തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളെ അനുയോജ്യമായ സംഖ്യ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക അല്ലെങ്കിൽ ഹരിക്കുക.

(ii) തുല്യമാക്കപ്പെട്ട ഗുണോത്തരങ്ങൾക്ക് വ്യത്യസ്ത ചിഹ്നങ്ങളാണെങ്കിൽ അവ കൂടുക. അല്ലാത്ത പക്ഷം കുറയ്ക്കുക.

ഉദാഹരണം 3.1

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $3x - 5y = -16\,,\quad 2x + 5y = 31$

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങൾ,

$$3x - 5y = -16 \qquad (1)$$

$$2x + 5y = 31 \qquad (2)$$

രണ്ട് സമീകരണങ്ങളിലും y യുടെ ഗുണോത്തരങ്ങൾ തുല്യമാണ്.

അതിനാൽ y യെ ഒഴിവാക്കാൻ കഴിയും.

(1), (2) കൂട്ടിയാൽ

$$5x = 15 \qquad (3)$$

$$x = 3.$$

$x = 3$ നെ (1) അല്ലെങ്കിൽ (2) ൽ ആരോപിച്ചാൽ, y ലഭിക്കും.

$$3(3) - 5y = -16$$

$$\Longrightarrow \quad y = 5.$$

$x = 3, y = 5$ എന്നിവയെ രണ്ടു സമീകരണങ്ങളിലും ആരോപിച്ചാൽ,

$3(3) - 5(5) = -16\,,\ 2(3) + 5(5) = 31$ തന്നിട്ടുള്ള സമ്പ്രദായത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം (3, 5) ആണ്.

കുറിപ്പ്

മുകളിലെ ഉദാഹരണത്തിൽ നിർദ്ധാരണം കാണുന്നതിൽ ഒരു ചരമുള്ള സമീകരണം (3) ലഭിക്കുന്നത് ഒരു പ്രധാന പടിയാണ്. y എന്ന ചരം ഒഴിവാക്കിയതിനാൽ x എന്ന ചരമുള്ള സമീകരണം (3) ലഭിച്ചു. ഒരു സമ്പ്രദായത്തിൽ ചരങ്ങളിൽ ഒന്നിനെ ആദ്യം ഒഴിവാക്കി നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്ന രീതിയെ ഒഴിവാക്കൽ രീതി എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.2

11 പെൻസിലുകളുടേയും 3 റബ്ബറുകളുടേയും വില ₹ 50. കൂടാതെ 8 പെൻസിലുകളുടേയും 3 റബ്ബറുകളുടേയും വില ₹ 38 എങ്കിൽ ഓരോ പെൻസിലിന്റെയും ഓരോ റബ്ബറിന്റെയും വില കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില x രൂപ ഒരു റബ്ബറിന്റെ വില y രൂപ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതിനാൽ $11x + 3y = 50 \quad (1)$

$8x + 3y = 38 \quad (2)$

(1) ൽ നിന്നും (2) കുറച്ചാൽ $3x = 12 \implies x = 4.$

$x = 4$ നെ (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ,

$11(4) + 3y = 50$ അതായത് $y = 2.$

$\therefore x = 4,\ y = 2y =$

∴ ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില ₹ 4 , ഒരു റബ്ബറിന്റെ വില ₹ 2.

കുറിപ്പ്

കിട്ടുന്ന മൂല്യങ്ങൾ രണ്ട് സമീകരണങ്ങളേയും തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു എന്നത് ശരി നോക്കേണ്ടതാണ്.

ഉദാഹരണം 3.3

ഒഴിവാക്കൽ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം കാണുക. $3x + 4y = -25, \quad 2x - 3y = 6$

നിർദ്ധാരണം

$3x + 4y = -25 \quad (1)$

$2x - 3y = 6 \quad (2)$

x നെ ഒഴിവാക്കുന്നതിന് (1) നെ 2 കൊണ്ടും (2) നെ -3 കൊണ്ടും ഗുണിക്കുക.

$(1) \times 2 \implies 6x + 8y = -50 \quad (3)$

$(2) \times -3 \implies -6x + 9y = -18 \quad (4)$

(3) ഉം (4) ഉം കൂട്ടിയാൽ $17y = -68 \implies y = -4$

$y = -4$ നെ (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$3x + 4(-4) = -25$

$x = -3$

നിർദ്ധാരണം $(-3, -4)$ ആകുന്നു.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

ഉദാഹരണം 3.1ൽ ചെയ്തതുപോലെ കൂട്ടുകയോ, കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്താൽ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളിൽ ചരങ്ങളിലൊന്ന് ഒഴിവാക്കാൻ ഉദാഹരണം 3.3 ൽ സാധ്യമല്ല. അതുകൊണ്ട് x അഥവാ y യുടെ ഗുണോത്തരങ്ങൾ (ചിഹ്നം ഒഴികെ) തുല്യമാക്കാൻ ചില പ്രക്രിയകൾ ചെയ്യേണ്ടതുണ്ട്. അതിനുശേഷം നമുക്ക് ഒഴിവാക്കൽ രീതിയിൽ ചെയ്യാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 3.4

ഒഴിവാക്കൽ രീതി ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക. $101x + 99y = 499, \quad 99x + 101y = 501$

നിർദ്ധാരണം

$$101x + 99y = 499 \qquad (1)$$

$$99x + 101y = 501 \qquad (2)$$

ഇവിടെ ചരങ്ങളിലൊന്ന് ഒഴിവാക്കുന്നതിന് അനുയോജ്യമായ സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് ഗുണിക്കണം.

എന്നാൽ ഇവിടെ ഒരു സമീകരണത്തിലെ x ന്റെ ഗുണോത്തരം മറ്റെ സമീകരണത്തിന്റെ y യുടെ ഗുണോത്തരത്തിന് തുല്യമാണ് എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ രണ്ട് സമീകരണങ്ങളേയും കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ അതേ നിർദ്ധാരണമുള്ള പുതിയ ലഘുവായ സമീകരണങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

(1) , (2) കൂട്ടിയാൽ $\quad 200x + 200y = 1000.$

200 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ, $\quad x + y = 5 \qquad (3)$

(1)ൽ നിന്നും (2) കുറച്ചാൽ, $\quad 2x - 2y = -2$

$$\Longrightarrow x - y = -1 \qquad (4)$$

(3) , (4) എന്നിവ നിർദ്ധാരണം ചെയ്താൽ, $\quad x = 2, \; y = 3.$

$\therefore$ ആവശ്യപ്പെട്ട നിർദ്ധാരണം (2, 3) ആണ്.

ഉദാഹരണം 3.5

ഒഴിവാക്കൽ രീതി ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക. $3(2x + y) = 7xy; \quad 3(x + 3y) = 11xy$

നിർദ്ധാരണം

xy യുടെ പദം വരുന്നതുകൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള സമ്പ്രദായം രേഖീയ സമ്പ്രദായമല്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

$$3(2x + y) = 7xy \qquad (1)$$

$$3(x + 3y) = 11xy \qquad (2)$$

$x = 0$ എങ്കിൽ $y = 0$. കൂടാതെ $y = 0$ എങ്കിൽ $x = 0$ ആണ്. അതിനാൽ സമ്പ്രദായത്തിന്റെ ഒരു നിർദ്ധാരണം $(0, 0)$ ആണ്. അതുകൊണ്ട് മറ്റൊരു നിർദ്ധാരണം ഉണ്ടെങ്കിൽ $x \neq 0, \; y \neq 0$ ആയിരിക്കും.

$x \neq 0, \; y \neq 0$ എന്നതിനെ പരിഗണിക്കുക.

ഓരോ സമീകരണത്തിന്റേയും ഇരുവശങ്ങളിലും $x\,y$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ

$$\frac{6}{y} + \frac{3}{x} = 7, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 7 \qquad (3)$$

$$\frac{9}{x} + \frac{3}{y} = 11 \qquad (4)$$

$a = \dfrac{1}{x} \; , \quad b = \dfrac{1}{y}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

(3) , (4) എന്നീ സമീകരണങ്ങൾ ഇപ്രകാരം മാറുന്നു.

$$3a + 6b = 7 \qquad (5)$$

$$9a + 3b = 11 \qquad (6)$$

ഇത് a, b യിലുള്ള ഒരു രേഖീയ സമ്പ്രദായമാണ്.

b യെ ഒഴിവാക്കുന്നതിന്, (6) $\times 2 \implies 18a + 6b = 22$ (7)

(5) ൽ നിന്ന് (7) കുറച്ചാൽ, $-15a = -15. \implies a = 1.$

$a = 1$ നെ (5) ൽ ആരോപിച്ചാൽ, $b = \frac{2}{3}$ അങ്ങനെ $a = 1,\ b = \frac{2}{3}$.

$a = 1$ ആയാൽ $\frac{1}{x} = 1 \implies x = 1.$

$b = \frac{2}{3}$ ആയാൽ $\frac{1}{y} = \frac{2}{3} \implies y = \frac{3}{2}.$

ഈ സമ്പ്രദായത്തിന് $(1, \frac{3}{2}), (0, 0)$ എന്നീ രണ്ട് നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ട്.

മറ്റൊരു രീതി

$$3(2x + y) = 7xy \quad (1)$$

$$3(x + 3y) = 11xy \quad (2)$$

$$(2) \times 2 - (1) \implies 15y = 15xy$$

$$\implies 15y(1-x) = 0. \quad x = 1, y = 0$$

$x = 1$ ആയാൽ $y = \frac{3}{2}$, $y = 0$ ആയാൽ $x = 0$

രണ്ട് നിർദ്ധാരണങ്ങൾ $(1, \frac{3}{2}), (0, 0)$.

$15y = 15xy$ എന്നതിനെ $15 = 15x$ എന്നെഴുതിയാൽ $y = 0$ എന്ന് കിട്ടില്ല.

അഭ്യാസം 3.1

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമീകരണങ്ങൾ ഒഴിവാക്കൽ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

1. $x + 2y = 7,\quad x - 2y = 1$
2. $3x + y = 8,\quad 5x + y = 10$
3. $x + \frac{y}{2} = 4,\quad \frac{x}{3} + 2y = 5$
4. $11x - 7y = xy,\quad 9x - 4y = 6xy$
5. $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{20}{xy},\ \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{15}{xy},\ x \neq 0, y \neq 0$
6. $8x - 3y = 5xy,\ 6x - 5y = -2xy$
7. $13x + 11y = 70,\ 11x + 13y = 74$
8. $65x - 33y = 97,\ 33x - 65y = 1$
9. $\frac{15}{x} + \frac{2}{y} = 17,\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{36}{5},\ x \neq 0, y \neq 0$
10. $\frac{2}{x} + \frac{2}{3y} = \frac{1}{6},\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 0,\ x \neq 0, y \neq 0$

രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണങ്ങളുടെ ഗണന സംഖ്യ

രണ്ട് സമീകരണങ്ങളുടെ സമ്പ്രദായത്തിനെ പരിഗണിക്കാം.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (2)$$

ഇവിടെ, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. ആകത്തക്ക വിധം ഗുണോത്തരം വാസ്തവിക സംഖ്യകളാണ്.

ഒഴിവാക്കൽ രീതി ഉപയോഗിച്ച് y യുടെ ഗുണോത്തരം തുല്യമാക്കാം.

(1) നെ b_2 കൊണ്ടും (2) നെ b_1 കൊണ്ടും ഗുണിക്കുക.

$$b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \quad (3)$$

$$b_1a_2x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \quad (4)$$

(3) ൽ നിന്നും (4) നെ കുറയ്ക്കുക.

$$(b_2a_1 - b_1a_2)x = b_1c_2 - b_2c_1 \implies x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0)$$

x ന്റെ മൂല്യം (1) ലോ (2)ലോ ആരോപിച്ച് y നെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്താൽ,

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0. \quad (5)$$

രണ്ട് സംഭവങ്ങളെ പരിഗണിക്കാം.

സംഭവം (i) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. ie, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

ഈ സംഭവത്തിൽ, ഒരു ജോഡി രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾക്ക് ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം മാത്രമേ ഉണ്ടായിരിക്കുകയുള്ളൂ.

സംഭവം (ii) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. അതായത്, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ ആണെങ്കിൽ

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$

a_1 , b_1 ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ സമീകരണം (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$\lambda(a_2x + b_2y) + c_1 = 0 \quad (6)$$

സമീകരണങ്ങൾ (6) , (2) തൃപ്തിപ്പെടുന്നത്

$c_1 = \lambda c_2 \implies \frac{c_1}{c_2} = \lambda$ ആകുമ്പോൾ മാത്രമാണ് എന്ന് വ്യക്തമാണ്.

$c_1 = \lambda c_2$ ആണെങ്കിൽ സമീകരണം (2) ലെ ഏതെങ്കിലും നിർദ്ധാരണം (1) നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു. കൂടാതെ സമീകരണം (1) ലെ ഏതെങ്കിലും നിർദ്ധാരണം (2) നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

അതിനാൽ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \lambda$; ആണെങ്കിൽ തന്നിട്ടുള്ള ഒരു ജോഡി രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ (1) , (2) ലും അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ട്.

$c_1 \neq \lambda c_2$ ആണെങ്കിൽ (1) ലെ ഏതെങ്കിലും നിർദ്ധാരണം (2) നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നില്ല. ഇതുപോലെ (2) ലെ ഏതെങ്കിലും നിർദ്ധാരണം (1) നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നില്ല.

അതുകൊണ്ട് $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ആണെങ്കിൽ തന്നിട്ടുള്ള ഒരു ജോഡി സമീകരണങ്ങൾ (1) നും (2)നും നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഇല്ല.

കുറിപ്പ്

ഇവിടെ മുകളിൽ ചർച്ച ചെയ്തതിനെ സംഗ്രഹിക്കാം.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0, \text{ ഇവിടെ } a_1^2 + b_1^2 \neq 0 \ , \ a_2^2 + b_2^2 \neq 0.$$

സമീകരണങ്ങളുടെ സമ്പ്രദായത്തിനു വേണ്ടി

(i) $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ അല്ലെങ്കിൽ $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, എങ്കിൽ സമീകരണങ്ങളുടെ സമ്പ്രദായത്തിന് ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം ഉണ്ടായിരിക്കും.

(ii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, എങ്കിൽ സമീകരണങ്ങളുടെ സമ്പ്രദായത്തിന് അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങളുണ്ടായിരിക്കും.

(iii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, എങ്കിൽ സമീകരണങ്ങളുടെ സമ്പ്രദായത്തിന് നിർദ്ധാരണം ഇല്ല.

3.2.2 വജ്രഗുണന രീതി

x, y ചരങ്ങളുള്ള ഒരു ജോഡി രേഖീയ സമീകരണങ്ങളെ ഒഴിവാക്കൽ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ നിർദ്ധാരണം ലഭിക്കുന്നതിന് ഗുണോത്തരങ്ങളെ ഫലപ്രദമായി ഉപയോഗിക്കേണ്ടതാണ്. മറ്റൊരു രീതിയായ **വജ്ര ഗുണന രീതി** ഈ നടപടിക്രമത്തെ ലഘൂകരിക്കുന്നു.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ , \ a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0 \text{ എന്നിവ പരിഗണിക്കാം.} \qquad (2)$$

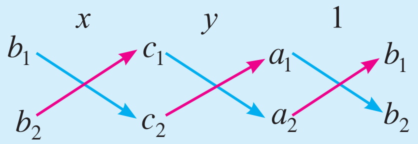
$x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ എന്നീ നിർദ്ധാരണം ഇതിനുമുൻപ് നാം അംഗീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്.

അതിനാൽ $\dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $\dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ എന്ന് എഴുതാം.

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രീതിയിൽ മുകളിൽ പറഞ്ഞതിനെ എഴുതാം.

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

മുകളിൽപറഞ്ഞ ബന്ധത്തെ ഓർമ്മിക്കാൻ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അടയാള ചിത്രം വളരെ ഉപയോഗ പ്രദമാണ്.



രണ്ട് സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള അമ്പടയാളങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് അവയെ ഗുണിച്ച്, രണ്ടാമത്തെ ഗുണനഫലത്തിൽ (അമ്പടയാളം മേലോട്ട്) ഒന്നാമത്തെ ഗുണനഫലന (അമ്പടയാളം കീഴോട്ട്)ത്തിൽ നിന്നും കുറയ്ക്കേണ്ടതാണ്.

മുകളിലെ രീതിയിൽ ഒരു രേഖീയ സമീകരണത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്ന രീതിയെ **വജ്രഗുണന രീതി** എന്നു പറയുന്നു.

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$ എന്നതിൽ

$b_1c_2 - b_2c_1$ അല്ലെങ്കിൽ $c_1a_2 - c_2a_1$ എന്നത് 0 ആയിരിക്കാം. കൂടാതെ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

> $a_1x + b_1y + c_1 = 0$
> $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ എന്നീ സമീകരണങ്ങളുടെ സമ്പ്രദായത്തിന്
>
> (i) $b_1c_2 - b_2c_1 = 0$, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ആണെങ്കിൽ $x = 0$
>
> (ii) $c_1a_2 - c_2a_1 = 0$, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ആണെങ്കിൽ $y = 0$

ഇനി ഒരേ ഒരു നിർദ്ധാരണമുള്ള സമീകരണങ്ങളുടെ സമ്പ്രദായത്തെ എടുത്ത്, അവയുടെ നിർദ്ധാരണത്തെ വജ്രഗുണന രീതിയിൽ കാണാം.

ഉദാഹരണം 3.6

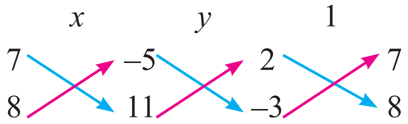
വജ്ര ഗുണന രീതി ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

$$2x + 7y - 5 = 0$$
$$-3x + 8y = -11$$

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങൾ

$$2x + 7y - 5 = 0$$
$$-3x + 8y + 11 = 0$$

വജ്രഗുണന രീതിയിൽ ഗുണോത്തരങ്ങളെ എഴുതിയാൽ



അതിനാൽ $$\frac{x}{(7)(11)-(8)(-5)} = \frac{y}{(-5)(-3)-(2)(11)} = \frac{1}{(2)(8)-(-3)(7)}.$$

$$\therefore \quad \frac{x}{117} = \frac{y}{-7} = \frac{1}{37}. \text{ i.e., } x = \frac{117}{37}, \quad y = -\frac{7}{37}.$$

നിർദ്ധാരണം $\left(\frac{117}{37}, -\frac{7}{37}\right)$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.7

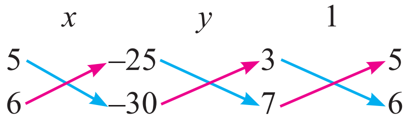
വജ്രഗുണന രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക. $3x + 5y = 25$

$7x + 6y = 30$

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങൾ $3x + 5y - 25 = 0$

$7x + 6y - 30 = 0$

വജ്രഗുണനത്തിനു വേണ്ടി ഗുണോത്തരങ്ങളെ എഴുതിയാൽ,



$$\Longrightarrow \frac{x}{-150+150} = \frac{y}{-175+90} = \frac{1}{18-35}. \text{ i.e., } \frac{x}{0} = \frac{y}{-85} = \frac{1}{-17}.$$

$x = 0,\ y = 5$ അതുകൊണ്ട് നിർദ്ധാരണം $(0, 5)$.

കുറിപ്പ്

ഇവിടെ $\frac{x}{0} = -\frac{1}{17}$ എന്നത് അർത്ഥമാക്കുന്നത് $x = \frac{0}{-17} = 0$ അതിനാൽ $\frac{x}{0}$ എന്നത് ഒരു പ്രതിനിധീകരണം മാത്രമാണ്, പൂജ്യം കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതല്ല. ഒരു സംഖ്യയെ പൂജ്യം കൊണ്ട് ഹരിക്കുക എന്നത് ഗണിതത്തിൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

ഉദാഹരണം 3.8

ഒരു രണ്ടക്ക സംഖ്യയിലെ, ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനത്തെ അക്കം, പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങാണ്. അക്കങ്ങളുടെ സ്ഥാനം പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ പുതിയ സംഖ്യ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യയേക്കാൾ 27 കൂടുതലാണ്. ആ സംഖ്യ ഏത്?

നിർദ്ധാരണം പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തിന്റെ അക്കം x എന്നും ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനത്തിന്റെ അക്കം y എന്നും എടുക്കുക. സംഖ്യ $10x + y$ ആകുന്നു. (35= 10(3) +5 എന്നതു പോലെ)

അക്കങ്ങൾ പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ x ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനത്തെ അക്കമായും y പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തിന്റെ അക്കമായും മാറുന്നു. അക്കങ്ങൾ സ്ഥാനം മാറ്റുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ $10y + x$.

ആദ്യത്തെ നിബന്ധന $y = 2x$ എന്നതിനെ

$2x - y = 0$ എന്നെഴുതാം. (1)

രണ്ടാമത്തെ നിബന്ധന പ്രകാരം

$$(10y + x) - (10x + y) = 27$$

$$\therefore \quad -9x + 9y = 27 \quad \Longrightarrow \quad -x + y = 3 \qquad (2)$$

(1) , (2) കൂട്ടിയാൽ $x = 3$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

(2) ൽ $x = 3$ നെ ആരോപിച്ചാൽ $y = 6$ കിട്ടുന്നു.

അതിനാൽ സംഖ്യ $(3\times10) + 6 = 36$

ഉദാഹരണം 3.9

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശത്തിനെ 3 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയും ഛേദത്തിൽ നിന്നും 3 കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ $\frac{18}{11}$ കിട്ടുന്നു. അംശത്തിന്റെ കൂടെ 8 കൂട്ടുകയും ഛേദത്തിനെ രണ്ട് മടങ്ങാക്കുകയും ചെയ്താൽ $\frac{2}{5}$ കിട്ടുന്നു. ഭിന്നസംഖ്യ ഏത്?

നിർദ്ധാരണം ആവശ്യമുള്ള ഭിന്നം $\frac{x}{y}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. നിബന്ധന പ്രകാരം

$$\frac{3x}{y-3} = \frac{18}{11} \quad , \quad \frac{x+8}{2y} = \frac{2}{5}$$

$$\Longrightarrow \quad 11x = 6y - 18 \quad , \quad 5x + 40 = 4y$$

$$11x - 6y + 18 = 0 \qquad (1)$$
$$5x - 4y + 40 = 0 \qquad (2)$$

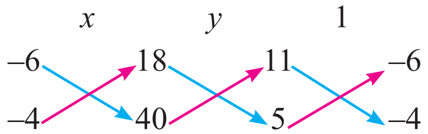
(1) , (2) ലെ ഗുണോത്തരങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്താൽ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$,

$$a_1 = 11,\ b_1 = -6,\ c_1 = 18\ ;\ a_2 = 5,\ b_2 = -4,\ c_2 = 40.$$

അതിനാൽ $a_1b_2 - a_2b_1 = (11)(-4) - (5)(-6) = -14 \neq 0.$

അതുകൊണ്ട് സമ്പ്രദായത്തിന് ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം മാത്രമേ ഉണ്ടായിരിക്കുകയുള്ളൂ.

വജ്രഗുണനത്തിനു വേണ്ടി, ഗുണോത്തരങ്ങൾ എഴുതിയാൽ



$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{-240+72} = \frac{y}{90-440} = \frac{1}{-44+30}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{-168} = \frac{y}{-350} = \frac{1}{-14}$$

$x = \dfrac{168}{14} = 12$; $y = \dfrac{350}{14} = 25$. അതിനാൽ ഭിന്നസംഖ്യ $= \dfrac{12}{25}$.

ഉദാഹരണം 3.10

8 പുരുഷന്മാരും 12 ആൺകുട്ടികളും ഒരു ജോലിയെ 10 ദിവസങ്ങളിലും, 6 പുരുഷന്മാരും 8 ആൺകുട്ടികളും അതേ ജോലിയെ 14 ദിവസങ്ങളിലും പൂർത്തിയാക്കുന്നു. ഒരു പുരുഷൻ മാത്രം ആ ജോലിയെ എത്ര ദിവസങ്ങളിൽ പൂർത്തിയാക്കും? ഒരു ആൺകുട്ടി മാത്രം ആ ജോലിയെ എത്ര ദിവസങ്ങളിൽ പൂർത്തിയാക്കും?

നിർദ്ധാരണം ഒരു പുരുഷൻ മാത്രം ജോലിയെ പൂർത്തിയാക്കാൻ എടുക്കുന്ന ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം x.

അതിനാൽ, ഒരു പുരുഷൻ ഒരു ദിവസം പൂർത്തിയാക്കുന്ന ജോലി $\dfrac{1}{x}$ ഭാഗം

ഒരു ആൺകുട്ടി മാത്രം ജോലിയെ പൂർത്തിയാക്കാൻ എടുക്കുന്ന ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം y

ഒരു ആൺകുട്ടി ഒരു ദിവസം പൂർത്തിയാക്കുന്ന ജോലി $\dfrac{1}{y}$ ഭാഗം

വ്യക്തമായി $x \neq 0$, $y \neq 0$.

ഒരു ആൺകുട്ടി ഒരു ദിവസം $\dfrac{1}{y}$ ഭാഗം ജോലി പൂർത്തിയാക്കുന്നു.

8 പുരുഷൻമാരും, 12 ആൺകുട്ടികളും ഒരു ദിവസം ചെയ്യുന്ന ജോലി $\dfrac{1}{10}$ ആകുന്നു.

അതിനാൽ $\dfrac{8}{x} + \dfrac{12}{y} = \dfrac{1}{10}$ (1)

6 പുരുഷന്മാരും 8 ആൺകുട്ടികളും ഒരു ദിവസം ചെയ്യുന്ന ജോലി $\dfrac{1}{14}$ ആകുന്നു.

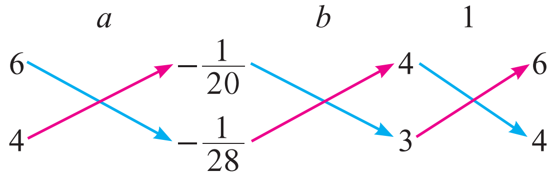
അതിനാൽ $\dfrac{6}{x} + \dfrac{8}{y} = \dfrac{1}{14}$ (2)

$a = \dfrac{1}{x}$, $b = \dfrac{1}{y}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. യഥാക്രമം (1) , (2) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$(1) \Longrightarrow 8a + 12b = \frac{1}{10} \Longrightarrow 4a + 6b - \frac{1}{20} = 0. \qquad (3)$$

$$(2) \Longrightarrow 6a + 8b = \frac{1}{14} \Longrightarrow 3a + 4b - \frac{1}{28} = 0. \qquad (4)$$

വജ്ര ഗുണനരീതിയിൽ (3) , (4) ന്റെ ഗുണോത്തരങ്ങളെ എഴുതിയാൽ,



$$\Longrightarrow \quad \frac{a}{-\frac{3}{14}+\frac{1}{5}} = \frac{b}{-\frac{3}{20}+\frac{1}{7}} = \frac{1}{16-18}. \text{ i.e., } \frac{a}{-\frac{1}{70}} = \frac{b}{-\frac{1}{140}} = \frac{1}{-2}$$

$$\therefore \quad a = \frac{1}{140}, \; b = \frac{1}{280}$$

$$x = \frac{1}{a} = 140\,, \;\; y = \frac{1}{b} = 280.$$

ഒരു പുരുഷൻ മാത്രം ജോലിയെ പൂർത്തിയാക്കാൻ 140 ദിവസങ്ങളും ഒരു ആൺകുട്ടി മാത്രം ജോലിയെ പൂർത്തിയാക്കാൻ 280 ദിവസങ്ങളും എടുക്കുന്നു.

അഭ്യാസം 3.2

1. വജ്ര ഗുണന രീതിയിൽ സമീകരങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

   (i) $3x + 4y = 24,\ 20x - 11y = 47$ (ii) $0.5x + 0.8y = 0.44,\ 0.8x + 0.6y = 0.5$

   (iii) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2,\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$ (iv) $\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2,\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$

2. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് ഒരു ജോടി സമീകരണങ്ങളെ സൂത്രവൽക്കരിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

   (i) ഒരു സംഖ്യ മറ്റൊരു സംഖ്യയുടെ 3 മടങ്ങിനേക്കാൾ 2 കൂടുതലാണ്. ചെറിയ സംഖ്യയുടെ 4 മടങ്ങ് വലിയ സംഖ്യയെക്കാൾ 5 കൂടുതലാണ്. ആ സംഖ്യയേത്?

   (ii) രണ്ട് വ്യക്തികളുടെ വരുമാനത്തിന്റെ അംശബന്ധം 9:7 ഉം ചെലവിന്റെ അംശബന്ധം 4:3 ഉം ആണ്. ഓരോരുത്തരും ഓരോ മാസവും ₹ 2000 സമ്പാദിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അവരുടെ മാസവരുമാനം എന്ത്?

   (iii) ഒരു രണ്ടക്ക സംഖ്യ അതിന്റെ അക്കങ്ങളുടെ തുകയുടെ 7 മടങ്ങാണ് . സംഖ്യയുടെ അക്കങ്ങളെ തിരിച്ചിട്ടാൽ അക്കങ്ങൾ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യയെക്കാൾ 18 കുറവാണ്. സംഖ്യയേത്?

   (iv) 3 കസേരകളുടേയും 2 മേശകളുടേയും തുക ₹ 2700 - ഉം 5 കസേരകളുടേയും 3 മേശകളുടേയും തുക ₹ 21100 ആണെങ്കിൽ 2 കസേരകളുടേയും 3 മേശകളുടേയും ആകെ തുക എന്ത്?

   (v) ഒരു ദീർഘ ചതുരത്തിൽ നീളം 2 സെ.മീ കൂടുകയും, വീതി 2 സെ.മീ കുറയുകയും ചെയ്താൽ വിസ്തീർണ്ണം 28 സെ.മീ^{2} കുറയുന്നു. നീളം 1 സെ.മീ കുറയുകയും വീതി 2 സെ.മീ കൂടുകയും ചെയ്താൽ വിസ്തീർണ്ണം 33 സെ.മീ^{2}കൂടുന്നു. ദീർഘ ചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക?

   (vi) ഒരു തീവണ്ടി ഒരു നിശ്ചിത ദൂരത്തെ നിശ്ചിത വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. തീവണ്ടിയുടെ വേഗത മണിക്കൂറിന് 6 കി.മീ വേഗതയാണെങ്കിൽ നിശ്ചിത സമയത്തെക്കാൾ 4 മണിക്കൂറിന് മുമ്പ് എത്തിച്ചേരും. തീവണ്ടിയുടെ വേഗത മണിക്കൂറിന് 6 കി.മീ കുറഞ്ഞാൽ നിശ്ചിത സമയത്തേക്കാൾ 6 മണിക്കൂറുകൾ അധികം ആവശ്യമാണ്. തീവണ്ടി സഞ്ചരിച്ച ദൂരം കാണുക.

3.3 ദ്വിഘാത ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങൾ

x ചരവും n ഘാതവുമുള്ള ഒരു ബഹുപദ വ്യംജകം $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ ആകുന്നു. ഇവിടെ $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ എന്നിവ വാസ്തവിക സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ ആണ്.

ചരം x ൽ ഘാതം രണ്ടുള്ള ഒരു ബഹുപദ വ്യംജകത്തെ ഒരു ദ്വിഘാത ബഹുപദ വ്യംജകമെന്നു പറയുന്നു. വാസ്തവിക സ്ഥിരാങ്കങ്ങളെ പൂജ്യം ഘാതമുള്ള ബഹുപദ വ്യംജകമായി സങ്കൽപ്പിക്കാം. ഇതിനെ $p(x) = ax^2 + bx + c$ എന്നെഴുതാം. ഇവിടെ $a \neq 0$, b, c എന്നിവ വാസ്തവിക സ്ഥിരാങ്കങ്ങളാണ്.

ഉദാഹരണമായി, $x^2 + x + 1, 3x^2 - 1, -\frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{7}{3}$ എന്നിവ ദ്വിഘാത ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളാണ്.

ഒരു ദ്വിഘാത ബഹു വ്യംജകത്തിന്റെ മൂല്യം എന്നത് $p(x) = ax^2 + bx + c$ യിൽ x നു പകരം k എന്നു മാറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന $p(x)$ ആണ്. $x = k$ യ്ക്ക് $p(x)$ന്റെ മൂല്യം $p(k) = ak^2 + bk + c$ ആകുന്നു.

3.3.1 ഒരു ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ

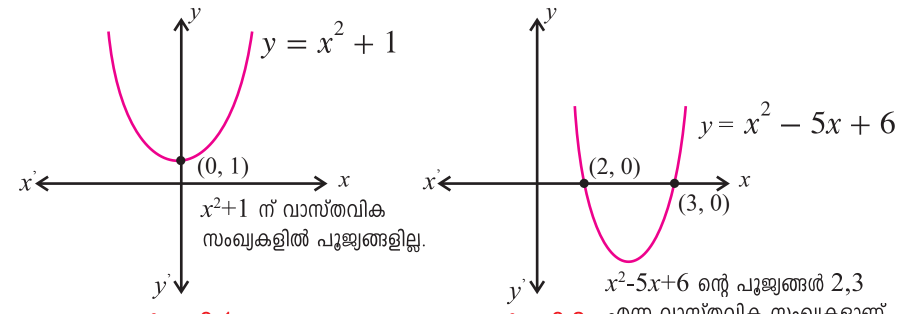
ഒരു ബഹുപദ വ്യംജകം $p(x)$ നെ പരിഗണിക്കുക. വാസ്തവിക സംഖ്യ k യ്ക്ക് $p(k) = 0$ ആണെങ്കിൽ k യെ $p(x)$ എന്ന ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ പൂജ്യം (zero) എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $q(x) = x^2 - 5x + 6$ എന്ന ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ പൂജ്യങ്ങളാണ് 2, 3 ആണ്.

എന്തെന്നാൽ $q(2) = 0$, $q(3) = 0$.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

ചില ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങൾക്ക് വാസ്തവിക സംഖ്യകളിൽ പൂജ്യങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, $p(x) = x^2 + 1$ ന് വാസ്തവിക സംഖ്യകളിൽ പൂജ്യങ്ങളില്ല. അതായത്, $p(k) = 0$ ആകത്തക്കവിധം വാസ്തവിക സംഖ്യ k ഉണ്ടായിരിക്കുകയില്ല. ജ്യാമിതീയ രീതിയിൽ, ഒരു ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ ഗ്രാഫും, x അക്ഷവും ഛേദിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആ ബിന്ദുവിന്റെ x നിർദ്ദേശാങ്കമാണ് ആ ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ പൂജ്യം (ചിത്രം (3.1) ചിത്രം 3.2 കാണുക.)



ചിത്രം. 3.1 ചിത്രം 3.2

3.3.2 ഒരു ദ്വിഘാത ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ പൂജ്യങ്ങളും ഗുണാങ്കങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

പൊതുവായി $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ എന്ന ദ്വിഘാത ബഹു പദ വ്യംജകത്തിന്റെ പൂജ്യങ്ങൾ α , β ആണെങ്കിൽ ഘടക സിദ്ധാന്തത്തിൽ നിന്നും $x - \alpha$, $x - \beta$ എന്നിവ $p(x)$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്.

$$\therefore \quad ax^2 + bx + c = k(x-\alpha)(x-\beta), \; k \text{ ഒരു ശൂന്യമല്ലാത്ത സ്ഥിരാങ്കം}$$

$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$

ഇരുവശങ്ങളും x^2, x, സ്ഥിരാങ്കം എന്നിവയുടെ ഗുണാങ്കങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്താൽ

$$a = k, \quad b = -k(\alpha + \beta) \quad, c = k\alpha\beta$$

> $p(x) = ax^2 + bx + c$ യുടെ പൂജ്യങ്ങളും ഗുണോത്തരങ്ങളും തമ്മിലുള്ള അടിസ്ഥാന ബന്ധം
>
> **പൂജ്യങ്ങളുടെ തുക:** $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-x \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}}{x^2 \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}}$.
>
> **പൂജ്യങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം :** $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{സ്ഥിരാങ്കം}}{x^2 \text{ ന്റെ സ്ഥിരാങ്കം}}$.

ഉദാഹരണം 3.11

$x^2 + 9x + 20$ എന്ന ദ്വിഘാത വ്യംജകത്തിന്റെ പൂജ്യങ്ങൾ കാണുക. പൂജ്യങ്ങളും ഗുണാങ്കങ്ങളും തമ്മിലുള്ള അടിസ്ഥാന ബന്ധം പരിശോധിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം $p(x) = x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതിനാൽ, $p(x) = 0 \implies (x+4)(x+5) = 0$

$\therefore \; x = -4$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -5$

അതായത്, $p(-4) = (-4+4)(-4+5) = 0$, $p(-5) = (-5+4)(-5+5) = 0$

അതിനാൽ $p(x)$ ന്റെ പൂജ്യങ്ങൾ -4 , -5 (1)

പൂജ്യങ്ങളുടെ തുക $= -9$, പൂജ്യങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $= 20$ (1)

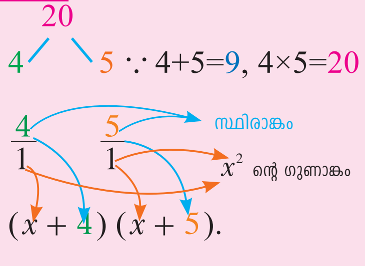
അടിസ്ഥാന ബന്ധങ്ങളിൽ നിന്ന്,

പൂജ്യങ്ങളുടെ തുക $= \dfrac{-x \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}}{x^2 \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}} = -\dfrac{9}{1} = -9$ (2)

പൂജ്യങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $= \dfrac{\text{സ്ഥിരാങ്കം}}{x^2 \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}} = \dfrac{20}{1} = 20$ (3)

അടിസ്ഥാന ബന്ധം പരിശോധിച്ചു.

> **ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ**
>
> $x^2 + 9x + 20$, നെ ഘടകങ്ങളാക്കാൻ ഒരാൾക്ക് താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ പിൻതുടരാം.



> ***കുറിപ്പ്***
>
> ഒരു ദ്വിഘാത ബഹുപദ വ്യംജകം $p(x) = ax^2 + bx + c$ യ്ക്ക് അധികപക്ഷമായി രണ്ട് പൂജ്യങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കാം.
>
> ഏതൊരു $a \neq 0$ യ്ക്കും $a(x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta)$ എന്ന ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന് α , β എന്നീ പൂജ്യങ്ങളുണ്ട്. എന്തെന്നാൽ ഏതൊരു ശൂന്യമല്ലാത്ത a യ്ക്കും α , β എന്നീ പൂജ്യങ്ങളുള്ള ദ്വിഘാത ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങൾ അനന്തമാണ്.

ഉദാഹരണം 3.12

പൂജ്യങ്ങളുടെ തുക, ഗുണനഫലം എന്നിവ യഥാക്രമം -4, 3 ആണെങ്കിൽ ദ്വിഘാത ബഹുപദ വ്യംജകം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ദ്വിഘാത ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ പൂജ്യങ്ങൾ α , β എന്നിരിക്കട്ടെ.

$\alpha + \beta = -4, \;\; \alpha\beta = 3$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

അങ്ങനെയുള്ള ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളിൽ ഒന്ന് $p(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

$$= x^2 - (-4)x + 3 = x^2 + 4x + 3$$

ഉദാഹരണം 3.13

$x = \frac{1}{4}$, $x = -1$ എന്നീ പൂജ്യങ്ങളുള്ള ദ്വിഘാത വ്യംജകം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

α , β എന്നിവ $p(x)$ ന്റെ പൂജ്യങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. പൂജ്യങ്ങൾ, ഗുണാങ്കങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഉപയോഗിച്ച്

$$p(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$
$$= x^2 - \left(\frac{1}{4} - 1\right)x + \left(\frac{1}{4}\right)(-1)$$
$$= x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

ഇത് $\frac{1}{4}$, -1 പൂജ്യങ്ങളുള്ള വ്യംജകങ്ങളാണ്.

മറ്റൊരു വഴിയിൽ, ആവശ്യമായ ബഹുപദ വ്യംജകം നേരായ രീതിയിൽ കിട്ടുന്നത് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)(x + 1)$$
$$= x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

ആവശ്യപ്പെട്ട മറ്റൊരു വ്യംജകം കിട്ടുന്നതിന് $p(x)$ നെ ശൂന്യമല്ലാത്ത വാസ്തവിക സംഖ്യ കൊണ്ട് ഗുണിക്കേണ്ടതാണ്.

കുറിപ്പ്

$4x^2 + 3x - 1$ എന്ന ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ പൂജ്യങ്ങൾ $\frac{1}{4}$, -1 ആണ്.

$20x^2 + 15x - 5$ എന്ന ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ പൂജ്യങ്ങൾ $\frac{1}{4}$, -1 ആണ്.

$4kx^2 + 3kx - k$ എന്ന ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ പൂജ്യങ്ങൾ $\frac{1}{4}$, -1 ആണ്. $k \in R$

അഭ്യാസം 3.3

1. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ദ്വിഘാത വ്യംജകങ്ങളുടെ പൂജ്യങ്ങൾ കാണുക. പൂജ്യങ്ങളും ഗുണാങ്കങ്ങളും തമ്മിലുള്ള അടിസ്ഥാന ബന്ധം പരിശോധിക്കുക.

   (i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4x^2 - 4x + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$ (iv) $4x^2 + 8x$

   (v) $x^2 - 15$ (vi) $3x^2 - 5x + 2$ (vii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ (viii) $x^2 + 2x - 143$

2. തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ യഥാക്രമം പൂജ്യങ്ങളുടെ തുകയും ഗുണനഫലവുമാണ്. ദ്വിഘാതവ്യംജകം കാണുക.

   (i) 3, 1 (ii) 2, 4 (iii) 0, 4 (iv) $\sqrt{2}, \frac{1}{5}$

   (v) $\frac{1}{3}, 1$ (vi) $\frac{1}{2}, -4$ (vii) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ (viii) $\sqrt{3}, 2$

3.4 സിന്തറ്റിക് ഹരണം

29 നെ 7 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹരണഫലം 4 ഉം ശിഷ്ടം 1 ഉം ആണെന്ന് നമുക്ക് അറിയാം. അതിനാൽ $29 = 4(7) + 1$ ഇതുപോലെ ഒരു വ്യംജകം $p(x)$ നെ മറ്റൊരു വ്യംജകം $q(x)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഹരണഫലത്തെയും ശിഷ്ടത്തെയും

$p(x) = (\text{ഹരണഫലം})q(x) + \text{ശിഷ്ടം}$ എന്നെഴുതാം.

അതായത് $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, ഘാതം $r(x) <$ ഘാതം $q(x)$.

ഇതിനെ **ഹരണ പ്രവർത്തനരീതി** എന്നു പറയുന്നു.

$q(x) = x + a$, ആയാൽ ഘാതം $r(x) = 0$. അതായത് $r(x)$ ഒരു സ്ഥിരാങ്കമാണ്.

അതുകൊണ്ട് $p(x) = s(x)(x + a) + r$, r ഒരു സ്ഥിരാങ്കം ഈ ബഹുപദ വ്യംജകത്തിൽ $x = -a$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $p(-a) = s(-a)(-a + a) + r \implies r = p(-a)$.

അതിനാൽ $p(x)$ നെ $x + a$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം $x = -a$ എന്നത് $p(x)$ ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം. അതായത്, ശിഷ്ടം $p(-a)$ ആകുന്നു.

ഹരണപ്രവർത്തനരീതി

$p(x)$ ഹാര്യവും $q(x)$ ഹാരകവും ആണെങ്കിൽ ഹരണപ്രവർത്തനരീതിയിൽ

$p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ എന്നെഴുതാം.

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഫലങ്ങൾ കിട്ടുന്നു.

(i) $q(x)$ രേഖീയമാണെങ്കിൽ $r(x) = r$ ഒരു സ്ഥിരാങ്കമാണ്.

(ii) $q(x)$ ന്റെ ഘാതം $= 1$ എങ്കിൽ $p(x)$ ന്റെ ഘാതം $= 1 +$ $s(x)$ ന്റെ ഘാതം

(iii) $p(x)$ നെ $x + a$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം $p(-a)$ ആകുന്നു.

(iv) $r = 0$ ആണെങ്കിൽ $q(x)$,$p(x)$നെ ഹരിക്കുന്നു.അല്ലെങ്കിൽ $p(x)$ ന്റെ ഘടകം $q(x)$ആകുന്നു.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

1809 ൽ പ്യാലോരെഫിൻ ഒരു വ്യംജകത്തെ ഒരു രേഖീയ വ്യംജകം കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്ന സുഗമമായ ഒരു വഴി പരിചയപ്പെടുത്തി. അദ്ദേഹത്തിന്റെ രീതി സിന്തറ്റിക്ഹരണം എന്നറിയപ്പെടുന്നു. ഗുണാങ്കങ്ങളെ മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു വ്യംജകത്തെ ഒരു രേഖീയ വ്യംജകം കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നത് സിന്തറ്റിക് ഹരണരീതിയുടെ സവിശേഷതയാണ്.

പ്യാലോരെഫിൻ
(1765-1822, Italy)

സിന്തറ്റിക് ഹരണരീതിയെ ഒരു ഉദാഹരണം വഴി വിശദമാക്കാം.

$p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$ ഹാര്യവും $q(x) = x + 2$ ഹാരകവും എന്നിരിക്കട്ടെ. ഹരണഫലം $s(x)$ ഉം ശിഷ്ടം r ഉം കണ്ടുപിടിക്കാൻ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വഴി പിൻതുടരാം.

വഴി 1 ഹാര്യവും ഹാരകവും x ന്റെ ഘാതം കുറയുന്നതിന് അനുസരിച്ച് ക്രമീകരിച്ച് ഹാര്യത്തിന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളെ ആദ്യവരിയിൽ എഴുതുക(ചിത്രം നോക്കുക). ഇല്ലാത്ത പദങ്ങൾക്ക് 0 ചേർക്കുക.

$x^3 + 2x^2 - x - 4$ → 1 2 –1 –4

വഴി 2 ഹാരകത്തിന്റെ പൂജ്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

വഴി 3 രണ്ടാമത്തെ വരിയിൽ ആദ്യസ്ഥാനത്ത് 0 എഴുതുക.

രണ്ടാമത്തെ വരിയും മൂന്നാമത്തെ വരിയും താഴെ കാണുന്ന വിധം പൂർത്തിയാക്കുക.

–2	1	2	–1	–4
	0	1×(–2) → –2	0×(–2) → 0	–1×(–2) → 2
	1+0 = 1	2+(–2) = 0	–1+0 = –1	–4+2 = –2 ⟵ ശിഷ്ടം

വഴി 4 മൂന്നാമത്തെ വരിയിൽ അവസാന പദം ശിഷ്ടവും, മറ്റെല്ലാ പദങ്ങളും ഹരണ ഫലത്തിന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളുമാണ്. അതായത്, ഹരണഫലം $x^2 - 1$, ശിഷ്ടം -2.

ഉദാഹരണം 3.14

$x^3 + x^2 - 7x - 3$ നെ $x - 3$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ, ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $p(x) = x^3 + x^2 - 7x - 3$. ഹാരകത്തിന്റെ പൂജ്യം 3 ആകുന്നു.

3	1	1	–7	–3
	0	3	12	15
	1	4	5	12 ⟶ ശിഷ്ടം 12.

$\therefore$ $p(x)$ നെ $x - 3$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ, ഹരണഫലം $x^2 + 4x + 5$, ശിഷ്ടം 12

ഉദാഹരണം 3.15

$2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6$ നെ $2x + 1$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹരണഫലം $x^3 + ax^2 - bx - 6$. ആണ്. a , b യുടെ മൂല്യങ്ങളും ശിഷ്ടവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $p(x) = 2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഹാരകം $2x + 1$ ആണ്. $2x + 1 = 0$ എന്നെഴുതിയാൽ $x = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ ഹരണത്തിന്റെ മൂലം $-\frac{1}{2}$.

$-\frac{1}{2}$	2	1	–14	–19	6
	0	–1	0	7	6
	2	0	–14	–12	12 ⟶ ശിഷ്ടം.

$$2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\{2x^3 - 14x - 12\} + 12$$

$$= (2x + 1)\frac{1}{2}(2x^3 - 14x - 12) + 12$$

അതായത്, ഹരണഫലം $\frac{1}{2}(2x^3 - 14x - 12) = x^3 - 7x - 6$ ശിഷ്ടം 12.

എന്നാൽ തന്നിട്ടുള്ള ഹരണഫലം $x^3 + ax^2 - bx - 6$ മായി $x^3 + ax^2 - bx - 6$ നെ താരതമ്യം ചെയ്താൽ, $a = 0$, $b = 7$. അതായത് $a = 0$, $b = 7$ ശിഷ്ടം 12.

അഭ്യാസം 3.4

1. സിന്തറ്റിക് ഹരണരീതിയിൽ ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കാണുക.
   (i) $(x^3 + x^2 - 3x + 5) \div (x - 1)$ (ii) $(3x^3 - 2x^2 + 7x - 5) \div (x + 3)$
   (iii) $(3x^3 + 4x^2 - 10x + 6) \div (3x - 2)$ (iv) $(3x^3 - 4x^2 - 5) \div (3x + 1)$
   (v) $(8x^4 - 2x^2 + 6x - 5) \div (4x + 1)$ (vi) $(2x^4 - 7x^3 - 13x^2 + 63x - 48) \div (2x - 1)$
2. $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29$ നെ $x + 4$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹരണഫലം $x^3 - ax^2 + bx + 6$, a, b യും ശിഷ്ടവും കാണുക.
3. $8x^4 - 2x^2 + 6x - 7$ നെ $2x + 1$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹരണഫലം $4x^3 + px^2 - qx + 3$, എങ്കിൽ p , q ന്റെ മൂല്യങ്ങളും ശിഷ്ടവും കാണുക.

3.4.1 സിന്തറ്റിക് ഹരണം ഉപയോഗിച്ച് ഘടകങ്ങളാക്കൽ

ദ്വിഘാത ബഹുപദവ്യംജകങ്ങൾ ഘടകങ്ങളാക്കാൻ 9-ാം ക്ലാസ്സിൽ നാം പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ സിന്തറ്റിക് ഹരണരീതി ഉപയോഗിച്ച് ത്രിഘാത ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളെ ഘടകങ്ങളാക്കാൻ പഠിക്കാം.

ത്രിഘാത ബഹുപദവ്യംജകം $p(x)$ ന്റെ ഒരു രേഖീയ ഘടകത്തെ കണ്ടുപ്പിടിച്ചാൽ സിന്തറ്റിക് ഹരണം ഉപയോഗിച്ച് $p(x)$ ന്റെ ദ്വിഘാത ഘടകം കണ്ടുപിടിക്കാം. വീണ്ടും ഘടകങ്ങളാക്കാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ ദ്വിഘാതഘടകത്തിനെ രണ്ട് രേഖീയ ഘടകങ്ങളാക്കാവുന്നതാണ്. അതായത് ഘടകങ്ങളാക്കാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ സിന്തറ്റിക് ഹരണരീതിയിൽ ത്രിഘാത ബഹുപദവ്യംജകത്തെ രേഖീയഘടകങ്ങളാക്കാവുന്നതാണ്.

കുറിപ്പ്

(i) ഏതെങ്കിലും ഒരു ബഹുപദവ്യംജകം $p(x)$ ന് $p(a) = 0 \Leftrightarrow x = a$ ഒരു പൂജ്യം.

(ii) $x - a$ എന്നത് $p(x)$ ന്റെ ഒരു ഘടകം $\Leftrightarrow p(a) = 0$. (ഘടകസിദ്ധാന്തം)

(iii) $p(x)$ ന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ തുക പൂജ്യം $\Leftrightarrow p(x)$ ന് $x - 1$ ഒരു ഘടകം.

(iv) $p(x)$ ന്റെ ഇരട്ട ഘാത ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ തുകയും സ്ഥിരാങ്കവും ചേർന്നത് x ന്റെ ഒറ്റഘാത പദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യം $\Leftrightarrow x + 1$ എന്നത് $p(x)$ ന് ഒരു ഘടകം.

ഉദാഹരണം 3.16

(i) തെളിയിക്കുക. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ് $x - 1$

(ii) തെളിയിക്കുക. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ ന്റെ ഘടകമാണ് $x + 1$

നിർദ്ധാരണം

(i) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ (ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ തുക 0)

$p(x)$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ് $(x - 1)$

(ii) $q(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

$q(-1) = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$. $x + 1$ എന്നത് $q(x)$ ന്റെ ഘടകമാണ്

ഉദാഹരണം 3.17

$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജകത്തെ രേഖീയ ഘടകങ്ങളാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

$p(1) = -2 \neq 0$ (ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ തുക $\neq 0$)

$\therefore$ $(x - 1)$ എന്നത് $p(x)$ ന്റെ ഘടകമല്ല.

$p(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 2 = 0$.

$x + 1$ എന്നത് $p(x)$ ന്റെ ഘടകമാണ്

സിന്തറ്റിക്ഹരണരീതി ഉപയോഗിച്ച് അടുത്തഘടകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാം

-1	2	-3	-3	2
	0	-2	5	-2
	2	-5	2	0 → ശിഷ്ടം

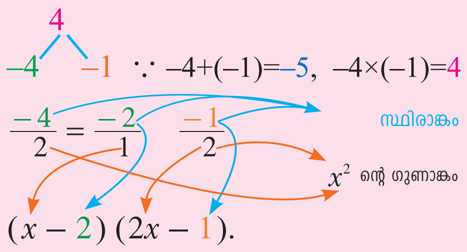
$p(x) = (x + 1)(2x^2 - 5x + 2)$

$2x^2 - 5x + 2 = 2x^2 - 4x - x + 2 = (x - 2)(2x - 1)$.

$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x + 1)(x - 2)(2x - 1)$.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

$2x^2 - 5x + 2$ ഘടകങ്ങളാക്കാൻ താഴെ കാണുന്ന രീതി ഉപയോഗിക്കാം



ഉദാഹരണം 3.18

ഘടകങ്ങളാക്കുക $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

നിർദ്ധാരണം $p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

എന്നാൽ $p(1) \neq 0$, $p(-1) \neq 0$. അതിനാൽ $x + 1$, $x - 1$ എന്നിവ $p(x)$ ന്റെ ഘടകങ്ങളല്ല. നമുക്ക് x ന്റെ മറ്റു മൂല്യങ്ങൾക്ക് $p(x)$ ന്റെ ഘടകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

$x = 2$ ആയാൽ $p(2) = 0$. $\therefore$ $x - 2$ എന്നത് $p(x)$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്. സിന്തറ്റിക് ഹരണരീതി ഉപയോഗിച്ച് മറ്റു ഘടകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

2	1	–3	–10	24	
	0	2	–2	–24	
	1	–1	–12	0	→ ശിഷ്ടം

$\therefore$ മറ്റൊരു ഘടകം $x^2 - x - 12$.

$$x^2 - x - 12 = x^2 - 4x + 3x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

$$\therefore \ x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x - 2)(x + 3)(x - 4)$$

അഭ്യാസം 3.5

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ ബഹുപദ വ്യംജകത്തേയും ഘടകങ്ങളാക്കുക.

(i) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (ii) $4x^3 - 7x + 3$ (iii) $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

(iv) $4x^3 - 5x^2 + 7x - 6$ (v) $x^3 - 7x + 6$ (vi) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(vii) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ (viii) $x^3 - 5x + 4$ (ix) $x^3 - 10x^2 - x + 10$

(x) $2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$ (xi) $x^3 + x^2 + x - 14$ (xii) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

3.5 ഉത്തമ സാധാരണ ഭാജകം (GCD) ലഘുതമ സാധാരണ ഗുണിതം (LCM)

3.5.1 ഉത്തമ സാധാരണ ഭാജകം (GCD)

രണ്ടോ അതിലധികമോ വ്യംജകങ്ങൾ ഓരോന്നിനേയും നിശ്ശേഷം ഹരിക്കുന്ന ഏറ്റവും കൂടിയ ഘാതമുള്ള വ്യംജകങ്ങളാണ് ഉത്തമ സാധാരണ ഘടകം അല്ലെങ്കിൽ ഉത്തമ സാധാരണ ഭാജകം.

(i) a^4, a^3, a^5, a^6 (ii) a^3b^4, ab^5c^2, a^2b^7c എന്നിവ പരിഗണിക്കുക.

(i) ൽ a, a^2, a^3 എന്നിവ എല്ലാ ബഹു പദങ്ങളുടേയും ഭാജകങ്ങളാണ്. അവയിൽ a^3 ഏറ്റവും കൂടിയ ഘാതമുള്ള പൊതുഘടകമാണ്. അതിനാൽ a^4, a^3, a^5, a^6 എന്നിവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ a^3 ആകുന്നു.

(ii) ൽ ഇതു പോലെ a^3b^4, ab^5c^2, a^2b^7c എന്നിവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ ab^4 എന്ന് വ്യക്തമാണ്.

ബഹുപദങ്ങൾക്ക് സംഖ്യാപരമായ ഗുണോത്തരങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ അവയുടെ ഉത്തമ സാധാരണ ഭാജകം കണ്ടുപിടിച്ച് ബഹു പദങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭാ യുടെ ഗുണോത്തരമായി എഴുതാം.

ഉ.സാ.ഭാ മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടെ നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം.

ഉദാഹരണം 3.19

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ കാണുക. (i) 90, 150, 225 (ii) $15x^4y^3z^5, 12x^2y^7z^2$

(iii) $6(2x^2-3x-2), 8(4x^2+4x+1), 12(2x^2+7x+3)$

നിർദ്ധാരണം

(i) 90, 150 , 225 എന്നീ സംഖ്യകളെ അഭാജ്യ ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാം.

$90 = 2\times 3\times 3\times 5$, $150 = 2\times 3\times 5\times 5$, $225 = 3\times 3\times 5\times 5$

തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യകളുടെ പൊതുവായ അഭാജ്യ ഘടകങ്ങൾ 3, 5 ആകുന്നു.

ഉ.സാ.ഭാ. $= 3\times 5 = 15$

(ii) ബഹുപദങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭാ. കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് നമുക്ക് ഇതേ രീതി ഉപയോഗിക്കാം.

$15x^4y^3z^5$, $12x^2y^7z^2$ എന്നിവ പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ ബഹുപദങ്ങളുടെ പൊതുഘടകങ്ങൾ $3, x^2, y^3, z^2$ എന്നിവയാണ്.

ഉ.സാ.ഭാ. $= 3\times x^2\times y^3\times z^2 = 3x^2y^3z^2$

(iii) $6(2x^2-3x-2), 8(4x^2+4x+1), 12(2x^2+7x+3)$ എന്നിവ പരിഗണിക്കുക.

6, 8, 12 എന്നിവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ. 2 ആണ്.

ദ്വിഘാത ബഹുപദങ്ങളുടെ ഘടകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

$$2x^2-3x-2 = (2x+1)(x-2)$$
$$4x^2+4x+1 = (2x+1)(2x+1)$$
$$2x^2+7x+3 = (2x+1)(x+3)$$

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത ബഹുപദങ്ങളുടെ പൊതുഘടകം $(2x+1)$ ആണ്.

ഉ.സാ.ഭാ. $= 2(2x+1)$.

3.5.2 ഹരണ രീതിയിൽ ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭാ

924, 105 എന്നിവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ. കാണുന്ന ലഘുവായ പ്രശ്നം പരിഗണിക്കുക.

$924 = 8\times 105 + 84$

$105 = 1\times 84 + 21,$

$84 = 4\times 21 + 0,$

924, 105 എന്നിവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ. 21

(അല്ലെങ്കിൽ)

	8		1		4
105	924	84	105	21	84
	840		84		84
	84		21		0

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രീതി ഉപയോഗിച്ച് ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭാ കാണാം.

$f(x)$, $g(x)$ എന്നിവ $f(x)$ ന്റെ ഘാതം $\geq g(x)$ ന്റെ ഘാതം എന്ന തരത്തിലുള്ള രണ്ട് ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. $f(x)$, $g(x)$ എന്നിവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ. കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടതാണ്. $f(x)$, $g(x)$ എന്നിവയെ ഏകഘാത, ദ്വിഘാത ബഹുപദ വ്യംജകമായി ഘടകങ്ങളാക്കാൻ കഴിയുമെങ്കിൽ മുൻപ് പ്രസ്താവിച്ച രീതിയിൽ എളുപ്പത്തിൽ ഉ.സാ.ഭാ. കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്. $f(x)$ നെയും $g(x)$നെയും എളുപ്പത്തിൽ ഘടകങ്ങളാക്കാൻ സാധിക്കുന്നില്ലെങ്കിൽ ഉ.സാ.ഭാ. താഴെ പറയുന്നവിധം കണ്ടുപിടിക്കാം.

വഴി 1 $f(x)$ നെ $g(x)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുക. $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ഇവിടെ $q(x)$ എന്നത് ഹരണഫലവും $r(x)$ ശിഷ്ടവും ആകുന്നു, $(g(x))$ ന്റെ കൃതി $>$ $(r(x))$ ന്റെ കൃതി

ശിഷ്ടം $r(x)=0$ ആണെങ്കിൽ ഉ.സാ.ഭാ. $g(x)$ ആകുന്നു.

വഴി 2 ശിഷ്ടം $r(x)$ പൂജ്യം അല്ലെങ്കിൽ $g(x)$ നെ $r(x)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുക.

$g(x) = r(x)q(x) + r_1(x)$ ഇവിടെ $r_1(x)$ ശിഷ്ടവും ആകുന്നു. $r(x)$ ന്റെ കൃതി $>$ $r_1(x)$ ന്റെ കൃതി

ഇവിടെ ശിഷ്ടം $r_1(x)$ പൂജ്യമെങ്കിൽ ഉ.സാ.ഭാ. $r(x)$ ആകുന്നു.

വഴി 3 ശിഷ്ടം $r_1(x)$ പൂജ്യമല്ലായെങ്കിൽ, ശിഷ്ടം പൂജ്യം കിട്ടുന്നതുവരെ ഈ പ്രവർത്തി തുടരുക. അവസാനത്തെ നിലയിലെ ശിഷ്ടമാണ് $f(x)$, $g(x)$ എന്നിവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ.

കൂടാതെ $f(x)$, $g(x)$ എന്നിവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ.യെ ഉ.സാ.ഭാ. $(f(x), g(x))$ എന്നെഴുതാം.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

രണ്ട് സംഖ്യകളിൽ വലിയ സംഖ്യയിൽ നിന്ന് ചെറിയ സംഖ്യയെ കുറച്ചാൽ ഉ.സാ.ഭാ മാറുന്നില്ല എന്ന അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ പ്രവർത്തന രീതിയിൽ ഉ.സാ.ഭാ കണ്ടുപിടിക്കുന്നത്. അതായത്, ഉ.സാ.ഭാ (252,105) = ഉ.സാ.ഭാ (147,105) = ഉ.സാ.ഭാ (42,105) = ഉ.സാ.ഭാ (63,42)= ഉ.സാ.ഭാ (21,42) = 21.

ഉദാഹരണം 3.20

$x^4 + 3x^3 - x - 3$, $x^3 + x^2 - 5x + 3$ എന്നീ ബഹു പദങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭാ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $f(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3$, $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ എന്നിരിക്കട്ടെ

ഇവിടെ $f(x)$ ന്റെ കൃതി $>$ $g(x)$ ന്റെ കൃതി $\therefore$ ഹാരകം $x^3 + x^2 - 5x + 3$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x + 2 \\
\hline
x^3 + x^2 - 5x + 3 & x^4 + 3x^3 + 0x^2 - x - 3 \\
 & x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x \\
\hline
 & \quad 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 \\
 & \quad 2x^3 + 2x^2 - 10x + 6 \\
\hline
 & \quad 3x^2 + 6x - 9 \\
 & \Longrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 \longrightarrow \text{ശിഷ്ടം} \quad (\neq 0)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & \quad x - 1 \\
\hline
x^2 + 2x - 3 & x^3 + x^2 - 5x + 3 \\
 & x^3 + 2x^2 - 3x \\
\hline
 & \quad -x^2 - 2x + 3 \\
 & \quad -x^2 - 2x + 3 \\
\hline
 & \quad 0 \longrightarrow \text{ശിഷ്ടം}
\end{array}
$$

$\therefore$ ഉ.സാ.ഭാ $(f(x), g(x)) = x^2 + 2x - 3$.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

തന്നിട്ടുള്ള രണ്ടു ബഹുപദങ്ങൾക്ക് സംഖ്യാഘടകങ്ങൾ (സ്ഥിരങ്ങൾ) ഇല്ല. അതുകൊണ്ട് അവയുടെ GCD യിലും സംഖ്യാ ഘടകങ്ങൾ ഇല്ല. അതിനാൽ $3x^2 + 6x - 9$ ൽ നിന്നും ഘടകം 3 മാറ്റി $x^2 + 2x - 3$ നെ പുതിയ ഹാരകമായി എടുത്തിട്ടുണ്ട്.

ഉദാഹരണം 3.21

$3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x$, $4x^4 + 14x^3 + 8x^2 - 8x$ എന്നീ ബഹു പദവ്യംജകങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭാ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x = 3x(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$g(x) = 4x^4 + 14x^3 + 8x^2 - 8x = 2x(2x^3 + 7x^2 + 4x - 4)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$x^3 + 2x^2 - 4x - 8$, $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ എന്നിവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ. നമുക്ക് കാണാം.

$x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ എന്ന ഹാരകം എടുക്കുക.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2 \\ \hline
x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 \\
 & 2x^3 + 4x^2 - 8x - 16 \\ \hline
 & 3x^2 + 12x + 12 \\
 & (x^2 + 4x + 4) \\ \hline
\end{array}$$

ശിഷ്ടം $(\neq 0)$

$$\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\ \hline
x^2 + 4x + 4 & x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\
 & x^3 + 4x^2 + 4x \\ \hline
 & -2x^2 - 8x - 8 \\
 & -2x^2 - 8x - 8 \\ \hline
 & 0 \\
\end{array}$$

$\longrightarrow$ ശിഷ്ടം

$x^3 + 2x^2 - 4x - 8,\ 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ ന്റെ പൊതുഘടകം $x^2 + 4x + 4$ ആണ്.

കൂടാതെ $3x$, $2x$ ന്റെ പൊതുഘടകം x ആണ്.

ഉ.സാ.ഭാ $(f(x), g(x)) = x(x^2 + 4x + 4)$.

അഭ്യാസം 3.6

1. ഉ.സാ.ഭാ കാണുക.

   (i) $7x^2yz^4$, $21x^2y^5z^3$ (ii) $x^2y,\ x^3y,\ x^2y^2$

   (iii) $25bc^4d^3,\ 35b^2c^5,\ 45c^3d$ (iv) $35x^5y^3z^4,\ 49x^2yz^3,\ 14xy^2z^2$

2. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ കാണുക.

   (i) $c^2 - d^2,\ c(c - d)$ (ii) $x^4 - 27a^3x,\ (x - 3a)^2$

   (iii) $m^2 - 3m - 18,\ m^2 + 5m + 6$ (iv) $x^2 + 14x + 33,\ x^3 + 10x^2 - 11x$

   (v) $x^2 + 3xy + 2y^2,\ x^2 + 5xy + 6y^2$ (vi) $2x^2 - x - 1,\ 4x^2 + 8x + 3$

   (vii) $x^2 - x - 2,\ x^2 + x - 6,\ 3x^2 - 13x + 14$ (viii) $x^3 - x^2 + x - 1,\ x^4 - 1$

   (ix) $24(6x^4 - x^3 - 2x^2),\ 20(2x^6 + 3x^5 + x^4)$

   (x) $(a - 1)^5(a + 3)^2,\ (a - 2)^2(a - 1)^3(a + 3)^4$

3. ഹരണ രീതിയിൽ ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബഹുപദങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭാ കാണുക.

   (i) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15,\ 4x^2 - 16x + 12$

   (ii) $3x^3 + 18x^2 + 33x + 18,\ 3x^2 + 13x + 10$

   (iii) $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2,\ 6x^3 + 12x^2 + 6x + 12$

   (iv) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12,\ x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x$

3.5.3 ലഘുതമ സാധാരണ ഗുണിതം (LCM)

രണ്ടോ അതിലധികമോ വ്യംജകങ്ങളുടെ ലഘുതമ സാധാരണ ഗുണിതം എന്നത് അവയെ നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ഘാതമുള്ള വ്യംജകമാണ്. ഉദാഹരണമായി a^4, a^3, a^6 എന്നീ ബഹുപദങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

a^3, a^4, a^6 എന്നിവയുടെ പൊതുഗുണിതങ്ങൾ $a^6,\ a^7,\ a^8, \cdots$ എന്നിവയാണ്.

ഇവയിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ പൊതുഗുണിതമാണ് a^6

a^4, a^3, a^6 എന്നിവയുടെ ല.സാ.ഗു a^6 ആണ്. ഇതുപോലെ a^3b^7 എന്നത് $a^3b^4,\ ab^5,\ a^2b^7$ എന്നിവയുടെ ല.സാ.ഗു ആണ്.

നമുക്ക് ല.സാ.ഗു കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടെ പരിഗണിക്കാം.

ഉദാഹരണം 3.22

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ ല.സാ.ഗു കാണുക.

(i) 90, 150, 225 (ii) $35a^2c^3b,\ 42a^3cb^2,\ 30ac^2b^3$

(iii) $(a-1)^5(a+3)^2,\ (a-2)^2(a-1)^3(a+3)^4$

(iv) $x^3+y^3,\ x^3-y^3,\ x^4+x^2y^2+y^4$

നിർദ്ധാരണം

(i)

$$90 = 2\times3\times3\times5 = 2^1\times3^2\times5^1$$

$$150 = 2\times3\times5\times5 = 2^1\times3^1\times5^2$$

$$225 = 3\times3\times5\times5 = 3^2\times5^2$$

90, 150 , 225 ന്റെ ല.സാ.ഗു $= 2^1\times3^2\times5^2 = 450$

(ii) 35, 42 , 30 ന്റെ ല.സാ.ഗു $5\times7\times6 = 210$

ആവശ്യപ്പെട്ട ല.സാ.ഗു $= 210\times a^3\times c^3\times b^3 = 210a^3c^3b^3$.

(iii) $(a-1)^5(a+3)^2,\ (a-2)^2(a-1)^3(a+3)^4$ ന്റെ ല.സാ.ഗു $= (a-1)^5(a+3)^4(a-2)^2$.

(iv) ഓരോന്നിന്റെയും ഘടകങ്ങളെ ആദ്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$x^4+x^2y^2+y^4 = (x^2+y^2)^2-x^2y^2 = (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

ല.സാ.ഗു $= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$= (x^3+y^3)(x^3-y^3) = x^6-y^6.$$

അഭ്യാസം 3.7

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ ല.സാ.ഗു കാണുക.

1. $x^3y^2,\ xyz$
2. $3x^2yz,\ 4x^3y^3$
3. $a^2bc,\ b^2ca,\ c^2ab$
4. $66a^4b^2c^3,\ 44a^3b^4c^2,\ 24a^2b^3c^4$
5. $a^{m+1},\ a^{m+2},\ a^{m+3}$
6. $x^2y+xy^2,\ x^2+xy$
7. $3(a-1),\ 2(a-1)^2,\ (a^2-1)$
8. $2x^2-18y^2,\ 5x^2y+15xy^2,\ x^3+27y^3$
9. $(x+4)^2(x-3)^3,\ (x-1)(x+4)(x-3)^2$
10. $10(9x^2+6xy+y^2),\ 12(3x^2-5xy-2y^2),\ 14(6x^4+2x^3)$.

3.5.4 ല.സാ.ഗു, ഉ.സാ.ഭാ എന്നിവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

രണ്ട് ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഗുണന ഫലം അവയുടെ ല.സാ.ഗു, ഉ.സാ.ഭാ എന്നിവ തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലത്തിന് തുല്യമാണ് എന്ന് നമുക്ക് അറിയാമല്ലോ, ഉദാഹരണമായി, $21 \times 35 = 105 \times 7$, ഇവിടെ ല.സാ.ഗു $(21,35) = 105$, ഉ.സാ.ഭാ $(21,35) = 7$.

ഈ രീതിയിൽ, നമുക്ക് ചുവടെയുള്ള ഫലം ലഭിക്കുന്നു. ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം അവയുടെ ല.സാ.ഗു, ഉ.സാ.ഭാ എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന് തുല്യമാണ്.

അതായത് $f(x)\times g(x) =$ ല.സാ.ഗു $(f(x), g(x)) \times$ ഉ.സാ.ഭാ $(f(x), g(x))$.

ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ ഈ ഫലത്തെ ശരിനോക്കാം.

$f(x) = 12(x^4 - x^3)$, $g(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$ എന്നിവ രണ്ട് ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$$f(x) = 12(x^4 - x^3) = 2^2 \times 3 \times x^3 \times (x-1) \quad (1)$$

$$g(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2) = 2^3 \times x^2 \times (x-1) \times (x-2) \quad (2)$$

(1), (2) ൽ നിന്ന്

ല.സാ.ഗു, $(f(x), g(x)) = 2^3 \times 3^1 \times x^3 \times (x-1) \times (x-2) = 24x^3(x-1)(x-2)$

ഉ.സാ.ഭാ $(f(x), g(x)) = 4x^2(x-1)$

ല.സാ.ഗു, $\times$ ഉ.സാ.ഭാ $= 24x^3(x-1)(x-2) \times 4x^2(x-1)$

$$= 96x^5(x-1)^2(x-2) \quad (3)$$

$$f(x)\times g(x) = 12x^3(x-1) \times 8x^2(x-1)(x-2)$$

$$= 96x^5(x-1)^2(x-2) \quad (4)$$

(3), (4) ൽ നിന്ന് ല.സാ.ഗു $\times$ ഉ.സാ.ഭാ $= f(x)\times g(x)$.

രണ്ട് ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളുടെ ല.സാ.ഗു, ഉ.സാ.ഭാ എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലം ബഹു പദവ്യംജകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന് തുല്യമാണ്. വീണ്ടും $f(x)$, $g(x)$ ഉം ല.സാ.ഗു, ഉ.സാ.ഭാ എന്നിവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് തന്നാൽ മറ്റേത് വ്യക്തമായി കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയും. കാരണം ല.സാ.ഗു-ഉം ഉ.സാ.ഭാ യും വ്യത്യസ്തമാണ്. (ഘടകം -1 ഒഴികെ)

ഉദാഹരണം 3.23

$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$, $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$ എന്നിവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ $x^2 + 5x + 7$. ആണ്. ല.സാ.ഗു കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $f(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$, $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$

ഉ.സാ.ഭാ $= x^2 + 5x + 7$. കൂടാതെ ഉ.സാ.ഭാ $\times$ ല.സാ.ഗു $= f(x)\times g(x)$.

$$\text{ല.സാ.ഗു} = \frac{f(x)\times g(x)}{\text{GCD}} \quad (1)$$

$f(x)$, $g(x)$ എന്നിവയെ ഉ.സാ.ഭാ വിഭജിക്കുന്നു.

$f(x)$ നെ ഉ.സാ.ഭാ കൊണ്ട് വിഭജിക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ.

	1	−2	8		
1 5 7	1	3	5	26	56
	1	5	7		
		−2	−2	26	
		−2	−10	−14	
			8	40	56
			8	40	56
				0	

$f(x)$ നെ ഉ.സാ.ഭാ കൊണ്ട് വിഭജിച്ചാൽ ഹരണഫലം $x^2 - 2x + 8$ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു.

$$(1) \Longrightarrow \text{LCM} = (x^2 - 2x + 8) \times g(x)$$

$$\text{LCM} = (x^2 - 2x + 8)(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28).$$

കുറിപ്പ്

മുകളിൽ പ്രസ്താവിച്ച പ്രശ്നത്തിൽ $g(x)$ നെയും ഉ.സാ.ഭാ കൊണ്ട് ഹരിക്കാൻ കഴിയും. ഹരണഫലത്തെ $f(x)$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട ല.സാ.ഗു കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.24

രണ്ട് ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭാ, ല.സാ.ഗു എന്നിവ യഥാക്രമം $x + 1$, $x^6 - 1$ എന്നിവയാണ്. അവയിൽ ഒരു ബഹുപദം $x^3 + 1$ എങ്കിൽ മറ്റേത് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ഉ.സാ.ഭാ $= x + 1$, ല.സാ.ഗു $= x^6 - 1$

$f(x) = x^3 + 1$ എന്നിരിക്കട്ടെ

ല.സാ.ഗു $\times$ ഉ.സാ.ഭാ $= f(x) \times g(x)$

$$\Longrightarrow g(x) = \frac{\text{LCM} \times \text{GCD}}{f(x)} = \frac{(x^6 - 1)(x + 1)}{x^3 + 1}$$

$$= \frac{(x^3 + 1)(x^3 - 1)(x + 1)}{x^3 + 1} = (x^3 - 1)(x + 1)$$

$$g(x) = (x^3 - 1)(x + 1).$$

അഭ്യാസം 3.8

1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോ ജോടി ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെയും ല.സാ.ഗു കാണുക.
   (i) $x^2 - 5x + 6$, $x^2 + 4x - 12$ ഉ.സാ.ഭാ $x - 2$.
   (ii) $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3$, $x^4 + 2x^2 + x + 2$ ഉ.സാ.ഭാ $x^2 + x + 1$.
   (iii) $2x^3 + 15x^2 + 2x - 35$, $x^3 + 8x^2 + 4x - 21$ ഉ.സാ.ഭാ $x + 7$.
   (iv) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, $2x^4 - x^3 - 10x^2 - 11x + 8$ ഉ.സാ.ഭാ $2x - 1$.

2. ല.സാ.ഗു, ഉ.സാ.ഭാ, ഒരു ബഹുപദ വ്യംജകം $p(x)$ എന്നിവ യഥാക്രമം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു $q(x)$ കാണുക.
   (i) $(x + 1)^2 (x + 2)^2$, $(x + 1)(x + 2)$, $(x + 1)^2 (x + 2)$.
   (ii) $(4x + 5)^3 (3x - 7)^3$, $(4x + 5)(3x - 7)^2$, $(4x + 5)^3 (3x - 7)^2$.
   (iii) $(x^4 - y^4)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$, $x^2 - y^2$, $x^4 - y^4$.
   (iv) $(x^3 - 4x)(5x + 1)$, $(5x^2 + x)$, $(5x^3 - 9x^2 - 2x)$.
   (v) $(x - 1)(x - 2)(x^2 - 3x + 3)$, $(x - 1)$, $(x^3 - 4x^2 + 6x - 3)$.
   (vi) $2(x + 1)(x^2 - 4)$, $(x + 1)$, $(x + 1)(x - 2)$.

3.6 പരിമേയ വ്യംജകങ്ങൾ

$\frac{m}{n}$ രൂപത്തിലുള്ള (m , n പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ $\neq 0$) സംഖ്യയെ പരിമേയ സംഖ്യ എന്നു പറയുന്നു. ഇതുപോലെ, $p(x)$, $q(x)$ എന്നീ രണ്ട് ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളിൽ $q(x) \neq 0$ എങ്കിൽ $\frac{p(x)}{q(x)}$ എന്നത് ഒരു പരിമേയ വ്യംജകമാണ്.

$p(x)$ നെ $\frac{p(x)}{1}$ എന്നെഴുതാം എന്നതിനാൽ ഏതൊരു ബഹുപദ വ്യംജകം $p(x)$ ഉം ഒരു പരിമേയ വ്യംജകമാണ്. ഇവിടെ 1 ഒരു സ്ഥിര വ്യംജകം ആകുന്നു.

എങ്കിലും ഒരു പരിമേയ വ്യംജകം ഒരു ബഹു പദവ്യംജകം ആകണമെന്നില്ല.,

ഉദാഹരണമായി, $\frac{x}{x^2+1}$ ഒരു പരിമേയ വ്യംജകമാണ്. എന്നാൽ ബഹുപദ വ്യംജകമല്ല.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ, $2x+7$, $\frac{3x+2}{x^2+x+1}$, $\frac{x^3+\sqrt{2}\,x+5}{x^2+x-\sqrt{3}}$.

3.6.1 പരിമേയ വ്യംജകങ്ങളുടെ ലഘൂകരണം

$p(x)$, $q(x)$ എന്നീ വ്യംജകങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭാ 1 ആകത്തക്കവിധം അവയുടെ ഗുണോത്തരങ്ങൾ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ എങ്കിൽ $\frac{p(x)}{q(x)}$ നെ അതിന്റെ ഏറ്റവും ലഘുവായ പദങ്ങളുള്ള പരിമേയ വ്യംജകം എന്നു പറയാം.

ഒരു പരിമേയ വ്യംജകം അതിന്റെ ലഘൂകരിച്ച രൂപത്തിൽ ഇല്ലെങ്കിൽ $p(x)$ എന്ന അംശത്തേയും $q(x)$ എന്ന ഛേദത്തേയും അവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ കൊണ്ട് ഹരിച്ച് അതിന്റെ ഏറ്റവും ചെറിയ പദമായി ലഘുകരിക്കാം.

നമുക്ക് ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം.

ഉദാഹരണം 3.25

ലഘൂകരിക്കുക.

(i) $\frac{5x+20}{7x+28}$ (ii) $\frac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4}$

(iii) $\frac{6x^2-5x+1}{9x^2+12x-5}$ (iv) $\frac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-1)(x^2-2x-3)}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\frac{5x+20}{7x+28} = \frac{5(x+4)}{7(x+4)} = \frac{5}{7}$

(ii) $\frac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4} = \frac{x^2(x-5)}{x^3(2x+3)} = \frac{x-5}{x(2x+3)}$

(iii) $p(x) = 6x^2-5x+1 = (2x-1)(3x-1)$,

$q(x) = 9x^2+12x-5 = (3x+5)(3x-1)$

$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(2x-1)(3x-1)}{(3x+5)(3x-1)} = \frac{2x-1}{3x+5}$

(iv) $f(x) = (x-3)(x^2-5x+4) = (x-3)(x-1)(x-4)$,

$g(x) = (x-1)(x^2-2x-3) = (x-1)(x-3)(x+1)$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-3)(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-3)(x+1)} = \frac{x-4}{x+1}$

അഭ്യാസം 3.9

ലഘൂകരിക്കുക

(i) $\frac{6x^2+9x}{3x^2-12x}$ (ii) $\frac{x^2+1}{x^4-1}$ (iii) $\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$

(iv) $\frac{x^3-27}{x^2-9}$ (v) $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$ (Hint: $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2$)

(vi) $\frac{x^3+8}{x^4+4x^2+16}$ (vii) $\frac{2x^2+x-3}{2x^2+5x+3}$ (viii) $\frac{2x^4-162}{(x^2+9)(2x-6)}$

(ix) $\frac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-4)(x^2-2x-3)}$ (x) $\frac{(x-8)(x^2+5x-50)}{(x+10)(x^2-13x+40)}$ (xi) $\frac{4x^2+9x+5}{8x^2+6x-5}$

(xii) $\frac{(x-1)(x-2)(x^2-9x+14)}{(x-7)(x^2-3x+2)}$

3.6.2 പരിമേയ വ്യംജകങ്ങളുടെ ഗുണനവും ഹരണവും

$\frac{p(x)}{q(x)}$; $q(x)\neq 0$, $\frac{g(x)}{h(x)}$; $h(x)\neq 0$ എന്നിവ രണ്ട് പരിമേയ വ്യംജകങ്ങൾ എങ്കിൽ

(i) അവയുടെ ഗുണനഫലം $\frac{p(x)}{q(x)}\times\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{p(x)\times g(x)}{q(x)\times h(x)}$

(ii) അവയുടെ ഹരണഫലം $\frac{p(x)}{q(x)}\div\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{p(x)}{q(x)}\times\frac{h(x)}{g(x)}$

അതായത്, $\frac{p(x)}{q(x)}\div\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{p(x)\times h(x)}{q(x)\times g(x)}$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെടുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.26

ഗുണിക്കുക (i) $\frac{x^3y^2}{9z^4}$ x $\frac{27z^5}{x^4y^2}$ (ii) $\frac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}$ x $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ (iii) $\frac{x^3-8}{x^2-4}$ x $\frac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $$\frac{x^3y^2}{9z^4}\times\frac{27z^5}{x^4y^2}=\frac{(x^3y^2)(27z^5)}{(9z^4)(x^4y^2)}=\frac{3z}{x}.$$

(ii) $$\frac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}\times\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a+b)}\times\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}=a^2-ab+b^2.$$

(iii) $$\frac{x^3-8}{x^2-4}\times\frac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4}=\frac{x^3-2^3}{x^2-2^2}\times\frac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4}$$

$$=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}\times\frac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4}=x+4.$$

ഉദാഹരണം 3.27

ഹരിക്കുക (i) $\frac{4x-4}{x^2-1}\div\frac{x-1}{x+1}$ (ii) $\frac{x^3-1}{x+3}\div\frac{x^2+x+1}{3x+9}$ (iii) $\frac{x^2-1}{x^2-25}\div\frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$

നിർദ്ധാരണം (i) $\frac{4x-4}{x^2-1} \div \frac{x-1}{x+1} = \frac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)} \times \frac{(x+1)}{(x-1)} = \frac{4}{x-1}$.

(ii) $\frac{x^3-1}{x+3} \div \frac{x^2+x+1}{3x+9} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+3} \times \frac{3(x+3)}{x^2+x+1} = 3(x-1)$.

(iii) $\frac{x^2-1}{x^2-25} \div \frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+5)(x-5)} \times \frac{(x+5)(x-1)}{(x-5)(x+1)}$

$= \frac{(x-1)(x-1)}{(x-5)(x-5)} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}$.

അഭ്യാസം 3.10

1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയുടെ ഗുണനഫലം ലഘു രൂപത്തിലെഴുതുക.

(i) $\frac{x^2-2x}{x+2} \times \frac{3x+6}{x-2}$ (ii) $\frac{x^2-81}{x^2-4} \times \frac{x^2+6x+8}{x^2-5x-36}$

(iii) $\frac{x^2-3x-10}{x^2-x-20} \times \frac{x^2-2x+4}{x^3+8}$ (iv) $\frac{x^2-16}{x^2-3x+2} \times \frac{x^2-4}{x^3+64} \times \frac{x^2-4x+16}{x^2-2x-8}$

(v) $\frac{3x^2+2x-1}{x^2-x-2} \times \frac{2x^2-3x-2}{3x^2+5x-2}$ (vi) $\frac{2x-1}{x^2+2x+4} \times \frac{x^4-8x}{2x^2+5x-3} \times \frac{x+3}{x^2-2x}$

2. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ ഹരിച്ച് ലഘു രൂപത്തിലെഴുതുക.

(i) $\frac{x}{x+1} \div \frac{x^2}{x^2-1}$ (ii) $\frac{x^2-36}{x^2-49} \div \frac{x+6}{x+7}$

(iii) $\frac{x^2-4x-5}{x^2-25} \div \frac{x^2-3x-10}{x^2+7x+10}$ (iv) $\frac{x^2+11x+28}{x^2-4x-77} \div \frac{x^2+7x+12}{x^2-2x-15}$

(v) $\frac{2x^2+13x+15}{x^2+3x-10} \div \frac{2x^2-x-6}{x^2-4x+4}$ (vi) $\frac{3x^2-x-4}{9x^2-16} \div \frac{4x^2-4}{3x^2-2x-1}$

(vii) $\frac{2x^2+5x-3}{2x^2+9x+9} \div \frac{2x^2+x-1}{2x^2+x-3}$

3.6.3 പരിമേയ വ്യംജകങ്ങളുടെ സങ്കലനവും വ്യവകലനവും

$\frac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$ യും $\frac{r(x)}{s(x)}$, $s(x) \neq 0$ യും രണ്ട് പരിമേയ വ്യംജകങ്ങളാണ്. എങ്കിൽ തുകയും വ്യവകലനവും നിർവ്വചിക്കാം.

$$\frac{p(x)}{q(x)} \pm \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x).s(x) \pm q(x)r(x)}{q(x).s(x)}$$

ഉദാഹരണം 3.28

ലഘൂകരിക്കുക. (i) $\frac{x+2}{x+3} + \frac{x-1}{x-2}$ (ii) $\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}$ (iii) $\frac{x^2-x-6}{x^2-9} + \frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{(x+2)(x-2)+(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \dfrac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}$

(ii) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{2x^2+2}{(x-1)^2(x+1)}$

$$= \dfrac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$$

(iii) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}+\dfrac{x^2+2x-24}{x^2-x-12} = \dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}+\dfrac{(x+6)(x-4)}{(x+3)(x-4)}$

$$= \dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+6}{x+3} = \dfrac{x+2+x+6}{x+3} = \dfrac{2x+8}{x+3}$$

ഉദാഹരണം 3.29

$\dfrac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$ കിട്ടുന്നതിന് $\dfrac{x^3-1}{x^2+2}$ നോട് ഏത് പരിമേയ വ്യംജകം കൂട്ടണം.

നിർദ്ധാരണം ആവശ്യപ്പെട്ട പരിമേയ വ്യംജകം $p(x)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\dfrac{x^3-1}{x^2+2}+p(x)=\dfrac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$$

$$p(x) = \dfrac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}-\dfrac{x^3-1}{x^2+2}$$

$$= \dfrac{2x^3-x^2+3-x^3+1}{x^2+2} = \dfrac{x^3-x^2+4}{x^2+2}$$

ഉദാഹരണം 3.30

$\left(\dfrac{2x-1}{x-1}-\dfrac{x+1}{2x+1}\right)+\dfrac{x+2}{x+1}$ രണ്ട് ബഹു പദവ്യംജകങ്ങളുടെ ചുരുങ്ങിയ രൂപത്തിൽ ലഘൂകരിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം $\left(\dfrac{2x-1}{x-1}-\dfrac{x+1}{2x+1}\right)+\dfrac{x+2}{x+1}$

$$= \left[\dfrac{(2x-1)(2x+1)-(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+1)}\right]+\dfrac{x+2}{x+1}$$

$$= \dfrac{(4x^2-1)-(x^2-1)}{(x-1)(2x+1)}+\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{3x^2}{(x-1)(2x+1)}+\dfrac{x+2}{x+1}$$

$$= \dfrac{3x^2(x+1)+(x+2)(x-1)(2x+1)}{(x^2-1)(2x+1)} = \dfrac{5x^3+6x^2-3x-2}{2x^3+x^2-2x-1}$$

അഭ്യാസം 3.11

1. ലഘൂകരിക്കുക

(i) $\dfrac{x^3}{x-2}+\dfrac{8}{2-x}$

(ii) $\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}+\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$

(iii) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}+\dfrac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$

(iv) $\dfrac{x-2}{x^2-7x+10}+\dfrac{x+3}{x^2-2x-15}$

(v) $\frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 3x + 2} - \frac{2x^2 - 7x - 4}{2x^2 - 3x - 2}$ (vi) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 6x + 8} - \frac{x^2 - 11x + 30}{x^2 - x - 20}$

(vii) $\left[\frac{2x + 5}{x + 1} + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right] - \left(\frac{3x - 2}{x - 1}\right)$ (viii) $\frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} - \frac{2}{x^2 + 4x + 3}$.

2. $\frac{3x^3 + 2x^2 + 4}{x^2 + 2}$ കിട്ടുന്നതിന് $\frac{x^3 - 1}{x^2 + 2}$ നോട് ഏത് പരിമേയ വ്യംജകം കൂട്ടണം?

3. $\frac{4x^3 - 7x^2 + 5}{2x - 1}$ ൽ നിന്ന് ഏത് പരിമേയ വ്യംജകം കുറച്ചാൽ $2x^2 - 5x + 1$ കിട്ടും?

4. $P = \frac{x}{x + y}$, $Q = \frac{y}{x + y}$ എങ്കിൽ $\frac{1}{P - Q} - \frac{2Q}{P^2 - Q^2}$ കാണുക.

3.7 വർഗ്ഗമൂലം

$a \in \mathbb{R}$ ഒരു ഋണമല്ലാത്ത വാസ്തവിക സംഖ്യ എന്നിരിക്കട്ടെ. a യുടെ വർഗ്ഗമൂലം $b^2 = a$ എന്നവിധത്തിലുള്ള വാസ്തവിക സംഖ്യ ആകുന്നു. a യുടെ ധനവർഗ്ഗ മൂലത്തെ $\sqrt[2]{a}$ അഥവാ $\sqrt{a}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $(-3)^2 = 9$, $(+3)^2 = 9$ എന്നീ രണ്ടും ശരിയായതിനാൽ റാഡിക്കൽ ചിഹ്നം $\sqrt{\ }$ ധന വർഗ്ഗമൂലത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്നു. അതായത് $\sqrt{9} = 3$. ഇതുപോലെ $\sqrt{121} = 11$, $\sqrt{10000} = 100$.

ഏതെങ്കിലും ഒരു വ്യംജകത്തിന്റെ വർഗ്ഗം തന്നിട്ടുള്ള വ്യംജകത്തിന് തുല്യമാണെങ്കിൽ ആ വ്യംജകത്തെ തന്നിട്ടുള്ള വ്യംജകത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം എന്നു പറയുന്നു. ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കാൻ താഴെ കാണുന്നവിധം എഴുതാം.

$$\sqrt{(p(x))^2} = |p(x)|, \text{ ഇവിടെ } |p(x)| = \begin{cases} p(x) & p(x) \geq 0 \\ -p(x), & p(x) < 0 \end{cases}$$

ഉദാഹരണമായി, $\sqrt{(x-a)^2} = |(x-a)|$, $\sqrt{(a-b)^2} = |(a-b)|$.

പൊതുവായി തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുന്നതിന് ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രണ്ട് രീതികൾ വളരെ സുപരിചിതമാണ്. (i) ഘടക രീതി (ii) ഹരണ രീതി

ഈ ഭാഗത്തിൽ നമുക്ക് ഘടക രീതിയിൽ ഘടകങ്ങളാക്കാൻ കഴിയുന്ന പരിമേയ വ്യംജകങ്ങളേയും ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളേയും ഘടകങ്ങളാക്കി വർഗ്ഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി ചില ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ പഠിക്കാം.

3.7.1 ഘടക രീതിയിൽ വർഗ്ഗമൂലം

ഉദാഹരണം 3.31

വർഗ്ഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}$ (ii) $\frac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}$ (iii) $(2x+3y)^2 - 24xy$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\sqrt{121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}} = 11|(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^6|$

(ii) $\sqrt{\frac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}} = \frac{9}{8}\left|\frac{x^2y^3z^4}{w^6s^7}\right|$

(iii) $\sqrt{(2x+3y)^2 - 24xy} = \sqrt{4x^2 + 12xy + 9y^2 - 24xy} = \sqrt{(2x-3y)^2}$
$= |(2x-3y)|$

ഉദാഹരണം 3.32

വർഗ്ഗമൂലം കാണുക (i) $4x^2 + 20xy + 25y^2$ (ii) $x^6 + \frac{1}{x^6} - 2$

(iii) $(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\sqrt{4x^2 + 20xy + 25y^2} = \sqrt{(2x+5y)^2} = |(2x+5y)|$

(ii) $\sqrt{x^6 + \frac{1}{x^6} - 2} = \sqrt{\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2} = \left|\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)\right|$

(iii) വർഗ്ഗമൂലം കാണുന്നതിനു മുമ്പ് ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളെ ഘടകങ്ങളാക്കാം.

$6x^2 - x - 2 = (2x+1)(3x-2)$; $3x^2 - 5x + 2 = (3x-2)(x-1)$,

$2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$

$$\sqrt{(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)}$$

$$= \sqrt{(2x+1)(3x-2)\times(3x-2)(x-1)\times(x-1)(2x+1)}$$

$$= \sqrt{(2x+1)^2(3x-2)^2(x-1)^2} = |(2x+1)(3x-2)(x-1)|$$

അഭ്യാസം 3.12

1. വർഗ്ഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുക

(i) $196a^6b^8c^{10}$ (ii) $289(a-b)^4(b-c)^6$ (iii) $(x+11)^2 - 44x$

(iv) $(x-y)^2 + 4xy$ (v) $121x^8y^6 \div 81x^4y^8$ (vi) $\frac{64(a+b)^4(x-y)^8(b-c)^6}{25(x+y)^4(a-b)^6(b+c)^{10}}$

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക

(i) $16x^2 - 24x + 9$

(ii) $(x^2 - 25)(x^2 + 8x + 15)(x^2 - 2x - 15)$

(iii) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy + 30yz - 20zx$

(iv) $x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$

(v) $(6x^2 + 5x - 6)(6x^2 - x - 2)(4x^2 + 8x + 3)$

(vi) $(2x^2 - 5x + 2)(3x^2 - 5x - 2)(6x^2 - x - 1)$

3.7.2 ഹരണ രീതിയിൽ ഒരു ബഹു പദവ്യംജകത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം

എളുപ്പത്തിൽ ഘടകങ്ങളാക്കാൻ സാധിക്കാത്ത ബഹു പദവ്യംജകങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം ഹരണ രീതിയിൽ കാണാവുന്നതാണ്. കൂടാതെ ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങൾ കൂടിയ കൃതിയിലാകുമ്പോൾ ഈ രീതി സൗകര്യപ്രദമാണ്.

ഒരു ധന പൂർണ്ണാങ്കത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുന്ന അതേ രീതിയിൽ ഒരു ബഹു പദവ്യംജകത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണാൻ കഴിയും. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണങ്ങൾ കൊണ്ട് ഈ രീതി നമുക്ക് വിശദമാക്കാം.

കാണുക (i) $\sqrt{66564}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2\ \ 5\ \ 8 \\ \hline
2 & 6\ \ 65\ \ 64 \\
 & 4 \\ \hline
45 & 2\ \ 65 \\
 & 2\ \ 25 \\ \hline
508 & 40\ \ 64 \\
 & 40\ \ 64 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

(ii) $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1}$

$p(x) = 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 \ + \ 2x \ + \ 1 \\ \hline
3x^2 & 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1 \\
 & 9x^4 \\ \hline
6x^2 + 2x & 12x^3 + 10x^2 \\
 & 12x^3 + 4x^2 \\ \hline
6x^2 + 4x + 1 & 6x^2 + 4x + 1 \\
 & 6x^2 + 4x + 1 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$\sqrt{66564} = 258$, $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

(i) ബഹുപദ വ്യംജകത്തെ xന്റെ ഘാതത്തിനനുസരിച്ച് ആരോഹണ ക്രമത്തിൽ അല്ലെങ്കിൽ അവരോഹണ ക്രമത്തിൽ എഴുമ്പോൾ ഇല്ലാത്ത പദങ്ങൾക്ക് പൂജ്യം എഴുതുക.

(ii) മുകളിൽ പ്രസ്താവിച്ച രീതിയെ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രീതിയിൽ താരതമ്യം ചെയ്യാം.

$$\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(a + b + c)^2}$$

അതിനാൽ, വർഗ്ഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് അനുയോജ്യമായ a, b , c കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടതാണ്.

$$
\begin{aligned}
(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\
&= a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2 \\
&= a^2 + (2a + b)b + (2a + 2b + c)c \\
&= (3x^2)^2 + (6x^2 + 2x)(2x) + (6x^2 + 4x + 1)(1)
\end{aligned}
$$

$\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$, ഇവിടെ $a = 3x^2$, $b = 2x$, $c = 1$

മറ്റൊരു രീതി : വർഗ്ഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ആദ്യം താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിധം എഴുതുക.

$$9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$$
$$= (mx^2 + nx + l)^2 = m^2x^4 + 2mnx^3 + (n^2 + 2lm)x^2 + 2nlx + l^2$$

ഇരുവശവും ഗുണാങ്കങ്ങളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തി m, n, l കണ്ടുപിടിക്കുക.

(iii) താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ തികച്ചും രസകരമാണെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

$$
\begin{aligned}
25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4 &= 25x^4 - 30x^3 + 9x^2 + 20x^2 - 12x + 4 \\
&= (5x^2)^2 + [10x^2 + (-3x)](-3x) + (10x^2 - 6x + 2)2 \\
&= (5x^2)^2 + [2(5x^2) + (-3x)](-3x) + [2(5x^2) + 2(-3x) + 2]2 \\
&= a^2 + [2a + (-b)](-b) + [2a + 2(-b) + c]c \\
&= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ac \\
&= (a - b + c)^2, \quad \text{ഇവിടെ } a = 5x^2,\ b = 3x,\ c = 2
\end{aligned}
$$

$\therefore \sqrt{25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4} = |5x^2 - 3x + 2|$.

ഉദാഹരണം 3.33

വർഗ്ഗമൂലം കാണുക $x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$.

നിർദ്ധാരണം ഇവിടെ വ്യംജകത്തിന്റെ x ന്റെ ഘാതം അവരോഹണ ക്രമത്തിൽ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 5x + 6 \\
\hline
x^2 & x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36 \\
 & x^4 \\
\hline
2x^2 - 5x & \quad -10x^3 + 37x^2 \\
 & \quad -10x^3 + 25x^2 \\
\hline
2x^2 - 10x + 6 & \qquad\qquad 12x^2 - 60x + 36 \\
 & \qquad\qquad 12x^2 - 60x + 36 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\sqrt{x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36} = |(x^2 - 5x + 6)|$$

ഉദാഹരണം 3.34

വർഗ്ഗമൂലം കാണുക $x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 30x + 25$

നിർദ്ധാരണം x ന്റെ ഘാതം ആരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതി വർഗ്ഗമൂലം കാണുക

$$\begin{array}{r|l}
 & 5 - 3x + x^2 \\
\hline
5 & 25 - 30x + 19x^2 - 6x^3 + x^4 \\
 & 25 \\
\hline
10 - 3x & \quad -30x + 19x^2 \\
 & \quad -30x + 9x^2 \\
\hline
10 - 6x + x^2 & \qquad\qquad 10x^2 - 6x^3 + x^4 \\
 & \qquad\qquad 10x^2 - 6x^3 + x^4 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം $= |x^2 - 3x + 5|$

ഉദാഹരണം 3.35

$m - nx + 28x^2 + 12x^3 + 9x^4$ ഒരു പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമെങ്കിൽ m, n ഇവയുടെ വില കാണുക.

നിർദ്ധാരണം x ന്റെ ഘാതത്തെ ക്രമ രൂപത്തിൽ എഴുതുക.

$$9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m.$$

	$3x^2 + 2x + 4$
$3x^2$	$9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m$
	$9x^4$
$6x^2 + 2x$	$12x^3 + 28x^2$
	$12x^3 + 4x^2$
$6x^2 + 4x + 4$	$24x^2 - nx + m$
	$24x^2 + 16x + 16$
	0

തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദ വ്യംജകം ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗമായതിനാൽ, $n = -16$, $m = 16$.

അഭ്യാസം 3.13

1. ഹരണ രീതിയിൽ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

   (i) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$ (ii) $4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1$

   (iii) $9x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x + 1$ (iv) $4 + 25x^2 - 12x - 24x^3 + 16x^4$

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ബഹു പദവ്യംജകങ്ങൾ പൂർണ്ണ വർഗ്ഗങ്ങളാണെങ്കിൽ a, b എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

   (i) $4x^4 - 12x^3 + 37x^2 + ax + b$ (ii) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - ax + b$

   (iii) $ax^4 + bx^3 + 109x^2 - 60x + 36$ (iv) $ax^4 - bx^3 + 40x^2 + 24x + 36$

3.8 ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ

ഗ്രീക്ക് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ യൂക്ലിഡ് നീളങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ജ്യാമിതീയ സമീപനം വികസിപ്പിച്ചു. അത് നമ്മുടെ ഇപ്പോഴത്തെ സാങ്കേതിക സംജ്ഞാ ശാസ്ത്രത്തിൽ ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണങ്ങളാണ്. പൊതു രൂപത്തിൽ ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണങ്ങളെ കണ്ടുപിടിച്ചതിനുള്ള പ്രശംസ പുരാതന ഇന്ത്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻമാർക്കാണ്. വാസ്തവത്തിൽ, $ax^2 + bx = c$ രൂപത്തിലുള്ള ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണത്തിനുള്ള വ്യക്തമായ സൂത്രത്തെ ബ്രഹ്മ ഗുപ്ത (A.D 598 - 665) കണ്ടുപിടിച്ചു. പിന്നീട് ഇന്ത്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ശ്രീധരർ ആചാര്യ (1025 A.D) പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമാക്കുന്ന രീതി ഉപയോഗിച്ച് ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നരീതി ആവിഷ്ക്കരിച്ചു. ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ ഭാസ്ക്കര II ഈ സൂത്രത്തെ ദ്വിഘാത സൂത്രം എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചു.

ഈ ഭാഗത്തിൽ, വ്യത്യസ്ത മാർഗ്ഗങ്ങളിലൂടെ ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് പഠിക്കാം. ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ ചില പ്രയോഗങ്ങളും നമുക്ക് കാണാൻ കഴിയും.

നിർവ്വചനം

$ax^2 + bx + c = 0$, a, b, c എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകളും കൂടാതെ $a \neq 0$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സമവാക്യത്തെ ചരം x ൽ ഉള്ള ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണം എന്നു പറയുന്നു.

വാസ്തവത്തിൽ, $p(x)$ ഘാതം 2 ഉള്ള ഒരു ബഹുപദ വ്യംജകം എങ്കിൽ $p(x) = 0$ എന്നത് ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണം ആകുന്നു. ഇതിന്റെ സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപം $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

ഉദാഹരണമായി, $2x^2 - 3x + 4 = 0$, $1 - x + x^2 = 0$ എന്നിവ ചില ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളാണ്.

3.8.1 ഘടക രീതിയിൽ ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം

ദ്വിഘാത സമീകരണത്തെ രേഖീയ ഘടകങ്ങളാക്കാൻ സാധിച്ചാൽ ഘടകരീതി ഉപയോഗിക്കാം.രണ്ട് ഘടകങ്ങളിൽ ഒരു ഘടകം പൂജ്യമായാൽ മുഴുവൻ ഗുണനഫലവും പൂജ്യമാകുന്നു. വിപരീതമായി ഗുണനഫലം പൂജ്യമായാൽ ഗുണനഫലത്തിൽ ചില ഘടകങ്ങൾ പൂജ്യമാകണം. ഒരു ചരം ഉൾപ്പെടുന്ന ഏതൊരു ഘടകവും പൂജ്യമാകാം. അങ്ങനെ ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണത്തിന്റെ ഓരോ ഘടകങ്ങളും പൂജ്യമാക്കുന്ന ചരത്തിന്റെ മൂല്യം നാം കണ്ടു പിടിക്കുന്നു. അതായത്, ഓരോ ഘടകവും പൂജ്യത്തിന് തുല്യമാക്കി ചരത്തിന്റെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാഹരണം 3.36

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക. $6x^2 - 5x - 25 = 0$

നിർദ്ധാരണം $6x^2 - 5x - 25 = 0.$

$\alpha + \beta = -5$, $\alpha\beta = 6 \times (-25) = -150$ ഇവിടെ x ന്റെ ഗുണോത്തരം -5 ആകത്തക്ക വിധം α , β നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$\alpha = -15 \ , \ \beta = 10.$$

$$6x^2 - 5x - 25 = 6x^2 - 15x + 10x - 25 = 3x(2x-5) + 5(2x-5)$$

$$= (2x-5)(3x+5).$$

$2x - 5 = 0$, $3x + 5 = 0$ എന്നിവയിൽ നിർദ്ധാരണം കിട്ടും.

$$x = \frac{5}{2} \ , \ x = -\frac{5}{3}.$$

നിർദ്ധാരണം $= \left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right\}.$

ഉദാഹരണം 3.37

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\frac{6}{7x-21} - \frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{x^2-9} = 0$

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യം ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണ രൂപത്തിലല്ല. എന്നാൽ ഈ സമവാക്യത്തെ ലഘൂകരിച്ചാൽ അത് ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണമാകുന്നു.

$$\frac{6}{7(x-3)} - \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x+3)(x-3)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{6(x^2-9) - 7(x+3) + 7(x-3)}{7(x-3)^2(x+3)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 6x^2 - 54 - 42 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 16 = 0$$

$x^2 = 16$ ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണം ആകുന്നു. ഇതിന് x ന്റെ രണ്ടു മൂല്യങ്ങൾ $x = 4,\ x = -4.$

$\therefore$ നിർദ്ധാരണം $\{-4, 4\}$

ഉദാഹരണം 3.38

നിർദ്ധാരണം കാണുക $\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x,\ 3 - 4x > 0$

നിർദ്ധാരണം $\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x$

ഇരുവശങ്ങളിലും വർഗ്ഗം എടുക്കുക.

$$24 - 10x = (3-4x)^2$$

$$\Longrightarrow \ 16x^2 - 14x - 15 = 0 \qquad \Longrightarrow \ 16x^2 - 24x + 10x - 15 = 0$$

$\Longrightarrow \quad (8x+5)(2x-3)=0 \qquad \Longrightarrow \quad x = \frac{3}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $-\frac{5}{8}$

$x = \frac{3}{2}, \quad 3-4x = 3-4\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \quad \therefore \; x = \frac{3}{2}$ സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണമല്ല.

$x = -\frac{5}{8}, \quad 3-4x > 0$ നിർദ്ധാരണം $= \left\{-\frac{5}{8}\right\}$.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള **റാഡിക്കൽ സമീകരണത്തെ നിർദ്ധാരണം** ചെയ്യുന്നതിന് നമുക്ക് വർഗ്ഗം എടുക്കലിനെ ആശ്രയിക്കാം.

$a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$ നിർഭാഗ്യവശാൽ, ഈ വർഗ്ഗമെടുക്കൽ പുതിയ സമീകരണത്തിന്റെ എല്ലാ നിർദ്ധാരണങ്ങളും യഥാർത്ഥ സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണങ്ങളാണെന്ന് ഉറപ്പ് തരുന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, $x = 5$എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ വർഗ്ഗം $x^2 = 25$ ഇതിന്റെ നിർദ്ധാരണം $x = 5, x = -5$. എന്നാൽ $x = -5$ യഥാർത്ഥ സമീകരണത്തിന്റെ ഒരു നിർദ്ധാരണമല്ല. അത്തരം നിർദ്ധാരണത്തെ **അന്യ നിർദ്ധാരണം** എന്നു പറയുന്നു.

അതായത്, മുകളിലെ ഉദാഹരണത്തിൽ കാണുന്നത് ഒരു റാഡിക്കൽ സമീകരണത്തിന്റെ ഇരുവശങ്ങളും വർഗ്ഗമെടുക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം യഥാർത്ഥ സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണങ്ങളാണോ എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനായി അവസാന സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണങ്ങളെ പരിശോധിക്കേണ്ടതാണ്.

അഭ്യാസം 3.14

ഘടക രീതിയിൽ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

(i) $(2x+3)^2 - 81 = 0$ (ii) $3x^2 - 5x - 12 = 0$ (iii) $\sqrt{5}x^2 + 2x - 3\sqrt{5} = 0$

(iv) $3(x^2-6) = x(x+7) - 3$ (v) $3x - \frac{8}{x} = 2$ (vi) $x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5}$

(vii) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{34}{15}$ (viii) $a^2b^2x^2 - (a^2+b^2)x + 1 = 0$

(ix) $2(x+1)^2 - 5(x+1) = 12$ (x) $3(x-4)^2 - 5(x-4) = 12$

3.8.2 വർഗ്ഗങ്ങളുടെ പൂർണ്ണമാക്കൽ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം

$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ ൽ x ന്റെ ഗുണോത്തരത്തിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗ്ഗമാണ് അവസാനപദം. $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. എന്നാൽ$x^2 + bx$ എന്നതിൽ $x + \frac{b}{2}$ ന്റെ വർഗ്ഗമാകുന്നതിന് $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ എന്ന ഒരു പദം മാത്രം ഉൾക്കൊള്ളുന്നില്ല. അങ്ങനെ x ന്റെ ഗുണോത്തരത്തിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗ്ഗത്തെ $x^2 + bx$ രൂപത്തിലുള്ള ബഹുപദത്തിൽ കൂട്ടിയാൽ ഒരു ദ്വിഘാത വ്യംജകത്തിന്റെ വർഗ്ഗം ലഭിക്കുന്നു. ഇപ്രകാരമുള്ള **സങ്കലനത്തെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ പൂർണ്ണമാക്കൽ** എന്നു പറയുന്നു. ഈ ഭാഗത്തിൽ, ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം വർഗ്ഗങ്ങളുടെ പൂർണ്ണമാക്കൽ രീതിയിൽ താഴെ കൊടുത്ത നിലകളിലൂടെ കണ്ടുപിടിക്കാം.

നില 1 x^2 ന്റെ ഗുണോത്തരം 1 എങ്കിൽ നില (2) ലേയ്ക്ക് പോകുന്നു. ഇല്ലെങ്കിൽ, സമീകരണത്തിന്റെ ഇരുവശങ്ങളും x^2 ന്റെ ഗുണോത്തരം കൊണ്ട് ഹരിക്കുക. എല്ലാ പദങ്ങളും സമീകരണത്തിന്റെ ഓരേ വശത്ത് കൊണ്ടു വരിക.

നില 2 x ന്റെ ഗുണോത്തരത്തിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗ്ഗം കാണുക. സമീകരണത്തിന്റെ ഇരുവശങ്ങളിലും ആ സംഖ്യ കൂട്ടുക. സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണത്തിന് വർഗ്ഗമൂല പ്രത്യേകത ഉപയോഗിക്കുക.

$x^2 = t \Longrightarrow x = \sqrt{t}$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -\sqrt{t}$ ഇവിടെ t ഋണമല്ല.

ഉദാഹരണം 3.39

$5x^2 - 6x - 2 = 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ പൂർണ്ണമാക്കൽ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണം $5x^2 - 6x - 2 = 0$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0$$ (ഇരു വശങ്ങളും 5 കൊണ്ട് ഹരിക്കുക)

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x = \frac{2}{5}$$ (x ന്റെ ഗുണോത്തരത്തിന്റെ പകുതിയാണ് $\frac{3}{5}$)

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x + \frac{9}{25} = \frac{9}{25} + \frac{2}{5}$$ (ഇരു വശങ്ങളിലും $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ കൂട്ടുക)

$$\Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$$

$$\Longrightarrow \quad x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}}$$ (ഇരു വശങ്ങളും വർഗ്ഗമൂലം എടുക്കുക)

$$x = \frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{19}}{5} = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}.$$

നിർദ്ധാരണ ഗണം $\left\{\frac{3+\sqrt{19}}{5}, \frac{3-\sqrt{19}}{5}\right\}$.

ഉദാഹരണം 3.40

$a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$ പൂർണ്ണവർഗ്ഗമാക്കൽ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം $a = 0$ എങ്കിൽ തെളിയിക്കാൻ ഒന്നുമില്ല. അതിനാൽ $a \neq 0$

$$a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - \frac{3b}{a}x + \frac{2b^2}{a^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x = \frac{-2b^2}{a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x + \frac{9b^2}{4a^2} = \frac{9b^2}{4a^2} - \frac{2b^2}{a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{9b^2 - 8b^2}{4a^2} \quad \Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad x - \frac{3b}{2a} = \pm\frac{b}{2a} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{3b \pm b}{2a}$$

നിർദ്ധാരണ ഗണം $\left\{\frac{b}{a}, \frac{2b}{a}\right\}$.

3.8.3 സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം

ഈ ഭാഗത്തിൽ, ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ കാണുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന ദ്വിഘാത സൂത്രം നമുക്ക് രൂപീകരിക്കാം. $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണം പരിഗണിക്കുക.

ഇത് $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ എന്നെഴുതാം.

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a}$$

ഇരുവശങ്ങളിലും $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ കൂട്ടിയാൽ, $x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1)$$

നിർദ്ധാരണ ഗണം $\left\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$.

സമീകരണം (1): ലെ സൂത്രത്തെ ദ്വിഘാത സൂത്രം എന്നു പറയുന്നു.

ദ്വിഘാത സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് ദ്വിഘാത സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം.

ഉദാഹരണം 3.41

ദ്വിഘാത സൂത്രം ഉപപയോഗച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+4}$ ഇവിടെ $x + 1 \neq 0$, $x + 2 \neq 0$, $x + 4 \neq 0$

നിർദ്ധാരണം

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+4}$$

$$\frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{2}{x+4} - \frac{1}{x+2}\right] = 2\left[\frac{2x + 4 - x - 4}{(x+4)(x+2)}\right]$$

$$\frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{x}{(x+2)(x+4)}\right]$$

$$x^2 + 6x + 8 = 2x^2 + 2x$$

$x^2 - 4x - 8 = 0$, ഇത് ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണം.

(ല.സാ.ഗു ഉപയോഗിച്ച് ചെയ്താലും മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സമീകരണം ലഭിക്കുന്നു.)

ദ്വിഘാത സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച്,

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$$

അതായത്, $x = 2 + 2\sqrt{3}$ or $2 - 2\sqrt{3}$

നിർദ്ധാരണ ഗണം $\{2 - 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3}\}$

അഭ്യാസം 3.15

1 താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ പൂർണ്ണമാക്കൽ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

(i) $x^2 + 6x - 7 = 0$ (ii) $x^2 + 3x + 1 = 0$

(iii) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ (iv) $4x^2 + 4bx - (a^2 - b^2) = 0$

(v) $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$ (vi) $\frac{5x + 7}{x - 1} = 3x + 2$

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ ദ്വിഘാത സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

(i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (ii) $15x^2 - 11x + 2 = 0$

(iii) $x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$ (iv) $3a^2x^2 - abx - 2b^2 = 0$

(v) $a(x^2 + 1) = x(a^2 + 1)$ (vi) $36x^2 - 12ax + (a^2 - b^2) = 0$

(vii) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-3}{x-4} = \frac{10}{3}$ (viii) $a^2x^2 + (a^2 - b^2)x - b^2 = 0$

3.8.4 ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം

ഈ ഭാഗത്തിൽ വാചകരൂപത്തിലുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ചില ലളിതമായ പ്രശ്നങ്ങൾക്കും ദൈനംദിന ജീവിത സാഹചര്യങ്ങളെ വിവരിക്കുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾക്കും നിർദ്ധാരണം കാണാം. തന്നിട്ടുള്ള പ്രസ്താവനയ്ക്ക് ആദ്യമായി നാം ഒരു സമീകരണം രൂപീകരിച്ച് പിന്നീട് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം. തന്നിട്ടുള്ള പ്രശ്നത്തിന് അനുയോജ്യമായ നിർദ്ധാരണം നമുക്ക് തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

ഉദാഹരണം 3.42

ഒരു സംഖ്യയുടേയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റേയും തുക $5\frac{1}{5}$ എങ്കിൽ ആ സംഖ്യ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ആവശ്യപ്പെട്ട സംഖ്യ x എന്നിരിക്കട്ടെ. അതിന്റെ വ്യുൽക്രമം $\frac{1}{x}$

$$x + \frac{1}{x} = 5\frac{1}{5} \implies \frac{x^2+1}{x} = \frac{26}{5}$$

$$5x^2 - 26x + 5 = 0$$

$$\implies 5x^2 - 25x - x + 5 = 0$$

$$(5x - 1)(x - 5) = 0 \implies x = 5 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \frac{1}{5}$$

ആവശ്യപ്പെട്ട സംഖ്യകൾ $= 5, \frac{1}{5}$.

ഉദാഹരണം 3.43

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ആധാരം ഉന്നതിയെക്കാൾ 4 സെ.മീ അധികമാണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 48 ച.സെ.മീ ആണെങ്കിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ ആധാരവും, ഉന്നതിയും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി x സെ.മീ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതിനാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ ആധാരം $(x + 4)$ സെ.മീ ആകുന്നു.

ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2}$ x ആധാരം x ഉയരം

തന്നിട്ടുള്ള നിബന്ധന അനുസരിച്ച് $\frac{1}{2}(x + 4)(x) = 48$

$$\implies x^2 + 4x - 96 = 0 \implies (x + 12)(x - 8) = 0$$

$$\implies x = -12 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } 8$$

എന്നാൽ $x = -12$ സാധ്യമല്ല. (നീളം ധനം ആയതിനാൽ)

$\therefore x = 8$ ആയാൽ $x + 4 = 12$.

ത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി 8 സെ.മീ, ആധാരം 12 സെ.മീ ആണ്.

ഉദാഹരണം 3.44

ഒരു കാർ പതിവു സമയത്തേക്കാൾ 30 മിനിറ്റുകൾ വൈകി പുറപ്പെട്ടു. 150 കി.മീ അകലെയുള്ള ലക്ഷ്യ സ്ഥാനത്ത് കൃത്യ സമയത്ത് എത്തുന്നതിന് അതിന്റെ പതിവു വേഗതയേക്കാൾ 25 കി.മീ/മണിക്കൂർ കൂട്ടേണ്ടി വന്നു. അതിന്റെ പതിവായ വേഗത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം കാറിന്റെ പതിവായ വേഗത x കി.മീ/മണിക്കൂർ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതിനാൽ കാറിന്റെ കൂടിയ വേഗത $(x+25)$ കി.മീ/മണിക്കൂർ

ആകെ ദൂരം $= 150$ കി.മീ, സമയം = $\frac{\text{ദൂരം}}{\text{വേഗത}}$

തന്നിട്ടുള്ള ദൂരം ഉൾക്കൊള്ളുന്നതിന് കാർ എടുത്ത സമയങ്ങൾ യഥാക്രമം T_1 , T_2 എന്നിരിക്കട്ടെ.

തന്നിട്ടുള്ള നിർദ്ദേശമനുസരിച്ച്, $T_1 - T_2 = \frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ (30 മിനിട്ട് = $\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ)

$$\Longrightarrow \quad \frac{150}{x} - \frac{150}{x+25} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 150\left[\frac{x+25-x}{x(x+25)}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 25x - 7500 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+100)(x-75) = 0$$

അതായത്, $x = 75$ അല്ലെങ്കിൽ -100, എന്നാൽ $x = -100$ സ്വീകാര്യമല്ല.

കാറിന്റെ പതിവായ വേഗത $= 75$ കി.മീ/മണിക്കൂർ

അഭ്യാസം 3.16

1. ഒരു സംഖ്യയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റേയും തുക $\frac{65}{8}$ സംഖ്യ കാണുക.
2. രണ്ട് ധനസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം 45 ആണ്. ചെറിയ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം വലിയ സംഖ്യയുടെ നാലു മടങ്ങാണ്. സംഖ്യകൾ കാണുക.
3. ഒരു കർഷകൻ 100 ച.മീ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള പച്ചക്കറിത്തോട്ടം നിർമ്മിക്കാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. അയാളുടെ പക്കൽ 30 മീ മുള്ളുകമ്പി മാത്രമുള്ളതിനാൽ വീടിന്റെ മതിൽ നാലാമത്തെ വശത്തിന്റെ വേലിയാക്കി കൊണ്ട് തോട്ടത്തിന്റെ മറ്റ് വശങ്ങൾ വേലി കെട്ടുന്നു. തോട്ടത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ കാണുക.
4. ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാടത്തിന്റെ നീളം 20 മീ വീതി 14 മീ ആകുന്നു. പാടത്തിനു ചുറ്റും തുല്യ വീതിയിൽ 111 ച.മീ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു പാതയുടെ വീതി കാണുക.
5. ഒരു ട്രെയിൻ ഒരു സ്ഥിരമായ വേഗതയിൽ 90 കി.മീ ദൂരം സഞ്ചരിക്കുന്നു. വേഗത മണിക്കൂറിന് 15 കി.മീ വർദ്ധിപ്പിച്ചാൽ യാത്രാസമയം 30 മിനിറ്റ് കുറയുമായിരുന്നു. ട്രെയിനിന്റെ യഥാർത്ഥ വേഗത കാണുക.
6. ഒഴുക്കില്ലാത്ത വെള്ളത്തിൽ ഒരു ബോട്ടിന്റെ വേഗത 15 കി.മീ/മണിക്കൂർ. ആണ്. അരുവിയിൽ ഒഴുക്കിനനുസരിച്ച് ബോട്ട് 30 കി.മീ പോയിട്ട് 4 മണിക്കൂർ 30 മിനിറ്റിൽ ആരംഭ സ്ഥാനത്ത് തിരിച്ചെത്തുന്നു. അരുവിയുടെ വേഗത കാണുക.
7. ഒരു വർഷം മുൻപ്, ഒരാളുടെ വയസ്സ് അയാളുടെ മകന്റെ വയസ്സിന്റെ 8 മടങ്ങാണ്. ഇപ്പോൾ അയാളുടെ വയസ്സ് മകന്റെ വയസ്സിന്റെ വർഗ്ഗത്തിന് തുല്യമാണ്. അവരുടെ ഇപ്പോഴുള്ള വയസ്സുകൾ കാണുക.
8. ഒരു ചെസ്സ് ബോർഡിൽ 64 തുല്യ സമചതുരങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഓരോ സമചതുരത്തിന്റേയും വിസ്തീർണ്ണം 6.25 ച.സെ.മീ. ബോർഡിനു ചുറ്റും 2 സെ.മീ വീതിയിൽ ഒരു അതിർത്തി ഉണ്ട്. ചെസ്സ് ബോർഡിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

9. ഒരു ജോലി ചെയ്തു തീർക്കുന്നതിന് Aയ്ക്ക് B യേക്കാൾ 6 ദിവസങ്ങൾ കുറച്ചാണ് മതിയാകും. A എടുക്കുന്നത്. A യും B യും ഒരുമിച്ച് 4 ദിവസങ്ങളിൽ പൂർത്തിയാക്കാൻ കഴിഞ്ഞാൽ ആ ജോലി B മാത്രം ചെയ്ത് പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന് എത്ര ദിവസങ്ങൾ വേണ്ടി വരും?

10. രണ്ട് ട്രെയിനുകൾ ഒരേ സമയം ഒരു റെയിൽവേ സ്റ്റേഷനിൽ നിന്ന് പുറപ്പെടുന്നു. ആദ്യത്തെ ട്രെയിൻ പടിഞ്ഞാറോട്ടും രണ്ടാമത്തേത് വടക്കോട്ടും സഞ്ചരിക്കുന്നു. ആദ്യത്തെ ട്രെയിൻ രണ്ടാമത്തെതിനേക്കാൾ കൂടുതൽ വേഗതയിലാണ് പോകുന്നത്. 2 മണിക്കൂർ കഴിയുമ്പോൾ അവ തമ്മിൽ 50 കി.മീ അകലത്തിൽ ആണെങ്കിൽ ഓരോ ട്രെയിനിന്റെയും ശരാശരി വേഗത കാണുക.

3.8.5 ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങളുടെ സ്വഭാവം

$ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ആകുന്നു.

(i) $b^2 - 4ac > 0$, എങ്കിൽ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത വാസ്തവിക മൂലങ്ങൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു.

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ , \ x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(ii) $b^2 - 4ac = 0$ എങ്കിൽ സമീകരണത്തിന് രണ്ട് തുല്യമൂലങ്ങൾ $x = \dfrac{-b}{2a}$ ഉണ്ട്.

(iii) $b^2 - 4ac < 0$ എങ്കിൽ $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ അല്ല. അതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന് വാസ്തവിക മൂലം ഇല്ല.

മൂലങ്ങളുടെ സ്വഭാവം $b^2 - 4ac$ യുടെ മൂല്യത്തെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. $ax^2 + bx + c = 0$ന്റെ മൂലങ്ങളുടെ സ്വഭാവം വിവേചിക്കുന്നത് $b^2 - 4ac$ യുടെ മൂല്യമാണ്. അതുകൊണ്ട് ഇതിനെ ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ വിവേചകം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $\triangle$ ചിഹ്നം കൊണ്ട് കുറിക്കുന്നു.

വിവേചകം $\triangle = b^2 - 4ac$	മൂലങ്ങളുടെ സ്വഭാവം
$\triangle > 0$	വാസ്തവികം, വ്യത്യസ്തം
$\triangle = 0$	വാസ്തവികം, തുല്യം
$\triangle < 0$	വാസ്തവിക മൂലങ്ങൾ ഇല്ല (സാങ്കൽപ്പിക മൂലങ്ങൾ)

ഉദാഹരണം 3.45

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ സ്വഭാവം നിർണ്ണയിക്കുക.

(i) $x^2 - 11x - 10 = 0$ (ii) $4x^2 - 28x + 49 = 0$ (iii) $2x^2 + 5x + 5 = 0$

നിർദ്ധാരണം $ax^2 + bx + c = 0$ന്റെ വിവേചകം $\triangle = b^2 - 4ac$.

(i) ഇവിടെ $a = 1; b = -11, c = -10$

വിവേചകം, $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (-11)^2 - 4(1)(-10) = 121 + 40 = 161$

$\triangle > 0$ ആയതിനാൽ മൂലങ്ങൾ വാസ്തവികവും വ്യത്യസ്തവുമാണ്.

(ii) ഇവിടെ $a = 4, b = -28, \quad c = 49$

വിവേചകം, $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (-28)^2 - 4(4)(49) = 0$

$\triangle = 0$ ആയതിനാൽ മൂലങ്ങൾ വാസ്തവികവും തുല്യവുമാണ്.

(iii) ഇവിടെ $a = 2, b = 5, c = 5$.

വിവേചകം, $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (5)^2 - 4(2)(5)$

$= 25 - 40 = -15$

$\triangle < 0$ ആയതിനാൽ, വാസ്തവിക മൂലങ്ങൾ ഇല്ല.

ഉദാഹരണം 3.46

$(a - b + c)x^2 + 2(a - b)x + (a - b - c) = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യ a, b യ്ക്കും, എല്ലാ പരിമേയ സംഖ്യ c യ്ക്കും പരിമേയ മൂലങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ രൂപം $Ax^2 + Bx + C = 0$.

$A = a - b + c,\ B = 2(a - b),\ C = a - b - c.$

വിവേചകം $Ax^2 + Bx + c = 0$ is

$$B^2 - 4AC = [2(a - b)]^2 - 4(a - b + c)(a - b - c)$$

$$= 4(a - b)^2 - 4[(a - b) + c][(a - b) - c]$$

$$= 4(a - b)^2 - 4[(a - b)^2 - c^2]$$

$\triangle = 4(a - b)^2 - 4(a - b)^2 + 4c^2 = 4c^2$ ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗം

$\therefore$ $\triangle > 0$ യും അത് ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗവുമാണ്.

$\therefore$ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ പരിമേയ സംഖ്യകളാണ്.

ഉദാഹരണം 3.47

$x^2 - 2x(1 + 3k) + 7(3 + 2k) = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് തുല്യ മൂലങ്ങളാണുള്ളത് എങ്കിൽ k യുടെ വില കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $x^2 - 2x(1 + 3k) + 7(3 + 2k) = 0$ തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യമാണ്. (1)

സമവാക്യം (1) $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന രൂപത്തിലാണ്.

ഇവിടെ, $a = 1,\ b = -2(3k + 1),\ c = 7(3 + 2k)$.

വിവേചകം $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (-2(3k + 1))^2 - 4(1)(7)(3 + 2k)$

$= 4(9k^2 + 6k + 1) - 28(3 + 2k) = 4(9k^2 - 8k - 20)$

സമീകരണത്തിന് തുല്യ മൂലങ്ങളുണ്ട് എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു. $\therefore$ $\triangle = 0$

$\Longrightarrow$ $9k^2 - 8k - 20 = 0$

$\Longrightarrow$ $(k - 2)(9k + 10) = 0$

$\therefore$ $k = 2, -\frac{10}{9}$.

അഭ്യാസം 3.17

1. മൂലങ്ങളുടെ സ്വഭാവം നിർണ്ണയിക്കുക

 (i) $x^2 - 8x + 12 = 0$ (ii) $2x^2 - 3x + 4 = 0$

 (iii) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ (iv) $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$

 (v) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$ (vi) $(x - 2a)(x - 2b) = 4ab$

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യങ്ങൾക്ക് മൂലങ്ങൾ തുല്യവും വാസ്തവികവും ആണെങ്കിൽ kയുടെ മൂല്യം കാണുക.

 (i) $2x^2 - 10x + k = 0$ (ii) $12x^2 + 4kx + 3 = 0$

 (iii) $x^2 + 2k(x - 2) + 5 = 0$ (iv) $(k + 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$

3. $x^2 + 2(a + b)x + 2(a^2 + b^2) = 0$ന്റെ മൂലങ്ങൾ വാസ്തവികമല്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക.

4. $3p^2x^2 - 2pqx + q^2 = 0$ന്റെ മൂലങ്ങൾ വാസ്തവികമല്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. $(a^2 + b^2)x^2 - 2(ac + bd)x + c^2 + d^2 = 0$, $ad - bc \neq 0$ന്റെ മൂലങ്ങൾ തുല്യമെങ്കിൽ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ എപ്പോഴും വാസ്തവികമാണ് എന്നാൽ തുല്യമല്ല $(a = b = c$ അല്ലാത്തപക്ഷം$)$ എന്ന് തെളിക്കുക.

7. $(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് മൂലങ്ങൾ തുല്യമെങ്കിൽ $c^2 = a^2(1 + m^2)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

3.8.6 ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങളും ഗുണാങ്കങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

$ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണം പരിഗണിക്കുക. a , b , c വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ $a \neq 0$ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ α, β എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

മൂലങ്ങളുടെ തുക $\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-x \text{ ന്റെ ഗുണോത്തരം}}{x^2 \text{ ന്റെ ഗുണോത്തരം}}$$

മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $\alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{സ്ഥിരാങ്കം}}{x^2 \text{ ന്റെ ഗുണോത്തരം}}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ യുടെ മൂലങ്ങൾ α, β എങ്കിൽ

(i) മൂലങ്ങളുടെ തുക $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

(ii) മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

മൂലങ്ങൾ തന്നാൽ ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ രൂപീകരണം

α, β എന്നിവ ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$(x-\alpha)$, $(x-\beta)$ എന്നിവ ഘടകങ്ങളാണ്.

$\therefore \quad (x-\alpha)(x-\beta) = 0$

$\Longrightarrow \quad x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

$x^2 -$ (മൂലങ്ങളുടെ തുക) $x +$ മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $= 0$

കുറിപ്പ്

ഒരേ മൂലങ്ങളുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം അനന്തമാണ്.

ഉദാഹരണം 3.48

$3x^2 - 10x + k = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ ഒരു മൂലം $\frac{1}{3}$ എങ്കിൽ മറ്റേ മൂലം കണ്ടുപിടിക്കുക. k യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യം $3x^2 - 10x + k = 0$.

α , β മൂലങ്ങൾ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$\therefore \quad \alpha + \beta = \frac{-(-10)}{3} = \frac{10}{3}$ (1)

$\alpha = \frac{1}{3}$ (1) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക $\Longrightarrow \beta = 3$

$\alpha\beta = \frac{k}{3}, \quad \Longrightarrow \quad k = 3$

അതിനാൽ മറ്റേ മൂലം $\beta = 3$ കൂടാതെ $k = 3$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.49

$ax^2 - 5x + c = 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങളുടെ തുകയും ഗുണനഫലവും *10* ആണെങ്കിൽ a , c എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണം $ax^2 - 5x + c = 0$.

മൂലങ്ങളുടെ തുക $\frac{5}{a} = 10, \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$

മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $\frac{c}{a} = 10$

$\Longrightarrow \quad c = 10a = 10 \times \frac{1}{2} = 5$

അതായത് $a = \frac{1}{2}$, $c = 5$

കുറിപ്പ്

$ax^2 + bx + c = 0$ യുടെ മൂലങ്ങൾ α , β എങ്കിൽ α, β എന്നിവയിലുള്ള $\alpha^2 + \beta^2,\ \alpha^2\beta^2,\ \alpha^2 - \beta^2$ എന്നീ വ്യംജകങ്ങളെ $\alpha + \beta,\ \alpha\beta$ എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കാം.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

α , β ഉൾപ്പെടുന്ന ചില ഫലങ്ങൾ

(i) $|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = [(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]$

(iii) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = (\alpha + \beta)[\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}\,]$ only if $\alpha \geq \beta$

(iv) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

(v) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

(vi) $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = [(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 - 2(\alpha\beta)^2$

(vii) $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2)$

ഉദാഹരണം 3.50

$2x^2 - 3x - 1 = 0$ യുടെ മൂലങ്ങൾ α, β എങ്കിൽ താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}$

(iii) $\alpha - \beta$ if $\alpha > \beta$ (iv) $\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta} + \dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)$

(v) $\left(\alpha + \dfrac{1}{\beta}\right)\left(\dfrac{1}{\alpha} + \beta\right)$ (vi) $\alpha^4 + \beta^4$ (vii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta} + \dfrac{\beta^3}{\alpha}$

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യം $2x^2 - 3x - 1 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ രീതിയിൽ തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തിൽ എഴുതിയാൽ

$a = 2,\ b = -3,\ c = -1$. α , β തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\therefore\ \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}\ ,\quad \alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

(i) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{9}{4} + 1 = \dfrac{13}{4}$

(ii) $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \dfrac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{13}{4} \times (-2) = -\dfrac{13}{2}$

(iii) $\alpha - \beta = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$

$$= \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4} + 2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

(iv) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{\frac{27}{8}+\frac{9}{4}}{\frac{-1}{2}}=-\frac{45}{4}$

(v) $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\beta\right)=\frac{(\alpha\beta+1)(1+\alpha\beta)}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(1+\alpha\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

(vi) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

$$=\left(\frac{13}{4}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{169}{16}-\frac{1}{2}\right)=\frac{161}{16}.$$

(vii) $\frac{\alpha^3}{\beta}+\frac{\beta^3}{\alpha}=\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha\beta}=\left(\frac{161}{16}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)=-\frac{161}{8}.$

ഉദാഹരണം 3.51

$7+\sqrt{3}$, $7-\sqrt{3}$ എന്നീ മൂലങ്ങളുള്ള സമവാക്യം രൂപീകരിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള മൂലങ്ങൾ $7+\sqrt{3}$, $7-\sqrt{3}$.

$\therefore$ മൂലങ്ങളുടെ തുക $=7+\sqrt{3}+7-\sqrt{3}=14.$

മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $=(7+\sqrt{3})(7-\sqrt{3})=(7)^2-(\sqrt{3})^2=49-3=46.$

ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം x^2 - (മൂലങ്ങളുടെ തുക) x + (മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം) $=0$

ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം = $x^2-14x+46=0$

ഉദാഹരണം 3.52

α,β മൂലങ്ങളായിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണം

$3x^2-4x+1=0$,എങ്കിൽ $\frac{\alpha^2}{\beta}$, $\frac{\beta^2}{\alpha}$ എന്നീ മൂലങ്ങളുടെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം α,β മൂലങ്ങളായിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണം $3x^2-4x+1=0$ ൽ നിന്ന്

$$\alpha+\beta=\frac{4}{3},\qquad \alpha\beta=\frac{1}{3}$$

ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങളുടെ തുക $=\left(\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}\right)=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3-3\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{28}{9}$$

മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $=\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)=\alpha\beta=\frac{1}{3}$

$\therefore$ ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം $x^2-\frac{28}{9}x+\frac{1}{3}=0$ അല്ലെങ്കിൽ $9x^2-28x+3=0$

അഭ്യാസം 3.18

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളുടെ മൂലങ്ങളുടെ തുകയും ഗുണനഫലവും കാണുക.

   (i) $x^2 - 6x + 5 = 0$ (ii) $kx^2 + rx + pk = 0$

   (iii) $3x^2 - 5x = 0$ (iv) $8x^2 - 25 = 0$

2. താഴെ തന്ന മൂലങ്ങളുള്ള സമീകരണം രൂപീകരിക്കുക

   (i) 3 , 4 (ii) $3 + \sqrt{7}, 3 - \sqrt{7}$ (iii) $\frac{4 + \sqrt{7}}{2}, \frac{4 - \sqrt{7}}{2}$

3. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ α , β എങ്കിൽ താഴെ തന്നവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക

   (i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\alpha - \beta$ (iii) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$

4. $3x^2 - 6x + 4 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ α, β എങ്കിൽ $\alpha^2 + \beta^2$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

5. $2x^2 - 3x - 5 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ α, β എങ്കിൽ α^2, β^2 മൂലങ്ങളുള്ള സമീകരണം രൂപീകരിക്കുക.

6. $x^2 - 3x + 2 = 0$എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ α, β എങ്കിൽ $-\alpha$, $-\beta$ മൂലങ്ങളുള്ള സമീകരണം രൂപീകരിക്കുക.

7. $x^2 - 3x - 1 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ α, β എങ്കിൽ $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\beta^2}$ മൂലങ്ങളുള്ള സമീകരണം രൂപീകരിക്കുക.

8. $3x^2 - 6x + 1 = 0$എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ α, β എങ്കിൽ താഴെ തന്ന മൂലങ്ങളുള്ള സമീകരണം രൂപീകരിക്കുക.

   (i) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (ii) $\alpha^2\beta,\ \beta^2\alpha$ (iii) $2\alpha + \beta,\ 2\beta + \alpha$

9. $4x^2 - 3x - 1 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങളുടെ വ്യുൽക്രമ മൂലങ്ങളുള്ള സമീകരണം രൂപീകരിക്കുക.

10. $3x^2 + kx - 81 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ ഒരു മൂലത്തിന്റെ വർഗ്ഗമാണ് മറ്റേ മൂലമെങ്കിൽ k യുടെ മൂല്യം കാണുക.

11. $2x^2 - ax + 64 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ ഒരു മൂലത്തിന്റെ 2 മടങ്ങാണ് മറ്റേ മൂലമെങ്കിൽ a യുടെ മൂല്യം കാണുക.

12. $5x^2 - px + 1 = 0,\ \alpha - \beta = 1,$ എന്നീ സമീകരണങ്ങളുടെ മൂലങ്ങൾ α, β എങ്കിൽ p കാണുക.

അഭ്യാസം 3.19

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക്കുക

1. $6x - 2y = 3,\ kx - y = 2$എന്ന സമ്പ്രദായത്തിനു ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണമേയുള്ളൂ എങ്കിൽ

   (A) $k = 3$ (B) $k \neq 3$ (C) $k = 4$ (D) $k \neq 4$

2. രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രണ്ട് രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ അസ്ഥിരമെങ്കിൽ അവയുടെ ഗ്രാഫ്

   (A) യോജിക്കുന്നു (B) ഒരു ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു

   (C) ഒരു ബിന്ദുവിലും സന്ധിക്കുന്നില്ല (D) x-അക്ഷത്തിൽ പ്രതിഛേദിക്കുന്നു

3. $x - 4y = 8$, $3x - 12y = 24$ എന്ന സമ്പ്രദായങ്ങൾക്ക്

   (A) അനേകം നിർദ്ധാരണങ്ങൾ (B) നിർദ്ധാരണം ഇല്ല

   (C) ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം (D) നിർദ്ധാരണം ഉണ്ടായിരിക്കുകയോ ഇല്ലാതിരിക്കുകയോ

4. ബഹുപദ വ്യംജകം $p(x) = (k+4)x^2+13x+3$ യുടെ ഒരു മൂലത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമമാണ് മറ്റേ മൂലം എങ്കിൽ k യുടെ മൂല്യം

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

5. $f(x) = 2x^2 + (p+3)x + 5$ എന്ന ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ മൂലങ്ങളുടെ തുക 0 ആണെങ്കിൽ p യുടെ മൂല്യം

(A) 3 (B) 4 (C) –3 (D) –4

6. $x^2 - 2x + 7$ നെ $x+4$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം

(A) 28 (B) 29 (C) 30 (D) 31

7. $x^3 - 5x^2 + 7x - 4$ നെ $x-1$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഹരണഫലം

(A) $x^2 + 4x + 3$ (B) $x^2 - 4x + 3$ (C) $x^2 - 4x - 3$ (D) $x^2 + 4x - 3$

8. $(x^3 + 1)$, $x^4 - 1$ ന്റെ ഉ.സാ.ഭാ

(A) $x^3 - 1$ (B) $x^3 + 1$ (C) $x + 1$ (D) $x - 1$

9. $x^2 - 2xy + y^2$, $x^4 - y^4$ ന്റെ ഉ.സാ.ഭാ

(A) 1 (B) $x+y$ (C) $x-y$ (D) $x^2 - y^2$

10. $x^3 - a^3$, $(x - a)^2$ ന്റെ ല.സാ.ഗു

(A) $(x^3 - a^3)(x + a)$ (B) $(x^3 - a^3)(x - a)^2$

(C) $(x - a)^2(x^2 + ax + a^2)$ (D) $(x + a)^2(x^2 + ax + a^2)$

11. a^k, a^{k+3}, a^{k+5} $(k \in \mathbb{N})$ ഇവയുടെ ല.സാ.ഗു

(A) a^{k+9} (B) a^k (C) a^{k+6} (D) a^{k+5}

12. $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 6}$ എന്ന പരിമേയ വ്യംജകത്തിന്റെ ഏറ്റവും ലഘുവായ രൂപം

(A) $\dfrac{x-3}{x+3}$ (B) $\dfrac{x+3}{x-3}$ (C) $\dfrac{x+2}{x-3}$ (D) $\dfrac{x-3}{x+2}$

13. $\dfrac{a+b}{a-b}$, $\dfrac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$ എന്നിവ രണ്ട് പരിമേയ വ്യംജകങ്ങളാണ് എങ്കിൽ അവയുടെ ഗുണനഫലം

(A) $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$ (B) $\dfrac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$ (C) $\dfrac{a^2 - ab - b^2}{a^2 + ab + b^2}$ (D) $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab - b^2}$

14. $\dfrac{x^2 - 25}{x + 3}$ by $\dfrac{x+5}{x^2 - 9}$ =

(A) $(x-5)(x-3)$ (B) $(x-5)(x+3)$ (C) $(x+5)(x-3)$ (D) $(x+5)(x+3)$

15. $\dfrac{a^3}{a-b} + \dfrac{b^3}{b-a}$ എങ്കിൽ പുതിയ വ്യംജകം

(A) $a^2 + ab + b^2$ (B) $a^2 - ab + b^2$ (C) $a^3 + b^3$ (D) $a^3 - b^3$

16. $49(x^2 - 2xy + y^2)^2$ ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം

(A) $7|x - y|$ (B) $7(x + y)(x - y)$ (C) $7(x + y)^2$ (D) $7(x - y)^2$

17. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$ ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം

(A) $|x + y - z|$ (B) $|x - y + z|$ (C) $|x + y + z|$ (D) $|x - y - z|$

18. $21x^4y^8z^6(l-m)^2$ ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം

(A) $11x^2y^4z^4|l-m|$ (B) $11x^4y^4|z^3(l-m)|$

(C) $11x^2y^4z^6|l-m|$ (D) $11x^2y^4|z^3(l-m)|$

19. $ax^2+bx+c=0$ ന് തുല്യ മൂലങ്ങളാണ് എങ്കിൽ c യുടെ വില

(A) $\frac{b^2}{2a}$ (B) $\frac{b^2}{4a}$ (C) $-\frac{b^2}{2a}$ (D) $-\frac{b^2}{4a}$

20. $x^2+5kx+16=0$ ന് വാസ്തവിക മൂലങ്ങൾ ഇല്ല, എങ്കിൽ

(A) $k>\frac{8}{5}$ (B) $k>-\frac{8}{5}$ (C) $-\frac{8}{5}<k<\frac{8}{5}$ (D) $0<k<\frac{8}{5}$

21. ഒരു മൂലം $3+2\sqrt{3}$ വരുന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണം

(A) $x^2-6x-5=0$ (B) $x^2+6x-5=0$

(C) $x^2-5x-6=0$ (D) $x^2-5x+6=0$

22. $x^2-bx+c=0$, $x^2+bx-a=0$ എന്നിവയുടെ പൊതുവായ മൂലം

(A) $\frac{c+a}{2b}$ (B) $\frac{c-a}{2b}$ (C) $\frac{c+b}{2a}$ (D) $\frac{a+b}{2c}$

23. α,β മൂലങ്ങളുള്ള സമീകരണം $ax^2+bx+c=0$ $a\neq 0$, എങ്കിൽ തെറ്റായ മൂല്യം

(A) $\alpha^2+\beta^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$ (B) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

(C) $\alpha+\beta=\frac{b}{a}$ (D) $\alpha-\beta=\frac{b^2-4ac}{a}$

24. $ax^2+bx+c=0$ യുടെ മൂലങ്ങൾ α,β എങ്കിൽ $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ മൂലങ്ങളുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണം

(A) $ax^2+bx+c=0$ (B) $bx^2+ax+c=0$

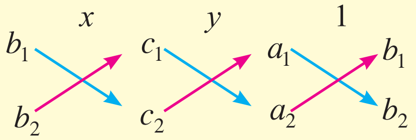
(C) $cx^2+bx+a=0$ (D) $cx^2+ax+b=0$

25. $b=a+c$ എങ്കിൽ, സമീകരണം $ax^2+bx+c=0$ ന്

(A) വാസ്തവിക മൂല്യം (B) മൂലങ്ങൾ ഇല്ല (C) സമമൂലങ്ങൾ (D) വാസ്തവിക മൂലമല്ല

ഓർമ്മിക്കേണ്ടവ

- x, y എന്നീ രണ്ട് ചരങ്ങളിലുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ പരിമിത ഗണത്തെ x, y ചരങ്ങളിലുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ സമ്പ്രദായം എന്നു പറയുന്നു. ഈ സമീകരണങ്ങളുടെ സമ്പ്രദായത്തെ **ഏകകാല സമീകരണങ്ങൾ** എന്നു പറയുന്നു.
- ഒരു സമ്പ്രദായത്തിൽ ചരങ്ങളിൽ ഒന്നിനെ ആദ്യം ഒഴിവാക്കി നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്ന രീതിയെ **ഒഴിവാക്കൽ രീതി** എന്നു പറയുന്നു.
- $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ എന്ന രേഖീയ സമീകരണത്തെ **വജ്ര ഗുണന രീതി**യിൽ നിർദ്ധാരണം കാണുന്നതിന് താഴെ കാണുന്ന അമ്പടയാള ചിത്രം വളരെയധികം ഉപകരിക്കുന്നു.



- $p(k)=0$ എങ്കിൽ $p(x)$ എന്ന ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന് വാസ്തവിക സംഖ്യ k ഒരു **പൂജ്യ**മാകുന്നു.

- ഒരു ദ്വിഘാത ബഹുപദ വ്യംജകം $ax^2 + bx + c = 0$ യുടെ പൂജ്യങ്ങൾക്കും ഗുണാങ്കങ്ങൾക്കും തമ്മിലുള്ള അടിസ്ഥാന ബന്ധം

$$\text{പൂജ്യങ്ങളുടെ തുക} = -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ ന്റെ ഗുണോത്തരം}}{x^2 \text{ ന്റെ ഗുണോത്തരം}}$$

$$\text{പൂജ്യങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം} = \frac{c}{a} = \frac{\text{സ്ഥിരാങ്കം}}{x^2 \text{ ന്റെ ഗുണോത്തരം}}$$

- (i) ഏതെങ്കിലും ബഹുപദ വ്യംജകം $p(x)$ന് $x = a$ ഒരു പൂജ്യം $\Leftrightarrow p(a) = 0$.

  (ii) $p(x)$ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ് $x - a \Leftrightarrow p(a) = 0$.

- രണ്ടോ അതിലധികമോ ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭാ. എന്നത് ഓരോ വ്യംജകത്തേയും നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന ഏറ്റവും കൂടിയ ഘാതമുള്ള പൊതു ഘടകമാണ്.

- രണ്ടോ അതിലധികമോ ബഹുപദങ്ങളുടെ ലഘുതമ സാധാരണ ഗുണിതം എന്നത് ഓരോ വ്യംജകത്തേയും നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ഘാതമുള്ള ബഹുപദമാണ്.

- രണ്ട് ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം അവയുടെ ല.സാ.ഗു, ഉ.സാ.ഭാ എന്നിവ തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലത്തിനു തുല്യമാണ്.

- $a \in \mathbb{R}$ ഒരു ഋണമല്ലാത്ത വാസ്തവിക സംഖ്യ എന്നിരിക്കട്ടെ. a യുടെ വർഗ്ഗമൂലം $b^2 = a$ എന്നവിധത്തിലുള്ള വാസ്തവിക സംഖ്യ ആകുന്നു. a യുടെ ധനവർഗ്ഗ മൂലത്തെ $\sqrt[2]{a}$ അഥവാ $\sqrt{a}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

- $ax^2 + bx + c = 0,\ a,b,c,\ a \neq 0$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സമവാക്യത്തെ ചരം x ൽ ഉള്ള ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണം എന്നു പറയുന്നു.

- ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തെ (i) ഘടകമാക്കൽ രീതി (ii) പൂർണ്ണവർഗ്ഗമാക്കൽരീതി (iii) ദ്വിഘാത സൂത്രം എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാവുന്നതാണ്.

- $b^2 - 4ac \geq 0$ എങ്കിൽ ദ്വിഘാത സമീകരണം $ax^2 + bx + c = 0$ യുടെ മൂലങ്ങൾ $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണം $ax^2 + bx + c = 0$ ന്

  (i) $b^2 - 4ac > 0$ എങ്കിൽ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത വാസ്തവിക മൂലങ്ങൾ

  (ii) $b^2 - 4ac = 0$ എങ്കിൽ രണ്ട് തുല്യ മൂലങ്ങൾ

  (iii) $b^2 - 4ac < 0$ എങ്കിൽ വാസ്തവിക മൂലങ്ങൾ ഇല്ല.

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

ഫെർമാറ്റിന്റെ അവസാനത്തെ സിദ്ധാന്തം : $x^n + y^n = z^n$ എന്ന വ്യംജകത്തിന് $n > 2$ ആകുമ്പോൾ വാസ്തവിക സംഖ്യകളിൽ നിർദ്ധാരണം ഇല്ല. "സത്യത്തിൽ ഏറ്റവും ശ്രേഷ്ഠമായ തെളിവിനെ ഞാൻ കണ്ടുപിടിച്ചു. എന്നാൽ തെളിവിനെ പൂർണ്ണമായി എഴുതാൻ ഈ പേപ്പറിൽ സ്ഥലമില്ല, വളരെ ചെറിയ ഭാഗമേ ഉള്ളൂ" എന്ന് ഫെർമാറ്റ് എഴുതി. 1994 ൽ ബ്രിട്ടീഷ് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ ആൻഡ്രൂ വൈൽസ് ഇതിന് നിർദ്ധാരണം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതുവരെ 300 വർഷങ്ങളായി ഈ സിദ്ധാന്തത്തിനു നിർദ്ധാരണം കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിച്ചില്ല. ഹൈസ്ക്കൂൾ വിദ്യാർത്ഥിയായിരിക്കുമ്പോൾ, നഗരത്തിലെ വായനശാലയിൽ നിന്ന് ഈ പ്രശ്നത്തെ ആൻഡ്രൂ വൈൽസ് അറിഞ്ഞു എന്നത് രസകരമായ വസ്തുതയാണ്.

4

മാട്രിക്സുകൾ

Number, place, and combination - the three intersecting but distinct spheres of thought to which all mathematical ideas admit of being referred - Sylvester

- മുഖവുര
- മാട്രിക്സുകളുടെ രൂപീകരണം
- മാട്രിക്സുകളുടെ തരങ്ങൾ
- മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം
- മാട്രിക്സ് സമീകരണങ്ങൾ

ജെയിംസ് ജോസഫ് സിൽവസ്റ്റർ

(1814-1897)

ഇംഗ്ലണ്ട്

ജെയിംസ് ജോസഫ് സിൽവസ്റ്റർ മാട്രിക്സ് സിദ്ധാന്തം, അചരസിദ്ധാന്തം, സംഖ്യാ സിദ്ധാന്തം, സഞ്ചയശാസ്ത്രം എന്നിവയ്ക്ക് അടിസ്ഥാനപരമായ സംഭാവനകൾ നൽകിയിട്ടുണ്ട്. തന്നിട്ടുള്ള ഒരു മാട്രിക്സിനു പകരം നിൽക്കുന്ന എല്ലാ മാട്രിക്സുകളേയും അദ്ദേഹം നിർണ്ണയിച്ചു. വിവേചകം *(discriminant)* ഉൾപ്പെടെയുള്ള ധാരാളം ഗണിത പദങ്ങൾ അദ്ദേഹം പരിചയപ്പെടുത്തി.

1880-ൽ ലണ്ടനിലെ റോയൽ സൊസൈറ്റി ശാസ്ത്രീയ നേട്ടങ്ങൾക്കുള്ള പാരിതോഷികമായ കോപ്ലിമെഡൽ സിൽവസ്റ്ററിന് സമ്മാനിച്ചു. അദ്ദേഹത്തിന്റെ ഓർമ്മയ്ക്കായി ഗണിത ഗവേഷണങ്ങളെ പ്രോത്സാഹിപ്പിക്കുന്നതിനു വേണ്ടി 1901 ൽ ലണ്ടനിലെ റോയൽ സൊസൈറ്റി സിവൽവസ്റ്റർ പാരിതോഷികം ഏർപ്പെടുത്തി.

4.1 മുഖവുര

ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ ഗണിതത്തിന്റെ പ്രധാന വിഷയമായ മാട്രിക്സിനെക്കുറിച്ചാണ് നാം ചർച്ച ചെയ്യാൻ പോകുന്നത്. ഇവിടെ മാട്രിക്സുകളെ പരിചയപ്പെടുത്തി അവയുടെ ബീജഗണിത അടിസ്ഥാനങ്ങളെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാം.

മാട്രിക്സുകൾ എന്നത് ഒരു ആശയമായി സൂത്രവത്കരിച്ചതും വികസിപ്പിച്ചതും 18 ഉം 19 ഉം നൂറ്റാണ്ടുകളിലാണ്. ആരംഭഘട്ടത്തിൽ ജ്യാമിതീയ വസ്തുക്കളുടെ രൂപാന്തരത്തിൽ നിന്നും രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണത്തിൽ നിന്നും ഇതിന്റെ വികസനം നടന്നിരുന്നു. എങ്ങനെയായാലും മാട്രിക്സ് എന്നത് നിലവിലുള്ളതിൽ വച്ച് ഗണിതത്തിന്റെ ഏറ്റവും ശക്തിയേറിയ ഉപകരണങ്ങളിലൊന്നാണ്. മാട്രിക്സ് വളരെ ഉപയോഗപ്രദമാണ്. എന്തെന്നാൽ, അവ ധാരാളം സംഖ്യകളുടെ ക്രമീകണത്തെ ഒരൊറ്റ വസ്തുവായി പരിഗണിക്കുന്നതിനും ഇതിന്റെ ചിഹ്നങ്ങളുപയോഗിച്ച് വളരെ ഒതുങ്ങിയ രൂപത്തിൽ കണക്കുകൂട്ടലുകൾ ചെയ്യുന്നതിനും നമ്മെ പ്രാപ്തരാക്കുന്നു. ഇപ്രകാരം ലഭിച്ച ഗണിത സങ്കോചം വളരെ സുഭഗവും ശക്തിയേറിയതും കൂടാതെ വിവിധതരം പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് അനുയോജ്യമായതുമാണ്.

മാട്രിക്സ് എന്ന പദം ചില ക്രമീകരണങ്ങൾക്കുവേണ്ടി ജെയിംസ് ജോസഫ് സിൽവസ്റ്റർ 1850 ലാണ് പരിചയപ്പെടുത്തിയത്. മാട്രിക്സ് എന്നത് ഉത്ഭവസ്ഥാനം എന്നർത്ഥമാക്കുന്ന ലാറ്റിൻപദമാണ്. ഇംഗ്ലീഷിലും ഇതേ അർത്ഥത്തിലാണ് പ്രചാരത്തിലിരിക്കുന്നത്. ഇതിനെ പൊതുവായി ചിലതിന്റെ ഉത്ഭവസ്ഥാനം അല്ലെങ്കിൽ നിർമ്മിക്കപ്പെട്ടസ്ഥാനം എന്നും അർത്ഥമാക്കുന്നുണ്ട്.

ഇപ്പോൾ നമുക്ക് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന x, y യുടെ രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളെ പരിഗണിക്കാം.

$$3x - 2y = 4 \qquad (1)$$

$$2x + 5y = 9 \qquad (2)$$

ഒഴിവാക്കൽ രീതി (Gaussian ഒഴിവാക്കൽ രീതി) അനുസരിച്ച് ഈ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം (2, 1) എങ്ങനെയാണ് ലഭിക്കുന്നത് എന്ന് നമുക്ക് നേരത്തെ അറിയാം. ഈ ഒഴിവാക്കൽ രീതിയിൽ ചരങ്ങളെ ഉപയോഗിക്കാതെ ഗുണാങ്കങ്ങളെ മാത്രം ഉപയോഗിക്കുന്നു. മാട്രിക്സ് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് അനായാസമായി ഇതേ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാവുന്നതാണ്.

4.2 മാട്രിക്സുകളുടെ രൂപീകരണം

മാട്രിക്സുകളുടെ ആവിർഭാവത്തിന്റെ വഴികൾക്കുള്ള ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം.

കുമാറിന് 10 പേനകൾ ഉണ്ടായിരുന്നു. ഇതിനെ നമുക്ക് (10) എന്ന് എഴുതാം. ( ) നുള്ളിലുള്ള സംഖ്യ കുമാറിന്റെ കൈയിലുണ്ടായിരുന്ന പേനകളുടെ എണ്ണമാണ്.

ഇപ്പോൾ കുമാറിന്റെ കയ്യിൽ 10 പേനകളും 7 പെൻസിലുകളും ഉണ്ടെങ്കിൽ അതിന് (10,7) എന്ന് എഴുതാം. ഇതിൽ നിന്നും ( ) ൽ ആദ്യത്തെ അക്കം പേനകളുടെ എണ്ണവും, മറ്റേത് പെൻസിലുകളുടെ എണ്ണവും കുറിക്കുന്നു.

ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കുക. കുമാറിനും അവന്റെ സഹപാഠികളായ രാജുവിനും ഗോപുവിനും ഉള്ള പേനകളുടേയും പെൻസിലുകളുടേയും എണ്ണം താഴെ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

കുമാറിന് 10 പേനകൾ 7 പെൻസിലുകൾ രാജുവിന് 8 പേനകൾ 4 പെൻസിലുകൾ ഗോപുവിന് 6 പേനകൾ 5 പെൻസിലുകൾ ഉണ്ട്. നമുക്ക് ഇതിനെ ഒരു പട്ടികാരൂപത്തിൽ ക്രമീകരിക്കാം.

	പേനകൾ	പെൻസിലുകൾ
കുമാർ	10	7
രാജു	8	4
ഗോപു	6	5

പട്ടികയിൽ ഉൾപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ള ഓരോവിവരങ്ങളും അതാത് സാധനങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ കുറിക്കുന്നു. ഇതിനെ ഒരു ദീർഘചതുരാകൃതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം.

$$\text{(i)} \quad \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ഒന്നാമത്തെ വരി} \\ \leftarrow \text{രണ്ടാമത്തെ വരി} \\ \leftarrow \text{മൂന്നാമത്തെ വരി} \end{matrix}$$

↑ ഒന്നാമത്തെ നിര ↑ രണ്ടാമത്തെ നിര

ഇതേ വിവരങ്ങളെ പട്ടികയിൽ മറ്റൊരു രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം :

	കുമാർ	രാജു	ഗോപു
പേനകൾ	10	8	6
പെൻസിലുകൾ	7	4	5

ഇതിനെ ഒരു ദീർഘചതുരാകൃതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം.

$$\text{(ii)} \quad \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ഒന്നാമത്തെ വരി} \\ \leftarrow \text{രണ്ടാമത്തെ വരി} \end{matrix}$$

↑ ഒന്നാമത്തെ നിര ↑ രണ്ടാമത്തെ നിര ↑ മൂന്നാമത്തെ നിര

ക്രമീകരണം (i) ൽ ഒന്നാമത്തെ നിരയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് യഥാക്രമം കുമാറിന്റേയും, രാജുവിന്റേയും, ഗോപുവിന്റേയും കൈയിലുള്ള പേനകളുടെ എണ്ണമാണ്. രണ്ടാമത്തെ നിര സൂചിപ്പിക്കുന്നത് യഥാക്രമം കുമാറിന്റേയും രാജുവിന്റേയും ഗോപുവിന്റേയും കൈയിലുള്ള പെൻസിലുകളുടെ എണ്ണമാണ്.

ക്രമീകരണം (ii) ൽ ഒന്നാമത്തെ വരിയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് യഥാക്രമം കുമാറിന്റേയും, രാജുവിന്റേയും, ഗോപുവിന്റേയും കൈയിലുള്ള പേനകളുടെ എണ്ണമാണ്. രണ്ടാമത്തെ വരിയിൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് യഥാക്രമം കുമാറിന്റേയും രാജുവിന്റേയും ഗോപുവിന്റേയും കൈയിലുള്ള പെൻസിലുകളുടെ എണ്ണമാണ്.

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രീതിയിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ക്രമീകരണത്തെ ഒരു മാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു.

നിർവ്വചനം

ബ്രാക്കറ്റിനുള്ളിൽ സംഖ്യകളെ വരിയായും നിരയായും എഴുതുന്ന ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ക്രമീകരണമാണ് ഒരു മാട്രിക്സ്

സാധാരണയായി ഒരു മാട്രിക്സിനെ A, B, X, Y ..... എന്നിവപോലുള്ള വലിയ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. മാട്രിക്സിലെ സംഖ്യകളെ മാട്രിക്സിന്റെ അംഗങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. മാട്രിക്സിലെ ഓരോ തിരശ്ചീന ക്രമീകരണത്തെ മാട്രിക്സിന്റെ വരി എന്നും, ഓരോ ലംബക്രമീകരണത്തെ മാട്രിക്സിന്റെ നിര എന്നും പറയുന്നു.

മാട്രിക്സുകളുടെ ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & 9 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.2.1 മാക്ട്രിസിന്റെ പൊതുരൂപം

m വരികളും n നിരകളും ഉള്ള A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ പൊതുരൂപം

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ഇവിടെ $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$ എന്നിവ മാട്രിക്സിലെ അംഗങ്ങളാണ്. മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന മാട്രിക്സിനെ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ അല്ലെങ്കിൽ $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$. കൂടാതെ $j = 1, 2, 3, \ldots, n$. എന്നും എഴുതാവുന്നതാണ്. ഇവിടെ a_{ij} എന്നത് i വരിയും j നിരയും സംഗമിക്കുന്നിടത്ത് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന A മാട്രിക്സിലെ അംഗമാണ്.

ഉദാഹരണമായി , $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, എങ്കിൽ $a_{23} = 1$, എന്നത് രണ്ടാമത്തെ വരിയിൽ മൂന്നാമത്തെ നിരയിലെ അംഗമാണ്.

അതുപോലെ, $a_{11} = 4, a_{12} = 5, a_{13} = 3, a_{21} = 6, a_{22} = 2, a_{31} = 7, a_{32} = 8, a_{33} = 9.$

4.2.2 മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം അല്ലെങ്കിൽ മാനം

ഒരു മാട്രിക്സ് A യ്ക്ക് m വരികളും n നിരകളും ഉണ്ട്. A യുടെ ക്രമം m x n എന്ന് പറയാം (ഇതിനെ m ബൈ n എന്ന് വായിക്കാം)

ഉദാഹരണമായി, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സിന് 2 വരികളും 3 നിരകളും ഉണ്ട്. A യുടെ ക്രമം 2x3 ആകുന്നു.

കുറിപ്പ്

$m \times n$ മാട്രിക്സിൽ ആദ്യത്തെ അക്ഷരം m എല്ലായ്പോഴും വരിയുടെ എണ്ണത്തേയും രണ്ടാമത്തെ അക്ഷരം n എല്ലായ്പോഴും നിരയുടെ എണ്ണത്തേയും കുറിക്കുന്നു.

4.3 മാട്രിക്സുകളുടെ തരങ്ങൾ

വിവിധതരം മാട്രിക്സുകളെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് പഠിക്കാം.

(i) വരി മാട്രിക്സ്

ഒരു വരി മാത്രം ഉള്ള മാട്രിക്സിനെ വരി മാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു. ഒരു വരി മാട്രിക്സിനെ വരി വെക്ടർ എന്നും പറയാം.

ഉദാഹരണായി, $A = (5 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 1)$, $B = (-3 \;\; 0 \;\; 5)$ എന്നിവ യഥാക്രമം 1×4 , 1×3 ക്രമം ഉള്ളവയാണ്.

പൊതുവായി, $A = (a_{ij})_{1 \times n}$, $1 \times n$ ക്രമം ഉള്ള ഒരു വരിമാട്രിക്സ് ആകുന്നു.

(ii) നിര മാട്രിക്സ്

ഒരു നിര മാത്രമുള്ള മാട്രിക്സിനെ നിരമാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ നിര വെക്ടർ എന്നും പറയാം.

ഉദാഹരണമായി, $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ എന്നിവ യഥാക്രമം 2×1 , 3×1 ക്രമമുള്ള നിരമാട്രിക്സുകളാണ്.

പൊതുവായി, $A = [a_{ij}]_{m \times 1}$, $m \times 1$ ക്രമം ഉള്ള ഒരു നിരമാട്രിക്സ് ആകുന്നു.

(iii) സമചതുര മാട്രിക്സ്

ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ വരികളുടെ എണ്ണവും നിരകളുടെ എണ്ണവും സമമായാൽ അതിനെ സമചതുരമാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -7 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ എന്നിവ യഥാക്രമം ക്രമം 2, 3 ഉള്ള സമചതുര മാട്രക്സുകളാണ്.

പൊതുവായി, $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ എന്നത് ക്രമം m ഉള്ള ഒരു സമചതുരമാട്രിക്സ് ആകുന്നു.

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{mm}$ എന്നിവയെ സമചതുര മാട്രിക്സ് A യെ പ്രധാന അല്ലെങ്കിൽ നയിക്കുന്ന വികർണ്ണ അംഗങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

(iv) വികർണ്ണ മാട്രിക്സ്

ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിലെ പ്രധാന വികർണ്ണത്തിന് മുകളിലും താഴെയും ഉള്ള എല്ലാ അംഗങ്ങളും പൂജ്യം ആയാൽ ആ മാട്രിക്സിനെ വികർണ്ണ മാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ എന്നിവ യഥ്രാക്രമം 2,3 ക്രമം ഉള്ള വികർണ്ണ മാട്രിക്സുകളാണ്.

പൊതുവായി, $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ ൽ $a_{ij}=0$, എല്ലാ i # j എങ്കിൽ A യെ വികർണ്ണമാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു.

കുറിപ്പ്

ഒരു വികർണ്ണമാട്രിക്സിലെ പ്രധാന വികർണ്ണ അംഗങ്ങളിൽ ചിലത് പൂജ്യം ആകാം.

(v) അദിശ മാട്രിക്സ്

ഒരു വികർണ്ണ മാട്രിക്സിൽ പ്രധാന വികർണ്ണ അംഗങ്ങൾ പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യക്ക് തുല്യമായിരുന്നാൽ ആ മാട്രിക്സിനെ അദിശമാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ എന്നിവ യഥാക്രമം 2,3 ക്രമം ഉള്ള അദിശ മാട്രിക്സുകളാണ്.

പൊതുവായി, $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ k, & i = j \end{cases}$ k ഒരു അദിശം. അതായത് k ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ. എങ്കിൽ മാട്രിക്സ് $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ ഒരു അദിശമാട്രിക്സ് ആകുന്നു.

(vi) അനന്യ മാട്രിക്സ്

ഒരു വികർണ്ണ മാട്രിക്സിൽ എല്ലാ പ്രധാന വികർണ്ണ അംഗങ്ങളും 1 ആയാൽ അതിനെ അനന്യ മാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു. ക്രമം n ഉള്ള ഒരു അനന്യ മാട്രിക്സിനെ I_n എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ എന്നിവ യഥാക്രമം 2,3 ക്രമമുള്ള അനന്യമാട്രിക്സുകളാണ്.

പൊതുവായി, $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ എങ്കിൽ സമചതുര മാട്രിക്സ് $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ഒരു അനന്യമാട്രിക്സ് ആണ്.

കുറിപ്പ്

ഗുണനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഒരു അനന്യ മാട്രിക്സിനെ ഐഡന്റിറ്റി മാട്രിക്സ് എന്നും പറയുന്നു. എല്ലാ അനന്യമാട്രിക്സും ഒരു അദിശ മാട്രിക്സ് എന്നത് വ്യക്തമാണ്. എന്നാൽ അദിശ മാട്രിക്സ് ഒരു അനന്യ മാട്രിക്സ് ആകണമെന്നില്ല. സംഖ്യകളിൽ 1 ന്റെ പ്രവർത്തനം പോലെയാണ് മാട്രിക്സിൽ അനന്യ മാട്രിക്സ് പ്രവർത്തിക്കുന്നത്.

(vii) ശൂന്യ മാട്രിക്സ് അല്ലെങ്കിൽ പൂജ്യം മാട്രിക്സ്

ഒരു മാട്രിക്സിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും പൂജ്യം, എങ്കിൽ അതിനെ ശൂന്യമാട്രിക്സ് അല്ലെങ്കിൽ പൂജ്യ മാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ O എന്ന് കുറിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ എന്നിവക്രമം 2x3 ഉം 2x2 ഉം ആയ ശൂന്യമാട്രിക്സുകളാണ്.

കുറിപ്പ്

(i) ഒരു ശൂന്യമാട്രിക്സ് ഒരു സമചതുരമാട്രിക്സ് ആകണമെന്നില്ല. (ii) സംഖ്യകളിൽ പൂജ്യത്തിന്റെ പ്രവർത്തനമാണ് മാട്രിക്സിൽ ശൂന്യമാട്രിക്സിന്റെ പ്രവർത്തനം (iii) ഒരു മാട്രിക്സിനോട് തുല്യക്രമമുള്ള ഒരു ശൂന്യ മാട്രിക്സ് കൂട്ടുകയോ, കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്താൽ ആ മാട്രിക്സിന് ഒരു മാറ്റവും ഉണ്ടാകുന്നില്ല.

(viii) മാട്രിക്സിന്റെ പരിവർത്തനം (Transpose of a matrix)

A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ വരികളെ നിരകളായും നിരകളെ വരികളായും പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ ലഭിക്കുന്ന മാട്രിക്സിനെ A യുടെ പരിവർത്തന മാട്രിക്സ് എന്നുപറയുന്നു. ഇതിനെ A^T എന്നു കുറിക്കാം. (A യുടെ പരിവർത്തനം എന്നുവായിക്കാം)

ഉദാഹരണമായി, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, എങ്കിൽ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

പൊതുവായി, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $i = 1, 2, \cdots, m$, കൂടാതെ $j = 1, 2, \cdots, n$ എങ്കിൽ =

$A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$ ഇവിടെ, $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, കൂടാതെ $j = 1, 2, \cdots, m$ =

ഉദാഹരണം 4.1

അഞ്ചുദിവസം മുൻകൂട്ടി പ്രവചിച്ച ഉയർന്നതും (H) താഴ്ന്നതുമായ (L) താപനിലകളെ (ഫാരൻ ഹീറ്റിൽ) താഴെ തന്ന പട്ടിക കാണിക്കുന്നു. ഉയർന്ന, താഴ്ന്ന താപ നിലകളെ യഥാക്രമം ഒന്നാമത്തേയും രണ്ടാമത്തേയും വരി കളായി പ്രതിനിധീകരിച്ച് താപനിലകളെ ഒരു മാട്രിക്സായി രൂപീകരിച്ച് ഏറ്റവും കൂടിയ താപനിലയുള്ള ദിവസം കാണുക.

Mon	Tue	Wed	Thu	Fri
H 88	H 90	H 86	H 84	H 85
L 54	L 56	L 53	L 52	L 52

നിർദ്ധാരണം   മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളെ മാട്രിക്സ് ആയി രൂപീകരിച്ചാൽ

$$A = \begin{matrix} \\ H \\ L \end{matrix}\begin{matrix} \text{തി} & \text{ചൊ} & \text{ബു} & \text{വ്യാ} & \text{വെ} \\ \left(\begin{matrix} 88 \\ 54 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 90 \\ 56 \end{matrix} & \begin{matrix} 86 \\ 53 \end{matrix} & \begin{matrix} 84 \\ 52 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 85 \\ 52 \end{matrix}\right) \end{matrix}. \quad \text{ie}, \; A = \begin{pmatrix} 88 & 90 & 86 & 84 & 85 \\ 54 & 56 & 53 & 52 & 52 \end{pmatrix}$$

ഒന്നാമത്തെ വരിയിൽ നിന്നും ഏറ്റവും ഉയർന്ന താപനിലയുള്ള ദിവസം ചൊവ്വാഴ്ച ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.2

നാല് ആഹാര പദാർത്ഥങ്ങളിൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന കൊഴുപ്പ്, കാർബോഹൈഡ്രേറ്റ്, അന്നജം എന്നിവയുടെ അളവുകൾ (ഗ്രാമിൽ) യഥാക്രമം താഴെ കൊടുത്ത പട്ടികയിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

	ഇനം 1	ഇനം 2	ഇനം 3	ഇനം 4
കൊഴുപ്പ്	5	0	1	10
കാർബോഹൈഡ്രേറ്റ്	0	15	6	9
അന്നജം	7	1	2	8

ഈ വിവരങ്ങളുപയോഗിച്ച് 3 x 4ഉം 4 x 3ഉം ക്രമം ഉള്ള മാട്രിക്സ് തയ്യാറാക്കുക

നിർദ്ധാരണം   മുകളിൽ കൊടുത്ത വിവരങ്ങളെ 3×4 രൂപത്തിലുള്ള മാട്രിക്സിൽ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യാം.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 15 & 6 & 9 \\ 7 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$ ഇവിടെ നിരകൾ ആഹാരത്തിൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന പദാർത്ഥങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

നമുക്ക് ഒരു 4×3 മാട്രിക്സ് എഴുതാം $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 15 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ ഇവിടെ വരികൾ ആഹാരത്തിൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന പദാർത്ഥങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.3

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \\ 9 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

എങ്കിൽ (i) മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം (ii) a_{13} , a_{42} എന്നീ അംഗങ്ങൾ (iii) 2 എന്ന അംഗത്തിന്റെ സ്ഥാനം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം (i) A എന്ന മാട്രിക്സിൽ 4 വരികളും 3 നിരകളും ഉള്ളതിനാൽ A യുടെ ക്രമം 4×3.

(ii) a_{13} ഒന്നാമത്തെ വരിയിൽ മൂന്നാമത്തെ നിരയിലാണ് $\therefore a_{13} = 8.$, $a_{42} = -2$, എന്നത് നാലാമത്തെ വരിയിൽ രണ്ടാമത്തെ നിരയിലെ അംഗമാണ്

(iii) 2 ന്റെ സ്ഥാനം രണ്ടാമത്തെ വരിയിൽ രണ്ടാമത്തെ നിരയിലാണ് $\therefore a_{22} = 2$.

ഉദാഹരണം 4.4

അംഗങ്ങൾ $a_{ij} = |2i - 3j|$ ആയിട്ടുള്ള ഒരു 2×3 ക്രമം ഉള്ള $A = [a_{ij}]$ എന്ന മാട്രിക്സ് രൂപീകരിക്കുക

നിർദ്ധാരണം 2×3 ക്രമം ഉള്ള മാട്രിക്സിന്റെ പൊതുരൂപം.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$ ഇവിടെ $a_{ij} = |2i - 3j|$, $i = 1, 2$ ഉം $j = 1, 2, 3$ യും എങ്കിൽ

$$a_{11} = |2(1) - 3(1)| = |-1| = 1,\ a_{12} = |2(1) - 3(2)| = 4,\ a_{13} = |2(1) - 3(3)| = 7$$

$$a_{21} = [2(2) - 3] = 1,\quad a_{22} = |2(2) - 3(2)| = 2,\ a_{23} = |2(2) - 9| = 5$$

ആവശ്യപ്പെട്ട മാട്രിക്സ് $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

ഉദാഹരണം 4.5

$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, എന്നാൽ A^T, $(A^T)^T$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ A യുടെ വരികളെ നിരകളായും നിരകളെ വരികളായും പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ A^T ലഭിക്കും

$A^T = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ അതുപോലെ A^T ന്റെ വരികളെ നിരകളായും നിരകളെ വരികളായും പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ $(A^T)^T$ ലഭിക്കും $(A^T)^T = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

കുറിപ്പ്

മുകളിൽ കൊടുത്ത ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്ന് $(A^T)^T = A$. ഏതൊരു മാട്രിക്സ് B യ്ക്കും $(B^T)^T = B$ എന്നത് ശരിയാണ്. കൂടാതെ ഏതൊരു അദിശം k യ്ക്കും $(kA)^T = kA^T$

അഭ്യാസം 4.1

1. ഒരു വാട്ടർ തീം പാർക്കിലേയ്ക്കുള്ള പ്രവേശന ടിക്കറ്റുകൾക്കുള്ള നിരക്ക് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു:

	ആഴ്ചയിലെ ദിവസങ്ങളിൽ നിരക്ക് (₹)	ഒഴിവു ദിവസങ്ങളിൽ നിരക്ക് (₹)
പ്രായപൂർത്തിയായവർ	400	500
കുട്ടികൾ	200	250
മുതിർന്നവർ	300	400

പ്രായപൂർത്തിയായവർക്കും, കുട്ടികൾക്കും, മുതിർന്നവർക്കും ഉള്ള പ്രവേശന ടിക്കറ്റുകളുടെ നിരക്കുകൾക്ക് ഒരു മാട്രിക്സ് രൂപീകരിക്കുക. മാട്രിക്സുകളുടെ ക്രമവും കാണുക.

2. ഒരു പട്ടണത്തിൽ 6 ഹയർ സെക്കന്ററി വിദ്യാലയങ്ങളും, 8 ഹൈസ്കൂൾ വിദ്യാലയങ്ങളും 13 പ്രാഥമിക വിദ്യാലയങ്ങളും ഉണ്ട്. ഈ വിവരങ്ങൾക്ക് $3\times1, 1\times3$ ക്രമമുള്ള മാട്രിക്സുകൾ രൂപീകരിക്കുക.

3. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള മാട്രിക്സുകളുടെ ക്രമം എഴുതുക.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 9 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

4. 8 അംഗങ്ങൾ ഉള്ള മാട്രിക്സിന്റെ സാധ്യമായ ക്രമങ്ങൾ ഏവ ?

5. 30 അംഗങ്ങൾ ഉള്ള മാട്രിക്സിന്റെ സാധ്യമായ ക്രമങ്ങൾ ഏവ ?

6. താഴെ കൊടുത്തവ അംഗങ്ങളായിട്ടുള്ള $A=[a_{ij}]$ എന്ന 2×2 മാട്രിക്സ് നിർമ്മിക്കുക.

(i) $a_{ij}=ij$ (ii) $a_{ij}=2i-j$ (iii) $a_{ij}=\dfrac{i-j}{i+j}$

7. താഴെ കൊടുത്തവ അംഗങ്ങളായിട്ടുള്ള $A=[a_{ij}]$ എന്ന 3×2 മാട്രിക്സ് നിർമ്മിക്കുക.

(i) $a_{ij}=\dfrac{i}{j}$ (ii) $a_{ij}=\dfrac{(i-2j)^2}{2}$ (iii) $a_{ij}=\dfrac{|2i-3j|}{2}$

8. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 7 & 4 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}$, എങ്കിൽ

(i)മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം എഴുതുക. (ii) a_{24} , a_{32} എന്നീ അംഗങ്ങൾ എഴുതുക (iii) അംഗം 7 ന്റെ സ്ഥാനം ഏതുവരിയിൽ ഏതു നിരയിലാണ്?

9. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, എങ്കിൽ A യുടെ പരിവർത്തനം കാണുക ?

10. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, എങ്കിൽ $(A^T)^T=A$ എന്നത് ശരിനോക്കുക.

4.4 മാട്രിക്സുകളിലെ ക്രീയകൾ

ഈ ഭാഗത്തിൽ മാട്രിക്സുകളുടെ തുല്യത, മാട്രിക്സിനെ ഒരു അദിശം കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം, മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, എന്നിവയെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് ചർച്ച ചെയ്യാം.

(i)മാട്രിക്സുകളുടെ തുല്യത

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ എന്ന രണ്ടു മാട്രികസുകൾ തുല്യം എന്നു പറയണമെങ്കിൽ

(i) അവ ഒരേ ക്രമം ആയിരിക്കണം,

(ii) A യിലെ ഓരോ അംഗവും B യിലെ സമാന അംഗവും തുല്യമായിരിക്കണം. അതായത് എല്ലാ i യ്ക്കും j. യ്ക്കും $a_{ij}=b_{ij}$.

ഉദാഹരണമായി, മാട്രിക്സുകൾ $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ സമമല്ല. എന്തെന്നാൽ അവയുടെ ക്രമങ്ങൾ വ്യത്യസ്തമാണ്.

കൂടാതെ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, എന്തെന്നാൽ അവയുടെ സമാന അംഗങ്ങൾ സമമല്ല.

ഉദാഹരണം 4.6

$\begin{pmatrix} x & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & z \\ 5 & y & 1 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ x, y, z ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള മാട്രിക്സുകൾ സമം ആയതിനാൽ അവയുടെ സമാന അംഗങ്ങൾ തുല്യം. സമാന അംഗങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്താൽ $x = 3,\ y = 9,\ z = 4$ ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.7

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക : $\begin{pmatrix} y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2x \\ 31+4y \end{pmatrix}$

നിർദ്ധാരണം മാട്രിക്സുകൾ സമം ആയതിനാൽ സമാന അംഗങ്ങൾ തുല്യം

സമാന അംഗങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്താൽ $y = 6 - 2x$, $3x = 31 + 4y$.

y = 6 –2x നെ $3x = 31 + 4y$ ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $3x = 31 + 4(6-2x)$

$$3x = 31 + 24 - 8x$$

$\therefore$ x = 5 കൂടാതെ $y = 6 - 2(5) = -4$.

$\therefore$ $x = 5, y = -4$

(ii) മാട്രിക്സിനെ ഒരു അദിശം കൊണ്ട് ഗുണനം

നിർവ്വചനം

ഒരു മാട്രിക്സ് $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ യും ഒരു അദിശം (വാസ്തവികസംഖ്യ) k യും തന്നാൽ ഒരു പുതിയ മാട്രിക്സ് $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, എല്ലാ i യ്ക്കും j യ്ക്കും $b_{ij} = ka_{ij}$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചാൽ മാട്രിക്സ് B യെ മാട്രിക്സ് A യുടെ അദിശം കൊണ്ടുളള ഗുണനം എന്നു പറയാം.

ഇങ്ങനെ A യിലെ ഓരോ അംഗങ്ങളേയും, k എന്ന സ്ഥിരം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മാട്രിക്സ് B ലഭിക്കുന്നു. B = kA എന്ന് എഴുതാം. ഈ ഗുണനത്തെ അദിശ ഗുണനം എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, k ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ

എങ്കിൽ kA = k $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{pmatrix}$

ഉദാഹരണം 4.8

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ 3A കാണുക ?

നിർദ്ധാരണം A യിലെ ഓരോ അംഗത്തേയും 3കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മാട്രിക്സ് 3 A ലഭിക്കുന്നു.

$$3A = 3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-1) & 3(2) & 3(4) \\ 3(3) & 3(6) & 3(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & -15 \end{pmatrix}$$

(iii) മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനം

3 ആൺകുട്ടികൾക്കും 3 പെൺകുട്ടികൾക്കും, ഗണിതത്തിനും ശാസ്ത്രത്തിനും കിട്ടിയ മാർക്ക് A, B എന്നീ മാട്രിക്സുകളിൽ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഗണിതം

$A = \begin{pmatrix} 45 & 72 & 81 \\ 30 & 90 & 65 \end{pmatrix}$ ആൺകുട്ടികൾ / പെൺകുട്ടികൾ

ശാസ്ത്രം

$B = \begin{pmatrix} 51 & 80 & 90 \\ 42 & 85 & 70 \end{pmatrix}$ ആൺകുട്ടികൾ / പെൺകുട്ടികൾ

ഓരോ കുട്ടികളുടേയും ആകെ മാർക്ക് ലഭിക്കുന്നതിന് A, B എന്നീ മാട്രിക്സുകളിലെ സമാന അംഗങ്ങളെ കൂട്ടേണ്ടതാണ്.

$$A + B = \begin{pmatrix} 45 & 72 & 81 \\ 30 & 90 & 65 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 51 & 80 & 90 \\ 42 & 85 & 70 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 45+51 & 72+80 & 81+90 \\ 30+42 & 90+85 & 65+70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 & 152 & 171 \\ 72 & 175 & 135 \end{pmatrix}$$

ഈ മാട്രിക്സിൽ നിന്ന് വ്യക്തമാകുന്നത് ഒന്നാമത്തെ ആൺകുട്ടികൾക്ക് ഗണിതത്തിനും ശാസ്ത്രത്തിനും ആകെ മാർക്ക് 96 ഉം അവസാനത്തെ പെൺകുട്ടിയ്ക്ക് ഗണിതത്തിനും ശാസ്ത്രത്തിനും ലഭിച്ച ആകെ മാർക്ക് 135 ഉം ആണ്.

അതായത്, ഒരേ ക്രമമുള്ള രണ്ടു മാട്രിക്സുകൾ കൂട്ടുന്നതിന് അവയുടെ സമാന അംഗങ്ങളെ കൂട്ടിയാൽ മതിയാകും.

നിർവ്വചനം

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ എന്നിവ ഒരേ ക്രമമുള്ള രണ്ട് മാട്രിക്സുകൾ. എങ്കിൽ A , B യുടെ സങ്കലന മാട്രിക്സ് $C = [c_{ij}]_{mxn}$, എല്ലാ i യ്ക്കും j യ്ക്കും $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ആകുന്നു.

മാട്രിക്സുകളിലെ സങ്കലനത്തിന്റെ ക്രീയകൾ സംഖ്യകളിലെ സങ്കലനം പോലെയാണന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. A,B എന്ന രണ്ടു മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനത്തെ $A+B$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. വ്യത്യസ്ത ക്രമങ്ങളുള്ള മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനം നിർവ്വചനീയമല്ല.

ഉദാഹരണം 4.9

$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ A+B കാണുക.

നിർദ്ധാരണം A യുടെ ക്രമം 2×3 , B യുടെ ക്രമം 2×2, ആയതിനാൽ A,B യുടെ സങ്കലനം സാധ്യമല്ല

ഉദാഹരണം 4.10

$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, എങ്കിൽ A + B കാണുക

നിർദ്ധാരണം A യും B യും ഓരേ ക്രമം 2×4, ആയതിനാൽ A,B യുടെ സങ്കലനം നിർവ്വചിക്കാം.

അതിനാൽ, $$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5+3 & 6-1 & -2+4 & 3+7 \\ 1+2 & 0+8 & 4+2 & 2+3 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 & 10 \\ 3 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

(iv) ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ ഋണം

$A = [a_{ij}]_{mxn}$ എന്ന ഒരു മാട്രക്സിന്റെ ഋണം $-A = (-1)A$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം. ഇതിനെ $-A$ എന്ന് കുറിക്കുന്നു. അതായത് $-A = [b_{ij}]_{mxn}$, എല്ലാ i, j യ്ക്കും $b_{ij} = -a_{ij}$.

(v) മാട്രിക്സുകളുടെ വ്യവകലനം

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ എന്നിവ ഒരേ ക്രമമുള്ള രണ്ട് മാട്രിക്സുകളായാൽ $A - B = A + (-1)B$. എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം. അതായത് വ്യവകലനം $A - B = [c_{ij}]$ എല്ലാ i, j യ്ക്കും $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

ഉദാഹരണം 4.11

ഭാരം കുറയ്ക്കുന്നതിനെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു ആഹാരനിയന്ത്രണ പരിപാടിയുടെ ആരംഭഘട്ടത്തിൽ A എന്ന മാട്രിക്സിൽ 4 ആൺകുട്ടികളുടേയും 4 പെൺകുട്ടികളുടേയും ഭാരം കി.മീ. ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. മാട്രിക്സ് B യിൽ ആഹാരനിയന്ത്രണ പരിപാടിയിൽ പങ്കെടുത്തതിനു ശേഷമുള്ള ഭാരങ്ങളെ വെളിപ്പെടുത്തുന്നു.

$$A = \begin{pmatrix} 35 & 40 & 28 & 45 \\ 42 & 38 & 41 & 30 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{ആൺകുട്ടികൾ} \\ \text{പെൺകുട്ടികൾ} \end{matrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 32 & 35 & 27 & 41 \\ 40 & 30 & 34 & 27 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{ആൺകുട്ടികൾ} \\ \text{പെൺകുട്ടികൾ} \end{matrix}$$

ആൺകുട്ടികളുടേയും പെൺകുട്ടികളുടേയും ഭാരക്കുറവുകൾ കാണുക

നിർദ്ധാരണം കുറഞ്ഞ ഭാരത്തിന്റെ മാട്രിക്സ് $A - B = \begin{pmatrix} 35 & 40 & 28 & 45 \\ 42 & 38 & 41 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 & 35 & 27 & 41 \\ 40 & 30 & 34 & 27 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.5 മാട്രിക്സ് സങ്കലനത്തിൽ ഗുണങ്ങൾ

(i) മാട്രിക്സ് സങ്കലനം ക്രമവിനിമേയമാണ്.

ഒരേ ക്രമമുള്ള രണ്ട് മാട്രിക്സുകൾ A,B എങ്കിൽ A+B = B+A

(ii) മാട്രിക്സ് സങ്കലനം സംയോജനമാണ്

ഒരേ ക്രമമുള്ള ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് മാട്രിക്സുകൾ A, B,C എങ്കിൽ $A + (B + C) = (A + B) + C$

(iii) സങ്കലന അനന്യത

മാട്രിക്സ് സങ്കലനത്തിന് ശൂന്യമാട്രിക്സ് സങ്കലന അനന്യതയാണ്. $m \times n$ ക്രമമുള്ള മാട്രിക്സ് A യ്ക്ക് $A + O = O + A = A$ (O എന്നത് ക്രമം $m \times n$ ആയുള്ള ഒരു ശൂന്യമാട്രിക്സ് ആണ്.)

(iv) സങ്കലന വിപരീതം

മാട്രിക്സ് A യ്ക്ക് $B + A = A + B = O$. എങ്കിൽ B യെ A യുടെ സങ്കലന വിപരീതം എന്നു പറയുന്നു. അതിനാൽ $A + (-A) = (-A) + A = $. A യുടെ സങ്കലന വിപരീതം $-A$ ആണ്.

> **കുറിപ്പ്** ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ സങ്കലന വിപരീതം അതിന്റെ ഋണമാട്രിക്സ് ആണ്. ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ സങ്കലന വിപരീതം അദ്വിതീയം (unique) ആയിരിക്കും.

അഭ്യാസം 4.2

1. മാട്രിക്സ് സമീകരണത്തിൽ നിന്ന് x, y, z ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക
$$\begin{pmatrix} 5x + 2 & y - 4 \\ 0 & 4z + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} 2x + y \\ x - 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ x, y യുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$, എങ്കിൽ A യുടെ സങ്കലന വിപരീതം കാണുക

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $C = 2A + B$ കാണുക.

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ C $6A - 3B$ കാണുക.

6. $a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ a,b കാണുക.

7. $2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ x,y കാണുക.

8. $\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ x,y കാണുക.

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ (i) $A + B = B + A$

(ii) $A + (-A) = O = (-A) + A$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

10. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, എങ്കിൽ

$A + (B + C) = (A + B) + C$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

11. ഒരു ഇലക്ട്രോണിക് കമ്പനി വിതരണം ചെയ്യുന്ന സാധനങ്ങൾ വിൽക്കുന്നത് രേഖപ്പെടുത്തുന്നതിനു വേണ്ടി അവരുടെ മൂന്ന് ശാഖകളിലെ വിൽപനശാലകളിൽ വിനോദോപകരണങ്ങൾ വിൽക്കുന്നത് നിരീക്ഷിച്ച്, രണ്ട് ആഴ്ചകളിൽ ഉള്ള വില്പന താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.

		ടി. വി.	ഡി. വി. ഡി.	വീഡിയോഗെയിം	സി. ഡി. പ്ലേയർ
ഒന്നാമത്തെ ആഴ്ച	കട I	30	15	12	10
	കട II	40	20	15	15
	കട III	25	18	10	12
രണ്ടാമത്തെ ആഴ്ച	കട I	25	12	8	6
	കട II	32	10	10	12
	കട III	22	15	8	10

മാട്രിക്സ് സങ്കലനം ഉപയോഗിച്ച് രണ്ടാഴ്ച വിറ്റ സാധനങ്ങളുടെ ആകെ തുക കാണുക.

12. ഒരു നീന്തൽ കുളത്തിൽ ഒരു ദിവസത്തെ പ്രവേശന ഫീസിന്റെ വിവരം താഴെകൊടുത്തിരിക്കുന്നു.:

ദിവസേനയുള്ള പ്രവേശന ഫീസ്		
അംഗത്വം ഉള്ളവർ	**കുട്ടികൾ**	**യുവാക്കൾ**
2.00 p.m.ന് മുമ്പ്	20	30
2.00 p.m. ന് ശേഷം	30	40
അംഗത്വമില്ലാത്തവർ		
2.00 p.m.ന് മുമ്പ്	25	35
2.00 p.m.ന് ശേഷം	40	50

അംഗത്വമില്ലാത്തവർക്കായുള്ള കൂടുതൽ ചെലവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന മാട്രിക്സ് എഴുതുക

4.6 മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം

സെൽവിയ്ക്ക് 3 പേനകളും 2 പെൻസിലുകളും ആവശ്യമാകുമ്പോൾ മീനയ്ക്ക് 4 പേനകളും 5 പെൻസിലുകളും ആവശ്യമാണ്. ഓരോ പേനയുടേയും പെൻസിലിന്റേയും വില യഥാക്രമം ₹10, ₹5. എന്നാൽ ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര രൂപ ചെലവാകും ?

വ്യക്തമായി, $3 \times 10 + 2 \times 5 = 40$, സെൽവിയ്ക്ക് ₹ 40 ആവശ്യമാണ്

$4 \times 10 + 5 \times 5 = 65$, മീനയ്ക്ക് ₹ 65ആവശ്യമാണ്

മാട്രിക്സ് ഗുണനം ഉപയോഗിച്ചും ഇത് നമുക്ക് ചെയ്യാൻ കഴിയും

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളെ നമുക്ക് താഴെ കൊടുത്തവിധത്തിൽ എഴുതാം :

ആവശ്യങ്ങൾ   തുക (₹)   ആവശ്യമായ തുക (₹)

സെൽവി, മീന $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \times 10 + 2 \times 5 \\ 4 \times 10 + 5 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 65 \end{pmatrix}$

മറ്റൊരു കടയിൽ പേനയുടേയും, പെൻസിലിന്റേയും വില യഥാക്രമം ₹8, ₹4 എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക. സെൽവിയ്ക്കും മീനയ്ക്കും ആവശ്യമായ തുക $3 \times 8 + 2 \times 4$ = ₹32 ഉം $4 \times 8 + 5 \times 4$= ₹ 52 ഉം ആണ്. മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ആവശ്യങ്ങൾ   തുക (₹)   ആവശ്യമായ തുക (₹)

സെൽവി, മീന $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \times 8 + 2 \times 4 \\ 4 \times 8 + 5 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 52 \end{pmatrix}$

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രണ്ട് കാര്യങ്ങളും ചേർത്ത് മാട്രിക്സ് രൂപത്തിൽ താഴെ കാണുന്നവിധം എഴുതാം

ആവശ്യങ്ങൾ   തുക (₹)   ആവശ്യമായ തുക (₹)

സെൽവി, മീന $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \times 10 + 2 \times 5 & 3 \times 8 + 2 \times 4 \\ 4 \times 10 + 5 \times 5 & 4 \times 8 + 5 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 32 \\ 65 & 52 \end{pmatrix}$

മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്നും നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കുന്നത് രണ്ടും മാട്രിക്സുകളിൽ ഗുണനം സാധ്യമാകുന്നത് ഒന്നാമത്തെ മാട്രിക്സിന്റെ വരികളുടെ എണ്ണം രണ്ടാമത്തെ മാട്രിക്സിന്റെ നിരകളുടെ എണ്ണത്തിന് സമമാകുമ്പോഴാണ്. കൂടാതെ ഗുണനമാട്രിക്സിന്റെ അംഗങ്ങൾ കിട്ടുന്നതിന് ഒന്നാമത്തെ മാട്രിക്സിന്റെ വരികളും രണ്ടാമത്തെ മാട്രിക്സിന്റെ നിരകളും എടുത്ത് ഓരോ അംഗങ്ങളായി ഗുണിച്ച് കൂട്ടിയാൽ മതി.

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ലഘു ഉദാഹരണം തെളിയിക്കുന്നത് ഗുണനം നിർവ്വചിക്കാവുമ്പോൾ ഗുണന മാട്രിക്സിന്റെ അംഗങ്ങൾ എപ്രകാരം ലഭിക്കുന്നു എന്നതാണ്

ഉദാഹരണമായി

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ ഗുണനം AB നിർവ്വചിക്കുന്നത്

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

വഴി 1 : A എന്ന മാട്രിക്സിലെ ഒന്നാമത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകളെ B യിലെ ഒന്നാമത്തെ നിരയിലെ സംഖ്യകളെ കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് കൂട്ടി കിട്ടുന്ന ഫലത്തെ AB യുടെ ഒന്നാമത്തെ വരിയിൽ ഒന്നാമത്തെ നിരയിൽ എഴുതുക,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3) + (-1)5 & \\ & \end{pmatrix}$$

വഴി 2: വഴി 1 ന്റെ രീതി അനുസരിച്ച് A യുടെ ഒന്നാമത്തെ വരിയും B യുടെ രണ്ടാമത്തെ നിരയും ഉപയോഗിച്ച് കിട്ടുന്ന ഫലത്തെ AB യുടെ ഒന്നാമത്തെ വരിയിൽ രണ്ടാമത്തെ നിരയിൽ എഴുതുക.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ & \end{pmatrix}$$

വഴി 3: ഇതേ രീതി അനുസരിച്ച് A യുടെ രണ്ടാമത്തെ വരിയും B യുടെ ഒന്നാമത്തെ നിരയും ഉപയോഗിച്ച് AB യുടെ രണ്ടാമത്തെ വരിയിലെ ഒന്നാമത്തെ നിരയുടെ സംഖ്യ എഴുതാം.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & \end{pmatrix}$$

വഴി 4: A യിലെ രണ്ടാമത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകൾക്കും B യിലെ രണ്ടാമത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകൾക്കും ഇതേ രീതി അനുസരിക്കേണ്ടതാണ്

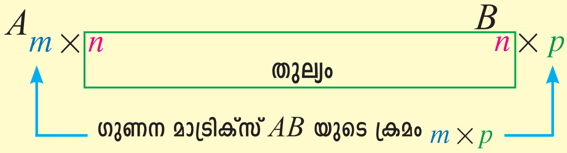
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) \end{pmatrix}$$

വഴി 5: ലഘൂകരിക്കുമ്പോൾ ഗുണന മാട്രിക്സ് AB ലഭിക്കുന്നു

$$\begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -25 \\ 29 & 1 \end{pmatrix}$$

നിർവ്വചനം

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ എങ്കിൽ ഈ രണ്ടു മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനഫലം മാട്രിക്സ് AB നിർവ്വചിക്കുന്നു.AB യുടെ ക്രമം $m\times p$.ആണ്. ഈ വസ്തുത താഴെകൊടുത്തിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിലൂടെവിശദീകരിച്ചിരിക്കുന്നു.



ഉദാഹരണം 4.12

ഓരോ മാട്രിക്സിനും ഗുണനം സാധ്യമാണോ ? സാധ്യമാണെങ്കിൽ ഗുണനമാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം എഴുതുക

(i) $A_{2\times 5}$, $B_{5\times 4}$ B $\times$ (ii) $A_{1\times 3}$, $B_{4\times 3}$ B $\times$

നിർദ്ധാരണം

(i) A യിലെ നിരകളുടെ എണ്ണം B യിലെ വരികളുടെ എണ്ണത്തിന് തുല്യമായതിനാൽ ഗുണനം AB സാധ്യമാണ്.

ഗുണനമാട്രിക്സ് AB യുടെ ക്രമം 2×4 ആകുന്നു.

(ii) A യുടെ ക്രമം 1×3, B യുടെ ക്രമം 4×3 എന്നും തന്നിട്ടുണ്ട്.

A യിലെ നിരകളുടെ എണ്ണവും B യിലെ വരികളുടെ എണ്ണവും തുല്യമല്ല.

അതിനാൽ ഗുണനം AB സാധ്യമല്ല

ഉദാഹരണം 4.13

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 4x + 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

സമാന അംഗങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്താൽ

$$3x + 2y = 8 \quad , \quad 4x + 5y = 13$$

$$\Longrightarrow 3x + 2y - 8 = 0 \quad , \quad 4x + 5y - 13 = 0.$$

വജ്ര ഗുണനരീതിയിൽ സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്താൽ

	x		y	1
2	–8	3	2	
5	–13	4	5	

$$\Longrightarrow \frac{x}{-26 + 40} = \frac{y}{-32 + 39} = \frac{1}{15 - 8} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{14} = \frac{y}{7} = \frac{1}{7}$$

അതിനാൽ $x = 2, \quad y = 1$

ഉദാഹരണം 4.14

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $A^2 - (a + d)A = (bc - ad)I_2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

$A^2 = A \times A$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$(a + d)A = (a + d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(1),(2) ൽ നിന്നും

$$A^2 - (a + d)A = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = (bc - ad)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

അതിനാൽ, $A^2 - (a + d)A = (bc - ad)I_2$

4.7 മാട്രിക്സ് ഗുണനത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ

സംഖ്യകളുടെ ഗുണനത്തിന്റെ ചില സവിശേഷതകൾ, മാട്രിക്സ് ഗുണനത്തിന് പൊരുത്തപ്പെടുന്നില്ല. അങ്ങനെയുള്ള ചില സവിശേഷതകൾ: (i) പൊതുവായി $AB \neq BA$, AB നിർവ്വചിക്കാൻ സാധിച്ചാൽ BA നിർവ്വചിക്കാൻ സാധിക്കണമെന്നില്ല. (ii) AB = 0 എന്നത് A യോ അല്ലെങ്കിൽ B യോ ഒരു പൂജ്യം മാട്രിക്സ് ആയിരിക്കണമെന്ന് അർത്ഥമാക്കുന്നില്ല. അതായത് AB = 0 എങ്കിൽ A = 0 അല്ലെങ്കിൽ B=0 ആയിരിക്കണമെന്നില്ല. (iii) $AB = AC$(A എന്നത് ഒരു ശൂന്യ മാട്രിക്സ്അല്ല) എന്നത് എല്ലായ്പ്പോഴും B = C എന്നത് അർത്ഥമാക്കുന്നില്ല.

ഉദാഹരണമായി , $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ,

(i) $AB \neq BA$ (ii) AD = O, എന്നാൽ, A യും D യും ശൂന്യമാട്രിക്സുകളല്ല. (iii) $AB = AC$ എന്നാൽ B ≠ C. മാട്രിക്സ് ഗുണനത്തിന്റെ ചില സവിശേഷതകൾ ഉദാഹരണത്തിലൂടെ നമുക്ക് നോക്കാം.

(i) പൊതുവായി മാട്രിക്സ് ഗുണനം ക്രമവിനിമേയമല്ല

A,Bഎന്നിവ രണ്ടു മാട്രിക്സുകളും AB യുംBA യും സാധ്യവുമാണെങ്കിൽ AB = BA ആകണമെന്നില്ല.

ഉദാഹരണം 4.15

$A = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, AB യും BA യും സാധ്യമാണെങ്കിൽ അവ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം A യുടെ ക്രമം 3 x 2, B യുടെ ക്രമം 2 x 3. അതിനാൽ AB യും BA യും സാധ്യമാണ്.

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 72-42 & -24+7 & 16+35 \\ -18+24 & 6-4 & -4-20 \\ 0+18 & 0-3 & 0-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -17 & 51 \\ 6 & 2 & -24 \\ 18 & -3 & -15 \end{pmatrix}$$

അതുപോലെ,

$$BA = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & -69 \\ 50 & -61 \end{pmatrix}. \qquad (AB \neq BA)$$

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

ഒരേ ക്രമമുള്ള വികർണ്ണ മാട്രിക്സിന്റെ ഗുണനഫലം ക്രമവിനിമേയമാണ്. കൂടാതെ അനന്യ മാട്രിക്സ് അതേ ക്രമമുള്ള സമചതുര മാട്രിക്സുമായും ക്രമവിനിമേയം ചെയ്യുന്നു.

(ii) മാട്രിക്സിന്റെ ഗുണനം എല്ലായ്പ്പോഴും സംയോജകമാണ്

A, B,C എന്നീ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് മാട്രിക്സുകൾക്ക് (AB)C = A(BC), (ഇരുവശങ്ങളും സാധ്യമാകുമ്പോൾ)

(iii) മാട്രിക്സ് ഗുണനം സങ്കലനത്തിനുമേൽ വിതരണം ആകുന്നു

A, B,C എന്നീ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് മാട്രിക്സുകൾക്ക്

(i) $A(B+C) = AB + AC$

(ii) $(A+B)C = AC + BC$, (ഇരുവശങ്ങളും നിർവ്വചിക്കാമെങ്കിൽ)

ഉദാഹരണം 4.16

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$എങ്കിൽ $A(B+C) = AB + AC$ എന്നത് ശരിനോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$B + C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 38 \\ 5 & 34 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 + 12 & 15 + 14 \\ 2 + 24 & -5 + 28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 - 10 & 3 + 6 \\ -1 - 20 & -1 + 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 29 \\ 26 & 23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 38 \\ 5 & 34 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(1), (2), ൽ നിന്നും $A(B + C) = AB + AC$

(iv) ഗുണനത്തിന്റെ അനന്യത

സാധാരണയായി ഒരു സംഖ്യയെ മറ്റൊരു സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോൾ അതേ സംഖ്യ തന്നെ കിട്ടുന്ന സവിശേഷത ബീജഗണിതത്തിൽ സംഖ്യ 1 ന് മാത്രമാണുള്ളത്. ഇതേ സാദൃശ്യമുള്ള ഒരു തത്വം മാട്രിക്സ് ബീജഗണിതത്തിൽ നമുക്ക് പരിചയപ്പെടുത്താം.

ക്രമം n ഉള്ള ഏതൊരു സമചതുര മാട്രിക്സ് A യ്ക്കും $AI = IA = A$, I എന്നത് ക്രമം n ഉള്ള ഒരു അനന്യമാട്രിക്സ് ആണ്. അതിനാൽ I - നെ ഗുണന അനന്യത എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.17

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$,എങ്കിൽ $AI = IA = A$, എന്നത് ശരിനോക്കുക. I ക്രമം 2 ഉള്ള അനന്യ മാട്രിക്സ് ആകുന്നു.

നിർദ്ധാരണം

ഇപ്പോൾ, $$AI = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0 & 0 + 3 \\ 9 + 0 & 0 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = A$$

കൂടാതെ, $$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0 & 3 + 0 \\ 0 + 9 & 0 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = A$$

അതായത് $AI = IA = A$. എന്ന് തെളിയുന്നു.

(v) ഗുണന വിപരീതം

A എന്നത് ക്രമം n ഉള്ള ഒരു സമചതുരമാട്രിക്സ്, B എന്നത് അതേ ക്രമം n ഉള്ള മറ്റൊരു സമചതുര മാട്രിക്സ് എങ്കിൽ $AB = BA = I$ (I എന്നത് ക്രമം n ഉള്ള ഒരു അനന്യ മാട്രിക്സ്) ആയാൽ B യെ A യുടെ ഗുണനവിപരീതം എന്നുപറയുന്നു. ഇതിനെ A^{-1}എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

കുറിപ്പ്

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ **എന്നിവ പോലുള്ളചില സമചതുരമാട്രിക്സുകൾക്ക് ഗുണന വിപരീതം ഇല്ല**

(ii) B **എന്നത്** A **യുടെ ഗുണനം വിപരീതം എങ്കിൽ** A, B **യുടെ ഗുണന വിപരീതമാണ്**

(iii) **ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ ഗുണന വിപരീതം അദ്വിതീയമായിരിക്കും.**

ഉദാഹരണം 4.18

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ എന്നിവ പരസ്പരം ഗുണന വിപരീതമാട്രിക്സുകളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -15+15 \\ 2-2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 10-10 \\ -3+3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

∴ തന്നിട്ടുള്ള മാട്രിക്സുകൾ പരസ്പരം ഗുണനവിപരീതങ്ങളാണെന്ന് തെളിയുന്നു.

(vi) പരിവർത്തന മാട്രിക്സിന്റെ വിപരീതനിയമം

A,B എന്നിവ രണ്ടു മാട്രിക്സുകളും AB സാധ്യവുമാണെങ്കിൽ $(AB)^T = B^T A^T$

ഉദാഹരണം 4.19

$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B = B(1 \;\; 3 \;\; -6)$ എങ്കിൽ $(AB)^T = B^T A^T$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം $AB = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}(1 \;\; 3 \;\; -6) = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{pmatrix}$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}(-2 \;\; 4 \;\; 5)$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(1) ,(2), ൽ നിന്ന് $(AB)^T = B^T A^T$ എന്ന് തെളിയുന്നു.

അഭ്യാസം 4.3

1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോ സന്ദർഭങ്ങളിലും, ഗുണനം സാധ്യമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക, സാധ്യമാണെങ്കിൽ ഗുണന മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം എഴുതുക.

(i) $A = [a_{ij}]_{4x3}$, $B = [b_{ij}]_{3x2}$ എങ്കിൽ AB (ii) $P = [p_{ij}]_{4x3}$, $Q = [q_{ij}]_{4x3}$ എങ്കിൽ PQ

(iii) $M = [m_{ij}]_{3x1}$, $N = [n_{ij}]_{1x5}$ എങ്കിൽ MN (iv) $R = [r_{ij}]_{2x2}$, $S = [s_{ij}]_{2x2}$ എങ്കിൽ RS

2. ഗുണനം സാധ്യമാകുമെങ്കിൽ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനഫലം കാണുക

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix}$

3. ഒരു പഴക്കച്ചവടക്കാരൻ അയാളുടെ മൂന്നു കടകളിൽ പഴങ്ങൾ വിൽക്കുന്നു. ആപ്പിൾ, മാങ്ങ, ഓറഞ്ച് എന്നിവയുടെ വിറ്റവില യഥാക്രമം ₹ 20, ₹ 10, ₹ 5 ആണ്. മൂന്നുദിവസത്തെ വിൽപന താഴെ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

ദിവസം	ആപ്പിളുകൾ	മാങ്ങകൾ	ഓറഞ്ചുകൾ
1	50	60	30
2	40	70	20
3	60	40	10

ഓരോ ദിവസവും ലഭിക്കുന്ന ആകെ തുകയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന മാട്രിക്സ് എഴുതുക. അതിൽ നിന്നും മൂന്നു പഴങ്ങളും വിൽക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ആകെ തുകയും കാണുക.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ x, y യുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

5. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \end{pmatrix}$ കൂടാതെ $AX = C$, എങ്കിൽ x, y യുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $A^2 - 4A + 5I_2 = O$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ AB , BA കാണുക അവ സമമാണോ ?

8. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, എങ്കിൽ $(AB)C = A(BC)$ എന്നത് ശരിനോക്കുക.

9. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $(AB)^T = B^T A^T$ എന്നത് ശരിനോക്കുക.

10. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ എന്നിവ ഗുണന വിപരീത മാട്രിക്സുകളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

11. നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\begin{pmatrix} x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$.

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

എങ്കിൽ $(A+B)C$, $AC + BC$ യും കണ്ട് $(A+B)C = AC + BC$ എന്നത് പരിശോധിക്കുക?

അഭ്യാസം 4.4

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പ്രസ്താവനകളിൽ തെറ്റായത് ഏതാണ് ?

   (A) ഒരു അദിശമാട്രിക്സ് ഒരു സമചതുരമാട്രിക്സ് ആകുന്നു.

   (B) ഒരു വികർണ്ണമാട്രിക്സ് ഒരു സമചതുരമാട്രിക്സ് ആകുന്നു.

   (C) ഒരു അദിശമാട്രിക്സ് ഒരു വികർണ്ണമാട്രിക്സ് ആകുന്നു.

   (D) ഒരു വികർണ്ണമാട്രിക്സ് ഒരു അദിശമാട്രിക്സ് ആകുന്നു.

2. മാട്രിക്സ് $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ എന്നത് ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് എങ്കിൽ

   (A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = 1$ (D) m = n

3. $\begin{pmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y-2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ x, y യുടെ മൂല്യങ്ങൾ യഥാക്രമം

   (A) $-2, 7$ (B) $-\frac{1}{3}, 7$ (C) $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ (D) $2, -7$

4. $A = (1 \ \ -2 \ \ 3)$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ A + B

   (A) $(0 \ \ 0 \ \ 0)$ (B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (C) (-14) (D) നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല.

5. ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം 2×3 എങ്കിൽ അതിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം

   (A) 5 (B) 6 (C) 2 (D) 3

6. $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ x & 8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം

   (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{4}$ (D) 4

7. A യുടെ ക്രമം 3×4, B യുടെ ക്രമം 4×3 ആണെങ്കിൽ BAയുടെ ക്രമം

   (A) 3×3 (B) 4×4 (C) 4×3 (D) നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല

8. $A\times\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ \ 2)$ എന്നാൽ A യുടെ ക്രമം

   (A) 2×1 (B) 2×2 (C) 1×2 (D) 3×2

9. A, B എന്നിവ സമചതുരമാട്രിക്സുകളും AB = Iയും BA = I യും ആണെങ്കിൽ B ഒരു

   (A) അനന്യമാട്രിക്സ് (B) ശൂന്യമാട്രിക്സ്

   (C) A യുടെ ഗുണന വിപരീതം (D) $-A$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, എങ്കിൽ x, y യുടെ മൂല്യങ്ങൾ യഥാക്രമം

   (A) $2, 0$ (B) $0, 2$ (C) $0, -2$ (D) $1, 1$

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $A + B = O$, എങ്കിൽ B =

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, എങ്കിൽ $A^2 =$

(A) $\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 36 & 9 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

13. Aയുടെ ക്രമം $m \times n$, B യുടെ ക്രമം $p \times q$ എങ്കിൽ A, B യുടെ സങ്കലനം സാധ്യമാകുമ്പോൾ

(A) $m = p$ (B) n = q (C) n = p (D) m = p, n = q

14. $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, എങ്കിൽ a യുടെ മൂല്യം

(A) 8 (B) 4 (C) 2 (D) 11

15. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ $A^2 = I$, ആണെങ്കിൽ

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

16. $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$, $a_{ij} = i + j$, എങ്കിൽ A =

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, എന്നാൽ a, b, c,d യുടെ മൂല്യങ്ങൾ യഥാക്രമം

(A) $-1, 0, 0, -1$ (B) 1, 0, 0, 1 (C) $-1, 0, 1, 0$ (D) 1, 0, 0, 0

18. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ B =

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 5 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \end{pmatrix}$,എങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം

(A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) 0

20. A,B എന്നിവ ഒരേ ക്രമമുള്ള ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സമചതുരമാട്രിക്സുകൾ. എങ്കിൽ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വയിൽ ഏതാണ് ശരി ?

(A) $(AB)^T = A^T B^T$ (B) $(A^T B)^T = A^T B^T$ (C) $(AB)^T = BA$ (D) $(AB)^T = B^T A^T$

ഓർമ്മിക്കേണ്ടവ

- മാട്രിക്സ് എന്നത് സംഖ്യകളുടെ ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ക്രമീകരണമാണ്.
- m വരികളും n നിരകളും ഉള്ള ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം $m \times n$ ആകുന്നു.
- m = 1 എങ്കിൽ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ എന്നത് ഒരു വരി മാട്രിക്സ് ആകുന്നു.
- n = 1 എങ്കിൽ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ എന്നത് ഒരു നിര മാട്രിക്സ് ആകുന്നു.
- $m = n$ എങ്കിൽ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ എന്നത് ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് ആകുന്നു.
- $i \neq j$, $a_{ij} = 0$ എങ്കിൽ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ഒരു വികർണ്ണ മാട്രിക്സ് ആകുന്നു.
- $i = j$, $a_{ij} = k$, കൂടാതെ $i \neq j$, $a_{ij} = 0$ എങ്കിൽ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ഒരു അദിശ മാട്രിക്സ് ആകുന്നു. (k എന്നത് പൂജ്യമല്ലാത്ത സ്ഥിരസംഖ്യ).
- $i = j$, $a_{ij} = 1$, കൂടാതെ $i \neq j$, $a_{ij} = 0$ എങ്കിൽ $A = [a_{ij}]$ ഒരു അനന്യ മാട്രിക്സ് ആകുന്നു.
- ഒരു മാട്രിക്സിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും പൂജ്യം ആയിരുന്നാൽ അതിനെ ശൂന്യമാട്രിക്സ് എന്നുപറയുന്നു.
- A, B എന്നീ മാട്രിക്സുകൾക്ക് ഒരേ ക്രമവും സമാന അംഗങ്ങൾ തുല്യമവുമാണെങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സുകൾ സമമാട്രിക്സുകൾ ആകുന്നു.
- രണ്ട് മാട്രിക്സുകൾ ഒരേ ക്രമം ഉള്ളവയാണെങ്കിൽ അവയ്ക്ക് സങ്കലനവും വ്യവകലനവനും സാധ്യമാണ്.
- മാടിക്സ് സങ്കലനം ക്രമവിനിമേയമാണ്. അതായത് A, B എന്നിവ ഒരേ ക്രമം ഉള്ള മാട്രിക്സുകളാണെങ്കിൽ $A + B = B + A$.
- മാട്രിക്സ് സങ്കലനം സംയോജകമാണ്. അതായത് A,B, C എന്നീ മാട്രിക്സുകൾ ഒരേ ക്രമം ഉള്ളവയാണെങ്കിൽ $(A + B) + C = A + (B + C)$ ആകുന്നു.
- A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം m×n യും B എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം n×p യും ആണെങ്കിൽ ഗുണന മാട്രിക്സ് AB യുടെ ക്രമം m×p എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം.
- പൊതുവായി മാട്രിക്സ് ഗുണനം ക്രമം വിനിമേയമല്ല അതായത് $AB \neq BA$.
- മാട്രിക്സ് ഗുണനം സംയോജകമാണ്. അതായത് ഇരുവശവും നിർവ്വചിക്കാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ (AB)C = A(BC)
- $(A^T)^T = A$, $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(AB)^T = B^T A^T$
- AB = BA = I എങ്കിൽ A, B എന്നിവ പരസ്പരം ഗുണന വിപരീത മാട്രിക്സുകളാണ്.
- AB = O എങ്കിൽ A = O അല്ലെങ്കിൽ B = O ആകണമെന്നില്ല. അതായത് രണ്ട് ശൂന്യമല്ലാത്ത മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനഫലം ശൂന്യമാട്രിക്സുകൾ ആയിരിക്കാം.

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ ?

ആദ്യമായി, 2003ൽ നൽകപ്പെട്ട ഏബൽ സമ്മാനത്തിന്റെ സമ്മാനത്തുക 1 മില്യൺ അമേരിക്കൻ ഡോളർ ആണ്. ഈ അന്തർദേശീയ സമ്മാനം നോർവേയിലെ ശാസ്ത്ര പണ്ഡിത സഭയാണ് നൽകുന്നത്. ഓരോ വർഷവും ഒന്നോ അധിലധികമോ പ്രമുഖരായ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻമാർക്ക് നോർവേയുടെ രാജാവിനാൽ ഇത് നൽകപ്പെടുന്നു.

ചെന്നൈയിൽ ജനിച്ച ഇന്ത്യൻ-അമേരിക്കൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ S.R. ശ്രീനിവാസവർദ്ധന്, അദ്ദേഹത്തിന്റെ സംഭാവ്യതാ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സംഭാവിനകൾക്ക് പ്രത്യേകിച്ച് അധിക വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ഏകീകരണ സിദ്ധാന്തം രൂപപ്പെടുത്തിയതിന് 2007 ൽ ഏബൽ സമ്മാനം നല്കപ്പെട്ടു.

5

നിർദ്ദേശാങ്ക ജ്യാമിതി

- മുഖവുര
- വിഭജന സൂത്രം
- ത്രികോണത്തിന്റേയും ചതുർഭുജത്തിന്റേയും വിസ്തീർണ്ണം
- നേർരേഖ

No human investigation can be called real science if it cannot be demonstrated mathematically - Leonardo de Vinci

5.1 മുഖവുര

നിർദ്ദേശാങ്കജ്യാമിതി അല്ലെങ്കിൽ വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി എന്നത് നിർദ്ദേശാങ്ക സമ്പ്രദായം, ബീജഗണിതം, വിശകലനം എന്നിവയുടെ തത്വങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ജ്യാമിതിയെ പഠിക്കുന്നതാണ്. ബീജഗണിത ഫലങ്ങളെ ജ്യാമിതീയ രീതിയിൽ വ്യാഖ്യാനിച്ച് അവയെ തമ്മിൽ ബന്ധിപ്പിക്കുന്നു. ഫ്രഞ്ച് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ റെനേ ദേകാർത്തേ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് ജ്യാമിതി പഠിക്കുന്ന രീതി കണ്ടെത്തി. നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളുടെ ഉപയോഗം ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന് അദ്ദേഹം നൽകിയ മഹത്തായ സംഭാവനയാണ്. അത് ജ്യാമിതിയിൽ വിപ്ലവാത്മകരമായ മാറ്റം സൃഷ്ടിച്ചു. അദ്ദേഹം ലാ ജ്യാമെട്രിക് എന്ന കൃതി 1637 ൽ പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു. ഈ ഗ്രന്ഥത്തിൽ അദ്ദേഹം ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നത്തെ ബീജഗണിത സമീകരണമാക്കി മാറ്റി ലഘൂകരിച്ച് ജ്യാമിതിയ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്തു. ഇതേ കാലഘട്ടത്തിൽ ഫ്രഞ്ച് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ പിയറി ഡി ഫെർമാറ്റ് നിർദ്ദേശാങ്ക ജ്യാമിതിയിൽ മഹത്തായ സംഭാവന നല്കി. 1692 ൽ ജർമ്മൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഗോട്ട്ഫ്രീഡ് വിൽഹെം വോൺ ലെബിനിസ് നിർദ്ദേശാങ്ക ജ്യാമിതിയിൽ ഭുജം, നിർദ്ദേശാങ്കം എന്നിവ അഭിമുഖപ്പെടുത്തി. നിക്കോളസ് മുറേ ബട്ലറുടെ അഭിപ്രായത്തിൽ, "ടെസ്കാർട്ടസിന്റെ വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതിയും ന്യൂട്ടൻ, ലെബനിസ് എന്നിവരുടെ കാൽക്കുലസും ആശ്ചര്യകരമായ ഗണിതശാസ്ത്ര രീതി വികസിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്."

9 - ാം തരത്തിൽ നിർദ്ദേശാങ്ക ജ്യാമിതിയുടെ അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങളായ അക്ഷങ്ങൾ, പ്രതലം, രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനനിർണ്ണയം, രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം എന്നിവ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഈ അധ്യായത്തിൽ നമുക്ക് വിഭജനസൂത്രം, ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം, ചായ്‌വ്, നേർരേഖയുടെ സമീകരണം എന്നിവ പഠിക്കാം.

5.2 വിഭജനസൂത്രം

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പ്രശ്നം നമുക്ക് പരിശോധിക്കാം.

A യും B യും രണ്ട് നഗരങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. ഒരാൾ A യിൽ നിന്ന് 60 കി.മീ. കിഴക്കോട്ട്. യാത്ര ചെയ്ത ശേഷം 30 കി.മീ വടക്കോട്ട് യാത്ര ചെയ്ത് B യിൽ എത്തി ചേർന്നു. ഒരു ടെലിഫോൺ കമ്പനി Pയിൽ ഒരു ഗോപുരം സ്ഥാപിക്കാൻ തീരുമാനിച്ചു. അത് A, B എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുന്ന ദൂരത്തെ 1:2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരികമായി വിഭജിക്കുന്നു. ഇപ്പോൾ ഗോപുരത്തിന്റെ സ്ഥാനം Pകണ്ടുപിടിക്കാം.

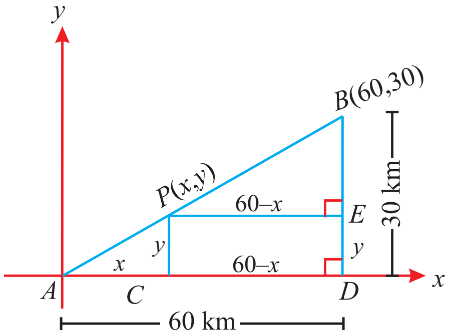
പിയറി ഡി ഫെർമാറ്റ്
(1601-1665)
ഫ്രാൻസ്

17 - ാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ ആരംഭത്തിൽ ഫ്രഞ്ച് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ റെനെ ദേകാർത്തേയും പിയറി ഡി ഫെർമാറ്റും കൂടിയാണ് ഈ ശാഖ വികസിപ്പിച്ചെടുത്തത്. അദ്ദേഹം വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതിയിലെ അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ചു.

വക്രരേഖകളുടെ ഏറ്റവും വലുതും ചെറുതുമായ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കാണുന്നതിനുള്ള യഥാർത്ഥ രീതി അദ്ദേഹം കണ്ടെത്തി. അദ്ദേഹം നിർദ്ദേശാങ്ക ജ്യാമിതിയിൽ ഗണനീയമായ സംഭാവന നല്കി.

റെനേ ദേകാർത്തയുടെ 'ലാ ജ്യാമെട്രിക് ' എന്ന കൃതിയ്ക്കു മുൻപായി ഫെർമാറ്റിന്റെ മാർഗ്ഗ ദർശകമായ കണ്ടുപി ടിത്തം 1636 ൽ കയ്യെഴുത്തു പ്രതിയായി പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു.

മൂലബിന്ദു 'A' എന്നിരിക്കട്ടെ P(x,y) എന്ന ബിന്ദു പരിഗണിക്കുക P,B എന്നിവയിൽ നിന്ന് x അക്ഷത്തിലേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക. അവ C,D ൽ സന്ധിക്കുന്നു. P യിൽ നിന്ന് B D യിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബം E -ൽ സന്ധിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 5.1

AP : PB = 1 : 2 എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്

ΔPAC , ΔBPE എന്നിവ സദൃശത്രികോണങ്ങൾ.

(അധ്യായം 6, ഭാഗം 6.3 നോക്കുക)

$$\frac{AC}{PE} = \frac{PC}{BE} = \frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$$

ഇവിടെ, $\frac{AC}{PE} = \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow \frac{x}{60-x} = \frac{1}{2}$$

$$2x = 60 - x$$

$$x = 20.$$

കൂടാതെ $\frac{PC}{BE} = \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow \frac{y}{30-y} = \frac{1}{2}$$

$$2y = 30 - y \Longrightarrow y = 10.$$

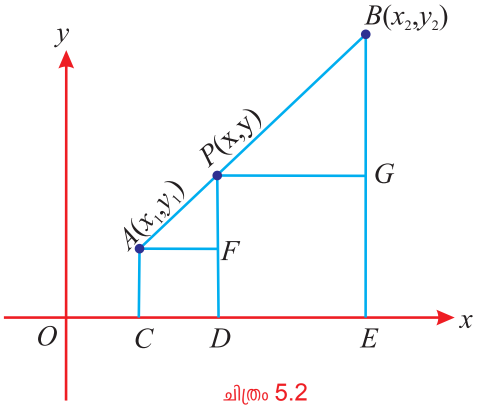
$\therefore$ ഗോപുരത്തിന്റെ സ്ഥാനം $P(20, 10)$.

മുകളിൽ പ്രസ്താവിച്ച പ്രശ്നം ആധാരമാക്കി പൊതുവായ വിഭജനസൂത്രം ആവിഷ്കരിക്കാം.

$A(x_1, y_1)$,$B(x_2, y_2)$ എന്നീ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ $P(x, y)$ എന്ന ബിന്ദു $l : m$. എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതായത് $\frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}$

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്, 5.2



ചിത്രം 5.2

$$AF = CD = OD - OC = x - x_1$$

$$PG = DE = OE - OD = x_2 - x$$

കൂടാതെ, $PF = PD - FD = y - y_1$

$$BG = BE - GE = y_2 - y$$

ΔAFP , ΔPGB എന്നിവ സദൃശ്യത്രികോണങ്ങൾ

(അധ്യായം 6, ഭാഗം 6.3 നോക്കുക)

$$\frac{AF}{PG} = \frac{PF}{BG} = \frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}$$

$\therefore \frac{AF}{PG} = \frac{l}{m}$ $\qquad \frac{PF}{BG} = \frac{l}{m}$

$$\Longrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{l}{m} \qquad \Longrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{l}{m}$$

$$\Longrightarrow mx - mx_1 = lx_2 - lx \qquad \Longrightarrow my - my_1 = ly_2 - ly$$

$$lx + mx = lx_2 + mx_1 \qquad ly + my = ly_2 + my_1$$

$$\Longrightarrow x = \frac{lx_2 + mx_1}{l + m} \qquad \Longrightarrow y = \frac{ly_2 + my_1}{l + m}$$

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ P എന്ന ബിന്ദു $l : m$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദു $P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l+m}, \frac{ly_2 + my_1}{l+m}\right)$ ഈ സൂത്രത്തെ വിഭജനസൂത്രം എന്നുപറയുന്നു.

മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയങ്ങളാണെങ്കിൽ മാത്രമേ ഈ വിഭജനസൂത്രം ഉപയോഗിക്കാൻ സാധിക്കുകയുള്ളൂ എന്ന് വ്യക്തമാകുന്നു.

ഫലങ്ങൾ

(i) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ P എന്ന ബിന്ദു $l : m$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ബാഹ്യമായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദു P $\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l-m}, \frac{ly_2 - my_1}{l-m}\right)$. ഇവിടെ $\frac{l}{m}$ ഋണമാണ്.

(ii) AB യുടെ മധ്യബിന്ദു

AB യുടെ മധ്യബിന്ദു 'M' എങ്കിൽ, AB യെ M എന്ന ബിന്ദു 1:1 അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്നു.

$l = 1, m = 1$ എന്നിവയെ വിഭജന സൂത്രത്തിൽ ആരോപിച്ചാൽ,

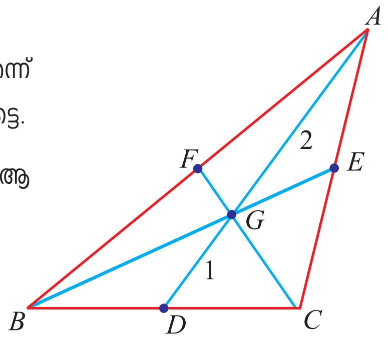
AB യുടെ മധ്യബിന്ദു $M\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

(iii) ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം

ΔABC യുടെ ശീർഷങ്ങൾ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക. AD, BE, CF എന്നിവ ΔABC യുടെ മധ്യമങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമങ്ങൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ പ്രതിഛേദിക്കുന്നു. ആ പ്രതിഛേദബിന്ദുവിനെ കേന്ദ്രകം എന്നു പറയുന്നു.



ചിത്രം. 5.3

ΔABC യുടെ കേന്ദ്രകം G(x , y) എന്നിരിക്കട്ടെ.

BCയുടെ മധ്യബിന്ദു $D\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ സവിശേഷതയനുസരിച്ച് കേന്ദ്രകം G, മധ്യമം AD യെ 2:1 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്നു.

∴ വിഭജന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച്,

കേന്ദ്രകം G(x , y) $= G\left(\frac{2\frac{(x_2 + x_3)}{2} + 1(x_1)}{2+1}, \frac{2\frac{(y_2 + y_3)}{2} + 1(y_1)}{2+1}\right)$

$= G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

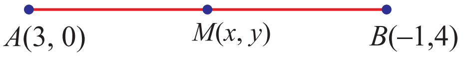
$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ **കേന്ദ്രകം** $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.

ഉദാഹരണം 5.1

$A(3, 0)$, $B(-1, 4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു കാണുക.

നിർദ്ധാരണം (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു $M(x, y)$

$$M(x, y) = M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



ചിത്രം. 5.4

$\therefore$ $(3, 0)$, $(-1, 4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു

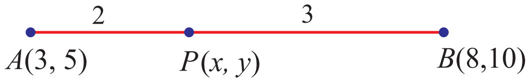
$$M(x, y) = M\left(\frac{3-1}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M(1, 2).$$

ഉദാഹരണം 5.2

$(3, 5), (8, 10)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ $2:3$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദു കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $A(3, 5)$, $B(8, 10)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

P(x,y) എന്ന ബിന്ദു AB യെ 2 :3. എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 5.5

വിഭജന സൂത്രം അനുസരിച്ച്

$$P(x, y) = P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right)$$

ഇവിടെ $x_1 = 3, y_1 = 5, x_2 = 8, y_2 = 10, l = 2, m = 3$

$$\therefore \quad P(x, y) = P\left(\frac{2(8) + 3(3)}{2 + 3}, \frac{2(10) + 3(5)}{2 + 3}\right) = P(5, 7)$$

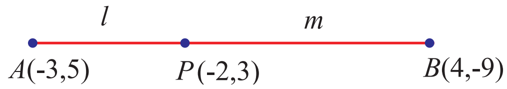
ഉദാഹരണം 5.3

$A(-3, 5)$, $B(4, -9)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ $P(-2, 3)$ എന്ന ബിന്ദു ആന്തരമായി ഏത് അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു ?

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ $A(-3, 5)$, $B(4, -9)$.

$P(-2, 3)$ എന്ന ബിന്ദു AB യെ $l : m$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ.

വിഭജനസൂത്രം ഉപയോഗിച്ച്,



ചിത്രം. 5.6

$$P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right) = P(-2, 3) \quad (1)$$

$x_1 = -3, y_1 = 5, x_2 = 4, y_2 = -9.$

$(1) \Longrightarrow \left(\frac{l(4)+m(-3)}{l+m}, \frac{l(-9)+m(5)}{l+m}\right) = (-2, 3)$

x നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്താൽ,

$$\frac{4l-3m}{l+m} = -2$$

$$\Longrightarrow \quad 6l = m$$

$$\frac{l}{m} = \frac{1}{6}$$

i.e., $l : m = 1 : 6$

ആയതിനാൽ, AB യെ P എന്ന ബിന്ദു ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്ന അംശബന്ധം 1:6 ആകുന്നു

കുറിപ്പ്

(i) മേൽപ്പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽനിന്ന്, y നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തിയാലും അംശബന്ധം ലഭിക്കുന്നു.

(ii) മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയങ്ങളെങ്കിൽ, x നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ, y നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ എന്നിവ താരതമ്യം ചെയ്താൽ കിട്ടുന്ന അംശബന്ധങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കും.

(ii) തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദു രേഖാഖണ്ഡത്തെ $l : m$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്നു എങ്കിൽ $\frac{l}{m}$ ധനമാണ്.

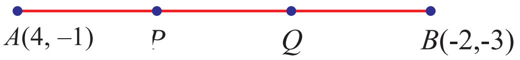
(iii) തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദു രേഖാഖണ്ഡത്തെ $l : m$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ബാഹ്യമായി വിഭജിക്കുന്നു എങ്കിൽ $\frac{l}{m}$ ഋണമാണ്.

ഉദാഹരണം 5.4

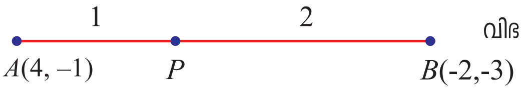
$(4, -1)$, $(-2, -3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ മൂന്ന് തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം A(4, −1), B(−2, −3) എന്നിരിക്കട്ടെ

P(x,y), Q(a,b) എന്നിവ $AP = PQ = QB$ എന്ന രീതിയിൽ വിഭജിക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ. അതായത് P എന്ന ബിന്ദു AB യെ 1:2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്നു. Q എന്ന ബിന്ദു AB യെ 2:1 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്നു.

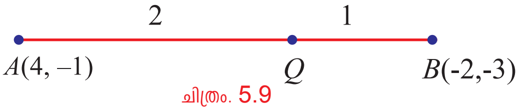


ചിത്രം. 5.7



വിഭ

ചിത്രം. 5.8



ചിത്രം. 5.9

വിഭജനസൂത്രം അനുസരിച്ച്,

$$P\left(\frac{1(-2)+2(4)}{1+2}, \frac{1(-3)+2(-1)}{1+2}\right)$$

$$Q\left(\frac{2(-2)+1(4)}{2+1}, \frac{2(-3)+1(-1)}{2+1}\right)$$

$$\Longrightarrow \; P(x,y) = P\left(\frac{-2+8}{3}, \frac{-3-2}{3}\right), \quad Q(a,b) = Q\left(\frac{-4+4}{3}, \frac{-6-1}{3}\right)$$

$$= P\left(2, -\frac{5}{3}\right) \qquad\qquad = Q\left(0, -\frac{7}{3}\right).$$

PB യുടെ മധ്യബിന്ദു Q വും AQ ന്റെ മധ്യബിന്ദു P യും ആണെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഉദാഹരണം 5.5

$A(4, -6), B(3,-2)$, $C(5, 2)$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം കാണുക.

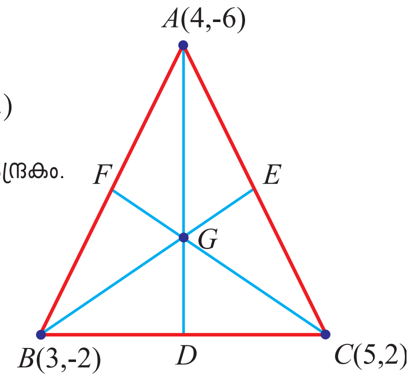
നിർദ്ധാരണം (x_1,y_1) , (x_2,y_2), (x_3,y_3) എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം.

$$G(x , y) = G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

ഇവിടെ $(x_1 , y_1) = (4, -6)$, $(x_2 , y_2) = (3, -2)$, $(x_3,y_3) = (5 , 2)$

$\therefore$ $(4, -6), (3 , -2), (5, 2)$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം.

$$G(x , y) = G\left(\frac{4 + 3 + 5}{3}, \frac{-6 - 2 + 2}{3}\right)$$
$$= G(4, -2).$$



ചിത്രം. 5.10

ഉദാഹരണം 5.6

ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ യഥാക്രമം $(7,3),(6,1),(8,2), (p, 4)$. എങ്കിൽ p യുടെ മൂല്യം കാണുക

നിർദ്ധാരണം സാമാന്തരികത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ $A(7, 3), B(6,1), C(8, 2), D(p, 4)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

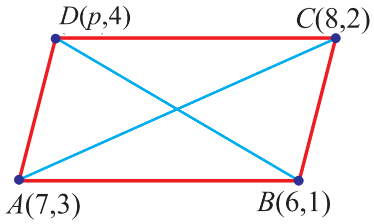
ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.

$\therefore$ AC , BD എന്നീ വികർണ്ണങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ സംഗമിക്കുന്നു.

അതായത്
$$\left(\frac{7+8}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{6+p}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$$
$$\Longrightarrow \left(\frac{6+p}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

x നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തിയാൽ

$$\frac{6+p}{2} = \frac{15}{2}$$
$$\therefore\ p = 9$$



ചിത്രം. 5.11

ഉദാഹരണം 5.7

A(4 , 0) , B(0 , 6)എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു C യും മൂലബിന്ദു O യും എങ്കിൽ $\triangle OAB$യുടെ എല്ലാ ശീർഷകങ്ങളിൽ നിന്നും തുല്യദൂരത്തിലാണ് C എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം AB യുടെ മധ്യബിന്ദു $C\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = C(2, 3)$

$P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)$ എന്നിവ തമ്മിലുള്ള അകലം $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

അതിനാൽ $O(0,0)$, $C\ (2,3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

$$OC = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}.$$

$A(4,0)$, $C(2,3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

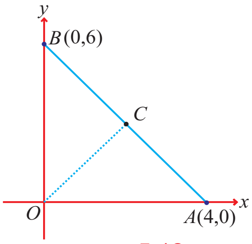
$$AC = \sqrt{(2-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

B $(0,6)$, $C(2,3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$\therefore \quad OC = AC = BC$

$\therefore$ $\triangle OAB$ യുടെ ശീർഷകങ്ങളിൽ നിന്ന് C തുല്യദൂരത്തിലാണ്.



ചിത്രം. 5.12

കുറിപ്പ്

ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു, ആ ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്ത കേന്ദ്രമായിരിക്കും.

അഭ്യാസം 5.1

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു കാണുക.
   (i) $(1,-1)$, $(-5,3)$ (ii) മൂലബിന്ദു, $(0,4)$
2. താഴെ തന്ന ശീർഷങ്ങളോടു കൂടിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം കാണുക.
   (i) $(1,3),(2,7),(12,-,16)$ (ii) $(3,-5),(-7,4),(10,-,2)$
3. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം (-6,4). വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ ഒരു അഗ്രബിന്ദു മൂലബിന്ദു എങ്കിൽ മറ്റേ അഗ്ര ബിന്ദു കാണുക.
4. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം (1,3). രണ്ടു ശീർഷങ്ങൾ (-7,6), (8,5). എങ്കിൽ മൂന്നാമത്തെ ശീർഷം കാണുക.
5. വിഭജന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് A(1,0), B(5,3), C(2,7) , D(−2, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സാമാന്തരികം രൂപീകരിക്കുന്നു എന്നു തെളിയിക്കുക.
6. (3,4), (-6,2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ 3:2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ബാഹ്യമായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കാണുക.
7. (-3,5), (4,-9) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ 1:6 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദു കാണുക.
8. A $(-6,-5)$, B $(-6, 4)$ എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് P. $AP = \frac{2}{9} AB$ എങ്കിൽ P എന്ന ബിന്ദു കാണുക.
9. $A(2,-2)$, $B(-7, 4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ 3 തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കാണുക.
10. $A(-4,0)$, B $(0,6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ 4 തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കാണുക.
11. (6, 4) , $(1,-7)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ x അക്ഷം വിഭജിക്കുന്ന അംശബന്ധം കാണുക.
12. $(-5, 1)$, $(2 , 3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ y അക്ഷം വിഭജിക്കുന്ന അംശബന്ധവും വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുവും കാണുക.
13. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ $(1,-1)$, $(0, 4)$, $(-5, 3)$ എങ്കിൽ മധ്യമങ്ങളുടെ നീളം കാണുക.

5.3 ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

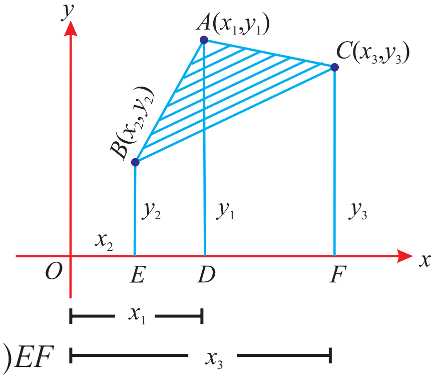
വശങ്ങൾ തന്നാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം എന്ന് നിങ്ങൾ മുമ്പ് പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇപ്പോൾ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റ ശീർഷങ്ങളുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ തന്നാൽ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കാൻ നിങ്ങൾക്ക് കഴിയുമോ ?

ΔABC യുടെ ശീർഷങ്ങൾ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

x അക്ഷത്തിന് ലംബമായി AD, BE, CF വരയ്ക്കുക.

ചിത്രം 5.13 ൽ നിന്ന് $ED = x_1 - x_2$, $DF = x_3 - x_1$,

$EF = x_3 - x_2$.



ചിത്രം. 5.13

ΔABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം

= ABED എന്ന ലംബകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

+ ADFC എന്ന ലംബകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

− BEFC എന്ന ലംബകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$$= \frac{1}{2}(BE + AD)ED + \frac{1}{2}(AD + CF)DF - \frac{1}{2}(BE + CF)EF$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_2y_2 + x_1y_1 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_2y_2 - x_3y_3 + x_2y_3\}$$

$\therefore$ ΔABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$

> $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള
> ΔABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ ച.മാത്രകൾ

കുറിപ്പ്

ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളെ താഴെ തന്ന രീതിയിൽ എഴുതിയും വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കാം. $\frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2\}$ ച. മാത്രകൾ

(അല്ലെങ്കിൽ) $\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ ച.മാത്രകൾ

ചിത്ര രൂപേണ മുകളിൽ പ്രസ്താവിച്ച സൂത്രത്തെ എളുപ്പത്തിലെഴുതാം.

ΔABC യുടെ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $(x_2, y_2($ എന്നീ ശീർഷങ്ങളെ എതിർ ഘടികാര ദിശയിൽ എടുത്ത് നിരയിൽ എഴുതിയാൽ

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{Bmatrix}$$

→ കൊണ്ട് കാണിച്ചിരിക്കുന്ന x_1y_2, x_2y_3 , x_3y_1 എന്നീ ഗുണനഫലങ്ങളെ കൂട്ടുക.

വീണ്ടും ⇢ കൊണ്ട് കാണിച്ചിരിക്കുന്ന x_2y_1, x_3y_2, x_1y_3 എന്നീ ഗുണനഫലങ്ങളെ കൂട്ടുക.

ആദ്യ തുകയിൽ നിന്നും രണ്ടാമത്തെ തുക കുറയ്ക്കുക. ഇതിൽ നിന്നും

$$\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\ y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$$ കിട്ടുന്നു.

കുറിപ്പ്

ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്നതിന് താഴെ പറയുന്ന നിലകൾ ഉപയോഗപ്രദമാണ്.

(i) ബിന്ദുക്കളെ കരട് ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

(ii) ശീർഷങ്ങളെ എതിർഘടികാരദിശയിൽ എടുക്കുക. അല്ലെങ്കിൽ വിസ്തീർണ്ണം ഋണസംഖ്യയായിരിക്കും.

(iii) ΔABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\ y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

5.4 മൂന്നു ബിന്ദുക്കളുടെ സമരേഖീയത

ഒരു തലത്തിലുള്ള മൂന്നോ അതിലധികമോ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു നേർരേഖയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ അവയെ സമരേഖീയ ബിന്ദുക്കൾ എന്നു പറയാം.

മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിൽ മൂന്നാമത്തെ ബിന്ദു സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ അവ സമരേഖീയങ്ങൾ എന്നു പറയാം.

$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$, എന്നീ മൂന്നുബിന്ദുക്കളും സമരേഖീയങ്ങൾ എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക അവയ്ക്ക് ഒരു ത്രികോണം രൂപീകരിക്കാൻ കഴിയുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് ΔABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം പൂജ്യം ആകുന്നു.

അതായത്, $$\frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$$

ഇതിന്റെ വിപരീതവും ശരിയെന്ന് തെളിയിക്കാൻ കഴിയും.

അതുകൊണ്ട് ΔABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= 0 \Leftrightarrow$ A, B,C സമരേഖീയ ബിന്ദുക്കൾ.

5.5 ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3), D(x_4,y_4)$ എന്നിവ ചതുർഭുജം ABCD യുടെ ശീർഷങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ചതുർഭുജം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം = ΔABD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം + ΔBCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_4y_2 + x_1y_4)\}$$

$$+ \frac{1}{2}\{(x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_2) - (x_3y_2 + x_4y_3 + x_2y_4)\}$$

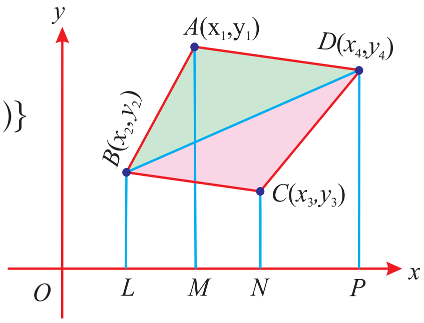
$\therefore$ ചതുർഭുജം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$$

അല്ലെങ്കിൽ

$$\frac{1}{2}\{(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)\}$$ ച.മാത്രകൾ

ചിത്ര രൂപേണ മുകളിൽ പ്രസ്താവിച്ച സൂത്രത്തെ എളുപ്പത്തിലെഴുതാം.



ചിത്രം. 5.14

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളെ എതിർഘടികാരദിശയിൽ നിരയായി എഴുതിയാൽ

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{Bmatrix}$$

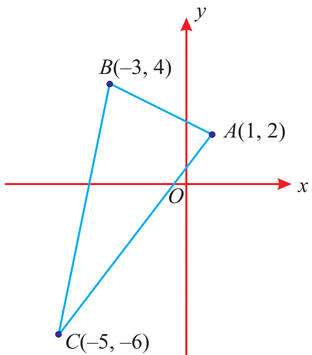
ഇതിൽ നിന്ന് ആവശ്യപ്പെട്ട സൂത്രം താഴെ പറയുന്നവിധം ലഭിക്കുന്നു.

ചദുർഭുജം ABCD യുടെ വിസ്തീർണം

$$=\frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$$ ച.മാത്രകൾ

ഉദാഹരണം 5.8

(1, 2), (−3 , 4), (−5 ,−6) എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക



ചിത്രം 5.15

നിർദ്ധാരണം ബിന്ദുക്കളെ കരട് ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി ക്രമത്തിൽ എടുക്കുക

A(1 , 2), B(−3 , 4) , C (−5, −6)എന്നിവ ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

△ABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\,y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(4 + 18 - 10) - (-6 - 20 - 6)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{12 + 32\} = 22.$$ ച.മാത്രകൾ

ഇവിടെ : $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 \end{Bmatrix}$

ഉദാഹരണം 5.9

ΔABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം 68 ച.മാ. ആണ്. ശീർഷങ്ങൾ യഥാക്രമം A(6 ,7), B(−4 , 1) , C(a , −9) എങ്കിൽ a യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ΔABC യുടെ വിസ്തീണ്ണം

$$\frac{1}{2}\{(6 + 36 + 7a) - (-28 + a - 54)\} = 68$$

ഇവിടെ : $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 6 & -4 & a & 6 \\ 7 & 1 & -9 & 7 \end{Bmatrix}$

$$\Longrightarrow (42 + 7a) - (a - 82) = 136$$

$$\Longrightarrow 6a = 12 \qquad \therefore \quad a = 2$$

ഉദാഹരണം 5.10

A(2 , 3), B(4 , 0), C(6, −3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം ΔABC യുടെ വിസ്തീണ്ണം

$$= \frac{1}{2}\{(0 - 12 + 18) - (12 + 0 - 6)\}$$

ഇവിടെ : $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \end{Bmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\{6 - 6\} = 0.$$

$\therefore$ തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയങ്ങളാണ്.

ഉദാഹരണം 5.11

$(a,0), (0,b)$, എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് $P(x,y)$ എങ്കിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $a = \neq 0$, $b \neq 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം $(x,y), (a,0), (0,b)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കുകൾ സമരേഖീയങ്ങളാണ്.

$\therefore$ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= 0$

$$\Longrightarrow \quad ab - bx - ay = 0$$

$$\therefore \quad bx + ay = ab$$

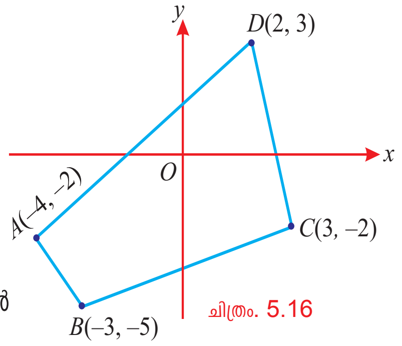
ഇവിടെ: $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} a & 0 & x & a \\ 0 & b & y & 0 \end{Bmatrix}$

$a \neq 0, b \neq 0$, ab കൊണ്ട് ഇരുവശങ്ങളും ഹരിച്ചാൽ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ഉദാഹരണം 5.12

$(-4,-2), (-3,-5), (3,-2), (2,3)$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



ചിത്രം. 5.16

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കളെ കരട് ചിത്രത്തിൽ കുറിച്ച് ശീർഷങ്ങൾ എതിർഘടികാരദിശയിൽ എടുക്കുക.

$A(-4,-2), B(-3,-5), C(3,-2), D(2,3)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ചതുർഭുജം ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം

$$= \frac{1}{2}\{(20+6+9-4)-(6-15-4-12)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{31+25\} = 28 \text{ ച.മാത്രകൾ}$$

ഇവിടെ: $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} -4 & -3 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & -2 & 3 & -2 \end{Bmatrix}$

അഭ്യാസം 5.2

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ശീർഷങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

   (i) $(0, 0), (3, 0), (0, 2)$ (ii) $(5, 2), (3, -5), (-5, -1)$

   (iii) $(-4, -5), (4, 5), (-1, -6)$

2. ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളും വിസ്തീർണ്ണവും താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഓരോന്നിലും a യുടെ മൂല്യം കാണുക

ശീർഷങ്ങൾ	വിസ്തീർണ്ണം (ച.മാ.)
(i) മൂലബിന്ദു, (4, a), (6, 4)	17
(ii) (a, a), (4, 5), (6, −1)	9
(iii) (a, −3), (3, a), (−1, 5)	12

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയങ്ങളാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(i) $(4, 3), (1, 2), (-2, 1)$ (ii) $(-2, -2), (-6, -2), (-2, 2)$

(iii) $\left(-\frac{3}{2}, 3\right), (6, -2), (-3, 4)$

4. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയങ്ങളെങ്കിൽ k യുടെ മൂല്യം കാണുക.

(i) $(k, -1), (2, 1), (4, 5)$ (ii) $(2, -5), (3, -4), (9, k)$,

(iii) $(k, k), (2, 3), (4, -,1)$

5. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ശീർഷങ്ങളുള്ള ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

(i) $(6, 9), (7, 4), (4, 2), (3, 7)$, (ii) $(-3, 4), (-5, -6), (4, -1), (1, 2)$

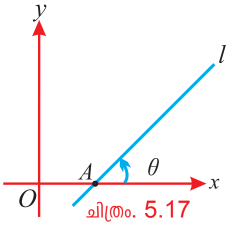
(iii) $(-4, 5), (0, 7), (5, -5), (-4, -2)$

6. $(h, 0), (a, b), (0, k)$ എന്നീ മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ ഒരു നേർരേഖയിലാണെങ്കിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1, h, k \neq 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

7. $(0, -1), (2, 1), (0, 3)$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ കൊണ്ടുണ്ടാകുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കാണുക.

5.6 നേർരേഖകൾ

5.6.1 ചെരിവുകോൺ



ചിത്രം. 5.17

നേർരേഖ l നും x അക്ഷത്തിന്റെ ധനദിശയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോണിനെ ചെരിവുകോൺ എന്നു പറയുന്നു. (ഈ കോണിനെ എതിർഘടികാര ദിശയിൽ അളക്കേണ്ടതാണ്).

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

ഒരു നേർരേഖയുടെ ചെരിവുകോൺ θ എങ്കിൽ

(i) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

(ii) **തിരശ്ചീന രേഖയുടെ ചെരിവുകോൺ $\theta = 0^\circ$ അല്ലെങ്കിൽ 180°. ലംബരേഖയുടെ ചെരിവുകോൺ $\theta = 90^\circ$**

(iii) **ആരംഭത്തിൽ, x അക്ഷത്തിൽ ഉള്ള ഒരു നേർരേഖ x അക്ഷത്തിലെ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദു A യിൽ നിന്ന് എതിർ ഘടികാരദിശയിൽ ചുറ്റി അവസാനം x അക്ഷത്തിൽ തന്നെ എത്തുന്നു. നേർരേഖയുടെ ആദ്യഘട്ടത്തിലെ ചെരിവുകോൺ 0° യും അവസാന ഘട്ടത്തിലെ ചെരിവുകോൺ 180° യും ആകുന്നു.**

(iv) **x അക്ഷത്തിനു ലംബമായ നേർരേഖകളെ നേർലംബ രേഖകൾ എന്നു പറയുന്നു. അപ്രകാരം ലംബമല്ലാത്ത നേർരേഖകളെ നേർലംബമല്ലാത്ത രേഖകൾ എന്നു പറയുന്നു.**

5.6.2 ഒരു നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ്

നിർവ്വചനം

ലംബമല്ലാത്ത ഒരു നേർരേഖയുടെ (l) ചെരിവുകോൺ θ എങ്കിൽ $\tan \theta$ യെ ചെരിവ് അഥവാ ചായ്‌വ് എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ m എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് കുറിക്കുന്നു. ഒരു നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $m = \tan \theta$, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ, \theta \neq 90^\circ$

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

(i) x അക്ഷത്തിന്റെ അഥവാ x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് പൂജ്യമാകുന്നു.

(ii) y അക്ഷത്തിന്റെ അഥവാ y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല. കാരണം $\tan 90^0$ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല. ഒരു നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് എന്നത് നേർലംബമല്ലാത്ത നേർരേഖയാണ്.

(iii) θ ഒരു ന്യൂനകോൺ ആണെങ്കിൽ ചെരിവ് ധനവും θ അധിക കോൺ എങ്കിൽ ചെരിവ് ഋണവുമായിരിക്കും.

5.6.3 ഒരു നേർരേഖയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തന്നിരുന്നാൽ നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ്

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ എന്നിവ നേർരേഖ $'l'$ ലുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും θ ചെരിവു കോണും ആകുന്നു. $(0^\circ \le \theta \le 180^\circ, \ \theta \ne 90^\circ)$

നേർരേഖ AB, x അക്ഷത്തെ C ൽ ഛേദിക്കുന്നു. l എന്ന രേഖയുടെ ചായ്‌വ് $m = \tan\theta$ (1)

x അക്ഷത്തിന് ലംബമായി AD, BE വരയ്ക്കുക BE യ്ക്ക് ലംബമായി A യിൽ നിന്ന് AF വരയ്ക്കുക

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$AF = DE = OE - OD = x_2 - x_1$$

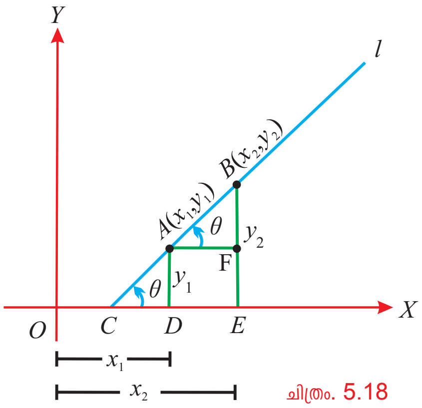
$$BF = BE - EF = BE - AD = y_2 - y_1$$

കൂടാതെ $\angle DCA = \angle FAB = \theta$

ΔABF, എന്ന സമകോണത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$x_1 \ne x_2$ ആയിരുന്നാൽ, $\tan\theta = \dfrac{BF}{AF} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (2)

(1), (2), ൽ നിന്ന് ചായ്‌വ് $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



ചിത്രം. 5.18

$(x_1, y_1), \ (x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ്

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ഇവിടെ $\theta \ne 90^\circ$ ആയതിനാൽ $x_1 \ne x_2$

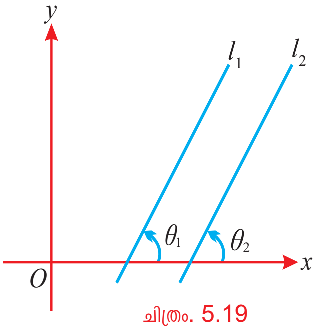
കുറിപ്പ്

$(x_1, y_1), \ (x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വിനെ താഴെ പറയുന്ന വിധം വ്യാഖ്യാനിക്കാം. ചായ്‌വ് $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\text{y നിർദ്ദേശാങ്ക മൂല്യങ്ങളിലുള്ള വ്യത്യാസം}}{\text{x നിർദ്ദേശാങ്ക മൂല്യങ്ങളിലുള്ള വ്യത്യാസം}}$.

5.6.4 ചായ്‌വുകളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാന്തരത്വത്തിനുള്ള നിബന്ധന

l_1, l_2 എന്നീ സമാന്തര രേഖകളുടെ ചായ്‌വുകൾ m_1, m_2 ചെരിവുകോണുകൾ θ_1, θ_2 എന്നിരിക്കട്ടെ.

l_1, l_2 എന്നിവ സമാന്തര രേഖകൾ, അതിനാൽ θ_1, θ_2 എന്നിവയുടെ ചെരിവു കോണുകൾ സമം.



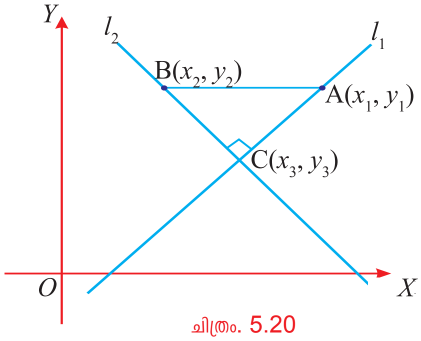
ചിത്രം. 5.19

$$\therefore \tan\theta_1 = \tan\theta_2 \implies m_1 = m_2$$

$\therefore$ രണ്ടു ലംബമല്ലാത്ത നേർരേഖകൾ സമാന്തരമായിരുന്നാൽ അവയുടെ ചായ്‌വുകൾ തുല്ല്യമാണ്. വിപരീതമായി തുല്യചായ്‌വുകൾ ഉള്ള രണ്ടു നേർരേഖകൾ സമാന്തരമായിരിക്കും.

5.6.5 ചായ്‌വുകളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ലംബത്വത്തിനുള്ള നിബന്ധന

l_1, l_2 എന്നീ രണ്ടു ലംബനേർരേഖകൾ യഥാക്രമം $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുചെല്ലുന്നു. അവയുടെ ചായ്‌വുകൾ m_1, m_2 എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം. 5.20

ലംബരേഖകളുടെ സംഗമബിന്ദു $C(x_3, y_3)$

l_1 എന്ന നേർഖയുടെ ചായ്‌വ് $m_1 = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$

l_2 എന്ന നേർഖയുടെ ചായ്‌വ് $m_2 = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

സമകോണത്രികോണം $\triangle ABC$ യിൽ,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\implies (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\implies (x_2 - x_3 + x_3 - x_1)^2 + (y_2 - y_3 + y_3 - y_1)^2$$
$$= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\implies (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_3)^2 + (y_3 - y_1)^2 + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$$
$$= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\implies 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = 0$$

$$\implies (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = -(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

$$\left(\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\right)\left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right) = -1.$$

$$\implies m_1 m_2 = -1 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

ചായ്‌വുകൾ. m_1 , m_2 , ഉള്ള രണ്ടു ലംബമല്ലാത്ത നേർ രേഖകൾ

l_1, l_2 പരസ്പരം ലംബമാണെങ്കിൽ $m_1 m_2 = -1$.

$m_1 m_2 = -1$, എങ്കിൽ രണ്ടു നേർരേഖകൾ പരസ്പരം ലംബമാണ്.

കുറിപ്പ്

x അക്ഷം, y അക്ഷം എന്നിവ പരസ്പരം ലംബമാണ്. എന്നാൽ $m_1 m_2 = -1$ എന്ന നിബന്ധന ശരിയല്ല. കാരണം x അക്ഷത്തിന്റെ ചായ്വ് 'o'. y അക്ഷത്തിന്റെ ചായ്വു നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

ഉദാഹരണം 5.13

ചായ്വ് $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ഉള്ള നേർരേഖയുടെ ചെരിവുകോൺ കാണുക

നിർദ്ധാരണം രേഖയുടെ ചെരിവുകോൺ θ എങ്കിൽ

ചായ്വ് $m = \tan\theta$, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $\theta \neq 90^\circ$.

$$\therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \theta = 30^\circ$$

ഉദാഹരണം 5.14

ചെരിവു കോൺ 45° യുള്ള നേർരേഖയുടെ ചായ്വ് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം നേർരേഖയുടെ ചായ്വ് θ എങ്കിൽ

ചായ്വ് $m = \tan\theta$

$m = \tan 45^\circ \quad (\because \theta = 45^0)$

$\implies m = 1.$

ഉദാഹരണം 5.15

$(3, -2), (-1, 4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്വ് കാണുക

നിർദ്ധാരണം (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്വ്

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$(3, -2), (-1, 4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്വ്

$$\text{m} = \frac{4 + 2}{-1 - 3} = -\frac{3}{2}.$$

ഉദാഹരണം 5.16

A(5, −2), B(4, −1), C(1, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയങ്ങളാണെന്ന് ചായ്വ് എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം (x_1, y_1) (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്വ് $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

A(5, -2) B(4, -1)എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്വ് $m_1 = \frac{-1 + 2}{4 - 5} = -1$

B(4, −1), C(1, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്വ് $m_2 = \frac{2 + 1}{1 - 4} = -1$

A B യുടെ ചായ്വ് = BC യുടെ ചായ്വ്

കൂടാതെ B എന്ന ബിന്ദു AC യ്ക്കും BC യ്ക്കും പൊതുവാണ്.

$\therefore$ A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ രേഖീയങ്ങളാണ്.

ഉദാഹരണം 5.17

$(-2\ ,-1), (4\ ,0), (3\ ,3)\ , (-3\ ,2)$ എന്നിവ യഥാക്രമം ഒരു സാമാന്തരികം രൂപീകരിക്കുന്നു എന്ന് ചായ്‌വ് ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.

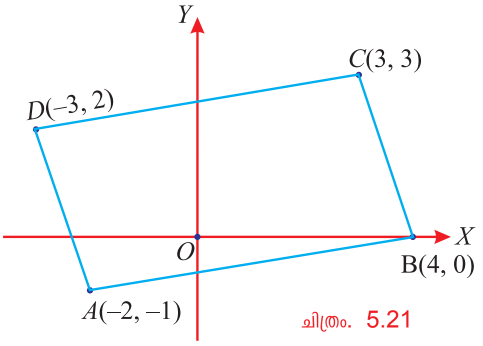
നിർദ്ധാരണം $A(-2\ ,-1), B(4\ ,0), C(3\ ,3), D(-3\ ,2)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$AB \text{ യുടെ ചായ്‌വ് } = \frac{0+1}{4+2} = \frac{1}{6}$$

$$CD \text{ യുടെ ചായ്‌വ് } = \frac{2-3}{-3-3} = \frac{1}{6}$$

$\therefore$ AB യുടെ ചായ്‌വ് = CD യുടെ ചായ്‌വ്

അതായത് AB ll CD. (1)



ചിത്രം. 5.21

$$BC \text{ യുടെ ചായ്‌വ് } = \frac{3-0}{3-4} = -3$$

$$AD \text{ യുടെ ചായ്‌വ് } = \frac{2+1}{-3+2} = -3$$

$\therefore$ BC യുടെ ചായ്‌വ് = AD യുടെ ചായ്‌വ്

അതായത് BC ll AD. (2)

(1) , (2), ൽ നിന്ന് ABCD യുടെ എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളാണ്.

$\therefore$ ABCD ഒരു സാമാന്തരികം

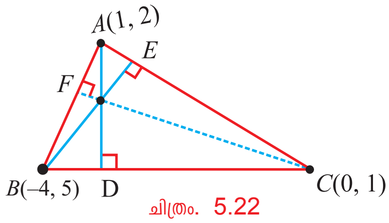
ഉദാഹരണം 5.18

$\triangle ABC$ യുടെ ശീർഷങ്ങൾ $A(1\ ,2), B(-4\ ,5), C(0\ ,1)$ എങ്കിൽ ഉന്നതികളുടെ ചായ്‌വുകൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $\triangle ABC$ ഉന്നതികൾ AD, BE, CF എന്നിരിക്കട്ടെ

$$BC \text{ യുടെ ചായ്‌വ് } = \frac{1-5}{0+4} = -1$$

ADയുടേയും BC യുടേയും ഉന്നതികൾ ലംബമാണ്.



ചിത്രം. 5.22

AD യുടെ ചായ്‌വ് $= 1 \quad (\because m_1 m_2 = -1)$

$$AC \text{ യുടെ ചായ്‌വ് } = \frac{1-2}{0-1} = 1$$

BE യുടെ ചായ്‌വ് $= -1$ $\qquad \because BE \perp AC$

കൂടാതെ $$AB \text{ യുടെ ചായ്‌വ് } = \frac{5-2}{-4-1} = -\frac{3}{5}$$

$\therefore$ CF യുടെ ചായ്‌വ് $= \frac{5}{3}$ $\qquad \because CF \perp AB$

അഭ്യാസം 5.3

1. താഴെ കൊടുത്ത ചായ്‌വ് ഉള്ള നേർരേഖയുടെ ചെരിവുകോൺ കാണുക.
   (i) 1 (ii) $\sqrt{3}$ (iii) 0
2. താഴെ കൊടുത്ത ചെരിവു കോണുള്ള നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വു കാണുക.
   (i) 30° (ii) 60° (iii) 90°
3. താഴെ കൊടുത്ത ബിന്ദുക്കൾ വഴിയായി പോകുന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് കാണുക
   (i) $(3, -2), (7, 2)$ (ii) $(2, -4)$, മൂലബിന്ദു
   (iii) $(1+\sqrt{3}, 2), (3+\sqrt{3}, 4)$
4. താഴെ കൊടുത്ത ബിന്ദുക്കൾ വഴിയായി പോകുന്ന നേർരേഖയുടെ ചെരിവുകോൺ കാണുക
   (i) $(1, 2), (2, 3)$ (ii) $(3, \sqrt{3}), (0, 0)$
   (iii) $(a, b), (-a, -b)$
5. മൂലബിന്ദു വഴി കടന്നുചെല്ലുന്നതും (0, -4), (8,0) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ മധ്യബിന്ദുവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വു കാണുക
6. സമചതുരം ABCD യുടെ ഒരു വശം AB, x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാണ് എങ്കിൽ താഴെ പറയുന്നവ കാണുക
   (i) AB യുടെ ചായ്‌വ് (ii) BC യുടെ ചായ്‌വ് (iii) വികർണ്ണം AC യുടെ ചായ്‌വ്
7. സമഭുജത്രികോണം ABC യുടെ ഒരു വശം BC, x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാണ് എങ്കിൽ AB, BC എന്നിവയുടെ ചായ്‌വ് കാണുക
8. ചായ്‌വ് ഉപയോഗിച്ച് താഴെ കൊടുത്ത ബിന്ദുക്കൾ ഒരോന്നും സമരേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
   (i) $(2, 3), (3, -1), (4, -5)$
   (ii) $(4, 1), (-2, -3), (-5, -5)$ (iii) $(4, 4), (-2, 6), (1, 5)$
9. (a, 1), (1, 2), (0, b+1) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയങ്ങളെങ്കിൽ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക
10. $A(-2, 3)$, $B(a, 5)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖ $C(0, 5)$, $D(-2, 1)$. എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമാണ്, എങ്കിൽ a യുടെ മൂല്യം കാണുക.
11. A(0,5), B(4,2)എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖ C(-1,2) ,D(5,y) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയ്ക്കു ലംബമാണ്, എങ്കിൽ b യുടെ മൂല്യം കാണുക
12. A(1,8), B(-2,4), C(8,5) എന്നിവ ABC യുടെ ശീർഷങ്ങളാണ് M,N എന്നിവ യഥാക്രമം AB, AC യുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളാണ് എങ്കിൽ MN ന്റെ ചായ്‌വു കണ്ടുപിടിച്ച് MN ll BCഎന്നത് ശരി നോക്കുക.
13. (6,7), (2,-9), (-4,1) എന്നിവ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളാണ്. എങ്കിൽ അതിന്റെ മധ്യമങ്ങളുടെ ചായ്‌വുകൾ കാണുക.
14. A(-5, 7), B(-4, -5), C(4,5) എന്നിവ △ABC യുടെ ശീർഷങ്ങളാണ്. എങ്കിൽ അതിന്റെ മധ്യമങ്ങളുടെ ചായ്‌വുകൾ കാണുക.

15. (1,2), (-2,2) (-4,-3), (4,5) എന്നീ ശീർഷങ്ങൾ യഥാക്രമം ഒരു സാമാന്തരികം രൂപികരിക്കുന്നു എന്ന് ചായ്‌വിന്റെ ആശയം ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.

16 A (-2,-4) B(5,-1), C(6,4) D(-1,1) എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5.6.6 നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

തലത്തിലെ ഒരു രേഖ L എന്നിരിക്കട്ടെ. x,y എന്നിവയിലുള്ള ഏകഘാതസമീകരണം $px + qy + r = 0$ L എന്ന നേർരേഖയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽ x, y നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു എന്ന് സങ്കല്പിക്കുക. ഈ സമീകരണത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന x,y യുടെ ഏതെങ്കിലും മൂല്യങ്ങൾ രേഖ L ലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഈ സമീകരണത്തെ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം എന്നു പറയുന്നു. ബീജഗണിത രീതിയിൽ L എന്ന രേഖയെ വിശദീകരിക്കാം. L എന്ന നേർരേഖ, താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു തരത്തിൽപ്പെടുന്നു.

(i) തിരശ്ചീന രേഖ (ii) ലംബരേഖ (iii) തിരശ്ചീനവുമല്ല ലംബവുമല്ല

(i) ഒരു തിരശ്ചീനരേഖ: L ഒരു തിരശ്ചീന രേഖ എന്നിരിക്കട്ടെ.

L എന്നത് x അക്ഷം അഥവാ x അക്ഷമല്ലാത്ത ഒരു തിരശ്ചീനരേഖ ആയിരിക്കും.

നില (a) L എന്നത് x അക്ഷം എങ്കിൽ (x,y) എന്ന ബിന്ദു L ൽ സ്ഥി**തി ചെയ്യുന്നു**

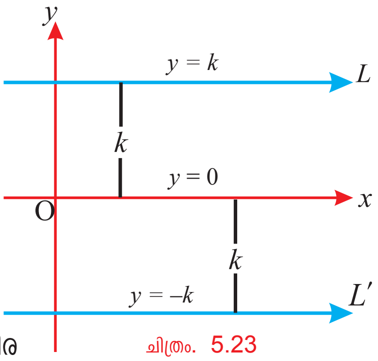
y = 0 , x ഏതെങ്കിലും ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ

അതിനാൽ y = 0 എന്നത് x അക്ഷത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

∴ x അക്ഷത്തിന്റെ സമീകരണം y = 0

നില (b) L എന്നത് x അക്ഷമല്ലാത്ത ഒരു തിരശ്ചീനരേഖ

അതായത് L എന്നത് x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായിരിക്കും



ചിത്രം. 5.23

∴ (x, y) എന്ന ബിന്ദു L ൽ സ്ഥിതി ചെയ്താൽ നിർദ്ദേശാങ്കം ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യയും x ഏതെങ്കിലും ഒരു വാസ്തിവികസംഖ്യയും ആകുന്നു.

∴ x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം y = k, k ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ

k > 0 എങ്കിൽ L , x അക്ഷത്തിന് മുകളിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. k < 0 എങ്കിൽ L , x അക്ഷത്തിന് താഴെയായിരിക്കും. k = 0 എങ്കിൽ L , x അക്ഷം തന്നെയായിരിക്കും.

(ii) ലംബരേഖ: L ഒരു ലംബരേഖ

അതായത് L എന്നത് y അക്ഷം അഥവാ y അക്ഷമല്ലാത്ത ഒരു ലംബരേഖയായിരിക്കും.

നില (a) L എന്നത് y അക്ഷമെങ്കിൽ (x, y) എന്ന ബിന്ദു L എന്ന രേഖയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

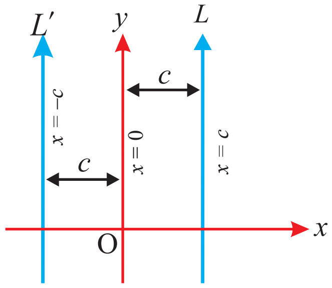
$x = 0$, y ഏതെങ്കിലും ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ

$x = 0$, y അക്ഷത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

∴ y അക്ഷത്തിന്റെ സമീകരണം $x = 0$

നില (b) L എന്നത് y അക്ഷമല്ലാത്ത മറ്റൊരു ലംബരേഖ ഇത് y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാണ്.

(x, y) എന്ന ബിന്ദു L എന്ന രേഖയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്താൽ x നിർദ്ദേശാങ്കം ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയും y ഏതെങ്കിലും ഒരു വാസ്തവികസംഖ്യയും ആയിരിക്കും.



ചിത്രം. 5.24

∴ y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു രേഖയുടെ സമീകരണം $x = c$, c ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ

$c > 0$, എങ്കിൽ L , y അക്ഷത്തിനു വലതുഭാഗത്ത് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

$c > 0$, എങ്കിൽ L , y അക്ഷത്തിനു ഇടതുഭാഗത്തു സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

$c = 0$, ആയാൽ y അക്ഷം തന്നെയായിരിക്കും.

(iii) തിരശ്ചീനവുമല്ല ലംബവുമല്ല:

L തിരശ്ചീനവുമല്ല, ലംബവുമല്ല എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഒരു സമീകരണത്തിലൂടെ L നെ എങ്ങനെ നമുക്ക് പത്രിനിധീകരിക്കാം ?

ചെരിവുകോൺ θ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ചെരിവുകോണും L ലെ ഒരു ബിന്ദുവും അറിഞ്ഞാൽ വളരെ എളുപ്പത്തിൽ L നെ പ്രതിനിധീകരിക്കാം.

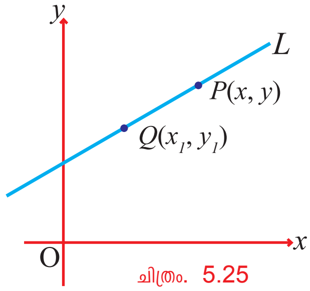
> **L എന്ന ലംബമല്ലാത്ത നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് m കാണുന്നവിധം.**
>
> (i) $m = \tan\theta$, **ചെരിവുകോൺ θ അറിയാമെങ്കിൽ.**
>
> (ii) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, **L ലെ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കൾ (x_1 , y_1), (x_2 , y_2) അറിയാമെങ്കിൽ**
>
> (iii) $m = 0, \Leftrightarrow L$ **ഒരു തിരശ്ചീനരേഖ.**

L ലംബരേഖയല്ലെന്ന് പരിഗണിച്ച് നേർരേഖയുടെ സമീകരണം താഴെപ്പറയുന്ന വിധം കണ്ടുപിടിക്കാം.

(a) ചായ്‌വ് - ബിന്ദു രൂപം (b) രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾരൂപം

(c) ചായ്‌വ് - അന്തഃഖണ്ഡരൂപം (d) അന്തഃഖണ്ഡരൂപം

(a) ചായ്‌വ് – ബിന്ദു രൂപം



ചിത്രം. 5.25

നേർരേഖ L ന്റെ ചായ്‌വ് m, Q (x_1 , y_1) L ൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു ബിന്ദുവും എന്നിരിക്കട്ടെ.

തന്നിട്ടുള്ള നേർരേഖയിൽ P(x , y)എന്നത് Q അല്ലാത്ത ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു എന്നിരിക്കട്ടെ. നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow m(x - x_1) = y - y_1$

ചായ്‌വ് mഉം (x_1 , y_1)എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

$y - y_1 = m(x - x_1)$ ആകുന്നു , L ലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കൾ (x , y) നും (1)

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

(i) x, y എന്നിവയിലുള്ള ഏകഘാതസമീകരണം (1)നെ L എന്ന നേർരേഖയിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിന്റേയും x, y നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തി. സമീകരണത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന ഏതൊരു x, yയും L ലെ ബിന്ദുവിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കമായിരിക്കും. അതായത് (1) നെ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം എന്നു വിളിക്കുന്നു.

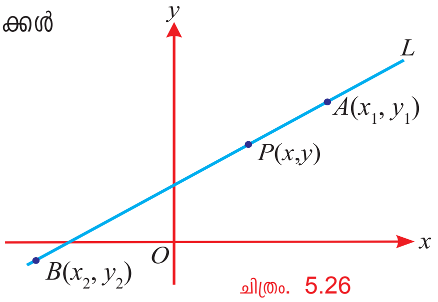
(ii) y നിർദ്ദേശാങ്കമൂല്യങ്ങളിലുള്ള വ്യത്യാസം x നിർദ്ദേശാങ്ക മൂല്യങ്ങളിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിനു നേർ അനുപാതത്തിലായിരിക്കും എന്ന് (1) വ്യക്തമാക്കുന്നു. അനുപാതസ്ഥിരം m ചായ്‌വ് ആയിരിക്കും.

(b) രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ രൂപം

(x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കൾ L എന്ന നേർരേഖ വഴി കടന്നുചെല്ലുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ.

L കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്, L ന്റെ ചായ്‌വ് കണ്ടുപിടിച്ച് (1) ൽ ആരോപിക്കുക.

L ന്റെ ചായ്‌വ്



ചിത്രം. 5.26

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_2 \neq x_1 \ (L \text{ ലംബരേഖയല്ല}).$$

$$(1) \implies y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

$$\implies \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \implies \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$ L ലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കൾ (x, y) നും (2)

കുറിപ്പ്

L ന്റെ സമവാക്യം കിട്ടുന്നതിന് (x_1, y_1) നുപകരം (x_2, y_2) ഉപയോഗിക്കാം

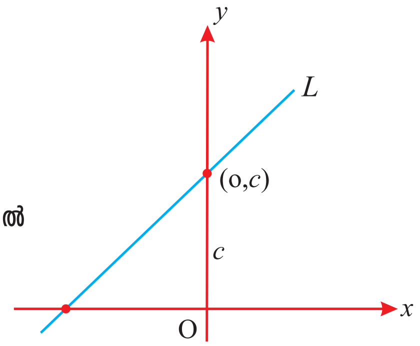
(c) ചായ്‌വ് – അന്തഃഖണ്ഡരൂപം

L എന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് m, y അന്തഃഖണ്ഡം c എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക

y അന്തഃഖണ്ഡം c ആയതിനാൽ $(0, c)$ L ൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. (1) ൽ $(x_1, y_1) = (0, c)$ ആരോപിച്ചാൽ

$$y - c = m(x - 0)$$

$\implies \quad y = mx + c \quad$ **L ലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കൾ** (x, y) (3)



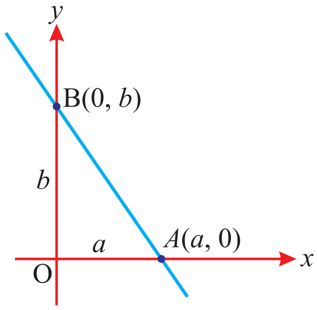
ചിത്രം. 5.27

അതിനാൽ $y = mx + c$ എന്നത് ചായ്‌വ് – അന്തഃഖണ്ഡ രൂപത്തിൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണമാകുന്നു

(d) അന്തഃഖണ്ഡരൂപം

x, y അക്ഷങ്ങളിന്മേൽ പൂജ്യമല്ലാത്ത അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b ഉണ്ടാക്കുന്നു എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കാം.

$\therefore$ നേർരേഖ x അക്ഷത്തെ A(a, 0) ലും, y അക്ഷത്തെ B(0, b) ലും ഛേദിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 5.28

AB യുടെ ചായ്‌വ് $m = -\dfrac{b}{a}$.

$(1) \Longrightarrow y - 0 = -\dfrac{b}{a}(x - a)$

$\Longrightarrow \quad ay = -bx + ab$

$$bx + ay = ab$$

ab കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

$\therefore$ x അന്തഃഖണ്ഡം a യും y അന്തഃഖണ്ഡം b യും ഉള്ള ഒരു നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ L ലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കൾ } (x, y) \text{നും} \qquad (4)$$

കുറിപ്പ്

(i) **ചായ്‌വ് m, x അന്തഃഖണ്ഡം d ഉള്ള L എന്ന നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $y = m(x - d)$.**

(ii) $y = mx$ **എന്ന നേർരേഖ മൂലബിന്ദുവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നു. ($m \neq 0, x, y$ അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ പൂജ്യം)**

(iii) (1), (2) , (4) **എന്നീ സമവാക്യങ്ങളെ ലഘുകരിച്ചാൽ ചായ്‌വ് അന്തഃഖണ്ഡ രൂപത്തിലുള്ള (3) ലഭിക്കുന്നു.**

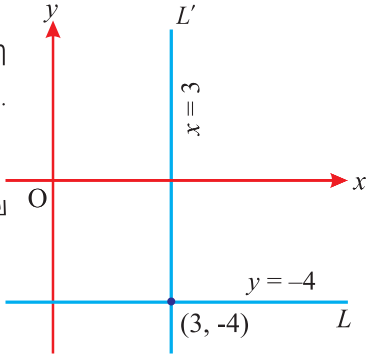
(iv) (1), (2), (3) , (4) **എന്നീ ഓരോ സമവാക്യത്തേയും $px + qy + r = 0$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാൻ കഴിയും (L ലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കൾ (x, y) ക്കും) ഇതിനെ നേർരേഖയുടെ പൊതു രൂപം എന്നു പറയുന്നു.**

ഉദാഹരണം 5.19

നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരവും $(3, -4)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

(3,4) എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുചെല്ലുന്നതും x അക്ഷം, y അക്ഷം എന്നിവയ്ക്ക് സമാന്തരവുമായ രണ്ടു നേർരേഖകൾ യഥാക്രമം L, L' എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം. 5.29

L ലെ എല്ലാ ബിന്ദുവിന്റെയും y നിർദ്ദേശാങ്കം -4 ആകുന്നു.

$\therefore$ L എന്ന നേർരേഖയുടെ സമവാക്യം $y = -4$. അതുപോലെ L'ലെ എല്ലാ ബിന്ദുവിന്റെയും x നിർദ്ദേശാങ്കം 3 ആകുന്നു.

L' എന്ന നേർരേഖയുടെ സമവാക്യം $x = 3$.

ഉദാഹരണം 5.20

ചെരിവുകോൺ 45°, y അന്തഃഖണ്ഡം $\frac{2}{5}$ എങ്കിൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ്

$$m = \tan\theta$$
$$= \tan 45^\circ = 1$$
y - അന്തഃഖണ്ഡം $c = \frac{2}{5}$

ചായ്‌വ് അന്തഃഖണ്ഡ രൂപത്തിൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

$$y = mx + c$$
$$y = x + \frac{2}{5} \implies y = \frac{5x+2}{5}$$

$\therefore$ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $5x - 5y + 2 = 0$

ഉദാഹരണം 5.21

ചായ്‌വ് $\frac{1}{3}$ ഉം $(-2, 3)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ചായ്‌വ് $m = \frac{1}{3}$, $(x_1, y_1) = (-2, 3)$

ചായ്‌വ് ബിന്ദുരൂപത്തിൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$\implies y - 3 = \frac{1}{3}(x+2)$$

$\therefore$ $x - 3y + 11 = 0$ ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം

ഉദാഹരണം 5.22

$(-1, 1), (2, -4)$. എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴികടന്നു ചെല്ലുന്ന നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$x_1 = -1$, $y_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y_2 = -4$.

രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ രൂപത്തിൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$
$$\implies \frac{y-1}{-4-1} = \frac{x+1}{2+1}$$
$$\implies 3y - 3 = -5x - 5$$

$5x + 3y + 2 = 0$ ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം.

ഉദാഹരണം 5.23

A(2, 1), B(−2, 3) , C(4, 5) എന്നിവ $\triangle ABC$ യുടെ ശീർഷങ്ങളാണ്. A വഴിയുള്ള മധ്യമത്തിന്റെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമം എന്നത് ഒരു ശീർഷത്തേയും അതിന്റെ എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യ ബിന്ദുവിനേയും യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയാണ്.

BC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു D എന്നിരിക്കട്ടെ

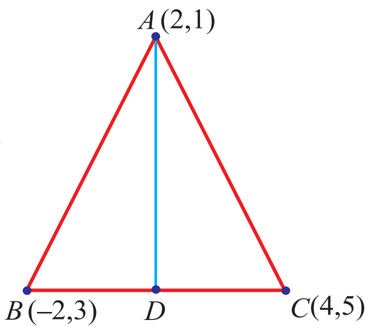
$\therefore$ BC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു $D\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = D(1, 4)$

AD യുടെ സമീകരണം

$$\frac{y-1}{4-1} = \frac{x-2}{1-2} \qquad \because (x_1, y_1) = (2, 1), (x_2, y_2) = (1, 4)$$

$$\frac{y-1}{3} = \frac{x-2}{-1}$$

$\therefore$ $3x + y - 7 = 0$ ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം



ചിത്രം. 5.30

ഉദാഹരണം 5.24

x, y അക്ഷങ്ങളിന്മേലുള്ള അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ യഥാക്രമം $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ എങ്കിൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം നേർരേഖയുടെ x അന്തഃഖണ്ഡം $a = \frac{2}{3}$

നേർരേഖയുടെ y അന്തഃഖണ്ഡം $b = \frac{3}{4}$

അന്തഃഖണ്ഡ രൂപത്തിൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \implies \frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1$$

$$\implies \frac{3x}{2} + \frac{4y}{3} = 1$$

അതായത്, $9x + 8y - 6 = 0$ ആവശ്യപ്പെട്ട നിർദ്ധാരണം.

ഉദാഹരണം 5.25

(6,-2) വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതും അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളുടെ തുക 5 ഉം ഉള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം x, y അക്ഷങ്ങളിന്മേലുള്ള അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b എന്നിരിക്കട്ടെ.

അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളുടെ തുക $a + b = 5$

$\implies b = 5 - a$

അന്തഃഖണ്ഡരൂപത്തിൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \implies \frac{x}{a} + \frac{y}{5-a} = 1$$

$$\implies \frac{(5-a)x + ay}{a(5-a)} = 1$$

$$\therefore \quad (5-a)x + ay = a(5-a) \qquad (1)$$

നേർരേഖ (6,-2) എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുചെല്ലുന്നതിനാൽ

$$(5-a)6 + a(-2) = a(5-a)$$

$$\implies \quad a^2 - 13a + 30 = 0.$$

$$(a-3)(a-10) = 0$$

$$\therefore \quad a = 3 \text{ or } a = 10$$

$a = 3$, (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ $\implies (5-3)x + 3y = 3(5-3)$

$$\implies \quad 2x + 3y = 6 \qquad (2)$$

$a = 10$, (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ $\implies (5-10)x + 10y = 10(5-10)$

$$\implies \quad -5x + 10y = -50$$

$$\implies \quad x - 2y - 10 = 0. \qquad (3)$$

ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖകളുടെ സമീകരണങ്ങൾ $2x + 3y = 6$, $x - 2y - 10 = 0$

അഭ്യാസം 5.4

1. x അക്ഷത്തിൽ സമാന്തരവും x അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് 5 മാത്രകൾ അകലെയുള്ളതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക

2. $(-5,-2)$ എന്ന ബിന്ദു വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതും നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരവുമായ നേർരേഖകളുടെ സമീകരണങ്ങൾ കാണുക.

3. നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക

   (i) ചായ്‌വ് 3, y അന്തഃഖണ്ഡം

   (ii) ചെരിവ് കോൺ 60^0, y അന്തഃഖണ്ഡം

4. ഒരു നേർരേഖ y അക്ഷത്തെ മൂലബിന്ദുവിന് മുകളിൽ 3 മാത്രകൾ അകലെ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\tan\theta = \frac{1}{2}$ θ ചെരിവു കോൺ. നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

5. നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വും y അന്തഃഖണ്ഡവും കാണുക

   (i) $y = x + 1$ (ii) $5x = 3y$ (iii) $4x - 2y + 1 = 0$ (iv) $10x + 15y + 6 = 0$

6. നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക

   (i) ചായ്‌വ് -4, കടന്നു ചെല്ലുന്ന ബിന്ദു $(1, 2)$

   (ii) ചായ്‌വ് $\frac{2}{3}$, കടന്നു ചെല്ലുന്ന ബിന്ദു $(5, -4)$

7. 30^0 ചെരിവ് കോൺ ഉള്ളതും$(4, 2)$, $(3, 1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുവഴി കടന്നുചെല്ലുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

8. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുന്ന നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക

   (i) $(-2, 5)$, $(3, 6)$ (ii) $(0, -6)$, $(-8, 2)$

9. $P(1, -3)$, $Q(-2, 5)$, $R(-3, 4)$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള $\triangle PQR$ ൽ R വഴിയുള്ള മധ്യമത്തിന്റെ സമീകരണം കാണുക.

10. നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച് തന്നിട്ടുള്ള മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

    (i) (4, 2), (7, 5) , (9, 7)   (ii) (1, 4), (3, −2) , (−3, 16)

11. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള x, y അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളുള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

    (i) 2 , 3   (ii) $-\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}$

12. താഴെ കൊടുത്ത നേർരേഖയുടെ x, y അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ കാണുക.

    (i) $5x + 3y - 15 = 0$ (ii) $2x - y + 16 = 0$ (iii) $3x + 10y + 4 = 0$

13. അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 3 : 2 ഉം (3, 4) എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക

14. അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളുടെ തുക 9-ഉം (2, 2) എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

15. (5, −3) എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതും അക്ഷങ്ങളിന്മേൽ തുല്യഅളവും എന്നാൽ വ്യത്യസ്ത ചിഹ്നവുമായ അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളുള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

16. (9, −1) എന്ന ബിന്ദു വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതും x അന്തഃഖണ്ഡം, y അന്തഃഖണ്ഡത്തിന്റെ മൂന്നുമടങ്ങ് ആയതുമായ നേർനേരഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

17. നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങളെ A , B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നതും മദ്ധ്യബിന്ദു (3, 2)ഉം ആയ നേർരേഖ A,B യുടെ സമീകരണം കാണുക.

18. (22, −6)എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതും x അന്തഃഖണ്ഡം y അന്തഃഖണ്ഡത്തെക്കാൾ 5 മാത്രകൾ കൂടുതലുള്ളതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

19. A(3, 6) , C(−1, 2) എന്നിവ സമഭുജസാമാന്തരികം ABCD യുടെ രണ്ടു ശീർഷങ്ങളാണ്. വികർണ്ണം BD യുടെ സമീകരണം കാണുക.

20. A(−2, 6), B (3, −4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയെ P എന്ന ബിന്ദു ആന്തരമായി 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു. P വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതും ചായ്‌വ് $\frac{3}{2}$ ഉള്ളതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

5.7 നേർരേഖ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുരൂപം

വ്യത്യസ്ത രൂപത്തിലുള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണങ്ങളെ $ax + by + c = 0$(a , b, c വാസ്തവിക സ്ഥിരങ്ങൾ $a \neq 0$ അല്ലെങ്കിൽ $b \neq 0$) എന്ന പൊതുരൂപത്തിൽ മാറ്റാം എന്ന വസ്തുത നാം മുമ്പ് സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുല്ലോ. ഇപ്പോൾ നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടവ

(i) $ax + by + c = 0$ എന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ്, y അന്തഃഖണ്ഡം.

(ii) $ax + by + c = 0$ എന്ന നേർരേഖയുടെ സമാന്തരമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം.

(iii) $ax + by + c = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് ലംബമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം.

(iv) രണ്ടു പ്രതിഛേദ നേർരേഖകളുടെ പ്രതിഛേദ ബിന്ദു.

(i) ***$ax+by+c=0$* എന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് y അന്തഃഖണ്ഡം**

$ax+by+c=0$ എന്നതിനെ $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},\ b \neq 0$ എന്നെഴുതാം. (1)

(1) നെ ചായ്‌വ്-അന്തഃഖണ്ഡ രൂപം $y = mx + k$ യുമായി താരതമ്യപ്പെടുത്തിയാൽ

ചായ്‌വ് $m = -\frac{a}{b}$, y അന്തഃഖണ്ഡം $= -\frac{c}{b}$

$\therefore$ $ax+by+c=0$ എന്ന സമീകരണത്തിൽ നിന്ന്

ചായ്‌വു $m = -\frac{x \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}}{y \text{ യുടെ ഗുണാങ്കം}}$, y അന്തഃഖണ്ഡം$= -\frac{\text{സ്ഥിരാങ്കം}}{y \text{ യുടെ ഗുണാങ്കം}}$.

(ii) ***$ax+by+c=0$* എന്ന നേർരേഖയുടെ സമാന്തരമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം.**

രണ്ട് നേർരേഖകൾ സമാന്തരം ⇔ ചായ്‌വുകൾ തുല്യം

ആയതിനാൽ $ax+by+c=0$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായ എല്ലാ നേർരേഖയുടെയും സമീകരണം $ax+by+k=0$ എന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കും (k യുടെ എല്ലാവ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങൾക്കും)

(iii) ***$ax+by+c=0$* എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് ലംബമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം**

രണ്ട് ലംബമല്ലാത്ത നേർരേഖകൾ പരസ്പരം ലംബം ⇔ ചായ്‌വുകളുടെ ഗുണനഫലം -1.

ആയതിനാൽ $ax+by+c=0$ ക്ക് ലംബമായ എല്ലാ നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം $bx-ay+k=0$ (k സ്ഥിരാങ്കം)

കുറിപ്പ്

$a_1x+b_1y+c_1=0$,

$a_2x+b_2y+c_2=0$ എന്ന രണ്ടു നേർരേഖകൾ

(i) സമാന്തരം ⇔ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

(ii) ലംബം ⇔ $a_1a_2+b_1b_2=0$

(iv) **രണ്ടു പ്രതിഛേദ നേർരേഖകളുടെ പ്രതിഛേദ ബിന്ദു.**

രണ്ടു നേർരേഖകൾ സമാന്തരമല്ലെങ്കിൽ, അവ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദു രണ്ടു നേർരേഖകളിലും സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. അതുകൊണ്ട് രണ്ട് സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്ത് പ്രതിഛേദ ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാഹരണം 5.26

$3x+2y-12=0,\ 6x+4y+8=0$ എന്നീ നേർരേഖകൾ സമാന്തരമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം $3x+2y-12=0$ ന്റെ ചായ്‌വ് $m_1 = -\frac{x \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}}{y \text{ യുടെ ഗുണാങ്കം}} = -\frac{3}{2}$

$6x + 4y + 8 = 0$ യുടെ ചായ്‌വ് $m_2 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

$\therefore \quad m_1 = m_2$. അതിനാൽ രണ്ട് നേർരേഖകളും സമാന്തരമാണ്.

ഉദാഹരണം 5.27

$x + 2y + 1 = 0$, $2x - y + 5 = 0$ എന്നീ നേർരേഖകൾ പരസ്പരം ലംബമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം $x + 2y + 1 = 0$ യുടെ ചായ്‌വ് $m_1 = -\frac{x \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}}{y \text{ യുടെ ഗുണാങ്കം}} = -\frac{1}{2}$

$2x - y + 5 = 0$ യുടെ ചായ്‌വ് $m_2 = -\frac{x \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}}{y \text{ യുടെ ഗുണാങ്കം}} = \frac{-2}{-1} = 2$

ചായ്‌വുകളുടെ ഗുണനഫലം $m_1 m_2 = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$

$\therefore$ രണ്ടു നേർരേഖകളും പരസ്പരം ലംബമാണ്

ഉദാഹരണം 5.28

$x - 8y + 13 = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരവും $(2, 5)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $x - 8y + 13 = 0$ ക്ക് സമാന്തരമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $x - 8y + k = 0$

ഇത് $(2, 5)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതിനാൽ

$$2 - 8(5) + k = 0 \implies k = 38$$

$\therefore$ ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $x - 8y + 38 = 0$

ഉദാഹരണം 5.29

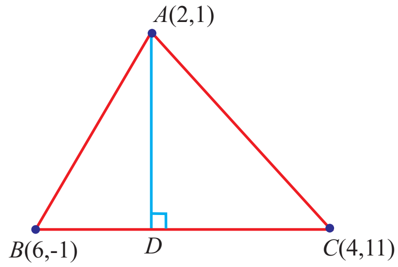
A(2, 1), B(6, –1) , C(4, 11). എന്നിവ $\triangle ABC$ യുടെ ശീർഷങ്ങളാണ്. A യിൽ നിന്നും ഉന്നതിയിലൂടെയുള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം BC യുടെ ചായ്‌വ് $= \frac{11 + 1}{4 - 6} = -6$

AD, BC, AD യുടെ ചായ്‌വു $= \frac{1}{6}$

$\therefore$ AD യുടെ സമീകരണം $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = \frac{1}{6}(x - 2) \implies 6y - 6 = x - 2$$



ചിത്രം. 5.31

$\therefore$ ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $x - 6y + 4 = 0$

അഭ്യാസം 5.5

1. താഴെ കൊടുത്ത നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് കാണുക.

   (i) $3x + 4y - 6 = 0$ (ii) $y = 7x + 6$ (iii) $4x = 5y + 3$.

2. $x + 2y + 1 = 0$, $3x + 6y + 2 = 0$ എന്നീ നേർരേഖകൾ സമാന്തരമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

3. $3x - 5y + 7 = 0$, $15x + 9y + 4 = 0$ എന്നീ നേർരേഖകൾ ലംബമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

4. $\frac{y}{2} = x - p$, $ax + 5 = 3y$ എന്നീ നേർരേഖകൾ സമാന്തരമാണെങ്കിൽ a യുടെ മൂല്യം കാണുക.

5. $5x - 2y - 9 = 0$, $ay + 2x - 11 = 0$ എന്നീ നേർരേഖകൾ പരസ്പരം ലംബമാണെങ്കിൽ a യുടെ മൂല്യം കാണുക.

6. $8px + (2 - 3p)y + 1 = 0$, $px + 8y - 7 = 0$ എന്നീ നേർരേഖകൾ പരസ്പരം ലംബമാണെങ്കിൽ p യുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

7. $(h, 3)$, $(4, 1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്ന നേർരേഖ $7x - 9y - 19 = 0$ എന്ന നേർരേഖയെ ലംബമായി ഛേദിക്കുന്നു എങ്കിൽ h ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

8. $(1, -2)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതും $3x - y + 7 = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരവുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

9. $(1, -2)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതും $x - 2y + 3 = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് ലംബമായിട്ടുള്ളതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

10. $(3, 4)$, $(-1, 2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ലംബദ്വിഭാജകത്തിന്റെ സമീകരണം കാണുക.

11. $(1, 2)$, $(2, 1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരവും $2x + y - 3 = 0$, $5x + y - 6 = 0$ എന്നീ നേർവകളുടെ പ്രതിഛേദബിന്ദുവഴി കടന്നുചെല്ലുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ

സമീകരണം കാണുക.

12. $3x - 5y + 11 = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് ലംബവും $5x - 6y = 1$, $3x + 2y + 5 = 0$ എന്നീ

നേർരേഖകളുടെ പ്രതിചേദബിന്ദു വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക

13. $3x - y + 9 = 0$, $x + 2y = 4$ എന്നീ നേർരേഖകളുടെ പ്രതിഛേദബിന്ദുവിനെയും $2x + y - 4 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ എന്നീ നേർരേഖകളുടെ പ്രതിഛേദബിന്ദുവിനെയും യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ

സമീകരണം കാണുക

14. $A(2, -4)$, $B(3, 3)$, $C(-1, 5)$ എന്നിവ $\triangle ABC$ യുടെ ശീർഷങ്ങളാണ്. B യിൽ നിന്നുള്ള ഉന്നതിയിലൂടെയുള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

15. $A(-4,4)$, $B(8,4)$, $C(8,10)$ എന്നിവ $\triangle ABC$ യുടെ ശീർഷങ്ങളാണ്. Aയിൽ നിന്നുമുള്ള മധ്യമത്തിലൂടെയുള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

16. മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $3x + 2y = 13$ എന്ന നേർരേഖയിലുള്ള ലംബരേഖയുടെ ചുവടിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കം കാണുക.

17. $x + 2y = 7$, $2x + y = 8$ എന്നീ നേർരേഖകൾ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസങ്ങളാണ്. $(0, -2)$ എന്ന

ബിന്ദു വൃത്തത്തിന്മേൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക.

18. $2x - 3y + 4 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ എന്നീ നേർരേഖകളുടെ പ്രതിഛേദബിന്ദുവിനേയും $(3, -2)$, $(-5, 8)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിനേയും യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

19. ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണം PQR ൽ $PQ = PR$. ആധാരം QR , x അക്ഷത്തിലും p, y അക്ഷത്തിലും ആണ് PQ വിന്റെ സമീകരണം $2x - 3y + 9 = 0$ ആകുന്നു. PR ലൂടെയുള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

അഭ്യാസം 5.6

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക

1. $(a, -b)$, $(3a, 5b)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു
   (A) $(-a, 2b)$ (B) $(2a, 4b)$ (C) $(2a, 2b)$ (D) $(-a, -3b)$
2. $A(1, -3)$, $B(-3, 9)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ 1:3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദു P
   (A) $(2, 1)$ (B) $(0, 0)$ (C) $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$ (D) $(1, -2)$
3. $A(3, 4)$, $B(14, -3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡം x അക്ഷത്തെ P യിൽ സന്ധിച്ചാൽ AB യെ വിഭജിക്കുന്ന അംശബന്ധം
   (A) 4 : 3 (B) 3 : 4 (C) 2 : 3 (D) 4 : 1
4. $(-2, -5)$, $(-2, 12)$, $(10, -1)$ എന്നീ ശീർഷകങ്ങളോടുകൂടിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം
   (A) $(6, 6)$ (B) $(4, 4)$ (C) $(3, 3)$ (D) $(2, 2)$
5. $(1, 2)$, $(4, 6)$, $(x, 6)$, $(3, 2)$ എന്നിവ യഥാക്രമം ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളാണെങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം
   (A) 6 (B) 2 (C) 1 (D) 3
6. (0,0), $(2, 0)$, (0,2) എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം
   (A) 1 ച:മാ (B) 2 ച:മാ (C) 4 ച:മാ (D) 8 ച:മാ
7. $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം
   (A) 3 ച:മാ (B) 2 ച:മാ (C) 4 ച:മാ (D) 1 ച:മാ
8. x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു നേർരേഖയുടെ ചെരിവുകോൺ
   (A) 0° (B) 60° (C) 45° (D) 90°
9. $(3, -2)$, $(-1, a)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയുടെ ചായ്‌വ് $-\frac{3}{2}$ എങ്കിൽ a യുടെ മൂല്യം
   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
10. $(-2, 6)$, $(4, 8)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് ലംബമായ നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ്
    (A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$
11. $9x - y - 2 = 0$, $2x + y - 9 = 0$ എന്നീ നേർരേഖകളുടെ പ്രതിഛേദബിന്ദു
    (A) $(-1, 7)$ (B) $(7, 1)$ (C) $(1, 7)$ (D) $(-1, -7)$
12. $4x + 3y - 12 = 0$ എന്ന നേർരേഖ y അക്ഷത്തെ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദു
    (A) $(3, 0)$ (B) $(0, 4)$ (C) $(3, 4)$ (D) $(0, -4)$
13. $7y - 2x = 11$ എന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ്
    (A) $-\frac{7}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $-\frac{2}{7}$
14. x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരവും (2 , –7) എന്ന ബിന്ദു വഴികടന്നു ചെല്ലുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം
    (A) $x = 2$ (B) $x = -7$ (C) $y = -7$ (D) $y = 2$
15. $2x - 3y + 6 = 0$, എന്ന രേഖയുടെ x,y അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ യഥാക്രമം
    (A) 2, 3 (B) 3, 2 (C) $-3, 2$ (D) $3, -2$
16. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം $(-6, 4)$. വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ ഒരഗ്രബിന്ദു $(-12, 8)$, എങ്കിൽ മറ്റേ അഗ്രബിന്ദു
    (A) $(-18, 12)$ (B) $(-9, 6)$ (C) $(-3, 2)$ (D) $(0, 0)$

17. മൂലബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുചെല്ലുന്നതും $2x + 3y - 7 = 0$ എന്നു രേഖയ്ക്കു ലംബമായതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം
(A) $2x + 3y = 0$ (B) $3x - 2y = 0$ (C) $y + 5 = 0$ (D) $y - 5 = 0$

18. y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരവും $(-2, 5)$ വഴികടന്നു ചെല്ലുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം
(A) $x - 2 = 0$ (B) $x + 2 = 0$ (C) $y + 5 = 0$ (D) $y - 5 = 0$

19. $(2, 5), (4, 6), (a, a)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണെങ്കിൽ a യുടെ മൂല്യം
(A) -8 (B) 4 (C) -4 (D) 8

20. $y = 2x + k$ എന്ന നേർരേഖ $(1, 2)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുചെല്ലുന്നുവെങ്കിൽ, k യുടെ മൂല്യം
(A) 0 (B) 4 (C) 5 (D) -3

21. ചായ്‌വ് 3 ഉം y അന്തഃഖണ്ഡം 4 ഉം ഉള്ള ഒരു നേർരേഖയുടെ സമീകരണം
(A) $3x - y - 4 = 0$ (B) $3x + y - 4 = 0$
(C) $3x - y + 4 = 0$ (D) $3x + y + 4 = 0$

22. $y = 0$, $x = -4$ എന്നീ നേർരേഖകളുടെ പ്രതിഛേദബിന്ദു
(A) $(0, -4)$ (B) $(-4, 0)$ (C) $(0, 4)$ (D) $(4, 0)$

23. $3x + 6y + 7 = 0, 2x + ky = 5$ എന്നീ നേർരേഖകൾ പരസ്പരം ലംബമാണെങ്കിൽ k യുടെ മൂല്യം

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

ഓർമ്മിക്കേണ്ടവ

- $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ $l : m$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദു $P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right)$
- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ $l : m$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ബാഹ്യമായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദു $Q\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l - m}, \frac{ly_2 - my_1}{l - m}\right)$.
- (x_1, y_1) , (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു.
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, (x_3, y_3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ശീർഷങ്ങളായുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം
$$= \frac{1}{2}\sum x_1(y_2 - y_3) = \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}.$$

- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണ് ⇔

  (i) $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$ അല്ലെങ്കിൽ

  (ii) AB യുടെ ചായ്‌വ് = BC യുടെ ചായ്‌വ് (അഥവാ) AC യുടെ ചായ്‌വ്

- ഒരു നേർരേഖ x അക്ഷത്തിന്റെ ധനദിശയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ θ എങ്കിൽ ചായ്‌വ് $m = \tan\theta$.

- (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴികടന്നു ചെല്ലുന്ന ലംബമല്ലാത്ത നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ്

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

- $ax + by + c = 0$ എന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $m = -\dfrac{x \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}}{y \text{ യുടെ ഗുണാങ്കം}} = -\dfrac{a}{b}, \; b \neq 0$

- തിരശ്ചീന രേഖയുടെ ചായ്‌വ് 0. ലംബരേഖയുടെ ചായ്‌വ് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

- രണ്ടു നേർരേഖകൾ സമാന്തരമാണ് ⇔ ചായ്‌വുകൾ സമം

- രണ്ടു ലംബമല്ലാത്ത നേർരേഖകൾ ലംബമാണ് ⇔ ചായ്‌വുകളുടെ ഗുണനഫലം -1 (അതായത് $m_1 m_2 = -1$)

നേർരേഖയുടെ സമവാക്യങ്ങൾ

ക്രമസംഖ്യ	നേർരേഖ	സമവാക്യം
1.	x-അക്ഷം	$y = 0$
2.	y-അക്ഷം	$x = 0$
3.	x-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരം	$y = k$
4.	y- അക്ഷത്തിനു സമാന്തരം	$x = k$
5.	$ax+by+c=0$ യ്ക്ക് സമാന്തരം	$ax+by+k = 0$
6.	$ax+by+c=0$ യ്ക്ക് ലംബം	$bx-ay+k = 0$
	തന്നിട്ടുള്ളവ	**സമവാക്യം**
1.	മൂലബിന്ദു വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്ന നേർരേഖ	$y = mx$
2.	ചായ്‌വ് m, y-അന്തഃഖണ്ഡം c	$y = mx + c$
3.	ചായ്‌വ് m, ഒരു ബിന്ദു (x_1, y_1)	$y - y_1 = m(x-x_1)$
4.	(x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്ന നേർരേഖ	$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
5.	x- അന്തഃഖണ്ഡം a , y- അന്തഃഖണ്ഡം b	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$