6

ജ്യാമിതി

There is geometry in the humming of the strings, there is music in the spacing of spheres - Pythagoras

- മുഖവുര
- അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തം
- കോണ ദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തം
- സദൃശ ത്രികോണങ്ങൾ
- സ്പർശരേഖ – ഞാൺ സിദ്ധാന്തം
- പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം

യൂക്ലിഡ്

(300 BC)

ഗ്രീസ്

യൂക്ലിഡിന്റെ "Elements" എന്ന പുസ്തകം ഗണിതശാസ്ത്ര ചരിത്രത്തിൽ വളരെ സ്വാധീനമുള്ള പരിശ്രമങ്ങളിൽ ഒന്നാണ്. പ്രത്യേകിച്ച് ജ്യാമിതി പഠിപ്പിക്കുന്നതിന് ഈ പുസ്തകം മുഖ്യമായ പങ്ക് വഹിക്കുന്നു. യൂക്ലിഡിന്റെ പ്രവർത്തന രീതി (അൽഗോരിതം) ഉ.സാ.ഭാ കണക്കാക്കുന്നതിന് ഒരു ഉത്തമ മാർഗ്ഗമാണ്.

6.1 മുഖവുര

വ്യത്യസ്ത ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതകളെക്കുറിച്ച് പ്രതിപാദിക്കുന്ന ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഒരു ശാഖയാണ് **ജ്യാമിതി**. യഥാർത്ഥ അളവുകളുടെ സഹായമില്ലാതെ, പ്രമാണങ്ങൾ അഥവാ സിദ്ധാന്തങ്ങളിലൂടെ വ്യത്യസ്ത ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ ഗുണങ്ങളേയും സവിശേഷതകളേയും കൈകാര്യം ചെയ്യുന്ന ജ്യാമിതിയാണ് താത്വികജ്യാമിതി. ഒരു വ്യക്തിയുടെ യുക്തി യുക്തമായി ചിന്തിക്കുന്നതിനുള്ള കഴിവിനെ ജ്യാമിതീയ പഠനം മെച്ചപ്പെടുത്തുന്നു.

ബി.സി. 300 ൽ ജീവിച്ചിരുന്ന പ്രസിദ്ധ ഗ്രീക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ യൂക്ലിഡ് ജ്യാമിതിയുടെ പിതാവ് എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. പ്രമാണങ്ങൾ അഥവാ തത്വങ്ങൾ എന്നറിയിപ്പെടുന്ന നിശ്ചിത അനുമാനങ്ങളിലും മുൻപ് തെളിയിച്ച ഫലങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ബുദ്ധിപൂർവ്വമായ വിവാദത്തിൽ ജ്യാമിതീയ ഫലങ്ങളുടെ പഠനത്തിലും ഒരു പുതിയ വഴി തെളിയിച്ചത് യൂക്ലിഡ് ആണ്.

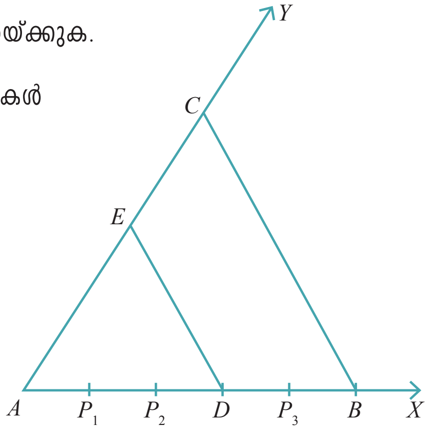
യന്ത്രശാസ്ത്രം, തച്ചുശാസ്ത്രം എന്നീ മേഖലകളിൽ ജ്യാമിതി മുഖ്യ പങ്കുവഹിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി, നമ്മുടെ ജീവിതത്തിൽ മുഖ്യ പങ്ക് വഹിക്കുന്ന ധാരാളം പാലങ്ങൾ സർവ്വസമത്രികോണങ്ങൾ, സദൃശ ത്രികോണങ്ങൾ എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് നിർമ്മിച്ചിട്ടുള്ളവയാണ്. പാലങ്ങൾ കൂടുതൽ ഭദ്രതതോടെ നിർമ്മിക്കുന്നതിനും കൂടുതൽ സമ്മർദ്ദം, ആയാസം എന്നിവകളിൽ നിന്ന് പ്രതിരോധിക്കുന്നതിനും ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങൾ സഹായിക്കുന്നു. കെട്ടിടങ്ങളുടെ നിർമ്മാണത്തിൽ ജ്യാമിതി രണ്ട് വിധത്തിൽ പ്രയോജനപ്പെടുന്നു. ഒന്ന് ഘടനയുടെ സൃഷ്ടി കൂടുതൽ ഭദ്രതയുള്ളതാക്കുന്നു. രണ്ട്, അതിന്റെ മനോഹാരിത വർദ്ധിപ്പിക്കുന്നു. എല്ലാവരാലും പുകഴ്ത്തപ്പെടുന്ന താജ്മഹൽ പോലുള്ള കെട്ടിടങ്ങളുടെ രൂപകൽപനയ്ക്ക് ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങൾ സുഭഗമായി ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഗണിതശാസ്ത്രത്തന്റെ ധാരാളം ശാഖകളെ വികസിപ്പിക്കുന്നതിനും മനസ്സിലാക്കുന്നതിനും ജ്യാമിതീയ തെളിവുകൾ ഒരു പരമപ്രധാനമായ പങ്ക് വഹിക്കുന്നു.

പ്രശസ്ത ഗ്രീക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ തെയിൽസ് അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തത്തിലൂടെ പ്രശസ്തനായി. ഈ സിദ്ധാന്തം തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തം എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു. താഴെ കൊടുത്ത പ്രവർത്തനത്തിലൂടെ അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തത്തെ നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം.

പ്രവർത്തനം

$\angle XAY$ എന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു കോൺ വരയ്ക്കുക. P_1, P_2, D, P_3, B എന്നീ അഞ്ച് ബിന്ദുക്കൾ AX എന്ന രശ്മിയിൽ $AP_1 = P_1P_2 = P_2D = DP_3 = P_3B = 1$ (മാത്ര) സങ്കൽപിച്ച് അടയാളപ്പെടുത്തുക.

B യിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന ഏതെങ്കിലും രേഖ AY എന്ന രശ്മിയെ C യിൽ ഛേദിക്കുന്നു. D യിലൂടെ BC യ്ക്ക് സമാന്തരമായി AC യെ E യിൽ ഛേദിക്കുമാറ് ഒരു രേഖ വരയ്ക്കുക.



ചിത്രം 6.1

$$AD = AP_1 + P_1P_2 + P_2D = 3 \text{ മാത്രകൾ}$$

$$DB = DP_3 + P_3B = 2 \text{ മാത്രകൾ}$$

$$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$$

AE, EC എന്നിവ അളക്കുക

$$\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$$

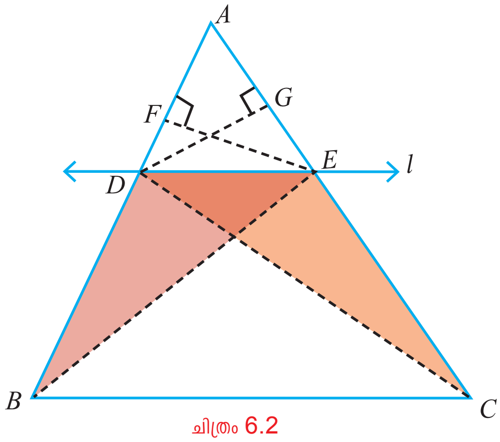
അതായത് $\triangle ABC$ യിൽ, $DE \parallel BC$ എങ്കിൽ $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തം അഥവാ തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തം എന്നറിയപ്പെടുന്ന ഈ ഫലത്തെ ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വിധം നമുക്ക് തെളിയിക്കാം :

6.2 അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തവും കോണ ദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തവും (Basic proportionality and Angle bisector theorems)

സിദ്ധാന്തം 6.1 **അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തം അഥവാ തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തം**

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന രേഖ മറ്റ് രണ്ടു വശങ്ങളെ ഛേദിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആ രേഖ രണ്ട് വശങ്ങളേയും ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു.



ചിത്രം 6.2

സങ്കൽപം : ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ, BC ക്ക് സമാന്തരമായ l എന്ന ഒരു നേർരേഖ , AB യെ D യിലും AC യെ E യിലും ഛേദിക്കുന്നു.

അനുമാനം : $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

നിർമ്മിതി : BE, CD യോജിപ്പിക്കുക

$EF \perp AB$, $DG \perp CA$ വരയ്ക്കുക

തെളിവ്

$EF \perp AB$ ആയതിനാൽ, ADE, DBE എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ ഉന്നതിയാണ് EF.

$(\triangle ADE)$യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= \dfrac{1}{2} \times$ ആധാരം $\times$ ഉന്നതി $= \dfrac{1}{2} AD \times EF$

$(\triangle DBE)$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= \dfrac{1}{2} \times$ ആധാരം $\times$ ഉന്നതി $= \dfrac{1}{2} DB \times EF$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ADE \text{യുടെ വിസ്തീർണ്ണം}}{\triangle DBE \text{യുടെ വിസ്തീർണ്ണം}} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EF}{\frac{1}{2} DB \times EF} = \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

ഇതുപോലെ

$$\frac{\triangle ADE \text{യുടെ വിസ്തീർണ്ണം}}{\triangle DCE \text{യുടെ വിസ്തീർണ്ണം}} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DG}{\frac{1}{2} \times EC \times DG} = \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

എന്നാൽ $\triangle DBE$ യും $\triangle DCE$ യും ഒരേ ആധാരം DE യിലും BC, DE എന്നീ ഒരേ സമാന്തര രേഖകൾക്കിടയിലുമാണ്.

$$\therefore \quad (\triangle DBE) \text{ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം} = (\triangle DCE) \text{ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം} \qquad (3)$$

(1), (2) , (3) ൽ നിന്ന്

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു.

അനു സിദ്ധാന്തം

$\triangle ABC$ യിൽ BCക്കു സമാന്തരമായ ഒരു നേർരേഖ DE, AB യെ D യിലും ACയെ E യിലും ഛേദിക്കുന്നു. എങ്കിൽ

(i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$

തെളിവ്

(i) തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തത്തിൽ നിന്ന്

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Longrightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

$$\Longrightarrow 1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$$

$$\Longrightarrow \frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$

അങ്ങനെ , $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

(ii) ഇതുപോലെ,

$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$ എന്ന് നമുക്ക് തെളിയിക്കാൻ കഴിയും.

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ എങ്കിൽ $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

ഇതിനെ സങ്കലന ആനുപാതിക നിയമം (componendo rule) എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ഇവിടെ $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

സങ്കലന ആനുപാതിക നിയമമനുസരിച്ച്

$$\Rightarrow \frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$

ഈ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതവും ശരിയാണോ ? ഇത് പരിശോധിക്കുന്നതിന് നമുക്ക് താഴെ കൊടുത്ത പ്രവർത്തനം ചെയ്യാം.

പ്രവർത്തനം

AX എന്ന രശ്മിയിൽ ഏതെങ്കിലും കോൺ $\angle XAY$ വരയ്ക്കുക. P_1, P_2, P_3, P_4 , B എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ AX എന്ന രശ്മിയിൽ $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4B = 1$ മാത്ര (സങ്കൽപ്പിച്ച്) അടയാളപ്പെടുത്തുക.

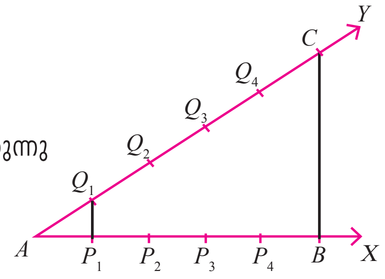
അതുപോലെ, AY എന്ന രശ്മിയിൽ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ $AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4C = 2$ മാത്രകൾ (സങ്കൽപ്പിച്ച്) അടയാളപ്പെടുത്തുക.

P_1Q_1 , BC എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക.

$$\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{1}{4}, \frac{AQ_1}{Q_1C} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

അതായത്, $\dfrac{AP_1}{P_1B} = \dfrac{AQ_1}{Q_1C}$

P_1Q_1, BC എന്നീ രേഖകൾ പരസ്പരം സമാന്തരമെന്ന് നാം കാണുന്നു



ചിത്രം 6.3

അതായത് $P_1Q_1 \parallel BC$ (1)

അതുപോലെ P_2Q_2, P_3Q_3 , P_4Q_4 യോജിപ്പിച്ചാൽ,

$$\frac{AP_2}{P_2B} = \frac{AQ_2}{Q_2C} = \frac{2}{3}\ ,\ P_2Q_2 \parallel BC \qquad (2)$$

$$\frac{AP_3}{P_3B} = \frac{AQ_3}{Q_3C} = \frac{3}{2}\ ,\ P_3Q_3 \parallel BC \qquad (3)$$

$$\frac{AP_4}{P_4B} = \frac{AQ_4}{Q_4C} = \frac{4}{1}\ ,\ P_4Q_4 \parallel BC \qquad (4)$$

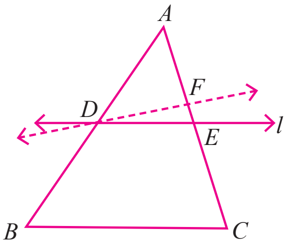
(1), (2), (3) , (4) എന്നിവയിൽ നിന്ന്, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്ന രേഖ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന് സമാന്തരമായിരിക്കും.

ഇതുപോലെ നമുക്ക് തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതം നിർവ്വചിച്ച് തെളിയിക്കാം

സിദ്ധാന്തം 6.2

അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതം (തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തത്തിന്റ വിപരീതം)

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്ന നേർരേഖ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന് സമാന്തരമാണ്.



ചിത്രം. 6.4

സങ്കൽപം : ത്രികോണം ABC യിൽ, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ ആകത്തക്കവിധം l എന്ന രേഖ AB , AC എന്നിവയെ യഥാക്രമം D , C യിൽ ഛേദിക്കുന്നു. (1)

അനുമാനം : $DE \parallel BC$

നിർമ്മിതി : DE എന്നത് BC യ്ക്കു സമാന്തരമല്ലെങ്കിൽ $DF \parallel BC$ വരയ്ക്കുക

തെളിവ് $DF \parallel BC$, അതിനാൽ തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \qquad (2)$$

(1) , (2)ൽ നിന്ന്,

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EC} \implies \frac{AF+FC}{FC} = \frac{AE+EC}{EC}$$

$$\frac{AC}{FC} = \frac{AC}{EC} \quad \therefore\ FC = EC$$

F ഉം E യും സന്നിപതിക്കുമ്പോൾ മാത്രം ഇത് സാധ്യമാകുന്നു. $DE \parallel BC$

സിദ്ധാന്തം 6.3 കോണ ദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തം (Angle bisector theorem)

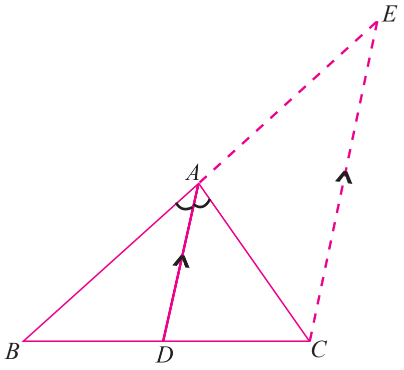
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോണിന്റെ ആന്തര (ബാഹ്യ) ദ്വിഭാജകം, എതിർവശത്തെ സമാന സമീപവശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തര (ബാഹ്യ)മായി വിഭജിക്കുന്നു.

നില (i) (ആന്തരമായി)

സങ്കൽപം : $\triangle ABC$ യിൽ $\angle BAC$ യുടെ ആന്തര ദ്വിഭാജകം AD ആകുന്നു അത് BC യെ D യിൽ സന്ധിക്കുന്നു

അനുമാനം : $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

നിർമ്മിതി : DA യ്ക്ക് സമാന്തരമായി C യിലൂടെ ഒരു രേഖ വരയ്ക്കുക അത് BA നീട്ടിയതിനെ E യിൽ സന്ധിക്കുന്നു. അതിനാൽ $DF \parallel BC$



ചിത്രം. 6.5

തെളിവ്

$CE \parallel DA$, AC ഒരു ഛേദകം

$\angle DAC = \angle ACE$ (ഏകാന്തരകോണുകൾ) (1)

$\angle BAD = \angle AEC$ (സമാന കോണുകൾ) (2)

$\angle A$ യുടെ ദ്വിഭാജകം AD ആയതിനാൽ $\angle BAD = \angle DAC$ (3)

(1), (2) , (3)ൽ നിന്ന്, $\angle ACE = \angle AEC$

$\triangle ACE$ യിൽ $AE = AC$ (തുല്യകോണുകളുടെ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യം)

$\triangle BCE$ യിൽ $CE \parallel DA$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad \text{(തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തം)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (\because AE = AC)$$

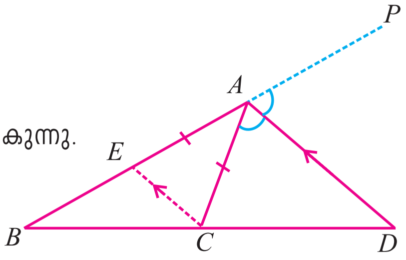
സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു.

നില (ii) (ബാഹ്യമായി) (പരീക്ഷയ്ക്കുള്ളതല്ല)

സങ്കൽപം: $\triangle ABC$ യിൽ, $\angle BAC$ യുടെ ബാഹ്യ ദ്വിഭാജകം AD ആകുന്നു. അത് BC നീട്ടിയതിനെ D യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

അനുമാനം: $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

നിർമ്മിതി : $CE \parallel DA$ വരയ്ക്കുക അത് AB യെ E യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 6.6

തെളിവ് $CE \parallel DA$, AC ഒരു ഛേദകം

$\angle ECA = \angle CAD$ (ഏകാന്തര കോണുകൾ) (1)

കൂടാതെ $CE \parallel DA$, BP ഒരു ഛേദകം. $\angle CEA = \angle DAP$ (സമാനകോണുകൾ) (2)

എന്നാൽ, $\angle CAP$ യുടെ ദ്വിഭാജകമാണ് AD

$$\angle CAD = \angle DAP \quad (3)$$

(1), (2) ,(3) ൽ നിന്ന്,

$$\angle CEA = \angle ECA$$

അങ്ങനെ $\triangle ECA$ യിൽ, $AC = AE$ (തുല്യ കോണുകളുടെ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യം)

$\triangle BDA$ യിൽ, $EC \parallel AD$

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad \text{(തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തം)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} \quad (\because AE = AC)$$

സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു

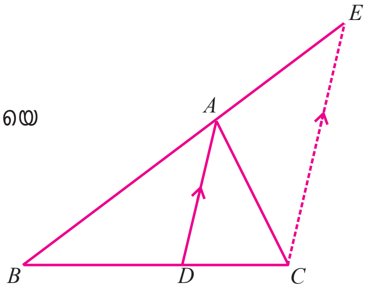
സിദ്ധാന്തം 6.4 കോണ ദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതം

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ശീർഷത്തിലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുന്ന നേർരേഖ എതിർവശത്തെ ആന്തരമായോ (ബാഹ്യമായോ) മറ്റു രണ്ട് വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിച്ചാൽ ആ രേഖ കോണിനെ ശീർഷത്തിൽ ആന്തരമായോ (ബാഹ്യമായോ) രണ്ട് സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.

നില (i) (ആന്തരമായി)

സങ്കൽപം : $\triangle ABC$ യിൽ AD എന്ന രേഖ, എതിർവശം BC യെ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്നു

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$



ചിത്രം. 6.7

അനുമാനം : $\angle BAC$ യുടെ ആന്തര ദ്വിഭാജകം AD ആകുന്നു

i.e., $\angle BAD = \angle DAC$ എന്ന് തെളിയിക്കണം

നിർമ്മിതി :

C യിലൂടെ DAയ്ക്ക് സമാന്തരമായി ഒരു രേഖ വരയ്ക്കുക. അത് BA നീട്ടിയതിനെ E യിൽ ഛേദിക്കുന്നു. അതിനാൽ $CE \parallel AD$

തെളിവ് $CE \parallel AD$, തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$ (2)

(1), (2) ൽ നിന്ന്, $\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$

$$\therefore \quad AE = AC$$

$\triangle ACE$ യിൽ $\angle ACE = \angle AEC$ $(\because AE = AC)$ (3)

$AD \parallel CE, AC$ ഒരു ഛേദകം

$\angle DAC = \angle ACE$ (ഏകാന്തരകോണുകൾ തുല്യം) (4)

കൂടാതെ $AD \parallel CE, BE$ ഒരു ഛേദകം

$\angle BAD = \angle AEC$ (സമാനകോണുകൾ തുല്യം) (5)

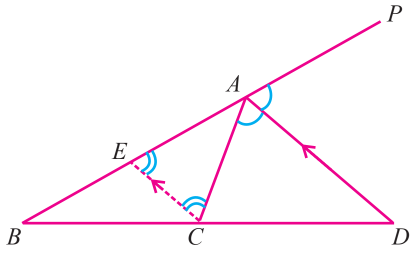
(3), (4) , (5) ൽ നിന്ന്,

$\angle BAD = \angle DAC$

$\therefore$ $\angle BAC$ യുടെ കോണദ്വിഭാജിയാണ് AD

സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു.

നില (ii) (ബാഹ്യമായി) (പരീക്ഷയ്ക്കുള്ളതല്ല)



ചിത്രം. 6.8

സങ്കൽപം : $\triangle ABC$ യിൽ AD എന്ന രേഖ, എതിർവശം BC നീട്ടിയതിനെ D യിൽ ബാഹ്യമായി വിഭജിക്കുന്നു.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \qquad (1)$$

അനുമാനം : $\angle PAC$ യുടെ ദ്വിഭാജകം AD ആകുന്നു

i.e., $\angle PAD = \angle DAC$ എന്ന് തെളിയിക്കണം

നിർമ്മിതി : C യിലൂടെ $CE \parallel AD$ വരയ്ക്കുക. അത് BA യെ E യിൽ സന്ധിക്കുന്നു.

തെളിവ് $CE \parallel DA$, തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{EA}$ (2)

(1), (2) ൽ നിന്ന്,

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC} \quad \therefore\ AE = AC$$

$\triangle ACE$ യിൽ $\angle ACE = \angle AEC$ $(\because AE = AC)$ (3)

$AD \parallel CE$, AD, CE യ്ക്ക് AC ഒരു ഛേദകം

$\angle ACE = \angle DAC$ (ഏകാന്തര കോണുകൾ) (4)

കൂടാതെ $AD \parallel CE$, AD, CE യ്ക്ക് BA ഒരു ഛേദകം

$\angle PAD = \angle AEC$ (സമാനകോണുകൾ) (5)

(3) , (4), (5) ൽ നിന്ന്,

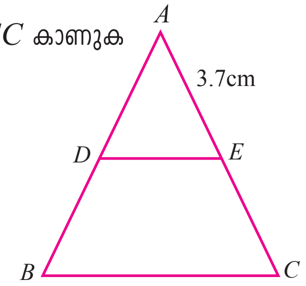
$\angle PAD = \angle DAC$

$\therefore$ $\angle PAC$ യുടെ കോണദ്വിഭാജിയാണ് AD, $\angle BAC$ യുടെ ബാഹ്യദ്വിഭാജകം AD.

സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു.

ഉദാഹരണം 6.1

$\triangle ABC$ യിൽ $DE \parallel BC$, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{2}{3}$. $AE = 3.7$ സെ.മീ എങ്കിൽ EC കാണുക



ചിത്രം. 6.9

നിർദ്ധാരണം $\triangle ABC$ യിൽ $DE \parallel BC$

$$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{(തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തം)}$$

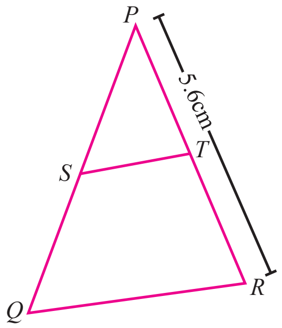
$$\Longrightarrow \quad EC = \frac{AE \times DB}{AD}$$

$$EC = \frac{3.7 \times 3}{2} = 5.55 \text{ സെ.മീ}$$

ഉദാഹരണം 6.2

$\triangle PQR$ ൽ $ST \parallel QR$ ആകത്തക്കവിധം PQ ൽ S എന്ന ബിന്ദു തന്നിട്ടുണ്ട്

$\dfrac{PS}{SQ} = \dfrac{3}{5}$. $PR = 5.6$ സെ.മീ. എങ്കിൽ PT കാണുക



ചിത്രം. 6.10

നിർദ്ധാരണം $\triangle PQR$ ൽ, $ST \parallel QR$ തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്,

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR} \qquad (1)$$

$PT = x$ എന്നിരിക്കട്ടെ, $\therefore\ TR = PR - PT = 5.6 - x$

(1) ൽ നിന്ന്, $PT = TR\left(\dfrac{PS}{SQ}\right)$

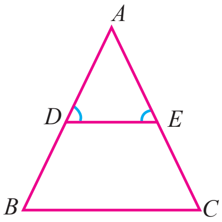
$$x = (5.6 - x)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$5x = 16.8 - 3x$$

$$x = \frac{16.8}{8} = 2.1, \quad PT = 2.1 \text{ സെ.മീ.}$$

ഉദാഹരണം 6.3

$\triangle ABC$ യിൽ $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ യും $\angle ADE = \angle DEA$ യും ആകത്തക്കവിധം D, E എന്നിവ യഥാക്രമം AB,AC യിലാണ്. $\triangle ABC$ ഒരു ദ്വിസമഭുജത്രികോണം എന്ന് തെളിയിക്കുക.



ചിത്രം. 6.11

നിർദ്ധാരണം $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$, തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതം അനുസരിച്ച്, $DE \parallel BC$

$$\therefore \quad \angle ADE = \angle ABC \qquad (1)$$

$$\angle DEA = \angle BCA \qquad (2)$$

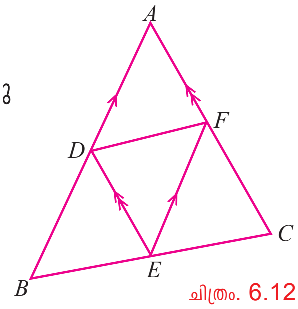
പക്ഷെ $\angle ADE = \angle DEA$ (3)

(1), (2) , (3) ൽ നിന്ന്, $\angle ABC = \angle BCA$

$\therefore \quad AC = AB$ (എതിർകോണുകൾ തുല്യം എങ്കിൽ എതിർ വശങ്ങൾ തുല്യം)

$\triangle ABC$ ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണം

ഉദാഹരണം 6.4



ചിത്രം. 6.12

$\triangle ABC$ യിൽ $DE \parallel AC$, $FE \parallel AB$ ആകത്തക്കവിധം D, E, F എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം AB, BC, CA യിലാണ്

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{FC}$$ തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം $\triangle ABC$ യിൽ $DE \parallel AC$

$$\therefore \quad \frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$$ (തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തം) (1)

കൂടാതെ $FE \parallel AB$.

$$\therefore \quad \frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FC}$$ (തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തം) (2)

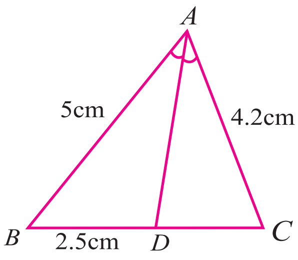
(1) ,(2) ൽ നിന്ന്

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AF}{FC}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{BD+AD}{AD} = \frac{AF+FC}{FC}$$ ($\therefore$ componendo നിയമം)

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{FC}.$$

ഉദാഹരണം 6.5



ചിത്രം. 6.13

$\triangle ABC$ യിൽ $\angle A$ യുടെ ആന്തര ദ്വിഭാജകം AD, വശം BC യെ D യിൽ സന്ധിക്കുന്നു. $BD = 2.5$ സെ.മീ, $AB = 5$ സെ.മീ, $AC = 4.2$ സെ.മീ. DC കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $\triangle ABC$ യിൽ, $\angle A$ യുടെ ആന്തര ദ്വിഭാജകം AD .

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$ (കോണ ദ്വിഭാജകസിദ്ധാന്തം)

$$\Longrightarrow \quad DC = \frac{BD \times AC}{AB}$$

$$DC = \frac{2.5 \times 4.2}{5} = 2.1$$ സെ.മീ.

ഉദാഹരണം 6.6

$\triangle ABC$ യിൽ $\angle A$ യുടെ ബാഹ്യ ദ്വിഭാജകം AE, BC നീട്ടിയതിനെ E യിൽ സന്ധിക്കുന്നു. $AB = 10$ സെ.മീ., $AC = 6$ സെ.മീ., $BC = 12$ സെ.മീ., എങ്കിൽ CE കാണുക

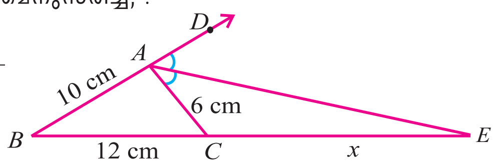
നിർദ്ധാരണം $\triangle ABC$ യിൽ $\angle A$ യുടെ ബാഹ്യ ദ്വിഭാജകം AE, BC നീട്ടിയതിനെ E യിൽ സന്ധിക്കുന്നു.

$CE = x$ സെ.മീ. എന്നിരിക്കട്ടെ, കോണ ദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, .

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} \quad \Longrightarrow \quad \frac{12+x}{x} = \frac{10}{6}$$

$$3(12+x) = 5x. \qquad x = 18.$$

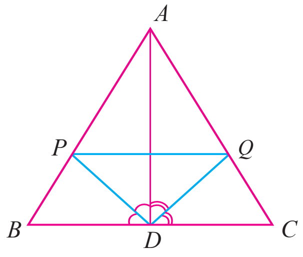
$CE = 18$ സെ.മീ.



ചിത്രം. 6.14

ഉദാഹരണം 6.7

$\triangle ABC$ യിൽ BC യുടെ മധ്യബിന്ദുവാണ് D. $\angle BDA$ യുടെ ദ്വിഭാജകം DP യും $\angle ADC$ യുടെ ദ്വിഭാജകം DQ യും ആകത്തക്കവിധം P, Q എന്നിവ AB, AC യിലെ ബിന്ദുക്കൾ എങ്കിൽ $PQ \parallel BC$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.



ചിത്രം. 6.15

നിർദ്ധാരണം $\triangle ABD$ യിൽ, $\angle BDA$ യുടെ കോണദ്വിഭാജകം DP

$\therefore \quad \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AD}{BD}$ (കോണദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തം) (1)

$\triangle ADC$ യിൽ $\angle ADC$ യുടെ ദ്വിഭാജകം DQ

$\therefore \quad \dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{AD}{DC}$ (കോണദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തം) (2)

എന്നാൽ $BD = DC$ (BC യുടെ മധ്യബിന്ദു D)

(2) $\Longrightarrow \quad \dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{AD}{BD}$ (3)

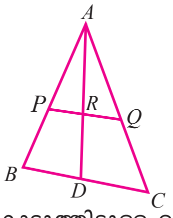
(1), (3) ൽ നിന്ന്, $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$

അങ്ങനെ , $PQ \parallel BC$ (തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതം)

അഭ്യാസം 6.1

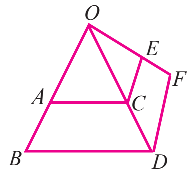
1. $\triangle ABC$ യിൽ, $DE \parallel BC$ ആകത്തക്കവിധം D, E എന്നിവ യഥാക്രമം AB, AC യിലാണ്
   (i) $AD = 6$ സെ.മീ., $DB = 9$ സെ.മീ. , $AE = 8$ സെ.മീ., എങ്കിൽ AC കാണുക.
   (ii) $AD = 8$ സെ.മീ., $AB = 12$ സെ.മീ., $AE = 12$ സെ.മീ., എങ്കിൽ CE കാണുക.
   (iii) $AD = 4x-3$, $BD = 3x-1$, $AE = 8x-7$, $EC = 5x-3$, എങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

2. ചിത്രത്തിൽ $AP = 3$ സെ.മീ., $AR = 4.5$ സെ.മീ., $AQ = 6$ സെ.മീ.,
   $AB = 5$ സെ.മീ., $AC = 10$ cm.
   AD യുടെ നീളം കാണുക.



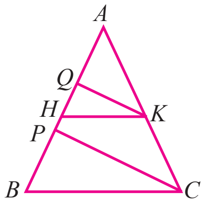
3. $\triangle PQR$ ൽ E, F എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം PQ , PR ലാണ്. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോ പ്രശ്നങ്ങൾക്കും $EF \parallel QR$ ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.
   (i) $PE = 3.9$ സെ.മീ., $EQ = 3$ സെ.മീ., $PF = 3.6$ സെ.മീ., $FR = 2.4$ സെ.മീ.
   (ii) $PE = 4$ സെ.മീ., $QE = 4.5$ സെ.മീ., $PF = 8$ സെ.മീ., $RF = 9$ സെ.മീ.

4. ചിത്രത്തിൽ, $AC \parallel BD$, $CE \parallel DF$.
   $OA = 12$ സെ.മീ., $AB = 9$ സെ.മീ., $OC = 8$ സെ.മീ.
   $EF = 4.5$ സെ.മീ. എങ്കിൽ FO കാണുക.



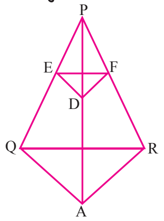
5. $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $AB \parallel CD$. AB ക്ക് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന രേഖ AD യെ P യിലും BC യെ Qവിലും സന്ധിക്കുന്നു. $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. ചിത്രത്തിൽ $PC \parallel QK$, $BC \parallel HK$. $AQ = 6$ സെ.മീ., $QH = 4$ സെ.മീ., $HP = 5$ സെ.മീ., $KC = 18$സെ.മീ., എങ്കിൽ AK, PB എന്നിവ കാണുക.

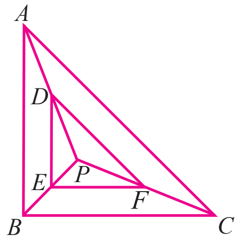


7. ചിത്രത്തിൽ $DE \parallel AQ$, $DF \parallel AR$

$EF \parallel QR$ എന്ന് തെളിയിക്കുക



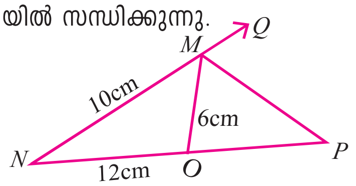
8. ചിത്രത്തിൽ
$DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$.
$EF \parallel BC$ എന്ന് തെളിയിക്കുക



9. $\triangle ABC$ യിൽ $\angle A$ യുടെ ആന്തര ദ്വിഭാജകം AD, BC യെ D യിൽ സന്ധിക്കുന്നു.
   (i) $BD = 2$ സെ.മീ., $AB = 5$ സെ.മീ., $DC = 3$ സെ.മീ. എങ്കിൽ ACകാണുക
   (ii) $AB = 5.6$ സെ.മീ., $AC = 6$ സെ.മീ., $DC = 3$ എങ്കിൽ BC കാണുക
   (iii) $AB = x$, $AC = x–2$, $BD = x+2$, $DC = x–1$ എങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

10. $\triangle ABC$ യിൽ $\angle A$ യുടെ ദ്വിഭാജകം AD ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക
   (i) $AB = 4$ സെ.മീ., $AC = 6$സെ.മീ., $BD = 1.6$ സെ.മീ., $CD = 2.4$ സെ.മീ.
   (ii) $AB = 6$ സെ.മീ., $AC = 8$സെ.മീ., $BD = 1.5$സെ.മീ., $CD = 3$സെ.മീ.

11. $\triangle MNO$ യിൽ $\angle M$ ന്റെ ബാഹ്യ ദ്വിഭാജകം MP, NO നീട്ടിയതിനെ P യിൽ സന്ധിക്കുന്നു.
   $MN = 10$ സെ.മീ, $MO = 6$ സെ.മീ,
   $NO = 12$ സെ.മീ, എങ്കിൽ OP കാണുക



12. ചതുർഭുജം $ABCD$ യിൽ $\angle B$, $\angle D$ എന്നിവയുടെ ദ്വിഭാജകങ്ങൾ AC യെ E യിൽ ഛേദിക്കുന്നു $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

13. ΔABC യിൽ $\angle A$ യുടെ ആന്തര ദ്വിഭാജകം BC യെ D യിൽ സന്ധിക്കുന്നു. $\angle A$ യുടെ ബാഹ്യ ദ്വിഭാജകം BC നീട്ടിയതിനെ E യിൽ സന്ധിക്കുന്നു $\frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

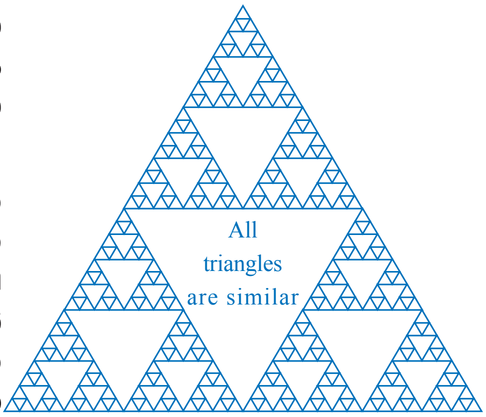
14. ചതുർഭുജം $ABCD$ യിൽ $AB = AD$, AE, AF എന്നിവ യഥാക്രമം $\angle BAC$, $\angle DAC$ യുടെ ആന്തര ദ്വിഭാജകങ്ങൾ എങ്കിൽ എന്ന് $EF \parallel BD$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

6.3 സദൃശ ത്രികോണങ്ങൾ (Similar Triangles)

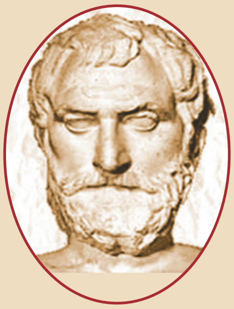
VIII -ാം സ്റ്റാൻഡാർഡിൽ നാം ത്രികോണങ്ങുടെ സർവ്വസമത വിശദമായി പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ഒരേ ആകൃതിയും വലിപ്പവുമുള്ള രണ്ട് ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളെ സർവ്വസമരൂപങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. ഈ പാഠഭാഗത്തിൽ, ഒരേ ആകൃതി ഉള്ളവയും പക്ഷെ ഒരേ വലിപ്പം ആവശ്യമില്ലാത്തവയും ആയ ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് പഠിക്കാം. അത്തരം ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളെ സദൃശങ്ങളെന്ന് പറയുന്നു.

ഒരേ ആകൃതിയും എന്നാൽ ഒരേ വലിപ്പം അല്ലെങ്കിൽ വ്യത്യസ്ത വലിപ്പവുമുള്ള ധാരാളം വസ്തുക്കളെ നമുക്ക് ചുറ്റും കാണാവുന്നതാണ്. ഉദാഹരണമായി, ഒരു വൃക്ഷത്തിലെ ഇലകൾ മിക്കവാറും ഒരേ ആകൃതിയും എന്നാൽ ഒരേ വലിപ്പം അല്ലെങ്കിൽ വ്യത്യസ്ത വലിപ്പം ഉള്ളവയുമാണ്. ഇതുപോലെ ഒരു ഫോട്ടോ നെഗറ്റീവ് -ൽ നിന്നും എടുത്ത ഫോട്ടോകൾ ഒരേ ആകൃതിയും വ്യത്യസ്ത വലിപ്പവുമുള്ളവയാണ്. ഒരേ ആകൃതിയും വ്യത്യസ്ത വലിപ്പവുമുള്ള അത്തരം എല്ലാ വസ്തുക്കളേയും സദൃശവസ്തുക്കൾ എന്നു പറയുന്നു.

സദൃശ്യ ത്രികോണങ്ങളുടെ തത്വങ്ങളും പ്രതിഛായകളും ഉപയോഗിച്ച് ഈജിപ്തിലെ പിരമിഡുകളുടെ ഉയരങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ഗ്രീസിൽ തെയിൽസ് എന്ന ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ ജ്യാമിതി അവതരിപ്പിച്ചു. അങ്ങനെ സദൃശ്യ ത്രികോണങ്ങളുടെ ഉപയോഗം ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും അളക്കുന്നതിന് സാധ്യമാകുന്നുണ്ട്. ഒരു ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ പാദകോണുകൾ തുല്യമാണെന്ന് അദ്ദേഹം നിരീക്ഷിച്ചു. അദ്ദേഹം സദൃശ്യത്രികോണങ്ങൾ, സമകോണ ത്രികോണങ്ങൾ എന്നിവയുടെ ആശയം പ്രായോഗിക ജ്യാമിതിയിൽ ഉപയോഗിച്ചു.



സർവ്വ സമരൂപങ്ങൾ സദൃശങ്ങളാണ് എന്നത് വ്യക്തമാണ്. എന്നാൽ വിപരീതം ശരിയാകണമെന്നില്ല. ഈ ഭാഗത്തിൽ നമുക്ക് സദൃശ ത്രികോണങ്ങൾ മാത്രം ചർച്ച ചെയ്ത് പ്രശ്ന നിർദ്ധാരണത്തിൽ ഈ അറിവിനെ പ്രയോഗിക്കാം. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ലളിതമായ പ്രവർത്തനം സദൃശ ത്രികോണങ്ങളെ നമുക്ക് ദൃശ്യവൽക്കരിക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു.



മിലിറ്റസ് തെയിൽസ്
(624-546 BC)
ഗ്രീസ്

അറിയപ്പെടുന്ന ആദ്യത്തെ തത്വ ശാസ്ത്രജ്ഞനും, ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനും ആയിരുന്നു. ആദ്യമായി ജ്യാമിതിയിൽ deductive reasoning പ്രയോഗിച്ച പ്രശംസ അദ്ദേഹത്തിനുള്ളതാണ്. ജ്യാമിതിയിൽ ധാരാളം അദ്ദേഹം കണ്ടുപിടിച്ചു. അദ്ദേഹത്തിന്റെ പ്രശ്ന നിർദ്ധാരണ രീതി ധാരാളം ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരുടെ ശ്രദ്ധയെ ആകർഷിച്ചിട്ടുണ്ട്. ബി.സി. 585 ൽ സൂര്യഗ്രഹണത്തെ നേരത്തെ പ്രവചിച്ച് അദ്ദേഹം പ്രശസ്തനായി.

പ്രവർത്തനം

- ഒരു കാർഡ് ബോർഡ് എടുത്ത് അതിൽ ത്രികോണരൂപത്തിൽ ഒരു ദ്വാരമിടുക.
- തറനിരപ്പിൽ നിന്നും 1 മീറ്റർ ഉയരത്തിൽ ഈ കാർഡ് ബോർഡിനെ സൂര്യ പ്രകാശത്തിൽ കാണിക്കുക.
- അനേകം ത്രികോണ രൂപങ്ങൾ രൂപപ്പെടുന്നത് കാണുന്നതിനായി കാർഡ് ബോർഡിനെ തറയുടെ നേരെ കൊണ്ടുവരിക.
- തറ നിരപ്പിനോട് അടുക്കുന്തോറും പ്രതിബിംബം ചെറുതായി ചെറുതായി വരുകയും തറ നിരപ്പിൽ നിന്നും അകലുമ്പോൾ പ്രതിബിംബം വലുതാകുകയും ചെയ്യുന്നു.
- ത്രികോണങ്ങളുടെ വിലപ്പങ്ങൾ വ്യത്യസ്തമാണെങ്കിലും ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് ശീർഷങ്ങളിലും രൂപം കൊള്ളുന്ന കോണുകളുടെ വലിപ്പം എപ്പോഴും തുല്യം ആയിരിക്കും.

നിർവ്വചനം

രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശം ആകണമെങ്കിൽ

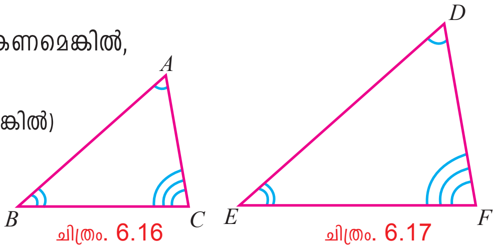
(i) അവയുടെ സമാനകോണുകൾ തുല്യം (അല്ലെങ്കിൽ)

(ii) അവയുടെ സമാനവശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ (അനുപാതത്തിൽ) ആയിരിക്കും. ഇതിനെ ഒരു ത്രികോണം മറ്റൊന്നിന്റെ വലുതാക്കിയ രൂപത്തിനു തുല്യമാണെന്ന് പറയാം. അതായത്, ഒരു ത്രികോണം മറ്റൊന്നിന്റെ വലുതാക്കിയ രൂപമാണെങ്കിൽ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളും **സദൃശമാണ്**.

$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശങ്ങൾ ആകണമെങ്കിൽ,

(i) $\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F$ (അല്ലെങ്കിൽ)

(ii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$.



ചിത്രം. 6.16   ചിത്രം. 6.17

A, B ,C എന്നീ ശീർഷങ്ങൾ യഥാക്രമം D, E, F എന്നിവയ്ക്ക് സമാനമാണ്. ചിഹ്നരൂപത്തിൽ, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ഇതിനെ $\triangle ABC$ സദൃശമാണ് $\triangle DEF$ എന്ന് വായിക്കുന്നു. '$\sim$' എന്ന ചിഹ്നം 'സദൃശ മാണ്" എന്നതിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ എന്നിവയുടെ സദൃശതയെ അവയുടെ ശീർഷങ്ങളുടെ സമാനത ഉപയോഗിച്ച് ചിഹ്ന രൂപത്തിൽ $\triangle BCA \sim \triangle EFD$, $\Delta CAB \sim \Delta FDE$ എന്നെഴുതാം.

6.3.1 ത്രികോണങ്ങളുടെ സദൃശതയ്ക്കുള്ള പ്രമാണങ്ങൾ

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള മൂന്ന് പ്രമാണങ്ങൾ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശങ്ങളാണ് എന്ന് തെളിയിക്കാൻ മതിയായതാണ്.

(i) AA(കോൺ – കോൺ) സദൃശതാ പ്രമാണം

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് കോണുകൾ മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ സമാന കോണുകൾക്ക് തുല്യമെങ്കിൽ അവ സദൃശങ്ങളാണ്.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് കോണുകൾ മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ സമാന കോണുകൾക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ അവയുടെ മൂന്നാമത്തെ കോണുകളും തുല്യമാകും. അതിനാൽ AA സദൃശതാ പ്രമാണത്തെ AAA പ്രമാണം എന്നും സൂചിപ്പിക്കാം.

(ii) SSS (വശം – വശം – വശം) സദൃശതാ പ്രമാണം

രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളിൽ, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ മറ്റെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുമായി ആനുപാതികമാണെങ്കിൽ (ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ) അവയുടെ സമാനകോണുകൾ തുല്യമാകും. അതിനാൽ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളും സദൃശ്യങ്ങളാണ്.

(iii) SAS (വശം – കോൺ – വശം) സദൃശതാ പ്രമാണം

രണ്ടു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോൺ മറ്റെ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോണിനോട് തുല്യമായിരിക്കുകയും ഈ കോണുകളെ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വശങ്ങൾ ആനുപാതികത്തിലായിരിക്കുകയും ചെയ്താൽ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശങ്ങളുമാണ്.

ത്രികോണങ്ങളുടെ സദൃശതയെക്കുറിച്ചുള്ള ചില ഫലങ്ങൾ തെളിവില്ലാതെ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

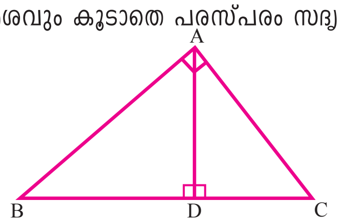
(i) രണ്ട് സദൃശത്രികോണങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം സമാനവശങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിന് തുല്യമാണ്.

(ii) ഒരു സമകോണിന്റെ ശീർഷത്തിൽ നിന്നും കർണ്ണത്തിലേക്കു ഒരു ലംബം വരയ്ക്കുകയാണെങ്കിൽ ലംബത്തിന്റെ ഓരോ വശത്തുമുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ ആകെ ത്രികോണത്തിന് സദൃശവും കൂടാതെ പരസ്പരം സദൃശവും ആണ്

ഇവിടെ (a) $\triangle DBA \sim \triangle ABC$

(b) $\triangle DAC \sim \triangle ABC$

(c) $\triangle DBA \sim \triangle DAC$

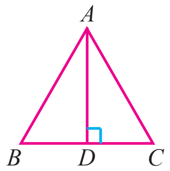


ചിത്രം. 6.18

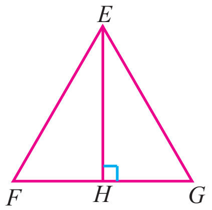
(iii) രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശങ്ങളാണെങ്കിൽ സമാനവശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം അവയുടെ സമാന ഉന്നതികളുടെ അംശബന്ധത്തിന് തുല്യമാണ്.

i.e., $\Delta ABC \sim \Delta EFG$, എങ്കിൽ

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CA}{GE} = \frac{AD}{EH}$$



ചിത്രം. 6.19



ചിത്രം. 6.20

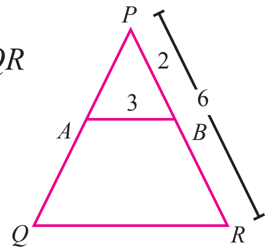
(iv) രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശങ്ങളാണെങ്കിൽ സമാനവശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം സമാന ചുറ്റളവുകളുടെ അംശബന്ധത്തിന് തുല്യമാണ്.

$\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$, എങ്കിൽ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD} = \dfrac{AB+BC+CA}{DE+EF+FD}$.

ഉദാഹരണം 6.8

ΔPQR ൽ A, B എന്നത് PQ, PR എന്നീ വശങ്ങളിലെ ബിന്ദുക്കൾ. കൂടാതെ $AB \parallel QR$. $AB = 3$ സെ.മീ., $PB = 2$ സെ.മീ., $PR = 6$ സെ.മീ., എങ്കിൽ QR ന്റെ നീളം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $AB = 3$ സെ.മീ., $PB = 2$ സെ.മീ. $PR = 6$ സെ.മീ., $AB \parallel QR$



ചിത്രം. 6.21

ΔPAB , ΔPQR എന്നിവയിൽ,

$\angle PAB = \angle PQR$ (സമാനകോണുകൾ)

$\angle P$ പൊതുവാണ്

$\therefore\ \triangle\, PAB \sim \triangle PQR$ (AA പ്രമാണം)

സമാനവശങ്ങൾ ആനുപാതികത്തിലായതിനാൽ,

$$\frac{AB}{QR} = \frac{PB}{PR}$$

$$QR = \frac{AB \times PR}{PB}$$

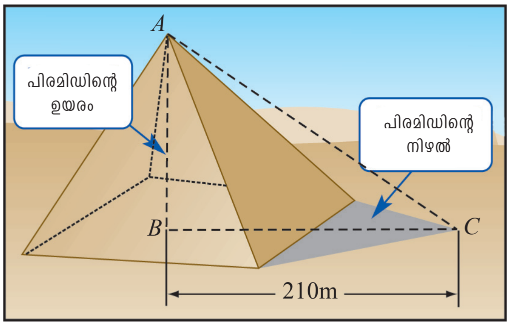
$$= \frac{3 \times 6}{2}$$

$QR = 9$ സെ.മീ.

ഉദാഹരണം 6.9

1.8 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ ഒരു പിരമിഡിനരികിൽ നിൽക്കുന്നു. അയാളുടെ നിഴലിന്റെ നീളം 2.7 മീറ്ററും അതേസമയം പിരമിഡിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം 210 മീറ്ററും എങ്കിൽ പിരമിഡിന്റെ ഉയരം കാണുക

നിർദ്ധാരണം AB , DE എന്നിവ യഥാക്രമം പിരമിഡിന്റെ ഉയരം, ആളിന്റെ ഉയരം എന്നിരിക്കട്ടെ BC, EF എന്നിവ യഥാക്രമം പിരമിഡ്, ആൾ എന്നിവയുടെ നിഴലുകളുടെ നീളങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം. 6.22

$\triangle ABC$ and $\triangle DEF$, എന്നിവയിൽ,

$\angle ABC = \angle DEF = 90^o$

$\angle BCA = \angle EFD$

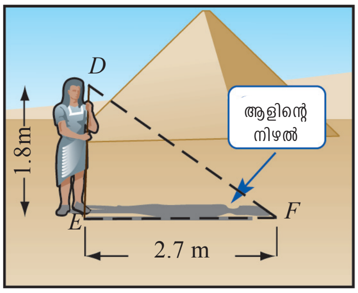
(ഒരേ സമയത്ത് മേൽക്കോൺ തുല്യമാണ്)

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$ (AA പ്രമാണം)

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$\Longrightarrow \frac{AB}{1.8} = \frac{210}{2.7} \Longrightarrow AB = \frac{210}{2.7} \times 1.8 = 140.$$

പിരമിഡിന്റെ ഉയരം = 140 മീറ്റർ



ചിത്രം. 6.23

ഉദാഹരണം 6.10

ഒരു ഗോപുരത്തിൽ നിന്നും 87.6 മീറ്റർ അകലെ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ ഒരു കണ്ണാടിയിൽ ഗോപുരത്തിന്റെ മുകൾ ഭാഗം കാണുന്നു. തറയിൽ ഇരിക്കുന്ന കണ്ണാടി മുകളിലേക്ക് അഭിമുഖമാണ്. അയാൾ കണ്ണാടിയിൽ നിന്നും 0.4 മീറ്റർ അകലെയും തറയിൽ നിന്നും അയാളുടെ വീക്ഷണനിരപ്പ് വരെയുള്ള ദൂരം 1.5 മീറ്ററും ആണ്. ഗോപുരം എത്ര ഉയരത്തിലാണ് ? (ആളിന്റെ പാദം, കണ്ണാടി, ഗോപുരത്തിന്റെ ചുവട് എന്നിവ തിരശ്ചീന രേഖയിലാണ്)

നിർദ്ധാരണം AB, ED എന്നിവ യഥാക്രമം ആളിന്റേയും ഗോപുരത്തിന്റേയും ഉയരങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

കണ്ണാടിയിൽ ഗോപുരത്തിന്റെ പ്രതിബിംബം പതിക്കുന്ന ബിന്ദു C എന്നിരിക്കട്ടെ.

In $\triangle ABC$, $\triangle EDC$ എന്നിവയിൽ നിന്ന്,

$\angle ABC = \angle EDC = 90^o$

$\angle BCA = \angle DCE$

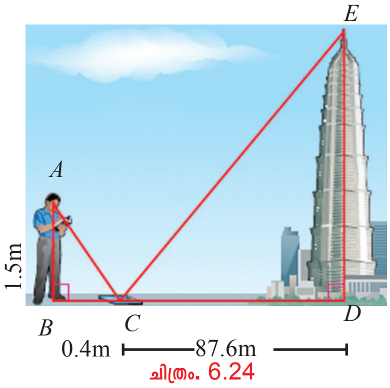
(ഒരേസമയത്ത് മേൽക്കോൺ തുല്യം)

$\therefore \quad \triangle ABC \sim \triangle EDC$ (AA പ്രമാണം)

$\therefore \quad \frac{ED}{AB} = \frac{DC}{BC}$ (സമാനവശങ്ങൾ ആനുപാതികത്തിലാണ്)

$$ED = \frac{DC}{BC} \times AB = \frac{87.6}{0.4} \times 1.5 = 328.5$$

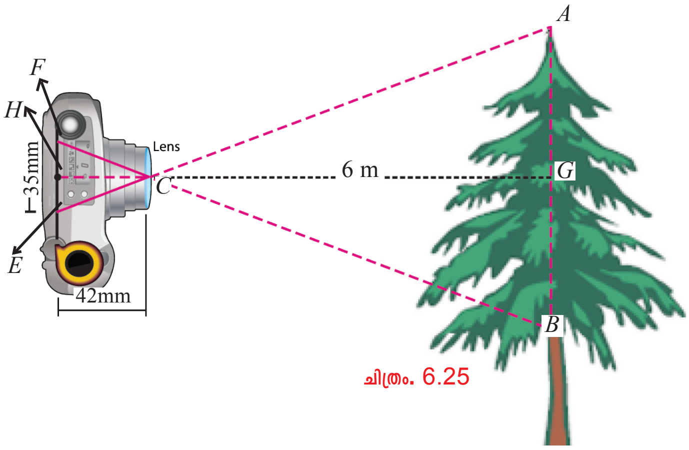
ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം = 328.5 മീറ്റർ



ചിത്രം. 6.24

ഉദാഹരണം 6.11

ഒരു ക്യാമറ ഫിലിമിൽ ഒരു മരത്തിന്റെ പ്രതിബിംബം 35 മി.മീ. നീളത്തിൽ പതിക്കുന്നു. ദർപ്പണത്തിൽ നിന്നും ഫിലിം വരെയുളള ദൂരം 42 മി.മീ, ദർപ്പണത്തിൽ നിന്നും മരം വരെയുള്ള ദൂരം 6 മി. ഫോട്ടോ എടുക്കപ്പെട്ട മരത്തിന്റെ ഭാഗത്തിന്റെ ഉയരം എത്ര ?



ചിത്രം. 6.25

നിർദ്ധാരണം $AB,\ EF$ എന്നിവ യഥാക്രമം മരത്തിന്റെ ഭാഗം, അതിന്റെ പ്രതിബിംബം എന്നിവയുടെ ഉയരങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. C ദർപ്പണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. CG, CH എന്നിവ $\Delta ACB, \Delta FEC$ എന്നിവയുടെ ഉയരങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ,

$$AB \parallel FE.$$

$\Delta ACB,\ \Delta FEC$ എന്നിവയിൽ,

$$\angle BAC = \angle FEC$$

$$\angle ECF = \angle ACB \text{ (ശീർഷാഭിമുഖ കോണുകൾ)}$$

$\therefore\ \Delta ACB \sim \Delta ECF$ (AA പ്രമാണം)

അതായത്, $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{CG}{CH}$

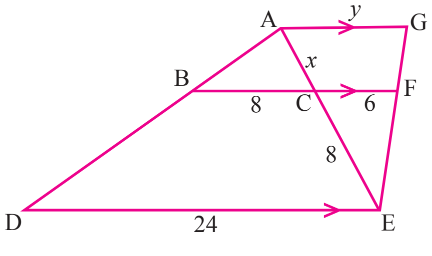
$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{CG}{CH} \times EF = \frac{6 \times 0.035}{0.042} = 5$$

ഫോട്ടോ എടുത്ത മരത്തിന്റെ ഉയരം 5 മീറ്റർ ആണ്

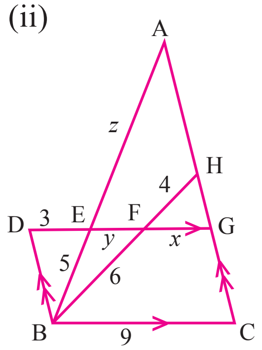
അഭ്യാസം 6.2

1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയിൽ $x,\ y$ യുടെ വില കാണുക. എല്ലാ നീളങ്ങളും സെന്റീ മീറ്ററിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു (എല്ലാ അളവുകളും തോതിലല്ല)

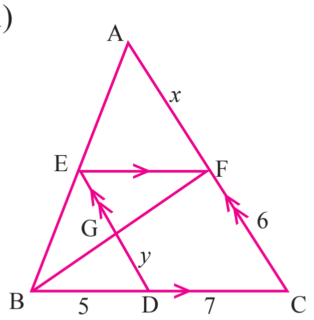
(i)



(ii)

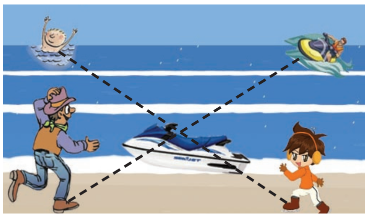


(iii)



2. 1.8 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാളുടെ പ്രതിബിംബം ഒരു ക്യാമറയിലെ ഫിലിമിൽ 1.5 സെ.മീറ്റർ നീളത്തിൽ പതിയുന്നു. ക്യാമറയിലെ ദർപ്പണത്തിൽ നിന്നും 3 സെ.മീ. അകലെയാണ് ഫിലിം എങ്കിൽ ക്യാമറയിൽ നിന്നും അയാൾ എത്ര ദൂരത്തിലാണ് ?

3. ഒരു ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്നും 120 സെ.മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു പെൺകുട്ടി 0.6 മീ/സെക്കന്റ് വേഗതയിൽ നടക്കുന്നു. തറനിരപ്പിൽ നിന്നും 3.6 മീറ്റർ മുകളിലാണ് ദീപം എങ്കിൽ 4 സെക്കന്റുകൾക്കുശേഷം അവളുടെ നിഴലിന്റെ നീളം കാണുക.

4. 

പിതാവിനൊപ്പം കടൽതീരത്ത് നിൽക്കുന്ന ഒരു പെൺകുട്ടി ഒരു നീന്തൽക്കാരൻ മുങ്ങി താഴുന്ന സ്ഥാനംകാണുന്നു. അവൾ നിൽക്കുന്നിടത്തു നിന്ന് 50 മീറ്റർ പടിഞ്ഞാറ് നിൽക്കുന്ന തന്റെ പിതാവിനോട് സഹായിക്കാൻ വിളിച്ച് പറയുന്നു. അവളെക്കാൾ അവളുടെ പിതാവ് 10 മീറ്റർ ബോട്ടിനടുത്താണ്. അവളുടെ പിതാവിന് ബോട്ടിൽ നീന്തൽക്കാരനടുത്തെത്താൻ ബോട്ടിൽ നിന്നും 126 മീറ്റർ ദൂരം യാത്ര ചെയ്യേണ്ടതുണ്ട്. അതേ സമയം ബോട്ടിൽ നിന്നും 98 മീറ്റർ അകലെ ഒരാൾ തോണിയിൽ സവാരി ചെയ്യുന്നത് ആ പെൺകുട്ടി കാണുന്നു. ആ തോണി, നീന്തൽക്കാരന് കിഴക്കു ഭാഗത്താണ്. നീന്തൽക്കാരനെ രക്ഷപ്പെടുത്താൻ അയാൾ എത്ര ദൂരം യാത്ര ചെയ്യണം (സൂചന ചിത്രം നോക്കുക

5. $\triangle ABC$ യിൽ P,Q എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം AB, AC യിലാണ് $AP = 3$ സെ.മീ., $PB = 6$ സെ.മീ, $AQ = 5$ സെ.മീ. , $QC = 10$ സെ.മീ. എങ്കിൽ $BC = 3\ PQ$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

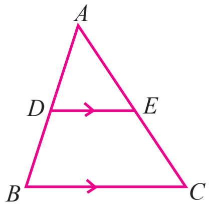
6. $\triangle ABC$ യിൽ $AB = AC$ കൂടാതെ $BC = 6$ സെ.മീ., $AD = 5$സെ.മീ., $CD = 4$സെ.മീ. വരത്തക്ക വിധം AC യിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് D. $\triangle BCD \sim \triangle ACB$ എന്ന് തെളിയിച്ച് BD കാണുക

7. $\triangle ABC$ യിൽ $DE \parallel BC$ വരത്തക്കവിധം AB, AC എന്നീ വശങ്ങളിൻ മേൽ യഥാക്രമം D,E എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ട് $AB = 3\ AD$,$\triangle ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം 72 ച.സെ.മീറ്റർ എങ്കിൽ ചതുർഭുജം $DBCE$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

8. $\triangle ABC$ യുടെ മൂന്ന് വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ 6 സെ.മീ., 4 സെ.മീ. , 9 സെ.മീ. $\triangle PQR \sim \triangle ABC$ $\triangle PQR$ ന്റെ വശങ്ങളിലൊന്ന് 35 സെ.മീ. $\triangle PQR$ ന് സാധ്യമായ ഏറ്റവും വലിയ ചുറ്റളവ് എന്ത് ?

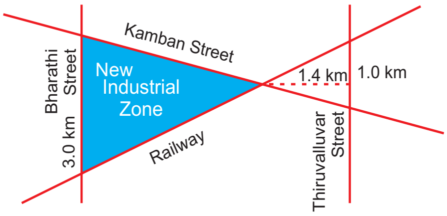
9. ചിത്രത്തിൽ $DE \parallel BC$, $\frac{AD}{BD} = \frac{3}{5}$ എന്നാൽ

(i) $\frac{\triangle ADE \text{യുടെ വിസ്തീർണ്ണം}}{\triangle ABC \text{യുടെ വിസ്തീർണ്ണം}}$, (ii) $\frac{\text{ലംബകം } BCED \text{ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം}}{\triangle ABC \text{യുടെ വിസ്തീർണ്ണം}}$

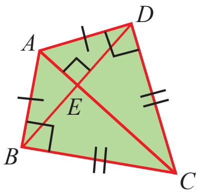


എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

10. ഒരു പട്ടണത്തിൽ ഉപയോഗശൂന്യമായ ഭാഗത്ത് ഒരു പുതിയ വ്യാവസായിക മേഖല വികസിപ്പിക്കുന്നതിന് ഗവൺമെന്റ് തീരുമാനിച്ചു. ചിത്രത്തിന്റെ നിഴലിട്ടഭാഗം പുതിയ വ്യാവസായിക മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണത്തെക്കുറിക്കുന്നു. എങ്കിൽ പുതിയ വ്യാവസായിക മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



11. ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന പോലെ ഒരു കുട്ടി സമഭുജാകൃതിയിൽ ഒരു പട്ടം നിർമ്മിക്കുന്നു. $AE = 16$ സെ.മീ., $EC = 81$ സെ.മീ അവൻ ഒരു നേരെയുള്ള കമ്പി BD ഉപയോഗിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, അതിന്റെ നീളം എത്ര ?

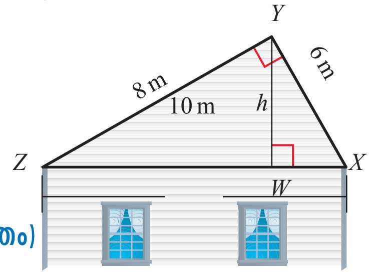


12. ഒരു വിദ്യാർത്ഥി ഒരു കൊടിക്കമ്പിന്റെ ഉയരം കാണുന്നതിന് ആഗ്രഹിക്കുന്നു. കൊടിക്കമ്പിന്റെ അഗ്രത്തിന്റെ പ്രതിഫലനം കാണത്തക്കവിധം അവൻ ഒരു ചെറിയ കണ്ണാടി തറയിൽ വെയ്ക്കുന്നു. അവനിൽ നിന്നും കണ്ണാടിയുടെ ദൂരം 0.5 മീറ്ററും കണ്ണാടിയിൽ നിന്നും കൊടിക്കമ്പിന്റെ ദൂരം 3 മീറ്ററുമാണ്. തറ നിരപ്പിൽ നിന്നും 1.5 മീറ്റർ മുകളിലാണ് തിരശ്ചീന രേഖ എങ്കിൽ കൊടിക്കമ്പിന്റെ ഉയരം കാണുക. (വിദ്യാർത്ഥിയുടെ പാദം, കണ്ണാടി, കൊടിക്കമ്പിന്റെ ചുവട് എന്നിവ തിരശ്ചീന രേഖയിലാണ്)

13. ഒരു മേൽക്കൂരയുടെ തിര്യക്ച്ഛേദം ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നു

(i) സദൃശ്യത്രികോണങ്ങളെ തിരിച്ചറിയുക

(ii) മേൽക്കൂരയുടെ ഉയരം h കാണുക



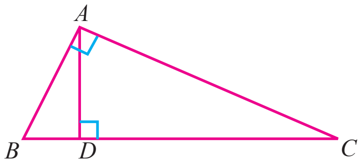
സിദ്ധാന്തം 6.6 പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം (ബന്ധായൻ സിദ്ധാന്തം)

ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിൽ കർണ്ണത്തിന്റെ വർഗ്ഗം മറ്റു രണ്ട് വശങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയ്ക്കു തുല്യമായിരിക്കും.

സങ്കൽപം : സമകോണത്രികോണം $\triangle ABC$ യിൽ $\angle A = 90^\circ$.

അനുമാനം : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

നിർമ്മിതി : $AD \perp BC$ വരയ്ക്കുക



ചിത്രം. 6.26

തെളിവ്

$ABC,\ DBA$, എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ,

$\angle B$ പൊതുവായ കോൺ

കൂടാതെ $\angle BAC = \angle ADB = 90^\circ$.

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DBA$ (AA പ്രമാണം)

അവയുടെ സമാനവശങ്ങൾ ആനുപാതികത്തിലാണ്.

അതായത്, $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BA}$

$\therefore$ $AB^2 = DB \times BC$ (1)

അതുപോലെ $\triangle ABC \sim \triangle DAC$.

$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$

$\therefore$ $AC^2 = BC \times DC$ (2)

(1), (2) എന്നിവ കൂട്ടിയാൽ

$$AB^2 + AC^2 = BD \times BC + BC \times DC$$
$$= BC(BD + DC)$$
$$= BC \times BC = BC^2$$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു.

കുറിപ്പ്

പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തത്തിന് രണ്ട് അടിസ്ഥാന വീക്ഷണങ്ങളുണ്ട്. ഒന്ന്, വിസ്തീർണ്ണങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചതും, രണ്ട് നീളങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചതും. അതുകൊണ്ട് ഈ അതിപ്രധാനമായ സിദ്ധാന്തം ജ്യാമിതിയെയും ബീജഗണിതത്തെയും ബന്ധിപ്പിക്കുന്നു. പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതവും ശരിയാണ്. ഇത് ആദ്യമായി പ്രസ്താവിച്ചതും തെളിയിച്ചതും യൂക്ലിഡ് ആയിരുന്നു.

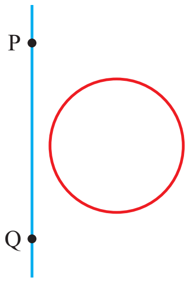
പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു

സിദ്ധാന്തം 6.7 **പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതം**

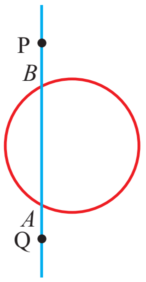
ഒരു ത്രികോണത്തിൽ ഒരു വശത്തിന്റെ വർഗ്ഗം മറ്റു രണ്ട് വശങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ വശത്തിന് എതിരെയുള്ള കോൺ സമകോൺ ആയിരിക്കും.

6.4 വൃത്തങ്ങളും സ്പർശരേഖകളും

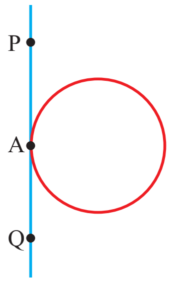
ഒരു നേർരേഖ വൃത്തത്തെ ഒരേയൊരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം സ്പർശിച്ചാൽ അതൊരു സ്പർശരേഖയാണ്. ജ്യാമിതിയിൽ, ജ്യാമിതീയ നിർമ്മിതികളിലും തെളിവുകളിലും വൃത്തങ്ങളുടെ സ്പർശരേഖകൾ ഒരു മുഖ്യ പങ്ക് വഹിക്കുന്നു. ഈ ഭാഗത്തിൽ വൃത്തങ്ങളും സ്പർശരേഖകളും ആധാരമായുള്ള ചില ഫലങ്ങൾ നിർവ്വചിച്ച് സ്പർശരേഖ - ഞാൺ സിദ്ധാന്തം എന്ന ഒരു മുഖ്യമായ സിദ്ധാന്തം തെളിയിക്കാം. ഒരു വൃത്തവും ഒരു തലത്തിലുള്ള ഒരു നേർരേഖയും തന്നാൽ മൂന്ന് സാദ്ധ്യതകൾ ഉണ്ടാകുന്നു - അവ ഛേദിക്കുന്നില്ല, അവ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു അല്ലെങ്കിൽ ഒരേയൊരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം സ്പർശിക്കുന്നു. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക.



ചിത്രം. 6.27



ചിത്രം. 6.28



ചിത്രം. 6.29

ചിത്രം 6.27 ൽ വൃത്തത്തിനും PQ എന്ന നേർരേഖയ്ക്കും പൊതുവായ ബിന്ദു ഇല്ല

ചിത്രം 6.28 ൽ PQ എന്ന നേർരേഖ വൃത്തത്തെ A,B എന്നീ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു. ഇവിടെ PQ വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ഛേദകം ആകുന്നു.

ചിത്രം 6.29 ൽ PQ എന്ന നേർരേഖയ്ക്കും വൃത്തത്തിനും പൊതുവായി ഒരേയൊരു ബിന്ദു ഉണ്ട്. നേർരേഖ വൃത്തത്തെ ഒരേയൊരു ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. PQ എന്ന നേർരേഖയെ , വൃത്തത്തിന് A യിലുള്ള സ്പർശരേഖ എന്നു പറയുന്നു.

നിർവ്വചനം

ഒരു വൃത്തത്തെ ഒരേയൊരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം സ്പർശിക്കുന്ന രേഖയെ സ്പർശരേഖ എന്നും വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ അതിന്റെ സ്പർശ ബിന്ദു എന്നും പറയുന്നു.

വൃത്തങ്ങളും സ്പർശരേഖകളും അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള സിദ്ധാന്തങ്ങൾ (തെളിവില്ല)

1. ഒരു വൃത്തത്തിൽ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള സ്പർശരേഖ സ്പർശബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസാർദ്ധത്തിനു ലംബമായിരിക്കും.
2. ഒരു വൃത്തത്തിന് അതിൻമേലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ ഒരേയൊരു സ്പർശരേഖ മാത്രം വരയ്ക്കാൻ കഴിയും
3. ഒരു വൃത്തത്തിന് വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വരച്ച രണ്ട് സ്പർശരേഖകളുടെ നീളങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കും
4. രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾ പരസ്പരം സ്പർശിക്കുമ്പോൾ അവയുടെ സ്പർശബിന്ദു, കേന്ദ്രങ്ങളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയിൽ ആയിരിക്കും.
5. രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾ ബാഹ്യമായി സ്പർശിച്ചാൽ അവയുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം അവയുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടെ തുകയ്ക്കു തുല്യമായിരിക്കും..
6. രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾ ആന്തരമായി സ്പർശിച്ചാൽ കേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം അവയുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തിനു തുല്യമായിരിക്കും.

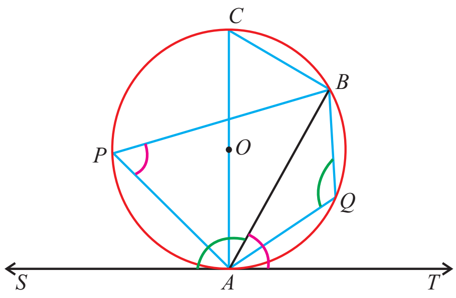
സിദ്ധാന്തം 6.8 സ്പർശരേഖ – ഞാൺ സിദ്ധാന്തം (Tangent -Chord Theorem)

ഒരു സ്പർശരേഖയ്ക്കും സ്പർശബിന്ദു വഴിയുള്ള ഞാണിനും ഇടയിലുള്ള കോൺ അതിനെതിരെയുള്ള വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണിനു തുല്യമായിരിക്കും

സങ്കൽപം : ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം 'O'. A യിലൂടെയുള്ള സ്പർശരേഖ ST, ഒരു ഞാൺ AP. ഞാൺ AB യുടെ എതിർവശങ്ങളിൽ P, Q എന്നീ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ കുറിക്കുക.

അനുമാനം : (i) $\angle BAT = \angle BPA$ (ii) $\angle BAS = \angle AQB$

നിർമ്മിതി : വ്യാസം AC വരയ്ക്കുക B, C യോജിപ്പിക്കുക



ചിത്രം. 6.30

തെളിവ്

പ്രസ്താവന	കാരണം	
$\angle ABC = 90^\circ$	അർദ്ധവൃത്തത്തിലെ കോൺ 90^0	
$\angle CAB + \angle BCA = 90^\circ$	ഒരു സമകോണത്രികോണം ABC യിൽ രണ്ട് ന്യൂനകോണുകളുടെ തുക.	(1)
$\angle CAT = 90^\circ$	വ്യാസം സ്പർശബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള സ്പർശരേഖയ്ക്ക് ലംബം	
$\Longrightarrow \angle CAB + \angle BAT = 90^\circ$		(2)
$\angle CAB + \angle BCA = \angle CAB + \angle BAT$	(1) , (2) ൽ നിന്ന്	
$\Longrightarrow \angle BCA = \angle BAT$		(3)

$\angle BCA = \angle BPA$ ഒരേ വൃത്തഖണ്ഡം AB യിലെ കോണുകൾ (4)

$\angle BAT = \angle BPA$, (3) , (4) ൽ നിന്ന് (5)

(i) തെളിയിച്ചു.

$\angle BPA + \angle AQB = 180^\circ$ ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ

$\Longrightarrow \angle BAT + \angle AQB = 180^\circ$ (5) ൽ നിന്ന് (6)

വീണ്ടും $\angle BAT + \angle BAS = 180^\circ$ രേഖാ കോൺ (7)

$\angle BAT + \angle AQB = \angle BAT + \angle BAS$ (6), (7) ൽ നിന്ന്

$\angle BAS = \angle AQB$ (ii)തെളിയിച്ചു.

സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു.

സിദ്ധാന്തം 6.9 സ്പർശരേഖ – ഞാൺ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതം

ഒരു വൃത്തത്തിൽ ഒരു ഞാണിന്റെ ഒരഗ്രത്തിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന നേർരേഖ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ എതിർ വൃത്ത ഖണ്ഡത്തിലെ കോണിനു തുല്യമായാൽ നേർരേഖ വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖ ആയിരിക്കും.

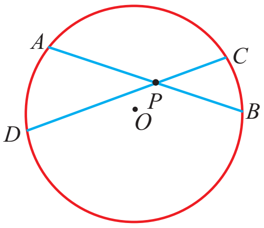
നിർവ്വചനം

AB എന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിൻമേലുള്ള ഒരു ബിന്ദു P എന്നിരിക്കട്ടെ $PA \times PB$ എന്ന ഗുണനഫലം PA , PB എന്നിവ വശങ്ങളായുള്ള ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

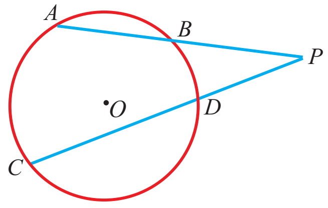
ഈ ഗുണനഫലത്തെ AB യുടെ PA, PB എന്നീ ഭാഗങ്ങൾ കൊണ്ടുണ്ടാകുന്ന ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം എന്നു പറയുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 6.10

ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ട് ഞാണുകൾ തമ്മിൽ വൃത്തത്തിനകത്തോ വൃത്തത്തിന് പുറത്തോ വെച്ച് ഛേദിച്ചാൽ ഒരു ഞാണിലുണ്ടാകുന്ന രേഖാ ഖണ്ഡങ്ങളാൽ രൂപപ്പെടുന്ന ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം മറ്റേ ഞാണിലുണ്ടാകുന്ന രേഖാ ഖണ്ഡങ്ങളാൽ രൂപപ്പെടുന്ന ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്തുല്യമായിരിക്കും.



ചിത്രം. 6.31



ചിത്രം. 6.32

ചിത്രം 6.31 ൽ O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിലെ രണ്ട് ഞാണുകൾ AB, CD എന്നിവ വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ ഛേദിച്ചാൽ

$$PA \times PB = PC \times PD$$

ചിത്രം 6.32 ൽ O കേന്ദ്രമായ ഞാണുകൾ AB, CD എന്നിവ വൃത്തത്തിനു വെളിയിൽ ഛേദിച്ചാൽ

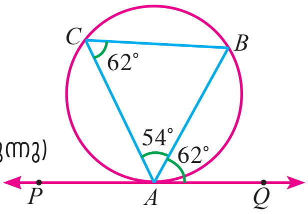
$PA \times PB = PC \times PD$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 6.12

ഒരു വൃത്തത്തിൽ A യിലൂടെയുള്ള സ്പർശരേഖ PQ വും ഞാൺ AB യും ആണ്. $\angle BAC = 54^0$, $\angle BAQ = 62^0$ ആകത്തക്കവിധം C എന്ന ബിന്ദു എടുക്കുക. $\angle ABC$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം A വഴിയുള്ള സ്പർശരേഖ PQ, AB ഒരു ഞാൺ എങ്കിൽ

$\angle BAQ = \angle ACB = 62^\circ$. (സ്പർശരേഖ ഞാൺ സിദ്ധാന്തം)



ചിത്രം. 6.33

കൂടാതെ $\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$.

(ഒരു ത്രികോണത്തിലെ മൂന്ന് കോണുകളുടേയും തുക 180^0 ആകുന്നു)

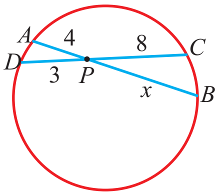
$$\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ACB)$$

$$= 180^\circ - (54^\circ + 62^\circ) = 64^\circ.$$

ഉദാഹരണം 6.13

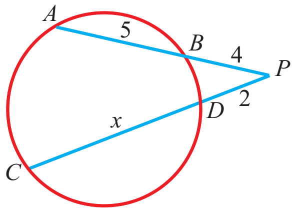
താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ നിന്നും x -ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

(i)



ചിത്രം. 6.34

(ii)



ചിത്രം. 6.35

നിർദ്ധാരണം

(i) $PA \,.\, PB = PC \,.\, PD$

$$PB = \frac{PC.PD}{PA}$$

$$x = \frac{8 \times 3}{4} = 6.$$

(ii) $PC \,.\, PD = PA.\, PB$

$$(2+x)\,2 = 9 \times 4$$

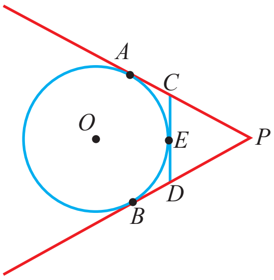
$$x + 2 = 18$$

$$x = 16.$$

ഉദാഹരണം 6.14

ചിത്രത്തിൽ, O കേന്ദ്രമായുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ വെളിയിൽ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിന് PA,PB എന്നീ സ്പർശരേഖകൾ വരച്ചിട്ടുണ്ട്. E യിലൂടെ വൃത്തത്തിന് ഒരു സ്പർശരേഖ CD യും AP = 15 സെ.മീറ്ററുമാണ്. എങ്കിൽ $\Delta\ PCD$ യുടെ ചുറ്റളവ് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം **വൃത്തത്തിന് വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വരച്ച രണ്ട് സ്പർശരേഖകളുടെ നീളങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കും.**



ചിത്രം. 6.36

$\therefore CA = CE, \quad DB = DE\,, PA = PB.$

$\therefore\ \Delta\ PCD$ യുടെ ചുറ്റളവ് $= PC + CD + DP$

$$= PC + CE + ED + DP$$

$$= PC + CA + DB + DP$$

$$= PA + PB = 2\,PA \qquad (PB = PA)$$

$$= 2 \times 15 = 30$$ സെ.മീ.

ഉദാഹരണം 6.15

ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളും ഒരു വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുന്നു. AB = 6 സെ.മീ., BC = 6.5 , CD = 7 എങ്കിൽ AD യുടെ നീളം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം വൃത്തം ചതുർഭുജത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ P, Q, R, S എന്നിരിക്കട്ടെ. ഒരു വൃത്തത്തിന് വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വരച്ച രണ്ട് സ്പർശരേഖകളുടെ നീളങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കും.

$\therefore$ $AP = AS$ (1), $BP = BQ$ (2), $CR = CQ$ (3), $DR = DS$ (4).

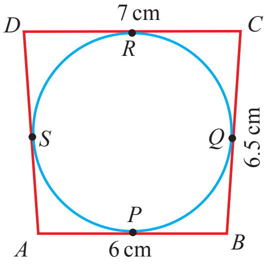
(1), (2), (3), (4) എന്നിവ കൂട്ടിയാൽ,

$AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS$

$AB + CD = AD + BC.$

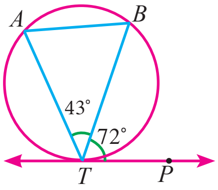
$AD = AB + CD - BC = 6 + 7 - 6.5 = 6.5$

$AD = 6.5$ സെ.മീ.



ചിത്രം. 6.37

അഭ്യാസം 6.3



1. ചിത്രത്തിൽ, TP ഒരു സ്പർശരേഖ. A,B എന്നിവ വൃത്തത്തിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളാണ് $\angle BTP = 72^\circ$, $\angle ATB = 43^\circ$ എങ്കിൽ $\angle ABT$ കാണുക.

2. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ട് ഞാണുകൾ AB,CD എന്നിവ പരസ്പരം ആന്തരമായി P യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

   (i) CP = 4 സെ.മീ., AP = 8 സെ.മീ., PB = 2 സെ.മീ., എങ്കിൽ PD കാണുക.

   (ii) AP = 12 സെ.മീ., AB = 15 സെ.മീ., CP = PD, എങ്കിൽ CD കാണുക.

3. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ട് ഞാണുകൾ AB, CD എന്നിവ പരസ്പരം ബാഹ്യമായി P യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

   (i) AB = 4 സെ.മീ., BP = 5 സെ.മീ., PD = 3 സെ.മീ., എങ്കിൽ CD കാണുക.

   (ii) BP = 3സെ.മീ., CP = 6 സെ.മീ., CD = 2 സെ.മീ., എങ്കിൽ AB കാണുക.

4. ΔABC യുടെ BC എന്ന വശത്തെ വൃത്തം P യിൽ സ്പർശിക്കുന്നു AB, AC എന്നിവ നീട്ടിയതിനെ യഥാക്രമം Q, R ൽ സ്പർശിക്കുന്നു. AQ = AR = $\frac{1}{2}$ (ΔABCയുടെ ചുറ്റളവ്) എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളും ഒരു വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുന്നുവെങ്കിൽ സാമാന്തരികം ഒരു സമചതുർഭുജമാണെന്ന് കാണിക്കുക.

6. ഒരു കുളത്തിൽ താമര ജലനിരപ്പിന് 20 സെ.മീ. മുകളിലാണ്. അതിന്റെ തണ്ട് ഭാഗികമായി ജലനിരപ്പിനടിയിലാണ്. കാറ്റടിച്ചപ്പോൾ തണ്ടിന്റെ യഥാസ്ഥാനത്തു നിന്നും 40 സെ.മീ. അകലെ ജലത്തിൽ ആ താമര തൊടുന്നു. യഥാർത്ഥമായി ജലനിരപ്പിനടിയിൽ തണ്ട് എത്ര നീളത്തിൽ ഉണ്ടായിരുന്നു.

7. ഒരു ദീർഘചതുരം ABCD യുടെ ഉൾഭാഗത്തുള്ള O എന്ന ബിന്ദുവിനെ A, B, C, D എന്നീ ശീർഷങ്ങളിലോരോന്നിനോടും യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

അഭ്യാസം 6.4

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

1. $\triangle$ABC യുടെ BC എന്ന വശത്തിന് സമാന്തരമായി വരച്ചരേഖ AB, AC എന്നീ വശങ്ങളെ യഥാക്രമം D, E യിൽ ഛേദിച്ചാൽ, $\frac{AE}{AC} =$

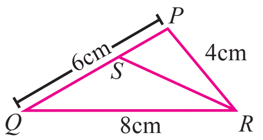
   (A) $\frac{AD}{DB}$ (B) $\frac{AD}{AB}$ (C) $\frac{DE}{BC}$ (D) $\frac{AD}{EC}$

2. $\triangle$ABC യിൽ DE ∥ BC, AB, AC യെ D , E യിൽ സന്ധിക്കുന്നു.

AD = 3 സെ.മീ., DB = 2 സെ.മീ. , AE = 2.7 സെ.മീ., എങ്കിൽ AC

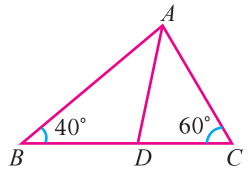
(A) 6.5 സെ.മീ. (B) 4.5 സെ.മീ. (C) 3.5 സെ.മീ. (D) 5.5 സെ.മീ.

3. $\triangle$PQRൽ, $\angle R$ ന്റെ ദ്വിഭാജകം RS ആകുന്നു. PQ = 6 സെ.മീ., QR = 8 സെ.മീ., RP = 4 സെ.മീ. എങ്കിൽ PS



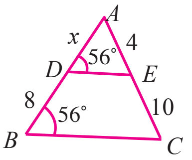
(A) 2 സെ.മീ. (B) 4 സെ.മീ. (C) 3 സെ.മീ. (D) 6 സെ.മീ.

4. ചിത്രത്തിൽ, $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, $\angle B = 40^\circ$,, $\angle C = 60^\circ$, എങ്കിൽ $\angle BAD =$



(A) 30° (B) 50° (C) 80° (D) 40°

5. ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് x ന്റെ മൂല്യം



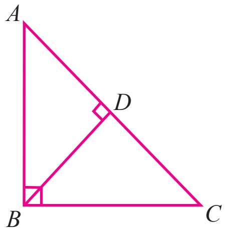
(A) 4 · 2 (B) 3 · 2

(C) 0 · 8 (D) 0 · 4

6. ABC , DEF, എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$,എങ്കിൽ,

(A) $\frac{AB}{DE} = \frac{CA}{EF}$ (B) $\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{FD}$ (C) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ (D) $\frac{CA}{FD} = \frac{AB}{EF}$

7. തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ തെറ്റായ പ്രസ്താവന ഏത്?



(A) $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (B) $\Delta ABD \sim \Delta ABC$

(C) $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (D) $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

8. 12 മീ. നീളമുള്ള ഒരു ലംബമായ ദണ്ഡ് തറയിൽ 8 മീ.നീളത്തിൽ നിഴൽ പതിപ്പിക്കുന്നു. അതേസമയം ഒരു ഗോപുരം തറയിൽ 40 മീ.നീളത്തിൽ നിഴൽ പതിപ്പിക്കുന്നു. ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം

(A) 40 മീ. (B) 50 മീ. (C) 75 മീ. (D) 60 മീ.

9. രണ്ട് സദൃശത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 2:3 എങ്കിൽ അവയുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം

(A) 9:4 (B) 4:9 (C) 2:3 (D) 3:2

10. $\triangle$ABC, $\triangle$DEF എന്നിവ സദൃശങ്ങളാണ്. അവയുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ യഥാക്രമം 100 ച.സെ.മീ., 49 ച.സെ.മീ., കൂടാതെ BC= 8.2 സെ.മീ. എങ്കിൽ EF =

(A) 5.47 സെ.മീ. (B) 5.74 സെ.മീ. (C) 6.47 സെ.മീ. (D) 6.74 സെ.മീ.

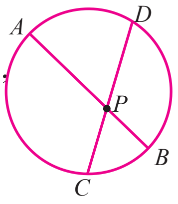
11. രണ്ട് സദൃശത്രികോണങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ യഥാക്രമം 24 സെ.മീ, 18 സെ.മീ ആകുന്നു. ആദ്യ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം 8സെ.മീ. എങ്കിൽ മറ്റേ ത്രികോണത്തിന്റെ സമാനവശം.

(A) 4 സെ.മീ. (B) 3 സെ.മീ. (C) 9 സെ.മീ. (D) 6 സെ.മീ.

12. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ട് ഞാണുകൾ AB, CD എന്നിവ നീട്ടിയതിനെ P യിൽ സന്ധിക്കുന്നു

AB = 5, AP = 8, CD = 2, PD =

(A) 12 (B) 5 (C) 6 (D) 4



13. ചിത്രത്തിൽ AB,CD എന്നീ ഞാണുകൾ P യിൽ ഛേദിക്കുന്നു AB = 16സെ.മീ.,

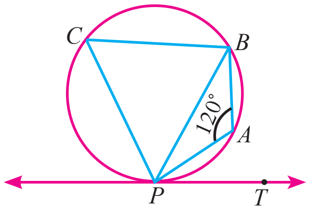
PD = 8 സെ.മീ., PC = 6 സെ.മീ. , AP >PB, എങ്കിൽ AP =

(A) 8 സെ.മീ. (B) 4 സെ.മീ. (C) 12 സെ.മീ. (D) 6 സെ.മീ.

14. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം O യിൽ നിന്നും 26 സെ.മീ. അകലെയുള്ള ബിന്ദു P ആകുന്നു. P യിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിന് വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശരേഖ PT യുടെ നീളം 10 സെ.മീ. എങ്കിൽ OT =

(A) 36 സെ.മീ. (B) 20 സെ.മീ.

(C) 18 സെ.മീ. (D) 24 സെ.മീ.



15. ചിത്രത്തിൽ, $\angle PAB = 120^\circ$ എങ്കിൽ $\angle BPT =$

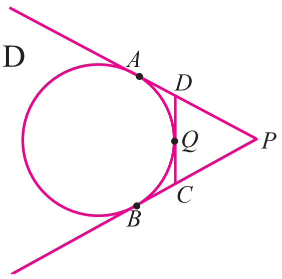
(A) 120° (B) 30° (C) 40° (D) 60°

16. O കേന്ദ്രമുള്ള വൃത്തത്തിന് വെളിയിലുള്ള P എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വരച്ച സ്പർശരേഖകൾ PA, PB എന്നിവ തമ്മിൽ യോജിച്ച് 40^0 കോൺ ഉണ്ടാകുന്നു എങ്കിൽ $\angle POA =$

(A) 70° (B) 80° (C) 50° (D) 60°

17. ചിത്രത്തിൽ വൃത്തത്തിന് വെളിയിലുള്ള P എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് PA, PB എന്നീ സ്പർശരേഖകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. Q വിലൂടെയുള്ള ഒരു സ്പർശരേഖ CD ആകുന്നു. PA = 8 സെ.മീ., CQ = 3 സെ.മീ. എങ്കിൽ PC

(A) 11 സെ.മീ. (B) 5 സെ.മീ. (C) 24 സെ.മീ. (D) 38 സെ.മീ.



18. B യിൽ സമകോണുള്ള ഒരു $\triangle ABC$ യിൽ $BD \perp AC$ ആകുന്നു.

BD = 8 സെ.മീ. , AD = 4 സെ.മീ. എങ്കിൽ CD =

(A) 24 സെ.മീ. (B) 16 സെ.മീ. (C) 32 സെ.മീ. (D) 8 സെ.മീ.

19. രണ്ട് സദൃശ ത്രികോണങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ യഥാക്രമം 16 ച.സെ.മീ., 36 ച.സെ.മീ., ആകുന്നു. ആദ്യ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി 3 സെ.മീ. എങ്കിൽ മറ്റെ ത്രികോണത്തിന്റെ സമാന ഉന്നതി

(A) 6.5 സെ.മീ. (B) 6 സെ.മീ. (C) 4 സെ.മീ. (D) 4.5 സെ.മീ.

20. $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ എന്നീ രണ്ട് സദൃശത്രികോണങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ യഥാക്രമം 36 സെ.മീ., 24 സെ.മീ ആകുന്നു. DE = 10 സെ.മീ. എങ്കിൽ AB=

(A) 12 സെ.മീ. (B) 20 സെ.മീ. (C) 15സെ.മീ. (D) 18 സെ.മീ.

7

ത്രികോണമിതി

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry – J.F. Herbart

- മുഖവുര
- സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ
- ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും

ഹിപ്പാർക്കസ്
(190 - 120 B.C.)
ഗ്രീസ്

ഹിപ്പാർക്കസ് ത്രികോണമിതിയെ വികസിപ്പിച്ച് ത്രികോണമിതിപ്പട്ടിക രൂപീകരിച്ച് ഗോളീയ ത്രികോണമിതിയിലെ ധാരാളം പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിച്ചു. സൂര്യൻ, ചന്ദ്രൻ എന്നിവയെ സംബന്ധിച്ചുള്ള അദ്ദേഹത്തിന്റെ സിദ്ധാന്തങ്ങളും ത്രികോണമിതിയും ഉപയോഗിച്ച് സൂര്യഗ്രഹണത്തെ പ്രവചിക്കുന്നതിനുള്ള വിശ്വസിക്കാവുന്ന ഒരു രീതി വികസിപ്പിച്ചെടുത്ത ആദ്യത്തെ വ്യക്തിയായിരിക്കാം ഹിപ്പാർക്കസ് എന്ന് കരുതപ്പെടുന്നു.

നഗനനേത്രങ്ങൾ കൊണ്ട് നിരീക്ഷിക്കുന്നതിനുവേണ്ടി വളരെക്കാലമായി ഉപയോഗിച്ചിരുന്ന ധാരാളം ജ്യോതി ശാസ്ത്രീയ ഉപകരണങ്ങളുടെ കണ്ടുപിടിത്തം അഥവാ പ്രയോജനപ്പെടുത്തൽ കൊണ്ട് ഹിപ്പാർക്കസ് പ്രശംസിക്കപ്പെടുന്നു.

7.1 മുഖവുര

വൃത്തങ്ങളിലെ ചാപങ്ങളുടെ ആകൃതിയും ചാപങ്ങൾ നിർണ്ണയിക്കുന്ന ഞാണുകളുടെ ആകൃതിയും തമ്മിലുള്ള പരസ്പര ബന്ധം പ്രകടിപ്പിക്കുന്നതിന് ത്രികോണമിതി വികസിപ്പിക്കപ്പെട്ടു. 15-ാം നൂറ്റാണ്ടിനു ശേഷം ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളുടെ അളവുകളെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളുമായി ബന്ധിപ്പിക്കുന്നതിന് ത്രികോണമിതി ഉപയോഗപ്പെട്ടു. ബി.സി. രണ്ടാംനൂറ്റാണ്ടിൽ വസിച്ചിരുന്ന ഗ്രീക്ക് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഹിപ്പാർക്കസ് ത്രികോണമിതിയുടെ ഉപജ്ഞാതാവ് എന്ന് വിളിക്കപ്പെടുന്നു. ത്രികോണമിതി എന്ന വാക്കിന് ത്രികോണത്തിന്റെ അളവ് എന്ന അർത്ഥം നൽകിയതിനാൽ Bartholomaus pitiscus (1561-1613) പ്രശംസാർഹനായി.

ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം, ത്രികോണമിതി പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് പ്രശ്ന നിർദ്ധാരണം തുടങ്ങിയവ നാം IX-ാം ക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ, ത്രികോണമിതി സർവ്വ സമവാക്യങ്ങൾ, കുന്നുകളുടേയും കെട്ടിടങ്ങളുടേയും ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും യഥാർത്ഥമായി അളക്കാതെ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് അവ കാണുന്നവിധം എന്നിവയെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് പഠിക്കാം.

7.2 ത്രികോണമിതി സർവ്വ സമവാക്യങ്ങൾ

ഒരു സമവാക്യത്തിലുള്ള ചരത്തിന് (ചരങ്ങൾക്ക്) ഏതു മൂല്യം ആരോപിച്ചാലും സമവാക്യം ശരിയാകുകയാണെങ്കിൽ ആ സമവാക്യത്തെ സർവ്വസമവാക്യം എന്നു പറയുന്നുവെന്ന് നമുക്ക് അറിയാമല്ലോ. ഉദാഹരണമായി $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ഒരു സർവ്വസമവാക്യമാകുന്നു കാരണം a, b യുടെ എല്ലാ വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങൾക്കും ഈ സമവാക്യം ശരിയാകുന്നു.

ഇതുപോലെ, ഒരു കോണിന്റെ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന സമവാക്യം അതിലുള്ള കോണുകളുടെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും ശരിയാകുന്നുവെങ്കിൽ ആ സമവാക്യത്തെ ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യം എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി, $(\sin\theta + \cos\theta)^2 - (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 4\sin\theta\cos\theta$ എന്ന സമവാക്യം θ യുടെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും ശരിയാകുന്നതിനാൽ ഈ സമവാക്യം ഒരു ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യമാകുന്നു.

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1$ സർവ്വസമവാക്യമല്ല. കാരണം $\theta = 0^\circ$, ആയാൽ ഇത് ശരിയാണ്. $\theta = 45^\circ$ ആയാൽ ഇത് ശരിയല്ല. കാരണം $(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \neq 1$.

> ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ, ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ, സമീകരണങ്ങൾ എന്നിവ ചരങ്ങളുടെ ഏതെല്ലാം വിലകൾക്ക് തൃപ്തമാകുന്നുവോ അവയെ വ്യക്തമായി നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടു എന്ന് കരുതാം.

പൈതഗോറസ് സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ എന്നറിയപ്പെടുന്ന മൂന്ന് ഉപയോഗപ്രദമായ ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ സ്ഥിരീകരിച്ച് അവയെ നമുക്ക് മറ്റു ചില സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കാം.

സമകോണ $\triangle ABC$, യിൽ

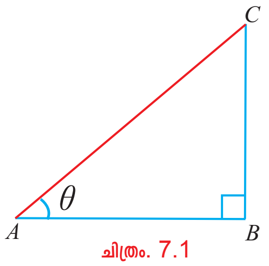
$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad (1)$$

(1)ലെ ഓരോപദത്തെയും AC^2, കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} \qquad (AC \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$$



ചിത്രം. 7.1

$\angle A = \theta$; $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ലെ θ യുടെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും,

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \qquad (2)$$

$\cos^2 0^\circ + \sin^2 0^\circ = 1$, $\cos^2 90^\circ + \sin^2 90^\circ = 1$ എന്ന് വ്യക്തമാണ്. ആയതിനാൽ $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ലെ θ യുടെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും (2) ശരിയാണ്.

(1) ലെ ഓരോ പദത്തെയും AB^2, കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \qquad (\because AB \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \implies 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta. \qquad (3)$$

$\theta = 90^\circ$ ആയാൽ $\tan\theta$, $\sec\theta$ എന്നിവ നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല. ആയതിനാൽ $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ ലെ θ യുടെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും (3) ശരിയാണ്.

വീണ്ടും (1) ലെ ഓരോ പദത്തെയും BC^2, കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ,

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \qquad (\because BC \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \implies \cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta. \qquad (4)$$

$\theta = 0^\circ$ ആയാൽ $\cot\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ എന്നിവ നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല. ആയതിനാൽ $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ ലെ θ യുടെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും (4) ശരിയാണ്.

മുകളിൽ പ്രസ്താവിച്ച (1)മുതൽ (4)വരെയുള്ള സർവ്വസമവാക്യങ്ങളുടെ മറ്റു ചില രൂപങ്ങളെ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു

	സർവ്വസമവാക്യം	തുല്യരൂപങ്ങൾ
(i)	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ (അല്ലെങ്കിൽ) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
(ii)	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ (അല്ലെങ്കിൽ) $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
(iii)	$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$	$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ (അല്ലെങ്കിൽ) $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

മുകളിൽ പ്രസ്താവിച്ച സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഒരു ന്യൂനകോൺ θ യ്ക്ക് ശരിയെന്ന് നാം തെളിയിച്ചു. θ യുടെ ഏതൊരു മൂല്യത്തിന് ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടോ ആ മൂല്യങ്ങൾക്ക് ഈ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ശരിയാണ്. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ ന്യൂനകോണുകൾ മാത്രം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

പൊതുവായി ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുള്ള സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ തെളിയിക്കുന്നതിന് ഒരു പൊതുവായ രീതി ഇല്ല. എന്നിരുന്നാലും ത്രികോണമിതി സർവ്വ സമവാക്യങ്ങൾ തെളിയിക്കുന്നതിന് ഉപയോഗപ്രദമായ ചില മാർഗ്ഗങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

(i) സർവ സമവാക്യം ശ്രദ്ധയോടെ പഠിച്ച്, തന്നിട്ടുള്ളതും കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടതും മനസ്സിൽ സൂക്ഷിക്കുക

(ii) പൊതുവായി സർവ്വ സമവാക്യത്തിന്റെ സങ്കീർണ്ണമായ വശം ആദ്യം പരിഗണിച്ച് ലഘൂകരിക്കേണ്ടതാണ്. കാരണം, ലഘൂകരിക്കുന്നതാണ് വികസിപ്പിക്കുന്നതിനെക്കാൾ എളുപ്പം.

(iii) സർവ്വസമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുവശങ്ങളും സങ്കീർണ്ണമാണെങ്കിൽ ഓരോന്നും വെവ്വേറെയായി എടുത്ത് ലഘൂകരിച്ച് അതേ സമവാക്യത്തിൽ കൊടുക്കാം.

(iv) ഭിന്നങ്ങളെ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ പ്രയോഗങ്ങളെ കൂട്ടുന്നതിന് ബീജഗണിത സമ്പ്രദായങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

(v) ആവശ്യമാണെങ്കിൽ ഓരോ പദത്തെയും അവയുടെ Sine, Cosine തുല്യതകൾക്ക് മാറ്റി ലഘൂകരിക്കാൻ ശ്രമിക്കുക.

(vi) ഒരു സർവ്വസമവാക്യത്തിൽ $\tan^2\theta, \cot^2\theta, \operatorname{cosec}^2\theta, \sec^2\theta,$ എന്നിവ ഉണ്ടായിരുന്നാൽ $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta,\ \operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta.$ എന്നീ ഫലങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത് സഹായകമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 7.1

തെളിയിക്കുക. $\dfrac{\sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1$

നിർദ്ധാരണം

$$\frac{\sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin\theta}{\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\right)} + \frac{\cos\theta}{\left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\ .$$

ഉദാഹരണം 7.2

തെളിയിക്കുക. $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$

നിർദ്ധാരണം

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)} \times \frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1^2-\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \qquad (1-\cos^2\theta = \sin^2\theta)$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta\ .$$

ഉദാഹരണം 7.3

തെളിയിക്കുക. $[\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) - \sin(90^\circ-\theta)][\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta][\tan\theta + \cot\theta] = 1$

നിർദ്ധാരണം

$$[\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) - \sin(90^\circ-\theta)][\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta][\tan\theta + \cot\theta]$$

$$= (\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) \qquad \because \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) = \sec\theta,\ \because \sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right) = 1$$

ഉദാഹരണം 7.4

തെളിയിക്കുക. $\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

നിർദ്ധാരണം

$$\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \qquad (\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \qquad (a^2 - b^2 = (a+b)(a-b))$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)[1 - (\sec\theta - \tan\theta)]}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)(\tan\theta - \sec\theta + 1)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \tan\theta + \sec\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

ഉദാഹരണം 7.5

തെളിയിക്കുക. $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\tan\theta+\cot\theta$

നിർദ്ധാരണം

$$\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan\theta}{1-\frac{1}{\tan\theta}}+\frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}=\frac{\tan\theta}{\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta}}+\frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1}{\tan\theta(1-\tan\theta)}=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1}{(-\tan\theta)(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}-\frac{1}{(\tan\theta)(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{1}{(\tan\theta-1)}\left(\tan^2\theta-\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{(\tan\theta-1)}\ \frac{(\tan^3\theta-1)}{\tan\theta}$$

$$=\frac{(\tan\theta-1)(\tan^2\theta+\tan\theta+1^2)}{(\tan\theta-1)\tan\theta}\qquad (a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2))$$

$$=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta+1}{\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta}+\frac{\tan\theta}{\tan\theta}+\frac{1}{\tan\theta}=\tan\theta+1+\cot\theta$$

$$=1+\tan\theta+\cot\theta.$$

ഉദാഹരണം 7.6

തെളിയിക്കുക

$$(\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2=7+\tan^2\theta+\cot^2\theta.$$

നിർദ്ധാരണം

$$(\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2$$

$$=\sin^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta+2\sin\theta\operatorname{cosec}\theta+\cos^2\theta+\sec^2\theta+2\cos\theta\sec\theta$$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta+\sec^2\theta+2\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}+2\cos\theta\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=1+(1+\cot^2\theta)+(1+\tan^2\theta)+2+2$$

$$=7+\tan^2\theta+\cot^2\theta.$$

ഉദാഹരണം 7.7

തെളിയിക്കുക. $(\sin^6\theta + \cos^6\theta) = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta.$

നിർദ്ധാരണം

$$\sin^6\theta + \cos^6\theta$$
$$= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3$$
$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$(\, a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)\,)$$
$$= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta. \qquad (\,\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\,)$$

ഉദാഹരണം 7.8

തെളിയിക്കുക. $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta.$

നിർദ്ധാരണം

$$\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$$
$$= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)}\right) \qquad (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$
$$= (\,\tan\theta\,)\left(\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\right) = \tan\theta.$$

ഉദാഹരണം 7.9

തെളിയിക്കുക. $\dfrac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta.$

നിർദ്ധാരണം

$$\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$$
$$= \left(\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\right)\times\left(\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta}\right)$$
$$= \frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{\sec^2\theta - \tan^2\theta}$$
$$= \frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{1} \qquad (\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$$
$$= (\sec\theta - \tan\theta)^2 = \sec^2\theta + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta$$
$$= (1 + \tan^2\theta) + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta \qquad (\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta)$$
$$= 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta.$$

ഉദാഹരണം 7.10

തെളിയിക്കുക. $\dfrac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$

നിർദ്ധാരണം

$$\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta}$$

$$= \frac{1+\dfrac{1}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta}} = \frac{(\cos\theta+1)}{\cos\theta}(\cos\theta)$$

$$= 1+\cos\theta$$

$$= (1+\cos\theta)\times\frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}.$$

ഉദാഹരണം 7.11

തെളിയിക്കുക. $(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta) = \dfrac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$

നിർദ്ധാരണം

$$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta\cos\theta \quad (1)$$

$$\frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)}$$

$$= \sin\theta\cos\theta \quad (2)$$

(1), (2) ൽ നിന്ന്

$$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta) = \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$$

കുറിപ്പ്

$$\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta}{1}$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$$

ഉദാഹരണം 7.12

$\tan\theta + \sin\theta = m$, $\tan\theta - \sin\theta = n$, എങ്കിൽ $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$.എന്ന് കാണിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് $m = \tan\theta + \sin\theta$ and $n = \tan\theta - \sin\theta$.

$$
\begin{aligned}
m^2 - n^2 &= (\tan\theta + \sin\theta)^2 - (\tan\theta - \sin\theta)^2 \\
&= \tan^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\tan\theta - (\tan^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\tan\theta) \\
&= 4\sin\theta\tan\theta \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4\sqrt{mn} &= 4\sqrt{(\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta)} \\
&= 4\sqrt{\tan^2\theta - \sin^2\theta} = 4\sqrt{\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta\right)} \\
&= 4\sqrt{\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)} \\
&= 4\sqrt{\sin^2\theta(\sec^2\theta - 1)} = 4\sqrt{\sin^2\theta\tan^2\theta} \quad (\because \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta) \\
&= 4\sin\theta\tan\theta. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

(1) , (2) ൽ നിന്ന് $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$.

ഉദാഹരണം 7.13

$\tan^2\alpha = \cos^2\beta - \sin^2\beta$, എങ്കിൽ $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\beta$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത്, $\cos^2\beta - \sin^2\beta = \tan^2\alpha$

$$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{1} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

> (Componendo and dividendo rule)
> സങ്കലന വ്യവകലന ആനുപാതിക നിയമം
> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, എങ്കിൽ $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

$$\frac{(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta)}{(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - (\cos^2\beta + \sin^2\beta)} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2\cos^2\beta}{-2\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

$\Longrightarrow \quad \tan^2\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ തെളിവ് പൂർണ്ണമായി

അഭ്യാസം 7.1

1. താഴെ തന്നവ ഒരു സർവ്വസമീകരണം ആണോ എന്ന് കാണുക.

(i) $\cos^2\theta + \sec^2\theta = 2+\sin\theta$ (ii) $\cot^2\theta + \cos\theta = \sin^2\theta$

2. താഴെ തന്ന സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ തെളിയിക്കുക.

(i) $\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta\,\text{cosec}^2\theta$ (ii) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$

(iii) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$ (iv) $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = 1 + \sin\theta$

(v) $\sqrt{\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$ (vi) $\dfrac{1+\cos\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)} = \cot\theta$

(vii) $\sec\theta\,(1-\sin\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$ (viii) $\dfrac{\sin\theta}{\text{cosec}\,\theta + \cot\theta} = 1 - \cos\theta$

3. താഴെ തന്ന സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ തെളിയിക്കുക.

(i) $\dfrac{\sin(90^\circ - \theta)}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\cos(90^\circ - \theta)} = 2\sec\theta$

(ii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$

(iii) $\dfrac{\sin(90^0 - \theta)}{1-\tan\theta} + \dfrac{\cos(90^0 - \theta)}{1-\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$

(iv) $\dfrac{\tan(90^0 - \theta)}{\text{cosec}\,\theta + 1} + \dfrac{\text{cosec}\,\theta + 1}{\cot\theta} = 2\sec\theta.$

(v) $\dfrac{\cot\theta + \text{cosec}\,\theta - 1}{\cot\theta - \text{cosec}\,\theta + 1} = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta.$

(vi) $(1 + \cot\theta - \text{cosec}\,\theta)(1 + \tan\theta + \sec\theta) = 2$

(vii) $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$

(viii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{\sin\theta\sin(90^0 - \theta)}{2\sin^2(90^0 - \theta) - 1}$

(ix) $\dfrac{1}{\text{cosec}\,\theta - \cot\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\text{cosec}\,\theta + \cot\theta}.$

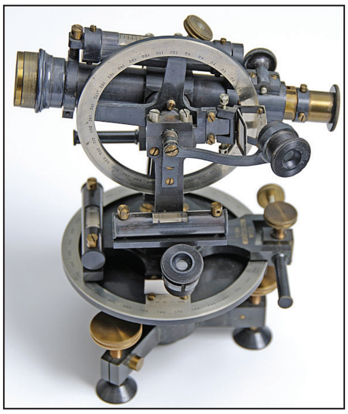
(x) $\dfrac{\cot^2\theta + \sec^2\theta}{\tan^2\theta + \text{cosec}^2\theta} = (\sin\theta\cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta).$

4. $x = a\sec\theta + b\tan\theta,\ y = a\tan\theta + b\sec\theta$, എങ്കിൽ $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

5. $\tan\theta = n\tan\alpha$, $\sin\theta = m\sin\alpha$, എങ്കിൽ $\cos^2\theta = \dfrac{m^2-1}{n^2-1}$, $n \neq \pm 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. $\sin\theta,\ \cos\theta$ and $\tan\theta$ എന്നിവ G.P. യിലാണെങ്കിൽ $\cot^6\theta - \cot^2\theta = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

7.3 ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും



ചിത്രം. 7.2

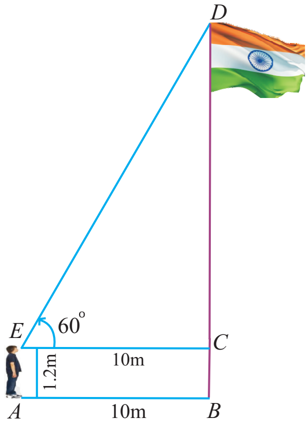
ഗ്രഹങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം, എവറസ്റ്റ് കൊടുമുടിയുടെ ഉയരം, ഭൂമിയും സൂര്യനും തമ്മിലുള്ള അകലം എന്നിവ എങ്ങനെ അളക്കുന്നു അഥവാ എങ്ങനെ കണക്കാക്കുന്നു എന്നത് നമ്മെ ആശ്ചര്യപ്പെടുത്തുന്നു. ഇവയെല്ലാം അളവ് നാട ഉപയോഗിച്ച് അളക്കാൻ കഴിയുമോ ?

തീർച്ചയായും ഇത് അസാധ്യമാണ്. ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് തികച്ചും രസകരമായി ഇത്തരം ദൂരങ്ങൾ കണക്കാക്കാം. കൂടാതെ ഭൂപടങ്ങളുടെ നിർമ്മാണം, രേഖാംശം, അക്ഷാംശം ഇവകളുടെ ബന്ധത്തിൽ ഒരു ദ്വീപിന്റെ സ്ഥാന നിർണ്ണയം എന്നിവ നിർണ്ണയിക്കുന്നതിന് ഈ അംശബന്ധങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ചിത്രം 7.2 ൽ കാണുന്ന ഭൂമാപനക്കോൽ എന്ന ഉപകരണം ഒരു വസ്തുവിനും കണ്ണിനും ഇടയിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോൺ അളക്കുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഈ ഉപകരണത്തിൽ പരസ്പരം സമകോണിൽ ഘടിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള രണ്ട് ക്രമമായ ചക്രങ്ങളും ഒരു ദൂരദർശിനിയും ഉണ്ട്. തിരശ്ചീനവും ലംബവുമായ കോണുകൾ അളക്കുന്നതിന് ഈ ചക്രങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഒരു നിശ്ചിത സ്ഥാനത്തിന്റെ കോൺ അളക്കുന്നതിന് ദൂരദർശിനിയെ ആ സ്ഥാനത്തേക്ക് ക്രമീകരിക്കുന്നു. ദൂര ദർശനിയിലുള്ള അളവുകോലിൽ കോണളവ് കാണുന്നതാണ്.

നമ്മുടെ സ്കൂളിലെ കൊടിക്കമ്പിന്റെ ഉയരം യഥാർത്ഥമായി അളക്കാതെ, അതിന്റെ ഉയരത്തെ കണ്ടുപിടിക്കാം.

കൊടിക്കമ്പിന്റെ ചുവട് 'B' ൽ നിന്നും 10 മീ. അകലെ 'A' യിൽ ഒരു വിദ്യാർത്ഥി നിൽക്കുന്നു എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക. അയാൾ 60^0 കോണിൽ കൊടിക്കമ്പിന്റെ അഗ്രം 'D' യെ വീക്ഷിക്കുന്നു. തറ നിരപ്പിൽ നിന്നും 1.2 മീ. ഉയരത്തിലാണ് വീക്ഷണനില 'E' യെന്നു കരുതുക.
ചിത്രം 7.3 കാണുക.



ചിത്രം. 7.3

സമകോണ ΔDEC യിൽ $\angle DEC = 60^\circ$.

ഇവിടെ , $\tan 60^\circ = \dfrac{CD}{EC}$

$\Longrightarrow \quad CD = EC \tan 60^\circ$

അതായത് , $CD = 10\sqrt{3} = 10 \times 1.732$

$= 17.32$ മീ.

അതായത് കൊടിക്കമ്പിന്റെ ഉയരം $BD = BC + CD$

$= 1.2 + 17.32 = 18.52$ മീ

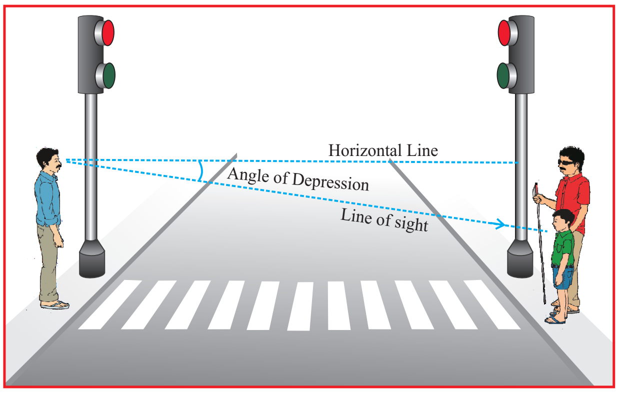
അങ്ങനെ യഥാർത്ഥമായി അളക്കാതെ തന്നെ നമുക്ക് സ്കൂളിലെ കൊടിക്കമ്പിന്റെ ഉയരം കണ്ടുപിടിക്കാം. അതുകൊണ്ട്, ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിൽ ഒരു വശവും ഒരു ന്യൂനകോണും അറിഞ്ഞാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു വശങ്ങൾ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങളുപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് നാം പലപ്പോഴും ഉപയോഗിക്കുന്ന ചില പദങ്ങളെ നിർവ്വചിക്കാം.

വീക്ഷണരേഖ

ഒരു വസ്തുവിനെ നാം വീക്ഷിക്കുന്നു എങ്കിൽ, നമ്മുടെ കണ്ണിനും വസ്തുവിനും ഇടയിലുള്ള നേർരേഖയെ വീക്ഷണരേഖ എന്നുപറയുന്നു. കണ്ണിൽ നിന്നും വസ്തുവിലേക്കുള്ള ദൂരം വളരെ കൂടുതലായതിനാൽ, വസ്തുവിനെ സ്ഥിരബിന്ദുവായി ഇവിടെ പരിഗണിക്കാം.

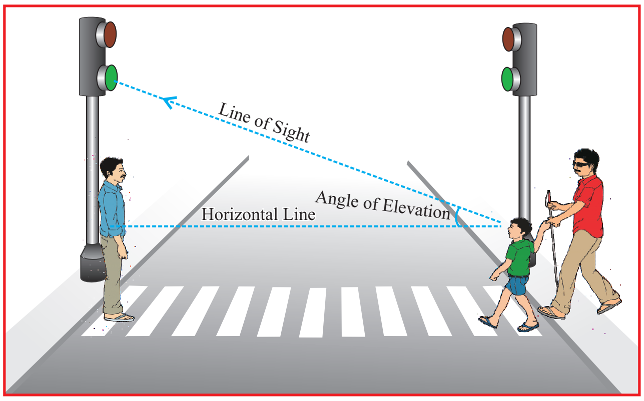
കീഴ്ക്കോൺ, മേൽക്കോൺ



ചിത്രം. 7.4

കണ്ണിൽ നിന്നുള്ള തിരശ്ചീനരേഖയ്ക്ക് താഴെയാണ് വസ്തു ഉള്ളതെങ്കിൽ വസ്തുവിനെ വീക്ഷിക്കുന്നതിനായി തല അല്പം കീഴോട്ട് ചലിപ്പിക്കണം. ഈ പ്രക്രിയയിൽ നമ്മുടെ കണ്ണുകൾ ഒരു കോണിൽ കീഴെ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഈ കോണിനെ **കീഴ്ക്കോൺ** എന്നു പറയുന്നു. അതായത് തിരശ്ചീന രേഖയ്ക്ക് കീഴെയാണ് വസ്തു എങ്കിൽ വീക്ഷണരേഖയ്ക്കും തിരശ്ചീനരേഖയ്ക്കും ഇടയിലുണ്ടാകുന്ന കോണിനെ **കീഴ്ക്കോൺ** എന്നുപറയുന്നു. (ചിത്രം 7.4 കാണുക)

കണ്ണിൽ നിന്നുള്ള തിരശ്ചീനരേഖയ്ക്ക്മുകളിലാണ് വസ്തു ഉള്ളതെങ്കിൽ ആ വസ്തുവിനെ വീക്ഷിക്കുമ്പോൾ തല അല്പം മുകളിലേക്ക് ഉയർത്തണം. ഈ പ്രക്രീയയിൽ നമ്മുടെ കണ്ണുകൾ ഒരു കോണിൽ മുകളിൽ സഞ്ചരിച്ചിക്കുന്നു. ഈ കോണിനെ **മേൽക്കോൺ** എന്നു പറയുന്നു. അതായത് വീക്ഷണരേഖയ്ക്കും തിരശ്ചീനരേഖയ്ക്കും ഇടയിലുണ്ടാകുന്ന കോണിനെ **മേൽക്കോൺ** എന്നു പറയുന്നു. (ചിത്രം 7.5 കാണുക)



ചിത്രം. 7.5

കുറിപ്പ്

(i) ഒരു നിരീക്ഷകന്റെ ഉയരം തന്നിട്ടില്ലെങ്കിൽ നിരീക്ഷകനെ ഒരു ബിന്ദുവായി പരിഗണിക്കാം.

(ii) നിരീക്ഷകൻ വീക്ഷിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ മേൽക്കോണും അതേ വസ്തുവിൽ നിന്നും നിരീക്ഷകനെ വീക്ഷിക്കുന്ന കീഴ്ക്കോണും തുല്യമായിരിക്കും.

ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് താഴെ കാണുന്ന പദ്ധതി ഉപയോഗപ്രദമാകും.

(i) ചോദ്യത്തിലെ പ്രസ്താവനകളെ ശ്രദ്ധയോടെ വായിച്ച് അതനുസരിച്ചുള്ള ഏകദേശ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.

(ii) ചിത്രത്തെ അടയാളപ്പെടുത്തി തന്നിട്ടുള്ള മൂല്യങ്ങളെ രേഖപ്പെടുത്തുക

(iii) ഉയരമാണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടതെങ്കിൽ ‘h’ എന്നും, ദൂരമാണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടതെങ്കിൽ x എന്നും കുറിക്കുക.

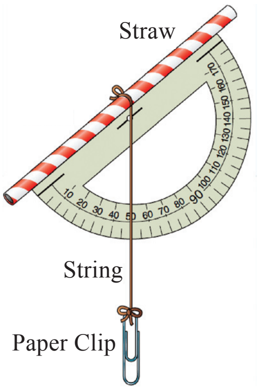
(iv) പ്രശ്ന നിർദ്ധാരണത്തിന് സഹായകമായ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധം തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

(v) തന്നിട്ടുള്ള മൂല്യങ്ങൾ ആരോപിച്ച് ആവശ്യപ്പെട്ട മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉയരം അളക്കാൻ പ്രയാസമുള്ള സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഉയരം അളക്കാൻ താഴെ പറയുന്ന പ്രവർത്തനം നമ്മെ സഹായിക്കും.

പ്രവർത്തനം

- ഒരു ചരടിന്റെ ഒരറ്റം ഒരു സ്ട്രാ യുടെ മദ്ധ്യഭാഗത്തും മറ്റേ അറ്റം ഒരു പേപ്പർ ക്ലിപ്പിലും കെട്ടുക
- സ്ട്രായുടെ മദ്ധ്യഭാഗത്ത് ഒരു കോണമാപിനിയുടെ ആധാരത്തിൽ ഘടിപ്പിക്കുക. ഒരു ലംബരേഖ അഥവാ മട്ടചരട് ഉണ്ടാക്കുന്ന വിധം നൂലിനെ സ്വതന്ത്രമായി തൂക്കിയിടുക.
- നേരിട്ട് അളക്കാൻ സാധിക്കാത്ത, വെളിയിലുള്ള ഉയരമുള്ള വസ്തുവിനെ അതായത്, ബാസ്ക്കറ്റ് ബാൾ കൂട, കൊടികമ്പ്, സ്കൂൾ കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം എന്നിവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് തെരഞ്ഞെടുക്കുക.



ചിത്രം. 7.6

- സ്ട്രായിലൂടെ ആ വസ്തുവിന്റെ മുകൾഭാഗം നോക്കുക. ചരടും കോണമാപിനിയും സന്ധിക്കുന്ന കോൺ കാണുക. മേൽകോൺ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, 90^0 യിൽ നിന്നും കോണളവിനെ കുറയ്ക്കുക. അത് θ എന്നിരിക്കട്ടെ.
- നിങ്ങളുടെ വീക്ഷണ നിരപ്പിൽ നിന്ന് തറവരെയുള്ള ദൂരം അളന്ന് അതിനെ 'x'എന്നും, നിങ്ങളുടെ പാദത്തിൽ നിന്ന് വസ്തുവിന്റെ പാദംവരെയുള്ള ദൂരം അളന്ന് 'y'എന്നും സങ്കല്പിക്കുക.
- നിങ്ങളുടെ അളവുകൾ കൊണ്ട് ഒരു കരട് ചിത്രം തയ്യാറാക്കുക
- വസ്തുവിന്റെ ഉയരം (h) കാണുന്നതിന് $h = x + y\tan\theta$ എന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിക്കുക.

ഉദാഹരണം 7.14

200 മീ. നീളമുള്ള ഒരു ചരടിന്റെ അറ്റത്ത് ഒരു പട്ടം പറക്കുന്നു. ചരട് തറയുമായി 30^0 കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്നു എങ്കിൽ തറ നിരപ്പിൽ നിന്നും എത്ര ഉയരത്തിൽ പട്ടം പറക്കുന്നുവെന്ന് കാണുക. (ഇവിടെ ചരട് നേർരേഖയിലാണെന്ന് കരുതുക).

നിർദ്ധാരണം തറനിരപ്പിൽ നിന്നും പട്ടം വരെയുള്ള ദൂരം 'h' എന്ന് സങ്കല്പിക്കുക.

ചിത്രത്തിൽ AC ചരട് ആകുന്നു

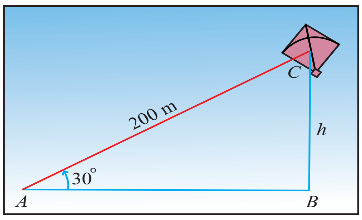
$\angle CAB = 30^\circ$, $AC = 200$ മീ.

സമകോണ $\triangle\ CAB$ യിൽ $\sin 30^\circ = \dfrac{h}{200}$

$\Longrightarrow \quad h = 200\sin 30^\circ$

$\therefore \quad h = 200 \times \dfrac{1}{2} = 100$ മീ.

തറ നിരപ്പിൽ നിന്നും പട്ടം വരെയുള്ള ദൂരം100 മീ.



ചിത്രം. 7.7

ഉദാഹരണം 7.15

ചുവരിൽ ചാരി വച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു ഏണി തറയുമായി 60^0 കോൺ ഉണ്ടാകുന്നു. ചുവരിന്റെ അടിഭാഗത്തു നിന്നും 3.5 മീ. അകലെയാണ് ഏണിയുടെ അടിഭാഗം ഏണിയുടെ നീളം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ഏണി AC യും ചുവരിന്റെ അടിഭാഗം B യും എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഏണിയുടെ നീളം $AC = x$ മീറ്റർ എന്നിരിക്കട്ടെ

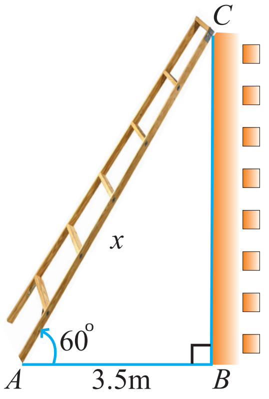
$$\angle CAB = 60^\circ, \quad AB = 3.5 \text{ മീ.}$$

സമകോണ $\triangle CAB$ യിൽ, $\cos 60^\circ = \dfrac{AB}{AC}$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AB}{\cos 60^\circ}$$

$$\therefore \quad x = 2 \times 3.5 = 7 \text{ മീ.}$$

ഏണിയുടെ നീളം $= 7$ മീ.



ചിത്രം. 7.8

ഉദാഹരണം 7.16

30 മീ. നീളമുള്ള ഒരു ദണ്ഡിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം $10\sqrt{3}$ മീ. ആകുമ്പോൾ സൂര്യന്റെ മേൽക്കോൺ (തറനിരപ്പിൽ നിന്നുള്ള മേൽക്കോൺ) കാണുക.

നിർദ്ധാരണം സൂര്യന്റെ സ്ഥാനം S ഉം BC ദണ്ഡും എന്നിരിക്കട്ടെ. ദണ്ഡിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം AB എന്നിരിക്കട്ടെ. സൂര്യന്റെ മേൽക്കോൺ (angular elevation) θ എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക.

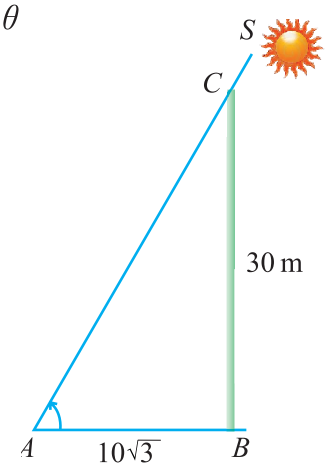
$$AB = 10\sqrt{3} \text{ മീ.,}$$

$$BC = 30 \text{ മീ.}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow \quad \tan\theta = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \theta = 60^\circ$$



ചിത്രം. 7.9

അതായത്, തറ നിരപ്പിൽ നിന്നുള്ള സൂര്യന്റെ മേൽക്കോൺ 60° ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 7.17

ഒരു നിരീക്ഷകൻ ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്തെ 30^0 മേൽക്കോണിൽ വീക്ഷിക്കുന്നു. അയാൾ ഗോപുരത്തിൽ നിന്നും $30\sqrt{3}$ മീ. അകലെയാണ് തറനിരപ്പിൽ നിന്നും 1.5 മീ. ഉയരത്തിൽ നിന്ന് അയാൾ വീക്ഷിക്കുന്നു. എങ്കിൽ ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം BD യും തറനിരപ്പിൽ നിന്നും നിരീക്ഷകന്റെ വീക്ഷണതലം വരെയുള്ള ദൂരം AE യും എന്നിരിക്കട്ടെ.

$AB = EC$ ആകത്തക്കവിധം $EC \parallel AB$ വരയ്ക്കുക.

$AB = EC = 30\sqrt{3}$ m ,

$AE = BC = 1.5$ മീ.

സമകോണത്രികോണം DEC യിൽ

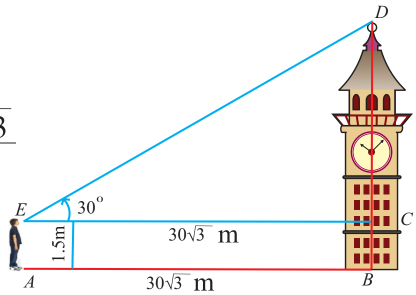
$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{EC}$$

$$\Longrightarrow \quad CD = EC \tan 30^\circ = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad CD = 30\,\text{m}$$

ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം $BD = BC + CD$

$$= 1.5 + 30 = 31.5\text{ m.}$$



ചിത്രം. 7.10

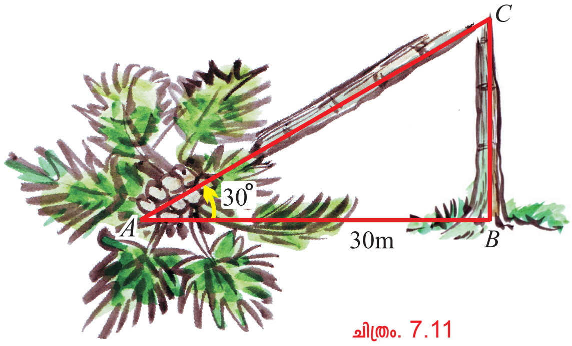
ഉദാഹരണം 7.18

ഒരു ലംബമായ മരം കാറ്റടിച്ച് മുറിഞ്ഞുവീണു. ആ മരത്തിന്റെ മുകൾഭാഗം തറയുമായി 30^0 കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്നു. അതിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്നും 30 മീ. അകലെയാണ് വൃക്ഷത്തിന്റെ മുകളറ്റം തൊട്ടതെങ്കിൽ മരത്തിന്റെ യഥാർത്ഥ ഉയരം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം മരത്തിന്റ മുറിഞ്ഞഭാഗം C യും അഗ്രം തറയിൽ തൊട്ടഭാഗം A യും എന്നിരിക്കട്ടെ. മരത്തിന്റെ ചുവട് 'B' എന്നിരിക്കട്ടെ

$AB = 30$ മീ.

$\angle CAB = 30^\circ$.



ചിത്രം. 7.11

സമകോണത്രികോണം ABC യിൽ,

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad BC = AB \tan 30^\circ$$

$$\therefore \quad BC = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= 10\sqrt{3}\text{ മീ.} \qquad (1)$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AB}{\cos 30^\circ}$$

$$AC = \frac{30 \times 2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \times 2 = 20\sqrt{3}\text{ മീ.} \qquad (2)$$

മരത്തിന്റെ ഉയരം $= BC + AC = 10\sqrt{3} + 20\sqrt{3}$

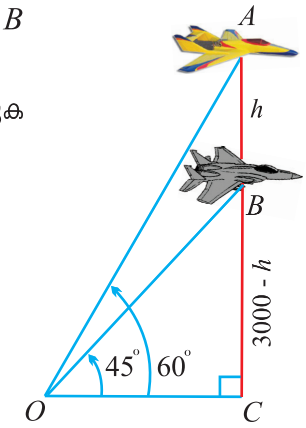
$$= 30\sqrt{3}\text{ മീ.}$$

ഉദാഹരണം 7.19

തറ നിരപ്പിൽ നിന്നും 3000 മീ. ഉയരത്തിൽ ഒരു ജെറ്റ് വിമാനം മറ്റൊരു ജെറ്റ് വിമാനത്തിന് നേർമുകളിലായി പറക്കുന്നു. ഒരേ നിരീക്ഷണ ബിന്ദുവിൽ നിന്നും അവയുടെ മേൽക്കോണുകൾ യഥാക്രമം 60°, 45° എന്നാകുന്നു. ആ സമയത്ത് രണ്ടാമത്തെ ജെറ്റ് വിമാനത്തിൽ നിന്നും ആദ്യത്തെ ജെറ്റ് വിമാനത്തിന്റെ ദൂരം കാണുക ($\sqrt{3} = 1.732$ എന്ന് ഉപയോഗിക്കുക)

നിർദ്ധാരണം നിരീക്ഷണ ബിന്ദു 'O' എന്നിരിക്കട്ടെ

ആ സന്ദർഭത്തിൽ ഒന്നിനുനേർ മുകളിലായി രണ്ട് ജെറ്റ് വിമാനങ്ങളുടെ സ്ഥാനങ്ങൾ A, B എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം. 7.12

$AC = 3000$ മീ. ആകത്തക്കവിധം തറനിരപ്പിലെ ഒരു ബിന്ദു C എന്ന് കരുതുക

$\angle AOC = 60^\circ$, $\angle BOC = 45^\circ$

രണ്ട് ജെറ്റ് വിമാനങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം h എന്നിരിക്കട്ടെ.

സമകോണത്രികോണം BOC യിൽ

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{OC}$$

$$\Longrightarrow \quad OC = BC \qquad (\because \tan 45^\circ = 1)$$

അതായത് $\quad OC = 3000 - h \qquad (1)$

സമകോണത്രികോണം AOC യിൽ $\quad \tan 60^\circ = \frac{AC}{OC}$

$$\Longrightarrow OC = \frac{AC}{\tan 60^\circ} = \frac{3000}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3000}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1000\sqrt{3} \qquad (2)$$

(1) ,(2)ൽ നിന്ന് $3000 - h \quad = 1000\sqrt{3}$

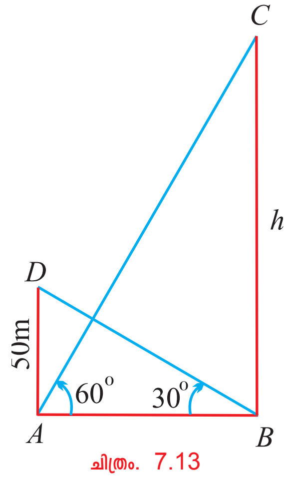
$$\Longrightarrow \quad h = 3000 - 1000 \times 1.732 = 1268\,\text{m}$$

ആ സന്ദർഭത്തിൽ രണ്ടാമത്തെ ജെറ്റ് വിമാനത്തിൽ നിന്നും ആദ്യത്തെ ജെറ്റ് വിമാനം വരെയുള്ള ദൂരം $=1268$ മീ.

ഉദാഹരണം 7.20

ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്നും ഒരു കുന്നിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്തിന്റെ മേൽക്കോൺ 60^0 യും കുന്നിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്നും ഗോപുരത്തിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്തിന്റെ മേൽക്കോൺ 30^0 യും ആകുന്നു. ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം 50 മീ. എങ്കിൽ കുന്നിന്റെ ഉയരം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം AD യും കുന്നിന്റെ ഉയരം BC യും എന്നിരിക്കട്ടെ $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$, $AD = 50$ മീ. BC = h മീ. എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക.



ചിത്രം. 7.13

സമകോണ ΔDAB യിൽ $\quad \tan 30^\circ = \frac{AD}{AB}$

$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{AD}{\tan 30^\circ}$$

$$\therefore AB = 50\sqrt{3}\,\text{m} \qquad (1)$$

കൂടാതെ സമകോണ ത്രികോണം CAB യിൽ, $\tan 60^\circ = \frac{BC}{AB}$

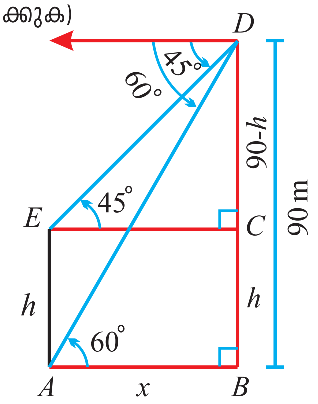
$$\Longrightarrow \quad BC = AB \tan 60^\circ$$

(1) ഉപയോഗിച്ച് $\quad h = BC = (50\sqrt{3})\sqrt{3} = 150$ മീ.

അതായത് കുന്നിന്റെ ഉയരം 150 മീ. ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 7.21

ഒരു ലംബമായ ചുവരും ഒരു ഗോപുരവും തറനിരപ്പിലാണ്. ഗോപുരത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നും ചുവരിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്തിന്റെയും അടിഭാഗത്തിന്റെയും കീഴ്കോണുകൾ യഥാക്രമം 45° , 60° ആകുന്നു. ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം 90 മീ. എങ്കിൽ ചുവരിന്റെ ഉയരം കാണുക ($\sqrt{3} = 1.732$ എന്ന് ഉപയോഗിക്കുക)



ചിത്രം. 7.14

നിർദ്ധാരണം ചുവര് AE യും ഗോപുരം BD യും എന്നിരിക്കട്ടെ. AB=EC വരത്തക്കവിധം

EC llAB വരയ്ക്കുക AB = x മീറ്റർ. AE = h മീ. എന്നിരിക്കട്ടെ.

BD = 90 മീറ്റർ , $\angle DAB = 60^\circ$, $\angle DEC = 45^\circ$.

$AE = BC = h$ മീറ്റർ

അതായത്, $CD = BD - BC = 90 - h$.

സമകോണ $\triangle$DABയിൽ $\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{90}{x}$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{90}{\sqrt{3}} = 30\sqrt{3} \qquad (1)$$

സമകോണ $\triangle$DEC യിൽ, $\tan 45^\circ = \frac{DC}{EC} = \frac{90-h}{x}$

അതായത്, $x = 90 - h \qquad (2)$

(1),(2)ൽ നിന്ന് $90 - h = 30\sqrt{3}$

$$h = 90 - 30\sqrt{3} = 38.04 \text{ മീറ്റർ}$$

ഉദാഹരണം 7.22

കടൽതീരത്തിന് സമീപമുള്ള ഒരു ചെങ്കുത്തായ പാറക്കെട്ടിൽ നിർമ്മിച്ച ഒരു ദീപസ്തംഭത്തിന് മുകളിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരു പെൺകുട്ടി ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ കിഴക്കുഭാഗത്തുള്ള രണ്ട് ബോട്ടുകൾ 30^0,60^0എന്നീ കീഴ്ക്കോണുകളിൽ വീക്ഷിക്കുന്നു. രണ്ട് ബോട്ടുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 300 മീ. സമുദ്ര നിരപ്പിൽ നിന്ന് ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം എന്തായിരിക്കും? (ദീപസ്തംഭവും ബോട്ടുകളും ഒരേ നേർ രേഖയിലാണ്.)

നിർദ്ധാരണം ചെങ്കുത്തായ പാറക്കെട്ടിന്റെ ചുവട് ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ മുകൾഭാഗം എന്നിവ യഥാക്രമം A, D എന്നിരിക്കട്ടെ. B യും C യും രണ്ട് ബോട്ടുകൾ എന്ന് കരുതുക.

സമുദ്രനിരപ്പിൽ നിന്ന് ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം h എന്നിരിക്കട്ടെ.

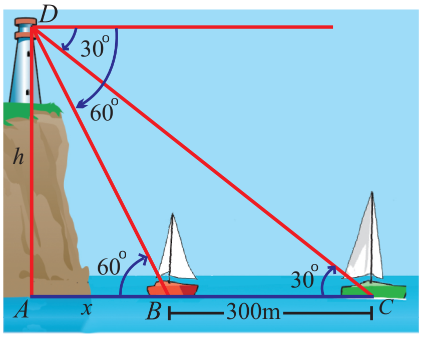
AB = x എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക.

സമകോണ ΔABD യിൽ,

$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{AD}{\tan 60^\circ}$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}} \qquad (1)$$



ചിത്രം. 7.15

സമകോണ $\triangle ACD$, യിൽ

$$\tan 30^\circ = \frac{AD}{AC}$$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AD}{\tan 30^\circ} \Longrightarrow x + 300 = \frac{h}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$x + 300 = h\sqrt{3} \qquad (2)$$

(1),(2) ൽ നിന്ന് $\frac{h}{\sqrt{3}} + 300 = h\sqrt{3}$

$$\Longrightarrow \quad h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}} = 300$$

$\therefore \quad 2h = 300\sqrt{3}$. അതായത്, $h = 150\sqrt{3}$.

സമുദ്രനിരപ്പിൽ നിന്ന് ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം $150\sqrt{3}$ മീറ്റർ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 7.23

തറനിറപ്പിൽ നിന്ന് 88.2 മീ. ഉയരത്തിൽ ഒരു തിരശ്ചീനരേഖയിൽ കാറ്റിൽ പറക്കുന്ന ഒരു ബലൂണിന്റെ സ്ഥാനം ഒരു ബാലൻ കണ്ടെത്തി. തറയിൽ നിന്നും വീക്ഷണതലം വരെയുള്ള ദൂരം 1.2 മീ. കണ്ണിൽ നിന്നും ബലൂണിന്റെ മേൽക്കോൺ 60^0. അൽപസമയത്തിനുശേഷം, ഒരേ നിരീക്ഷണ ബിന്ദുവിൽ നിന്നും ബലൂണിലേക്കുള്ള മേൽക്കോൺ 30^0 ആയി കുറയുന്നു. ഈ ഇടവേളയിൽ ബലൂൺ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം കാണുക.

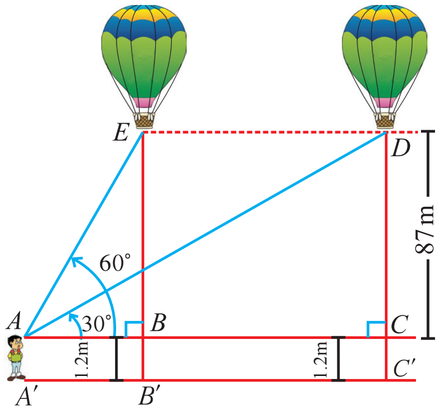
നിർദ്ധാരണം നിരീക്ഷണ ബിന്ദു A എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക. ബലൂണിന്റെ മേൽക്കോണുകൾ യഥാക്രമം 60°, 30° ആകുമ്പോൾ അവയുടെ സ്ഥാനങ്ങൾ E,D എന്നിരിക്കട്ടെ. BE = CD = 87 മീ. വരത്തക്കവിധം തിരശ്ചീനരേഖയിലെ ബിന്ദുക്കൾ B,C എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$A'A = B'B = C'C = 1.2 \text{ മീ.}$$

വരത്തക്കവിധം തറയിലെ ബിന്ദുക്കൾ A', B', C' എന്നിരിക്കട്ടെ

$$\angle EAB = 60^\circ, \angle DAC = 30^\circ$$

$$BB' = CC' = 1.2 \text{ മീ.} \quad C'D = 88.2 \text{ മീ.}$$



ചിത്രം. 7.16

കൂടാതെ BE= $CD = 87$ മീ.

സമകോണ$\triangle$EAB യിൽ,

$$\tan 60^\circ = \frac{BE}{AB}$$

$$AB = \frac{87}{\tan 60^\circ} = \frac{87}{\sqrt{3}} = 29\sqrt{3}$$

വീണ്ടും സമകോണ $\triangle$DAC യിൽ

$$\tan 30^\circ = \frac{DC}{AC}$$

$$AC = \frac{87}{\tan 30^\circ} = 87\sqrt{3}.$$

$\therefore$ ബലൂൺ സഞ്ചരിച്ചദൂരം

$$ED = BC = AC - AB$$

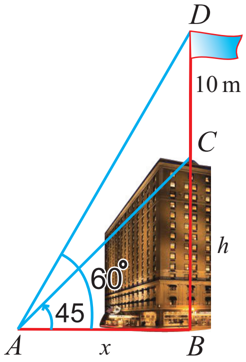
$$= 87\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = 58\sqrt{3} \text{ മീ.}$$

ഉദാഹരണം 7.24

ഒരു കെട്ടിടത്തിന് മുകളിൽ ഒരു കൊടിക്കമ്പ് നിൽക്കുന്നു. തറയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന്. കൊടിക്കമ്പിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്തിന്റെയും അടിഭാഗത്തിന്റെയും മേൽക്കോണുകൾ യഥാക്രം 60°, 45° ആകുന്നു. കൊടിക്കമ്പിന്റെ ഉയരം 10 മീ. എങ്കിൽ കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക ($\sqrt{3} = 1.732$ എന്ന് ഉപയോഗിക്കുക)

നിർദ്ധാരണം

വീക്ഷണ ബിന്ദു A യും കെട്ടിടത്തിന്റെ ചുവട് B യും എന്നെടുക്കുക. BC കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരത്തെയും CD കൊടിക്കമ്പിന്റെ ഉയരത്തെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു എന്ന് കരുതുക.



ചിത്രം. 7.17

$\angle CAB = 45^\circ$, $\angle DAB = 60^\circ$, CD = 10 മീ.

$BC = h$ മീ. , AB $= x$ മീ. എന്നിരിക്കട്ടെ.

സമകോണ $\triangle$CAB യിൽ,

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB}.$$

AB= BC അതായത് , x = h (1)

സമകോണ $\triangle$DAB യിൽ,

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{h+10}{\tan 60^\circ} \quad \Longrightarrow x = \frac{h+10}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

(1) , (2) ൽ നിന്ന്, $h = \dfrac{h+10}{\sqrt{3}}$

$$\Longrightarrow \sqrt{3}h - h = 10$$

$$\Longrightarrow \quad h = \left(\frac{10}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

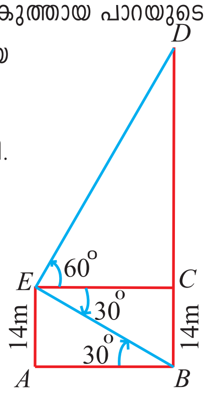
$$= 5(2.732) = 13.66 \text{ മീ.}$$

കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം = 13.66 മീ.

ഉദാഹരണം 7.25

ജലനിരപ്പിന് 14 മീ. മുകളിലുള്ള ഒരു കപ്പലിന്റെ ഡെക്കിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ ഒരു ചെങ്കുത്തായ പാറയുടെ മുകൾഭാഗം 60^0 മേൽക്കോണിലും അടിഭാഗം 30^0 കീഴ്ക്കോണിലും വീക്ഷിക്കുന്നു. ചെങ്കുത്തായ പാറയുടെ ഉയരം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ചെങ്കുത്തായ പാറയുടെ ഉയരം BD എന്നിരിക്കട്ടെ. കപ്പൽ A യും AE = 14 മീ. ആകത്തക്കവിധം വീക്ഷണബിന്ദു E യും എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം. 7.18

AB = EC ആകത്തക്കവിധം EC ll AB

സമകോണ $\triangle$ABE യിൽ,

$$\tan 30^\circ = \frac{AE}{AB}$$

$$\therefore \quad AB = \frac{AE}{\tan 30^\circ} \implies AB = 14\sqrt{3}$$

അതായത് $EC = 14\sqrt{3}$ $(\because AB = EC)$

സമകോണ $\triangle DEC$, യിൽ $\tan 60^\circ = \dfrac{CD}{EC}$

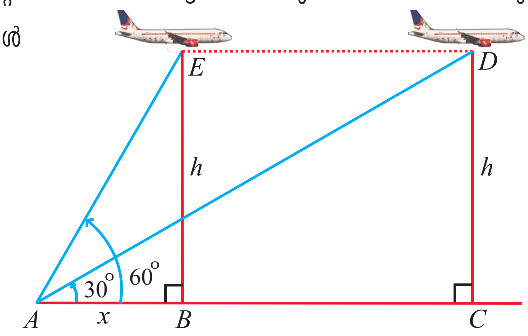
$$\therefore \quad CD = EC \tan 60^\circ \implies CD = (14\sqrt{3})\sqrt{3} = 42 \text{ മീ.}$$

ചെങ്കുത്തായ പാറയുടെ ഉയരം $BD = BC + CD = 14 + 42 = 56$ മീ.

ഉദാഹരണം 7.26

തറയിൽ A എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ഒരു വിമാനത്തിന്റെ മേൽക്കോൺ 60°. വിമാനം 15 സെക്കൻഡ് തിരശ്ചീനമായി പറന്നശേഷം മേൽക്കോൺ 30° യായി മാറുന്നു. വിമാനം 200 മീ./സെക്കൻഡ് വേഗതയിൽ പറന്നാൽ, അത് പറക്കുന്ന സ്ഥിര ഉയരം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം നിരീക്ഷണബിന്ദു A എന്നിരിക്കട്ടെ. വിമാനത്തിന്റെ സ്ഥാനങ്ങൾ ആരംഭത്തിലും 15 സെക്കൻഡിനു ശേഷവും യഥാക്രമം E, D എന്നിരിക്കട്ടെ. വിമാനം പറക്കുമ്പോൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സ്ഥിരമായ ഉയരം BE,CD എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം. 7.19

$\angle DAC = 30^\circ$, $\angle EAB = 60^\circ$.

$BE = CD = h$ മീ.

$AB = x$ മീ എന്നിരിക്കട്ടെ

15 സെക്കൻഡിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം

$ED = 200 \times 15 = 3000$ മീ.

(സഞ്ചരിച്ച ദൂരം = വേഗത × സമയം)

$BC = 3000$ മീ.

സമകോണ $\triangle DAC$ യിൽ

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{AC}$$

$$\implies CD = AC \tan 30^\circ$$

$$h = (x + 3000)\frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (1)$$

സമകോണ $\triangle EAB$ യിൽ

$$\tan 60^\circ = \frac{BE}{AB}$$

$$\implies BE = AB \tan 60^\circ \implies h = \sqrt{3}\, x \quad (2)$$

(1) ,(2) ൽ നിന്ന് $\sqrt{3}x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x + 3000)$

$$\implies 3x = x + 3000 \implies x = 1500 \text{ മീ.}$$

(2) ൽ നിന്ന് , $h = 1500\sqrt{3}$ മീ.

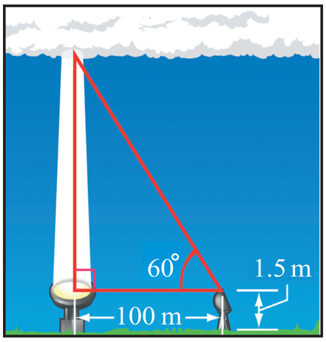
വിമാനം പറക്കുന്ന സ്ഥിരമായ ഉയരം $1500\sqrt{3}$ മീ. ആകുന്നു.

അഭ്യാസം 7.2

1. ഒരു സഞ്ചരിക്കുന്ന ചരക്കുവണ്ടിയിൽ നിന്നും ചരക്ക് ഇറക്കുന്നതിനുള്ള ചരിവിന്റെ മേൽക്കോൺ 30^0 ആണ്. തറ നിരപ്പിൽ നിന്നും 0.9 മീ ഉയരെയാണ് ചരിവുള്ളതെങ്കിൽ ചരിവിന്റെ നീളം കാണുക.
2. 150 സെ.മീ. ഉയരമുള്ള ഒരു പെൺകുട്ടി ഒരു ദീപസ്തംഭത്തിനു മുന്നിൽ നിൽക്കുന്നു.$150\sqrt{3}$ സെ.മീ. നീളമുള്ള അവളുടെ നിഴൽ തറയിൽ വീഴുന്നു. ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ അഗ്രത്തിന്റെ മേൽക്കോൺ കാണുക
3. A, B എന്നീ രണ്ട് ഷഡ്പദങ്ങൾക്ക് 2 മീ അന്തരം വരെ പരസ്പരം കേൾക്കാൻ കഴിയും. ഒരു ചുവരിൽ നിന്ന് 1 മീ. അകലെ തറയിലുള്ള A എന്ന ഷഡ്പദത്തിന് ചുവരിൻമേലുള്ള അവളുടെ കൂട്ടുകാരി B യെ ഒരു ചിലന്തി ഭക്ഷിക്കാൻ മുതിരുന്നത് കാണുന്നു. A ഒരു ശബ്ദം പുറപ്പെടുവിച്ച് B യ്ക്ക് മുന്നറിയിപ്പ് നൽകുമ്പോൾ A യിൽ നിന്ന് B യുടെ മേൽക്കോൺ 30^0. എങ്കിൽ ചിലന്തിക്ക് ആഹാരം ലഭിച്ചോ ? ഇല്ലയോ ? (A യുടെ വിളി ശബ്ദം കേട്ടാൽ B രക്ഷപ്പെടുന്നു എന്ന് കരുതുക)
4. ഒരു ദിവസം രാത്രി ഒരു നിരീക്ഷകൻ മേഘപരിധി കാണുന്നതിന് ഒരു സ്പോട്ട്ലൈറ്റ് മേഘങ്ങളെ ലക്ഷ്യമാക്കി ലംബമായി തിരിച്ചു.സ്പോട്ട്ലൈറ്റിൽ നിന്നും 100 മീ. അകലെ തറയിൽ നിന്ന് 1.5 മീ. മുകളിൽ സ്ഥാപിച്ച ഒരു ഭൂമാപനക്കോൽ (theodolite) ഉപയോഗിച്ച് മേൽക്കോൺ 60° എന്ന് കണ്ടെത്തി. മേഘപരിധി എത്ര ഉയരെ ആയിരുന്നു.

   കുറിപ്പ്: കട്ടിയായ മേഘം ഇരിക്കുന്നതു വരെയുള്ള ഏറ്റവും താഴ്ന്ന ഉന്നതിയാണ് മേഘപരിധി (Clud ceiling)

   വിമാനനിലയങ്ങളിലെ മേഘപരിധി വിമാനം പറന്നുയരുന്നതിനും, തറയിലിറങ്ങുന്നതിനും അനുയോജ്യമായ ഉയരത്തിലായിരിക്കണം. ഒരു സ്പോട്ട്ലൈറ്റിനെ ലംബമായി മുകളിലേക്ക് ഉന്നം വച്ച് മേഘങ്ങളുടെ ആധാരത്തെ പ്രകാശിപ്പിച്ച് രാത്രികാലങ്ങളിൽ മേഘപരിധി നിർണ്ണയിക്കാൻ കഴിയുന്നതാണ്.



ചിത്രം. 7.20

5. 40 സെ.മീ. നീളമുള്ള ഒരു ഘടികാര ദോലകത്തിന്റെ ഒരു പൂർണ്ണമായ ആന്ദോലനത്തിൽ അതിന്റെ ശീർഷം എതിർവശത്ത് 60^0 കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്നു. ബോബിന്റെ ആരംഭസ്ഥാനവും അന്തിമസ്ഥാനവും തമ്മിലുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം എന്തായിരിക്കും ?
6. പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത വൃക്ഷങ്ങളിൽ A, B എന്ന രണ്ട് കാക്കകൾ 15 മീ., 10 മീ. ഉയരത്തിൽ ഇരിക്കുന്നു. അവ തറയിലുള്ള ഒരു വടയെ 45^0, 60^0 കീഴ്ക്കോണുകളിൽ വീക്ഷിക്കുന്നു. അവ വട എടുക്കാൻ ഒരേ സമയം പുറപ്പെട്ട് ഒരേ വേഗതയിൽ ഏറ്റവും നീളം കുറഞ്ഞ പാതയിലൂടെ പറക്കുന്നു. ഇതിൽ ഏത് കാക്ക ജയിക്കും. (കുറിപ്പ്: തറയും വടയും ഒരേ നേർ രേഖയിലാണ്.)
7. ഒരു വൃത്താകാര പാർക്കിന്റെ മധ്യത്തിൽ ഒരു ദീപസ്തംഭം നിൽക്കുന്നു. ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ ഇരുവശങ്ങളിലും 90^0 കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്നവിധത്തിൽ P,Q എന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അതിർത്തിയിലുണ്ട്. P യിൽ നിന്ന് ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്തിന്റെ മേൽക്കോൺ 30^0 യും PQ = 30 മീ. ഉം എങ്കിൽ ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.
8. 700 മീ. ഉയരത്തിൽ പറക്കുന്ന ഒരു ഹെലികോപ്റ്ററിൽ ഇരിക്കുന്ന ഒരാൾ ഒരു നദിയുടെ ഇരു തീരങ്ങളിലും പരസ്പരം അഭിമുഖമായ രണ്ട് വസ്തുക്കളെ വീക്ഷിക്കുന്നു. വസ്തുക്കളുടെ കീഴ്ക്കോണുകൾ 30^0, 45^0 എങ്കിൽ നദിയുടെ വീതി കാണുക. ($\sqrt{3} = 1.732$ എന്ന് ഉപയോഗിക്കുക.)
9. ഒരു തിരശ്ചീന തലത്തിൽ നിൽക്കുന്ന 'x' എന്ന ഒരാൾ 100 മീ. അകലെ പറക്കുന്ന ഒരു പക്ഷിയെ 30^0 മേൽക്കോണിൽ വീക്ഷിക്കുന്നു. 20 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ നിൽക്കുന്ന 'y' എന്ന മറ്റൊരാൾ അതേ സമയം പക്ഷിയെ 45^0 മേൽക്കോണിൽ വീക്ഷിക്കുന്നു. 'x' ഉം., 'y' ഉം പക്ഷിയുടെ എതിർവശങ്ങളിലാണെങ്കിൽ 'y' ൽ നിന്നും പക്ഷിയുടെ ദൂരം കാണുക.

10. ഒരു ക്ലാസ്സ് മുറിയിൽ ഇരിക്കുന്ന ഒരു വിദ്യാർത്ഥി തിരശ്ചീനമായ വീക്ഷണരേഖയിൽ നിന്നും 1.5 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ബ്ലാക്ക് ബോർഡിലെ ഒരു ചിത്രത്തെ കാണുന്നു. ചിത്രത്തിന്റെ മേൽക്കോൺ 30^0 ആണ്. അവന് ചിത്രം വ്യക്തമായി കാണാത്തതിനാൽ ബ്ലാക് ബോർഡിന് നേരെ നീങ്ങിയ ശേഷം 45^0 മേൽക്കോണിൽ ചിത്രത്തെ നോക്കി കാണുന്നു. വിദ്യാർത്ഥി മുന്നോട്ടു നീങ്ങിയ ദൂരം കാണുക.

11. തറനിരപ്പിൽ നിന്നും 1.5 മീറ്റർ ഉയരത്തിൽ വീക്ഷണതലമുള്ള ഒരു ആൺകുട്ടി 30 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു കെട്ടിടത്തിൽ നിന്നും കുറച്ചകലെ നിൽക്കുന്നു. അവന്റെ കണ്ണിൽ നിന്ന് കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്തിന്റെ മേൽക്കോൺ ആ കെട്ടിടത്തിനു നേരെ നടക്കുമ്പോൾ 30^0 യിൽ നിന്ന് 60^0 ആയി ഉയരുന്നു. അവൻ കെട്ടിടത്തിനുനേരെ നടന്ന ദൂരം കാണുക.

12. 200 അടി ഉയരമുള്ള ഒരു ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ അഗ്രത്തു നിന്നും സൂക്ഷിപ്പുകാരൻ ഒരേ വീക്ഷണ രേഖയിലൂടെ ഒരു കളിത്തോണിയെയും ഒരു കേളീനൗകയേയും നിരീക്ഷിക്കുന്നു. കളിത്തോണിയുടേയും കേളീനൗകയുടേയും കീഴ്ക്കോണുകൾ യഥാക്രമം 45^0 , 30^0 എന്നിവയാണ്. സുരക്ഷിതത്വ ഉദ്ദേശത്തിനായി രണ്ട് നൗകകളും കുറഞ്ഞത് 300 അടി വേറിട്ട് ആയിരിക്കണം. അവയുടെ അകലം 300 അടിയിൽ കുറഞ്ഞാൽ സൂക്ഷിപ്പുകാരൻ അപകട സൂചന കൊടുക്കുന്നു. സൂക്ഷിപ്പുകാരൻ അപകട സൂചന കൊടുത്തോ ?

13. തറയിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരു ആൺകുട്ടി ഒരു തിരശ്ചീന രേഖയിൽ, നിശ്ചിത ഉയരത്തിൽ കാറ്റിൽ പറക്കുന്ന ഒരു ബലൂണിന്റെ സ്ഥാനം ശ്രദ്ധിച്ചു. അതേ സമയം കുട്ടിയിൽ നിന്നും ബലൂണിന്റെ മേൽക്കോൺ 60^0 ആകുന്നു. 2 മിനിറ്റുകൾക്കുശേഷം അതേ നിരീക്ഷണ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മേൽക്കോൺ 30^0 യായി കുറയുന്നു. കാറ്റിന്റെ വേഗത $29\sqrt{3}$ മീ/സെ. എങ്കിൽ തറ നിരപ്പിൽ നിന്നും ബലൂണിന്റെ ഉയരം കാണുക.

14. ഒരു വളവില്ലാത്ത ദേശീയപാത ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ ചുവട്ടിലെത്തുകയാണ്. ഗോപുരത്തിന്റെ അഗ്രത്തിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ 30^0 കീഴ്ക്കോണിൽ ഒരു വാനിന്റെ സ്ഥാനം നിർണ്ണയിക്കുന്നു. ഒരേ വേഗതയിൽ വാൻ ഗോപുരത്തിൽ എത്തിച്ചേരുന്നു. 6 മിനിറ്റുകൾക്കുശേഷം വാനിന്റെ കീഴ്ക്കോൺ 60^0 എന്നു കണ്ടു. വാനിന് ഗോപുരത്തിലെത്താൻ എത്ര മിനിറ്റുകൾ കൂടെ എടുക്കും.

15. ഒരേ ദിശയിലുള്ള രണ്ട് ഭൂനിലയങ്ങളിൽ നിന്ന് ഭൂമിയുടെ കൃത്രിമ ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ മേൽക്കോണുകൾ 30^0, 60^0 ആണെന്ന് കണ്ടെത്തി. രണ്ട് ഭൂനിലയങ്ങളും ഉപഗ്രഹവും ഒരേ ലംബതലത്തിലാണ്. രണ്ട് ഭൂനിലയങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 4000 കി.മീ. എങ്കിൽ ഉപഗ്രഹവും ഭൂമിയും തമ്മിലുള്ള അകലം കാണുക

16. 60മീ. ഉയരമുള്ള ഗോപുരത്തിന്റെ മുകൾഭാഗത്തു നിന്നും ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്തേയും അടിഭാഗത്തേയും യഥാക്രമം 30^0, 45^0 കീഴ്ക്കോണുകളിൽ വീക്ഷിക്കുന്നുവെങ്കിൽ കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.

17. 40മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഗോപുരത്തിന്റെ അഗ്രത്തു നിന്നും ചുവട്ടിൽ നിന്നും ഒരു ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ അഗ്രത്തിന്റെ മേൽക്കോണുകൾ യഥാക്രമം 30^0, 60^0 ആകുന്നു. ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക. കൂടാതെ ഗോപുരത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്നും ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ അഗ്രം വരെയുള്ള അകലം കാണുക.

18. ഒരു തടാകത്തിന്റെ ഉപരിതലത്തിൽ നിന്നും 45 മീറ്റർ മുകളിൽ ചുറ്റി പറക്കുന്ന ഹെലികോപ്ടറിന്റെ മേൽക്കോൺ 30^0ആണ്. അതേസമയം അതേ സ്ഥാനത്തു നിന്നും നോക്കിയാൽ തടാകത്തിൽ അതിന്റെ പ്രതിബിംബത്തിന്റെ കീഴ്ക്കോൺ 60° ആണ്. തടാകത്തിന്റെ ഉപരിതലത്തിൽ നിന്നും ഹെലികോപ്ടറിന്റെ ദൂരം കാണുക.

അഭ്യാസം 7.3

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക

1. $(1-\sin^2\theta)\sec^2\theta =$

   (A) 0 (B) 1 (C) $\tan^2\theta$ (D) $\cos^2\theta$

2. $(1+\tan^2\theta)\sin^2\theta =$

   (A) $\sin^2\theta$ (B) $\cos^2\theta$ (C) $\tan^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$

3. $(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta) =$

   (A) $\sin^2\theta$ (B) 0 (C) 1 (D) $\tan^2\theta$

4. $\sin(90^\circ-\theta)\cos\theta+\cos(90^\circ-\theta)\sin\theta =$

   (A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) -1

5. $1-\dfrac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta} =$

   (A) $\cos\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\cot\theta$ (D) $\operatorname{cosec}\theta$

6. $\cos^4 x-\sin^4 x =$

   (A) $2\sin^2 x-1$ (B) $2\cos^2 x-1$ (C) $1+2\sin^2 x$ (D) $1-2\cos^2 x$.

7. $\tan\theta=\dfrac{a}{x}$, എങ്കിൽ $\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} =$

   (A) $\cos\theta$ (B) $\sin\theta$ (C) $\operatorname{cosec}\theta$ (D) $\sec\theta$

8. $x=a\sec\theta,\ y=b\tan\theta$, എങ്കിൽ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} =$

   (A) 1 (B) -1 (C) $\tan^2\theta$ (D) $\operatorname{cosec}^2\theta$

9. $\dfrac{\sec\theta}{\cot\theta+\tan\theta} =$

   (A) $\cot\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\sin\theta$ (D) $-\cot\theta$

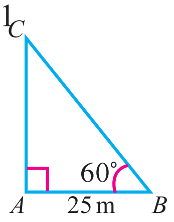
10. $\dfrac{\sin(90^\circ-\theta)\sin\theta}{\tan\theta}+\dfrac{\cos(90^\circ-\theta)\cos\theta}{\cot\theta} =$

    (A) $\tan\theta$ (B) 1 (C) -1 (D) $\sin\theta$

11. സമീപത്തുള്ള ചിത്രത്തിൽ, $AC =$

    (A) 25 m (B) $25\sqrt{3}$ m

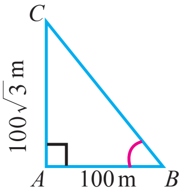
    (C) $\dfrac{25}{\sqrt{3}}$ m (D) $25\sqrt{2}$ m



12. സമീപത്തുള്ള ചിത്രത്തിൽ, $\angle ABC =$

    (A) 45° (B) 30°

    (C) 60° (D) 50°



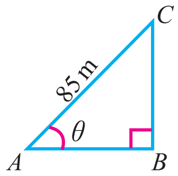
13. ഒരാൾ ഒരു ഗോപുരത്തിൽ നിന്നും 28.5 മീറ്റർ അകലെയാണ്. തറയിൽ നിന്നു അയാളുടെ വീക്ഷണ നിരപ്പ് 1.5മീറ്റർ ആണ്. അയാളുടെ കണ്ണിൽനിന്നും ഗോപുരത്തിന്റെ മേൽക്കോൺ 45^0എങ്കിൽ ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം

(A) 30 m (B) 27.5 m (C) 28.5 m (D) 27 m

14. സമീപത്തുള്ള ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്, $\sin\theta = \frac{15}{17}$ BC =

(A) 85 m (B) 65 m

(C) 95 m (D) 75 m



15. $(1 + \tan^2\theta)(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta) =$

(A) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ (B) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

(C) $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ (D) 0

16. $(1 + \cot^2\theta)(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta) =$

(A) $\tan^2\theta - \sec^2\theta$ (B) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

(C) $\sec^2\theta - \tan^2\theta$ (D) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$

17. $(\cos^2\theta - 1)(\cot^2\theta + 1) + 1 =$

(A) 1 (B) –1 (C) 2 (D) 0

18. $\frac{1 + \tan^2\theta}{1 + \cot^2\theta} =$

(A) $\cos^2\theta$ (B) $\tan^2\theta$ (C) $\sin^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$

19. $\sin^2\theta + \frac{1}{1 + \tan^2\theta} =$

(A) $\text{cosec}^2\theta + \cot^2\theta$ (B) $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta$

(C) $\cot^2\theta - \text{cosec}^2\theta$ (D) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

20. $9\tan^2\theta - 9\sec^2\theta =$

(A) 1 (B) 0 (C) 9 (D) –9

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

പോൾ യർദോസ് (26 മാർച്ച്, 1913-20 സെപ്തംബർ 1996) ഹംഗേറിയൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനാണ്. ഗണിത ശാസ്ത്ര ചരിത്രത്തിൽ, ഗവേഷണ പ്രബന്ധങ്ങൾ പ്രസിദ്ധീകരിക്കുന്നവരിൽ പ്രസിദ്ധനായ യർദോസിനെ ലിയോനോഡ് ഓയിലറിനോട് മാത്രമേ താരതമ്യം ചെയ്യാനാവുകയുള്ളൂ. യർദോസ് തന്റെ ജീവിതകാല ഘട്ടത്തിൽ ഏകദേശം 1475 ഗണിത ശാസ്ത്ര പ്രബന്ധങ്ങളും, ഓയിലർ ഏകദേശം 800 പ്രബന്ധങ്ങളും എഴുതി. അദ്ദേഹം തന്റെ ജീവിതകാലം മുഴുവൻ വ്യത്യസ്തരായ 511 സഹപ്രവർത്തകരോടൊപ്പം, ഗണിത ശാസ്ത്രത്തെ ഒരു സാമൂഹ്യ പ്രവർത്തനമായി വിശ്വസിച്ച് പ്രവർത്തിച്ചു.

8

വിസ്താരകലനം (Mensuration)

Measure what is measurable, and make measurable what is not so

-Galileo Galilei

- മുഖവുര
- പ്രതല വിസ്തീർണ്ണവും വ്യാപ്തവും
  - ❖ വൃത്തസ്തംഭം
  - ❖ വൃത്ത സ്തൂപിക
  - ❖ ഗോളം
- മിശ്ര രൂപങ്ങളും മാറ്റമില്ലാത്ത വ്യാപ്തങ്ങളും

ആർക്കിമിഡീസ്
(287 BC - 212 BC)
ഗ്രീസ്

പുരാതനയുഗത്തിലെ ഒരു പ്രമുഖനായ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനാണ് ആർക്കിമിഡീസ്

ജ്യാമിതിയിൽ സമതല രൂപങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം ഘനരൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം, പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം എന്നിവ അദ്ദേഹത്തിന്റെ എടുത്തു പറയത്തക്ക സംഭാവനകളാണ്.

8.1 മുഖവുര

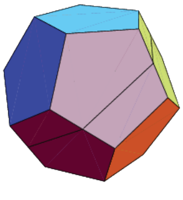
നേർരേഖകളുടെ നീളങ്ങളും, സമതല രൂപങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണവും ചുറ്റളവും, ഘനരൂപങ്ങളുടെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണവും വ്യാപ്തവും കൈകാര്യം ചെയ്യുന്ന ജ്യാമിതിയുടെ ശാഖയാണ് വിസ്താരകലനം. ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ നാം പല സന്ദർഭങ്ങളിലും അളവുകൾ ഉപയോഗിക്കാറുള്ളതുകൊണ്ട് വസ്തുക്കളുടെ അളവുകളെക്കുറിച്ച് പഠിക്കേണ്ടത് അത്യന്താപേക്ഷിതമാണ്.പ്രാരംഭ ജ്യാമിതിയിൽ തലങ്ങൾ, ബഹുതല രൂപങ്ങൾ, വക്രതലങ്ങളുള്ള ഘനരൂപങ്ങൾ, (ഉദാഹരണം: ഗോളങ്ങൾ) എന്നിവയെ നാം പരിഗണിക്കുന്നു.

പ്രതല വിസ്തീർണ്ണവും വ്യാപ്തവും തമ്മിലുള്ള അനുപാതം സൂക്ഷ്മ ശാസ്ത്രത്തിന്റെ പ്രധാന ആശയമായി അറിയപ്പെടാൻ കാരണം സൂക്ഷ്മ ശാസ്ത്രത്തിന്റെ അളവിനെയും തൊഴിൽ ശാസ്ത്രജ്ഞാനത്തെയും വിശേഷിപ്പിക്കുന്ന ഗുണങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചുള്ള ആകൃതിയെ മനസ്സിലാക്കുന്നതിനുള്ള അടിത്തറയായതിനാലാണ്.

ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ വൃത്തസ്തംഭം (സിലിണ്ടർ), വൃത്തസ്തൂപിക, ഗോളം, മിശ്ര രൂപങ്ങൾ എന്നീ ഘനരൂപങ്ങളുടെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം, വ്യാപ്തം എന്നിവ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാം എന്നു പഠിക്കാം.

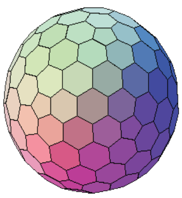
8.2 പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം

സിസിലിയിലെ സിറാക്കൂസ് നഗരത്തിലെ ഗ്രീക്ക് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ആർക്കിമിഡീസ് ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എന്നത് ഗോളം കൃത്യമായി ഉൾക്കൊള്ളുന്ന സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നിൽ രണ്ടു ഭാഗമെന്ന് തെളിയിച്ചു. ഇത് അദ്ദേഹത്തിന്റെ എടുത്തു പറയത്തക്ക നേട്ടമാണ്. അദ്ദേഹം പൂർണ്ണ നിമജ്ഞന രീതി ഉപയോഗിച്ച് ഒരു പരാബൊളയുടെ ചാപത്തിന്റെ അടിയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തിർണ്ണം കണ്ടുപിടിച്ചു.



ചിത്രം. 8.1

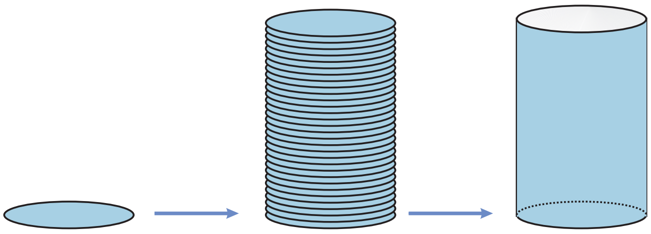
ഒരു ഘനരൂപത്തിന്റെ ദൃശ്യഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം പ്രതല വിസ്തീർണ്ണമാകുന്നു. അതായത് പ്രതലവിസ്തീർണ്ണമെന്നത് ഒരു ത്രിമാനവസ്തുവിന്റെ എല്ലാ ബാഹ്യപ്രതലങ്ങളുടെയും വിസ്തീർണ്ണമാണ്. ചില ഘനരൂപങ്ങളുടെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ തൊട്ടടുത്തുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്ന് വ്യക്തമാകുന്നു.



ചിത്രം. 8.2

8.2.1 സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടർ

ഒരേ ആകൃതിയും വലിപ്പവുമുള്ള നിശ്ചിത എണ്ണം വൃത്താകാര പേപ്പറുകൾ അഥവാ കാർഡ് ബോർഡുകൾ ലംബമായി ഒന്നിനുമുകളിൽ ഒന്നായി കൃത്യമായി ചേരുംവിധം അടുക്കിയാൽ കിട്ടുന്ന ഘനരൂപത്തെ സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടർ എന്നു പറയുന്നു. (ചിത്രം 8.3 നോക്കുക)



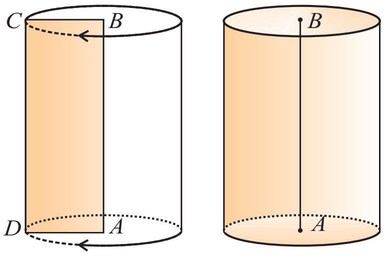
ചിത്രം. 8.3

നിർവ്വചനം

ഒരു ദീർഘചതുരം അതിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തെ അക്ഷമാക്കി ഒരു പൂർണ്ണമായ ചുറ്റൽ ചുറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന ഘനരൂപത്തെ സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടർ എന്നു പറയുന്നു.

പ്രവർത്തനം

ABCD എന്ന ദീർഘ ചതുരം പരിഗണിക്കുക. അതിന്റെ *AB* എന്ന വശം അക്ഷമാക്കി ഒരു പൂർണ്ണ ചുറ്റൽ ചുറ്റുന്നു. ഇത് ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിനെ രൂപീകരിക്കുന്നു. *AB* യെ സിലിണ്ടറിന്റെ അക്ഷം എന്നും, *AB* യുടെ നീളം സിലിണ്ടറിന്റെ ഉയരം എന്നും, *AD(=BC)* യുടെ നീളം സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസാർദ്ധമെന്നും പറയുന്നു.



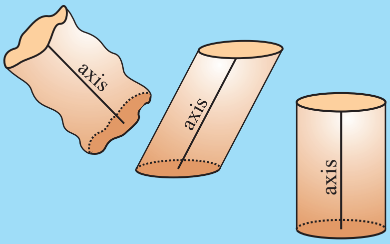
ചിത്രം. 8.4

കുറിപ്പ്

(i) ഒരു സിലിണ്ടറിന്റെ ആധാരം വൃത്താകാരമല്ലെങ്കിൽ ഇതിനെ തിര്യക് സിലിണ്ടർ *(Oblique cylinder)* എന്നു പറയുന്നു.

(ii) ആധാരം വൃത്താകാരവും എന്നാൽ അക്ഷത്തിന് ലംബവുമല്ലെങ്കിൽ അതിനെ വൃത്താകാര സിലിണ്ടർ എന്നുപറയുന്നു.

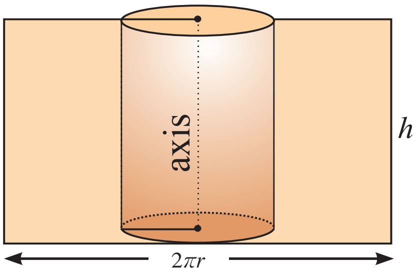
(iii) അക്ഷം ആധാരത്തിന് ലംബമെങ്കിൽ അതിനെ സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടർ എന്നു പറയുന്നു.



ചിത്രം. 8.5

(i) സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

തൊട്ടടുത്ത ചിത്രത്തിൽ, ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ മുകളിലും താഴെയുമുള്ള ഒരേ അളവുള്ള വൃത്തീയ ഭാഗങ്ങൾ പരസ്പരം സമാന്തരമാണ്. സിലിണ്ടറിന്റെ ലംബപ്രതലം വക്രമായതിനാൽ അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം അഥവാ പാർശ്വതല വിസ്തീർണ്ണമെന്നു പറയുന്നു.



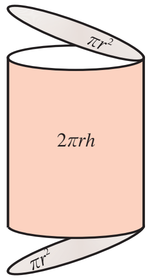
ചിത്രം. 8.6

ഒരു സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം,

CSA = ആധാരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $\times$ ഉയരം = $2\pi r \times h$

$= 2\pi rh$ ച: മാത്രകൾ

(ii) സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം



ചിത്രം. 8.7

ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം,

TSA = വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം + 2 × ആധാര വിസ്തീർണ്ണം

$= 2\pi rh + 2\times\pi r^2$

TSA $= 2\pi r(h+r)$ ച: മാത്രകൾ

(iii) സമവൃത്താകാര പൊള്ളയായ സിലിണ്ടർ

ഘന രൂപത്തിലുള്ള ഇരുമ്പുകുഴൽ, റബ്ബർകുഴൽ എന്നിവ പൊളളയായ സിലിണ്ടർ ആകൃതിയിലുള്ളവയാണ്. ഒരു പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധം R, ആന്തരവ്യാസാർദ്ധം r, ഉയരം h എങ്കിൽ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

CSA = ബാഹ്യവക്രതല വിസ്തീർണ്ണം + ആന്തരവക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

$= 2\pi Rh + 2\pi rh$

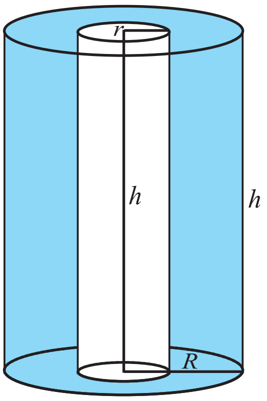
CSA $= 2\pi h(R+r)$ ച:മാ.

ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം , TSA = CSA + 2 × ആധാര വിസ്തീർണ്ണം

$= 2\pi h(R+r) + 2\times[\pi R^2 - \pi r^2]$

$= 2\pi h(R+r) + 2\pi(R+r)(R-r)$

$\therefore$ TSA $= 2\pi(R+r)(R-r+h)$ ച:മാ.



ചിത്രം. 8.8

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത്

പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ കനം w = $R - r$.

> *കുറിപ്പ്*
>
> ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ ആവശ്യമുള്ള സ്ഥലങ്ങളിൽ π ന് ഏകദേശമൂല്യം $\frac{22}{7}$ എന്ന് എടുക്കുക.

ഉദാഹരണം 8.1

ഒരു ഘന സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 7 സെ.മീ.ഉയരം 20 സെ.മീ. എങ്കിൽ (i) വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം (ii) ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം എന്നിവ കാണുക ($\pi = \frac{22}{7}$)

നിർദ്ധാരണം സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യസാർദ്ധം, ഉയരം, എന്നിവ യഥാക്രമം r,h എന്നെടുക്കുക.

ഇവിടെ $r = 7$സെ.മീ., ഉയരം $h = 20$ സെ.മീ.

വക്രതലവിസ്തീർണ്ണം, CSA $= 2\pi rh$

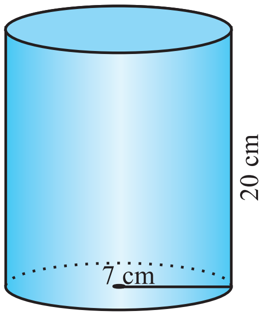
$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times 20$

$\therefore$ വക്രതലവിസ്തീർണ്ണം CSA = 880 ച: സെ. മീ.

ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $= 2\pi r(h+r)$

$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times[20+7] = 44\times 27$

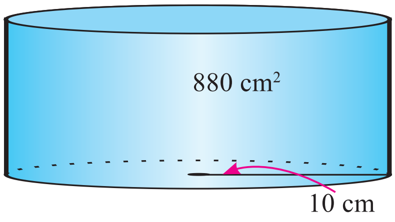
$\therefore$ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം = 1188 ച: സെ. മീ.



ചിത്രം. 8.9

ഉദാഹരണം 8.2

ഒരു ഘന സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം 880 ച: സെ.മീ. അതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 10 സെ.മീ. എങ്കിൽ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക ($\pi = \frac{22}{7}$)



ചിത്രം. 8.10

നിർദ്ധാരണം സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസാർദ്ധവും ഉയരവും യഥാക്രമം r, h എന്നെടുക്കുക. ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം S എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഇവിടെ $r = 10$ സെ.മീ.

$S = 880$ സെ.മീ.^{2}

ഇപ്പോൾ, $S = 880 \implies 2\pi r[h + r] = 880$

$\implies 2 \times \frac{22}{7} \times 10[h + 10] = 880$

$\implies h + 10 = \frac{880 \times 7}{2 \times 22 \times 10}$

$\implies h + 10 = 14$

$\therefore$ സിലിണ്ടറിന്റെ ഉയരം $h = 4$ സെ.മീ.

വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം CSA

$= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 10 \times 4 = \frac{1760}{7}$

$\therefore$ സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം CSA $= 251\frac{3}{7}$ ച:സെ.മീ.

മറ്റൊരു രീതി :

CSA $=$ TSA $- 2\times$ ആധാര വിസ്തീർണ്ണം

$= 880 - 2 \times \pi r^2$

$= 880 - 2 \times \frac{22}{7} \times 10^2$

$= \frac{1760}{7} = 251\frac{3}{7}$ ച:സെ.മീ

ഉദാഹരണം 8.3

ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ ആധാര വ്യാസാർദ്ധവും ഉയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 5 ഇതിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം $\frac{3960}{7}$ ച:സെ.മീ എങ്കിൽ ഉയരവും വ്യാസാർദ്ധവും കാണുക $\pi = \frac{22}{7}$

നിർദ്ധാരണം സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസാർദ്ധവും ഉയരവും യഥാക്രമം r, h എന്നെടുക്കുക

ഇവിടെ $r : h = 2 : 5 \implies \frac{r}{h} = \frac{2}{5}. \quad \therefore \quad r = \frac{2}{5}h$

ഇപ്പോൾ, വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം CSA $= 2\pi rh$

$$\implies 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{2}{5} \times h \times h = \frac{3960}{7}$$

$$\implies h^2 = \frac{3960 \times 7 \times 5}{2 \times 22 \times 2 \times 7} = 225$$

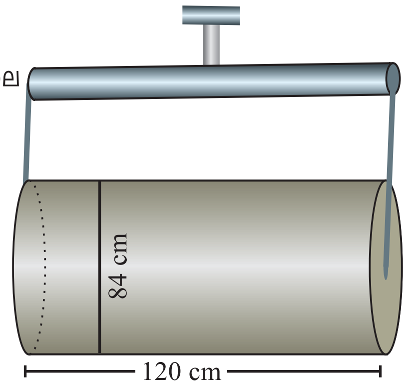
$$\therefore \quad h = 15 \implies r = \frac{2}{5}h = 6.$$

$\therefore$ സിലിണ്ടറിന്റെ ഉയരം 15 സെ.മീ., വ്യാസാർദ്ധം 6 സെ.മീ.

ഉദാഹരണം 8.4

120 സെ.മീ. നീളമുള്ള ഒരു റോഡ് റോളറിന്റെ വ്യാസം 84 സെ.മീ. ഒരു കളിസ്ഥലം നിരപ്പാക്കുന്നതിന് 500 പ്രാവശ്യം മുഴുവനായി ഉരുട്ടിയാൽ ഒരു ച: മീറ്ററിന് 75 പൈസാ പ്രകാരം കളി സ്ഥലം നിരപ്പാക്കാൻ ആവശ്യമായ ചെലവ് കാണുക ($\pi = \frac{22}{7}$)

നിർദ്ധാരണം $r = 42$ സെ.മീ., $h = 120$ സെ.മീ.



ചിത്രം. 8.11

$\left.\begin{array}{r}\text{റോളർ ഒരു പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടിയാൽ}\\ \text{ലഭിക്കുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{റോഡ് റോളറിന്റെ വക്രതല}\\ \text{വിസ്തീർണ്ണം}\end{array}\right.$

$= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 42 \times 120$

$= 31680$ സെ.മീ.^{2}

$\left.\begin{array}{r}\text{റോളർ 500 പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടിയാൽ}\\ \text{ലഭിക്കുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം}\end{array}\right\} = 31680 \times 500$

$= 15840000$ സെ.മീ.^{2}

$= \frac{15840000}{10000} = 1584$ മീ.^{2} (10,000 സെ.മീ.^{2} = 1 ച:മീറ്റർ)

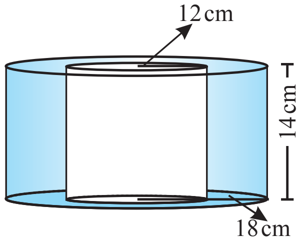
ഒരു ച:മീ കളിസ്ഥലം നിരപ്പാക്കുന്നതിന് ചെലവ് $= ₹\,\frac{75}{100}$

$\therefore$ കളിസ്ഥലം നിരപ്പാക്കുന്നതിനുള്ള ആകെ ചെലവ് $= \frac{1584 \times 75}{100} = ₹\,1188.$

ഉദാഹരണം 8.5

ഒരു പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ ആന്തര വ്യാസാർദ്ധം, ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധം എന്നിവ യഥാക്രമം 12 സെ.മീ., 18 സെ.മീ. ആകുന്നു. അതിന്റെ ഉയരം 14 സെ.മീ. എങ്കിൽ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണവും ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണവും കാണുക ($\pi = \frac{22}{7}$)

നിർദ്ധാരണം r, R, h എന്നിവ യഥാക്രമം ഒരു പൊള്ളയായ സിലിറിന്റെ ആന്തരവ്യാസാർദ്ധം, ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം. 8.12

$r = 12$ സെ.മീ., $R = 18$ സെ.മീ., $h = 14$ സെ.മീ.

വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം, $\text{CSA} = 2\pi h(R+r)$

$\therefore \text{CSA} = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times (18+12)$

$= 2640$ ച: സെ.മീ.

ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം, $\text{TSA} = 2\pi(R+r)(R-r+h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times (18+12)(18-12+14)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30 \times 20 = \frac{26400}{7}.$

$\therefore$ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം, $= 3771\frac{3}{7}$ ച: സെ.മീ.

8.2.2 സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപിക

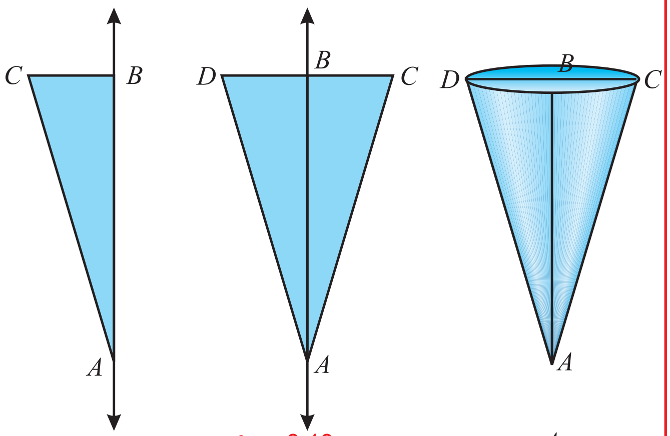
നമ്മുടെ ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ ഘന രൂപങ്ങളായ കോൺ ഐസ്ക്രീം, ക്ഷേത്രഗോപുരത്തിന്റെ അഗ്രം, സർക്കസ്സിലെ കോമാളിയുടെ തൊപ്പി, മൈലാഞ്ചികോൺ എന്നീ വസ്തുക്കൾ കാണാറുണ്ട്. ഇവ സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള വസ്തുക്കളാണ്.

ഒരു ഘനരൂപത്തിന്റെ പാദം വൃത്താകൃതിയിലും, ആ ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ക്രമേണ കുറഞ്ഞു കൊണ്ട് വരികയും അവസാനം ഒരു ബിന്ദുവിൽ അവശേഷിക്കുകയും ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ ആ ബിന്ദുവിനെ ശീർഷമെന്നും ധനരൂപത്തെ വൃത്തസ്തൂപിക എന്നും പറയുന്നു. സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപിക എന്നതു കൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത് പാദം വൃത്താകൃതിയിലും സമവൃത്താകാരം വൃത്താകൃതിയയയിലുളള അടിഭാഗത്തിന്റെ കേന്ദ്രം വഴി ചെല്ലുന്ന അക്ഷം പാദപ്രതലത്തിന് ലംബവുമാണ് എന്നതാണ്. ഈ ഭാഗത്തിൽ സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയെ നിർവ്വചിച്ച് പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം എങ്ങനെ കാണാം എന്ന് നോക്കാം. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പ്രവർത്തനത്തിലൂടെ വൃത്ത സ്തൂപികയെ ചിത്രീകരിക്കാം.

പ്രവർത്തനം

കട്ടിയുള്ള കടലാസ് എടുത്ത് B യിൽ സമകോണുള്ള $\triangle ABC$ മുറിച്ചെടുക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബ വശമായ AB യെ നീളമുള്ള ദണ്ഡിൽ ഒട്ടിക്കുക. നിങ്ങളുടെ കൈയിൽ ദണ്ഡിനെപിടിച്ച് ദണ്ഡിനെ അക്ഷമാക്കി കൊണ്ട് ചുഴറ്റുക. ത്രികോണത്തെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ദിശയിൽ ചുറ്റുക.

എന്ത് സംഭവിക്കുന്നു? ഈ ത്രികോണത്തെ ചുറ്റുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന രൂപത്തെ കാണാൻ സാധിക്കുന്നുവോ? ഇപ്രകാരം ചുറ്റുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന രൂപമാണ് ഒരു സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപിക. സമകോണ $\triangle ABC$ യെ സമകോൺ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന AB എന്ന വശത്തെ അക്ഷമാക്കിക്കൊണ്ട് 360° ചുറ്റുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഘനരൂപത്തെ സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപിക എന്നു പറയുന്നു.



ചിത്രം. 8.13

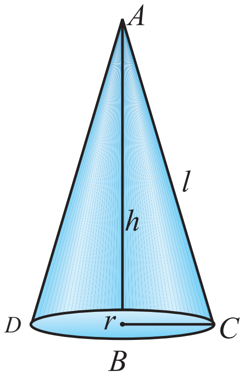
AB യെ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം (h) എന്നു പറയുന്നു. BC യെ പാദത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം (r) എന്നും AC യെ പാർശ്വോന്നതി (l) എന്നും പറയുന്നു. ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്, $(BC = BD = r)$, $(AC = AD = l)$ എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

സമകോണത്രികോണം ABC ൽ,

പാർശ്വോന്നതി $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ (പൈതഗോറസ്സ് സൂത്രം അനുസരിച്ച്)

ഉയരം $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

വ്യാസാർദ്ധം $r = \sqrt{l^2 - h^2}$



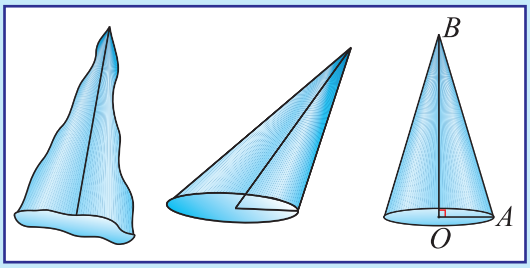
ചിത്രം.8.14

കുറിപ്പ്

(i) വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ പാദം വൃത്താകാരമല്ലെങ്കിൽ അതിനെ തിര്യക് വൃത്തസ്തൂപിക എന്നുപറയുന്നു.

(ii) വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ പാദം അതിന്റെ വൃത്താകാര പാദത്തിന് ലംബമല്ലെങ്കിൽ അതിനെ വൃത്തസ്തൂപിക എന്നു പറയുന്നു.

(iii) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വൃത്താകര പാദത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിന് ലംബമാണ് ശീർഷമെങ്കിൽ അതിനെ സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപിക എന്നു പറയുന്നു.

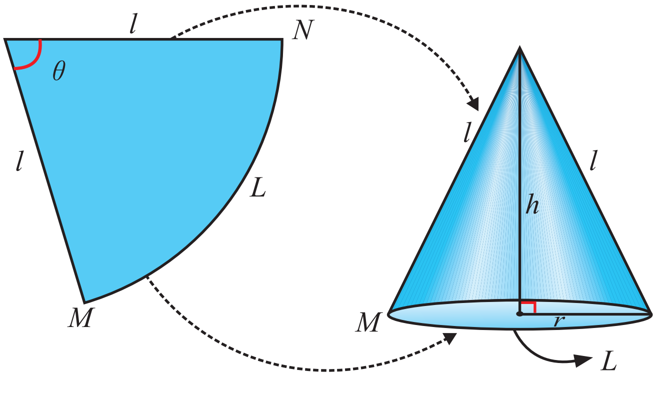


ചിത്രം. 8.15

(i) പൊള്ളയായ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

കേന്ദ്രകോൺ θ° യും വ്യാസാർദ്ധം l ഉം ഉള്ള ഒരു വൃത്ത ഖണ്ഡം പരിഗണിക്കുക. ചാപനീളം L എന്നിരിക്കട്ടെ. അതിനാൽ $\dfrac{2\pi l}{L} = \dfrac{360^\circ}{\theta^\circ}$

$$\Longrightarrow \quad L = 2\pi l \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \qquad (1)$$



ചിത്രം. 8.16

വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ ഒന്നു ചേർന്ന് ഒരു സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപിക ലഭിക്കുന്നു. വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധം r എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$L = 2\pi r$$

(1) ൽ നിന്ന്, $2\pi r = 2\pi l \times \dfrac{\theta^\circ}{360^\circ}$

$$\Longrightarrow \quad r = l\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{r}{l} = \left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right)$$

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

ഒരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളെ ഒന്ന് ചേർത്ത് വൃത്തസ്തൂപിക രൂപീകരിക്കുമ്പോൾ താഴെക്കാണുന്ന മാറ്റങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നു.

വൃത്തഖണ്ഡം	വൃത്ത സ്തൂപിക
വ്യാസാർദ്ധം (l)	→ പാർശ്വോന്നതി (l)
ചാപനീളം (L)	→ പാദചുറ്റളവ് $2\pi r$
വിസ്തീർണ്ണം	→ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം πrl

വൃത്ത ഖണ്ഡത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 'A' എന്നിരിക്കട്ടെ

$$\frac{\pi l^2}{A} = \frac{360^\circ}{\theta^\circ} \qquad (2)$$

വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം } = വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം }

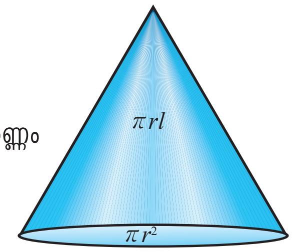
$$A = \pi l^2\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right) = \pi l^2\left(\frac{r}{l}\right)$$

അതിനാൽ, വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം $= \pi rl$ ച:മാത്രകൾ

(ii) സമവൃത്താകാര വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം

സമവൃത്താകാര വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം } = വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം + പാദ വിസ്തീർണ്ണം

$= \pi rl + \pi r^2$



ചിത്രം. 8.17

സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം

$= \pi r(l + r)$ ച:മാത്രകൾ

ഉദാഹരണം 8.6

ഒരു സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആധാര വ്യാസാർദ്ധവും പാർശ്വോന്നതിയും യഥാക്രമം 35 സെ.മീ., 37 സെ.മീ. എന്നാകുന്നു. എങ്കിൽ വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വക്രതലവിസ്തീർണ്ണവും ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണവും കാണുക. ($\pi = \dfrac{22}{7}$)

നിർദ്ധാരണം ഒരു സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധം, പാർശ്വോന്നതി എന്നിവ യഥാക്രമം r, l എന്നിരിക്കട്ടെ.

$r = 35$ സെ.മീ. , $l = 37$ സെ.മീ.

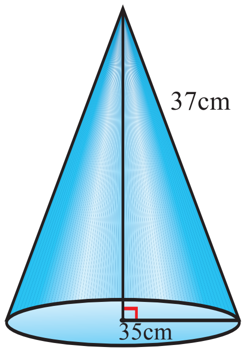
വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം $\text{CSA} = \pi r l = \pi(35)(37)$

$\text{CSA} = 4070$ ച: സെ.മീ.

ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $\text{TSA} = \pi r[l + r]$

$= \frac{22}{7} \times 35 \times [37 + 35]$

$\text{TSA} = 7920$ ച: സെ.മീ.



ചിത്രം. 8.18

ഉദാഹരണം 8.7

O,C എന്നിവ യഥാക്രമം ഒരു സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദത്തിന്റെ കേന്ദ്രം, ശീർഷം എന്നിരിക്കട്ടെ. പാദത്തിന്റെ പരിധിയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു B എന്നിരിക്കട്ടെ. വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധം 6 സെ.മീ. ഉം. $\angle OBC = 60^o$ യും എങ്കിൽ വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ ഉയരവും വക്രതല വിസ്തീർണ്ണവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

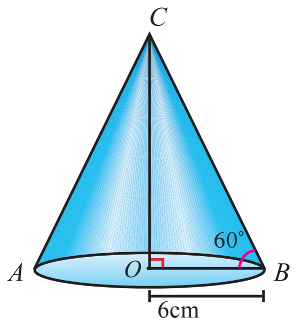
വ്യാസാർദ്ധം $\text{OB} = 6$ സെ.മീ. , $\angle OBC = 60^o$.

സമകോണ ത്രികോണം OBC യിൽ,

$$\cos 60^o = \frac{OB}{BC}$$

$$\Longrightarrow \quad BC = \frac{OB}{\cos 60^\circ}$$

$$\therefore \quad BC = \frac{6}{(\frac{1}{2})} = 12 \text{ സെ.മീ.}$$



ചിത്രം. 8.19

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാർശ്വോന്നതി $l = 12$ സെ.മീ.

സമകോണത്രികോണം OBC യിൽ, $\tan 60^o = \frac{OC}{OB}$

$$\Longrightarrow \quad OC = OB \tan 60^\circ = 6\sqrt{3}$$

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം $\text{OC} = 6\sqrt{3}$ സെ.മീ

വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം $\pi r l = \pi \times 6 \times 12 = 72\pi$ ച: സെ.മീ

(കുറിപ്പ് : $\text{OC} = 6\sqrt{3}$ എന്നത് $\text{OC}^2 = \text{BC}^2 - \text{OB}^2$ ൽ നിന്നും കിട്ടുന്നതാണ്)

ഉദാഹരണം 8.8

21 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ നിന്നും 120° കേന്ദ്ര കോണുള്ള ഒരു വൃത്തഖണ്ഡം മുറിച്ചെടുത്ത് ഒരു വൃത്ത സ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുന്നു. എങ്കിൽ വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക ($\pi = \frac{22}{7}$)

നിർദ്ധാരണം വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ പാദവ്യാസാർദ്ധം r എന്നിരിക്കട്ടെ.

വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $\theta = 120^\circ$

വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, $R = 21$ സെ.മീ.

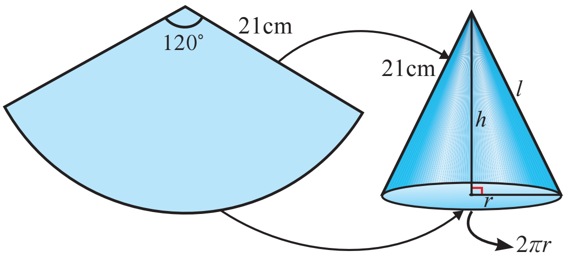
വൃത്തഖണ്ഡത്തെ മടക്കി ഒരു സമവൃത്താകാര വൃത്ത സ്തൂപികയാക്കിയാൽ,

വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ പാദ ചുറ്റളവ്

= ചാപ നീളം

$$\Longrightarrow \quad 2\pi r = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi R$$

$$\Longrightarrow \quad r = \frac{\theta}{360^\circ} \times R$$



ചിത്രം. 8.20

വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ പാദ വ്യാസാർദ്ധം,

$$r = \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 21 = 7$$ സെ.മീ.

വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ പാർശ്വോന്നതി ,

$l =$ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസ്യാർദ്ധം

അതിനാൽ, $l = R \Longrightarrow l = 21$ സെ.മീ.

വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം,

$$\text{CSA} = \pi r l$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 21 = 462.$$

അതിനാൽ, CSA = 462 ച: സെ.മീ

മറ്റൊരു രീതി :

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ CSA

= വൃത്ത ഖണ്ഡത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$$= \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times \pi \times R^2$$

$$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

= 462 ച: സെ.മീ

8.2.3 ഗോളം

ഒരു വൃത്താകാര തകിടിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വ്യാസത്തെ അക്ഷമാക്കി ചുറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന ഘനരൂപമാണ് ഗോളം. അതായത് പ്രതല വിസ്തീർണ്ണവും വ്യാപ്തവുമുള്ള ഒരു ത്രിമാന വസ്തുവാണ് ഗോളം.

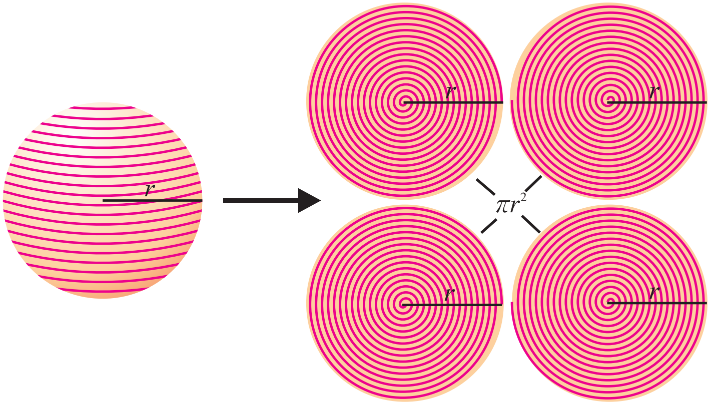
പ്രവർത്തനം

(i) ഘന ഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

ഒരു വൃത്താകാര തകിടിന്റെ വ്യാസത്തിലൂടെ ഒരു ദണ്ഡ് ഘടിപ്പിച്ച് 360^0 ചുഴറ്റിയാൽ ലഭിക്കുന്ന രൂപം ഒരു പന്തു പോലെ കാണപ്പെടുന്നു. ഈ പുതിയ ഘനരൂപത്തെ ഗോളം എന്നു പറയുന്നു.

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പ്രവർത്തനം ഒരു ഗോളത്തിന്റെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം അതിന്റെ വ്യസാർദ്ധത്തിനു തുല്യമായ വ്യാസാർദ്ധമുളള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ 4 മടങ്ങാണ് എന്ന് അറിയാൻ സഹായിക്കുന്നു.

1. ഒരു പ്ലാസ്റ്റിക് പന്ത് എടുക്കുക.
2. പന്തിന്റെ മുകളിൽ ഒരു മൊട്ടുസൂചി ഘടിപ്പിക്കുക.
3. മൊട്ടുസൂചിയിൽ നിന്നാരംഭിച്ച് വക്രതലം ആവരണം ചെയ്യത്തക്ക വിധം നൂൽ ചുറ്റുക.
4. അതിനുശേഷം നൂൽ അഴിച്ചെടുത്ത് അതിന്റെ നീളം അളക്കുക.
5. നൂലിനെ നാലു തുല്യ ഭാഗങ്ങളായി മുറിക്കുക.
6. ചിത്രങ്ങളിൽ കാണുന്ന വിധം നൂലു കളെ വൃത്താകൃതിയിൽ വയ്ക്കുക.
7. വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധം അളക്കുക.



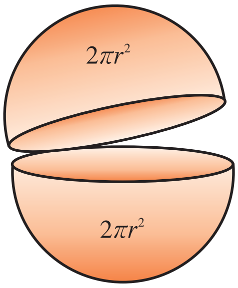
ചിത്രം. 8.21

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം = 4 തുല്യ വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധം

ഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം, CSA = $4 \times$ വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= 4 \times \pi r^2$

$\therefore$ ഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം $= 4\pi r^2$ ച.മാ.

(ii) ഘന അർദ്ധഗോളം



ചിത്രം. 8.22

ഒരു ഘനഗോളത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന തലം ഗോളത്തെ രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. ഓരോ ഭാഗത്തേയും ഒരു ഘന അർദ്ധ ഗോളം എന്നു പറയുന്നു.

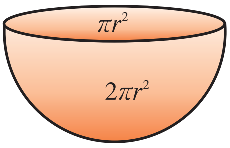
അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം = $\frac{\text{ഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം}}{2}$

$= \frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2$ ച.മാത്രകൾ

അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം TSA

= വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം + പാദ വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$= 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$ ച.മാത്രകൾ



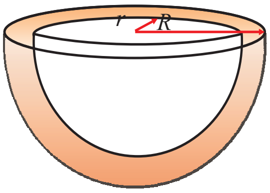
ചിത്രം. 8.23

(iii) പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളം

R, r എന്നിവ പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധം, ആന്തരവ്യാസാർദ്ധം എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇപ്പോൾ ഇതിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

= ബാഹ്യപ്രതല വിസ്തീർണ്ണം + ആന്തര പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 = 2\pi(R^2 + r^2)$ ച.മാത്രകൾ



ചിത്രം. 8.24

ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം = { ബാഹ്യപ്രതല വിസ്തീർണ്ണം + ആന്തര പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം + പാദ വിസ്തീർണ്ണം

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$

$= 2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R + r)(R - r)$ ച.മാത്രകൾ

ഉദാഹരണം 8.9

7 മീ. ആന്തരവ്യാസമുള്ള പൊള്ളയായ ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഒരു വലയത്തിൽ ഒരാൾ മോട്ടോർ സൈക്കിളിൽ തന്റെ പ്രകടനം കാഴ്ചവയ്ക്കുന്നു. അയാൾക്ക് സവാരി ചെയ്യാൻ ലഭിക്കുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക. ($\pi = \frac{22}{7}$)

നിർദ്ധാരണം പൊള്ളയായ ഗോളത്തിന്റെ ആന്തരവ്യാസം 2r = 7 മീ.

മോട്ടോർ സൈക്കിൾ സവാരിക്കാരന് സവാരി ചെയ്യാൻ ലഭിക്കുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = ഗോളത്തിന്റെ ആന്തരപ്രതല വിസ്തീർണ്ണം

$= 4\pi r^2 = \pi(2r)^2$

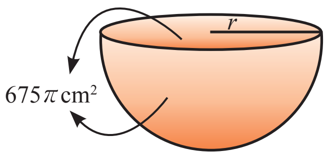
$= \frac{22}{7} \times 7^2$

മോട്ടോർ സവാരിക്കാരന് സവാരിക്ക് ലഭിക്കുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = 154 ച.മീ.

ഉദാഹരണം 8.10

ഒരു ഘന അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം 675π ച: സെ.മീ. അർദ്ധ ഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ഘന അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം



ചിത്രം. 8.25

$$3\pi r^2 = 675\pi \text{ ച: സെ.മീ.}$$

$$\Longrightarrow \quad r^2 = 225$$

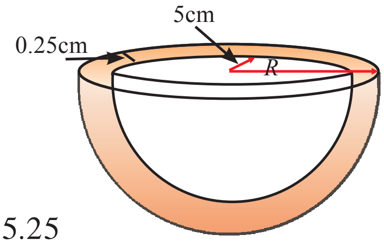
ഘന അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം,

$$\text{CSA} = 2\pi r^2 = 2\pi \times 225 = 450\pi \text{ ച: സെ.മീ..}$$

ഉദാഹരണം 8.11

അർദ്ധ ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പിഞ്ഞാണത്തിന്റെ കനം 0.2 സെ.മീ. ആ പിഞ്ഞാണത്തിന്റെ ആന്തരവ്യാസാർദ്ധം 5 സെ.മീ. എങ്കിൽ ബാഹ്യ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

നിർദ്ധാരണം r, R, w എന്നിവ യഥാക്രമം ഒരു ഘന അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ആന്തവ്യാസാർദ്ധം, ബാഹ്യ വ്യാസാർദ്ധം, കനം എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം. 8.26

ഇവിടെ $r = 5\text{cm}, w = 0.25$ സെ.മീ.

$\therefore \quad R = \text{r} + w = 5 + 0.25 = 5.25$ സെ.മീ.

പിഞ്ഞാണത്തിന്റെ ബാഹ്യ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം $= 2\pi R^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5.25 \times 5.25$$

$\therefore$ പിഞ്ഞാണത്തിന്റെ ബാഹ്യ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം $= 173.25$ ച: സെ.മീ.

അഭ്യാസം 8.1

1. ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 14 സെ.മീ. ഉം ഉയരം 8 സെ.മീ. ഉം ആണ്. വക്രതല വിസ്തീർണ്ണവും ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണവും കാണുക.
2. ഒരു സമവൃത്താകാര വൃത്ത സ്തംഭത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം 660 ച.സെ.മീ. അതിന്റെ പാദവ്യാസം 14 സെ.മീ. എങ്കിൽ ഉയരവും വക്രതല വിസ്തീർണ്ണവും കാണുക.
3. ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം, പാദ ചുറ്റളവ് എന്നിവ യഥാക്രമം 4400 ച.സെ.മീ., 110 സെ.മീ. എങ്കിൽ ഉയരവും വ്യാസവും കാണുക.
4. ഒരു വലിയ വീടിന് 50 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധം, 3.5 മീ. ഉയരം ഉള്ള 12 സമസിലിണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള തൂണുകളുണ്ട്. ആ തൂണുകളുടെ വക്രതലം ചായം പൂശുന്നതിന് ച.മീറ്ററിന് ₹20 വീതം എന്ത് ചെലവാകും ?
5. ഒരു ഘന സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം 231 ച.സെ.മീ. അതിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ്. എങ്കിൽ സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസാർദ്ധവും ഉയരവും കാണുക.
6. ഒരു വൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം 1540 സെ.മീ.^{2} അതിന്റെ ഉയരം പാദവ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ 4 മടങ്ങാണെങ്കിൽ സിലിണ്ടറിന്റെ ഉയരം കാണുക.
7. രണ്ട് സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറുകളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 3:2 ഉം ഉയരങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 5:3 ഉം ആണ്, അവയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കാണുക

8. ഒരു പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം 540π ച.സെ.മീ. അതിന്റെ ആന്തരവ്യാസം 16സെ.മീ. ഉയരം 15 സെ.മീ. എങ്കിൽ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക

9. സിലിണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ഇരുമ്പു കുഴലിന്റെ ബാഹ്യവ്യാസം 25 സെ.മീ. അതിന്റെ നീളം 20 സെ.മീ. ആ കുഴലിന്റെ കനം 1 സെ.മീ. എങ്കിൽ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

10. ഒരു സമവൃത്താകാര ഘന വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം എന്നിവ യഥാക്രമം 7 സെ.മീ. 24 സെ.മീ. എന്നിവയാണ് വക്രതല വിസ്തീർണ്ണവും ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണവും കാണുക.

11. സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ശീർഷകോണും വ്യാസാർദ്ധവും യഥാക്രമം 60^0, 15 സെ.മീ. എങ്കിൽ അതിന്റെ ഉയരവും, ചരിഞ്ഞ ഉയരവും കാണുക.

12. ഒരു വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവ് 236 സെ.മീ. പാർശ്വോന്നതി 12 സെ.മീ., എങ്കിൽ അതിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

13. ഒരു നെൽക്കൂമ്പാരം വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലാണ് അതിന്റെ വ്യാസം 4.2 മീ. ഉം. ഉയരം 2.8 മീ. ഉം ആണ്. നെൽക്കൂമ്പാരത്തിനെ മഴനനയാതെ സംരക്ഷിക്കാൻ ആവശ്യമായ ക്യാൻവാസിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക

14. ഒരു വൃത്താകാരതകിടിൽ നിന്നും മുറിച്ചെടുത്ത വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ, വ്യാസാർദ്ധം എന്നിവ യഥാക്രമം 180^0, 21 സെ.മീ. ആകുന്നു. വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ വക്കുകൾ കൂട്ടിച്ചേർത്ത് ഒരു പൊള്ളയായ വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കിയാൽ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക

15. ഒരു വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധം, പാർശ്വോന്നതി എന്നിവയുടെ അംശബന്ധം 3:5 വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം 60π ച.സെ.മീ. ആണെങ്കിൽ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

16. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം 98.56 സെ.മീ.^{2} എങ്കിൽ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക.

17. ഒരു ഘന അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം 2772 ച.സെ.മീ. എങ്കിൽ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

18. രണ്ടു ഘന അർദ്ധഗോളങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 3:5 എങ്കിൽ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധവും ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധവും കാണുക.

19. ഒരു പൊള്ളയായ അർദ്ധ ഗോളത്തിന്റെ ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധം, ആന്തരവ്യാസാർദ്ധം എന്നിവ യഥാക്രമം 4.2 സെ.മീ., 2.1 സെ.മീ. എങ്കിൽ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണവും ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണവും കാണുക

20. ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ അർദ്ധഗോളാകൃതിയിലുള്ള താഴികക്കുടം ചായം പൂശേണ്ടതുണ്ട്. പാദചുറ്റളവ് 17.6 മീ. 1ച.മീ.ന് ₹ 5 പ്രകാരം ചായം പൂശുന്നതിന് എന്ത് ചെലവാകും ?

8.3 വ്യാപ്തം

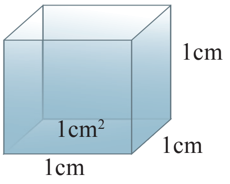
ചില ഘനരൂപങ്ങളുടെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം സംബന്ധിച്ച പ്രശ്നങ്ങളാണ് നാം ഇതുവരെ കണ്ടത്. ചില സുപരിചിതങ്ങളായ ഘന രൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് ഇപ്പോൾ നമുക്ക് പഠിക്കാം. വ്യാപ്തം എന്ന വാക്കുകൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത് കൊള്ളളവ് എന്നാണ്. ഒരു ഘന രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം അതിന്റെ സംഖ്യാ സംബന്ധമായ സവിശേഷതയാണ്.

ഉദാഹരണമായി ഒരുവസ്തുവിനെ ഒരു ഘനമാത്ര വ്യാപ്തമുള്ള (ഒരു മാത്രവശമുള്ള) സമചതുരഘനികകളായി പിരിച്ചാൽ അവയുടെ എണ്ണം ആ വസ്തുവിന്റെ വ്യാപ്തം ആണ്.

ചിത്രത്തിൽ 8.27 ൽ കാണുന്ന സമചതുര ഘനികയുടെ വ്യാപ്തം

$= $ നീളം $\times$ വീതി $\times$ ഉയരം

$= 1$ സെ.മീ. $\times 1$ സെ.മീ. $\times 1$ സെ.മീ. $= 1$ സെ.മീ.^{3}.



ചിത്രം. 8.27

ഒരു വസ്തുവിന്റെ വ്യാപ്തം 100 ഘന സെ.മീ. എന്നത് ആ വസ്തുവിനെ പൂർണ്ണമായും നിറയ്ക്കാൻ 1 സെ.മീ^{3} വ്യാപ്തമുള്ള 100 സമചതുര ഘനികകൾ ആവശ്യമാണ് എന്നാകുന്നു.

പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം പോലെ വ്യാപ്തവും ഒരു ധന അളവാണ്. ഘനരൂപങ്ങൾ സ്ഥാനം മാറിയാലും അവയുടെ വ്യാപ്തങ്ങൾക്ക് മാറ്റം ഉണ്ടാകുന്നില്ല.

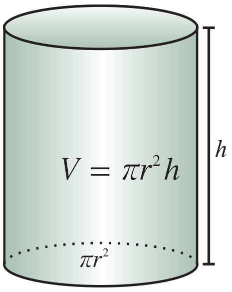
8.3.1 ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം

(i) ഒരു സമവൃത്താകാരഘന സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം

ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം, പാദ വിസ്തീർണ്ണവും ഉയരവും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലമാണ്.

അതായത്, സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം $=$ പാദ വിസ്തീർണ്ണം $\times$ ഉയരം

$= \pi r^2 \times h$



ചിത്രം. 8.28

$\therefore$ ഒരു സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം $V = \pi r^2 h$ ഘ.മാ.

(ii) പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം

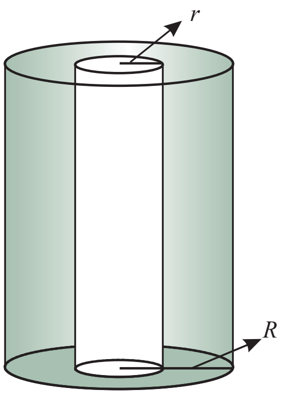
R,r എന്നിവ യഥാക്രമം ഒരു പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ ബാഹ്യ വ്യാസാർദ്ധം, ആന്തര വ്യാസാർദ്ധം എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക. അതിന്റെ ഉയരം h എന്നിരിക്കട്ടെ

$\therefore$ വ്യാപ്തം, $V =$ ബാഹ്യ സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം $-$ ആന്തര സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം

$= \pi R^2 h - \pi r^2 h$

$\therefore$ ഒരു പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം

$V = \pi h (R^2 - r^2)$ ഘ.മാ.



ചിത്രം. 8.29

ഉദാഹരണം 8.12

ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം 704 ച.സെ.മീ., ഉയരം 8 സെ.മീ. സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം ലിറ്ററിൽ കാണുക.($\pi = \frac{22}{7}$)

നിർദ്ധാരണം ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം എന്നിവ യഥാക്രമം r,h എന്നിരിക്കട്ടെ.

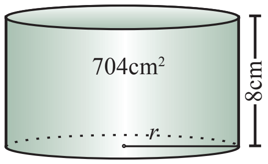
h $=$ 8സെ.മീ. , CSA $=$ 704 ച.സെ.മീ.

CSA $= 704$

$\Longrightarrow \quad 2\pi rh = 704$

$2 \times \frac{22}{7} \times r \times 8 = 704$

$\therefore \quad r = \frac{704 \times 7}{2 \times 22 \times 8} = 14$ സെ.മീ.



ചിത്രം. 8.30

സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം $V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 8$$

$= 4928$ ഘ.സെ.മീ.

സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം $= 4.928$ ലിറ്റർ (1000 ഘ.സെ.മീ. = 1 ലിറ്റർ)

ഉദാഹരണം 8.13

പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ഇരുമ്പു കുഴലിന്റെ നീളം 28 സെ.മീ. അതിന്റെ ബാഹ്യ വ്യാസം, ആന്തരവ്യാസം എന്നിവ യഥാക്രമം 8 സെ.മീ., 6 സെ.മീ, ആ വസ്തുവിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക. 1 ഘ.സെ.മീ. ഇരുമ്പിന്റെ ഭാരം 7 ഗ്രാം എങ്കിൽ ആ വസ്തുവിന്റെ ഭാരം കാണുക ($\pi = \frac{22}{7}$)

നിർദ്ധാരണം r, R, h എന്നിവ യഥാക്രമം പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ ആന്തര വ്യാസാർദ്ധം, ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം എന്നിരിക്കട്ടെ.

2r = 6 സെ.മീ., 2R = 8 സെ.മീ. , h = 28 സെ.മീ.

കുഴലിന്റെ വ്യാപ്തം $V = \pi \times h \times (R + r)(R - r)$

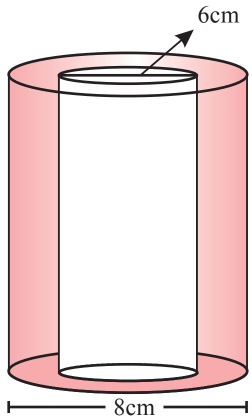
$$= \frac{22}{7} \times 28 \times (4 + 3)(4 - 3)$$

$\therefore$ $V = 616$ ഘ.സെ.മീ.

1 ഘ.സെ.മീ. ഇരുമ്പിന്റെ ഭാരം = 7 ഗ്രാം

616 ഘ.സെ.മീ. ഇരുമ്പിന്റെ ഭാരം $= 7 \times 616$ ഗ്രാം

$\therefore$ കുഴലിന്റെ ഭാരം = 4.312 കി. ഗ്രാം



ചിത്രം. 8.31

ഉദാഹരണം 8.14

ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ പാദവിസ്തീർണ്ണം, വ്യാപ്തം എന്നിവ യഥാക്രമം 13.86 ച.സെ.മീ. 69.3 ഘന സെ.മീ. ആണ്. അതിന്റെ ഉയരവും വക്രതല വിസ്തീർണ്ണവും കാണുക ($\pi = \frac{22}{7}$)

നിർദ്ധാരണം A, V എന്നിവ സിലിണ്ടറിന്റെ പാദവിസ്തീർണ്ണം, വ്യാപ്തം എന്നിരിക്കട്ടെ.

പാദവിസ്തീർണ്ണം $A = \pi r^2 = 13.86$ ച.സെ.മി.

$V = \pi r^2 h = 69.3$ ഘ.സെ.മീ.

$\therefore$ $\pi r^2 h = 69.3$

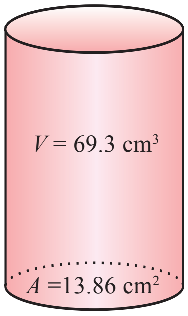
$\Longrightarrow$ $13.86 \times h = 69.3$

$\therefore$ $h = \frac{69.3}{13.86} = 5$ സെ.മീ.

വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം $= \pi r^2 = 13.86$

$$\frac{22}{7} \times r^2 = 13.86$$

$r^2 = 13.86 \times \frac{7}{22} = 4.41 \Longrightarrow r = \sqrt{4.41} = 2.1$ സെ.മീ.



ചിത്രം. 8.32

വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം $CSA = 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 5$$

$\therefore$ CSA $= 66$ ച.സെ.മീ.

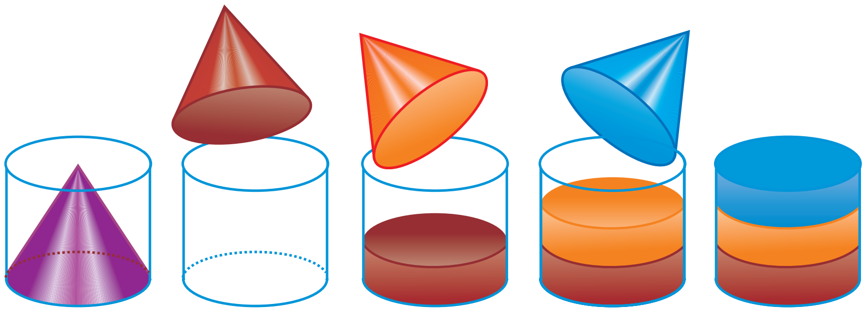
8.3.2 സമവൃത്താകാര വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

ഒരു സമവൃത്താകാര വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ പാദ വ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം എന്നിവ യഥാക്രമം r, h എന്നിരിക്കട്ടെ. വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം $V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$ ഘ.മാത്രകൾ.

താഴകൊടുത്തിട്ടുള്ള ഒരു പ്രവർത്തനത്തിലൂടെ ഇത് സ്ഥിരീകരിക്കാം.

പ്രവർത്തനം

അകം പൊള്ളയായ ഒരു സിലിണ്ടറും അതേ വ്യാസാർദ്ധവും ഉയരവുമുള്ള ഒരു വൃത്ത സ്തൂപികയും എടുക്കുക. വൃത്ത സ്തൂപിക നിറയെ വെള്ളം അല്ലെങ്കിൽ മണൽ എടുത്ത് സിലിണ്ടറിലേക്ക് പകർന്നാൽ മൂന്നു പ്രാവശ്യം പകർന്നു കഴിഞ്ഞാൽ സിലിണ്ടർ നിറയും. ഇതിൽ നിന്നും ഒരേ ഉയരവും ഒരേ വ്യാസാർദ്ധവും ഉള്ള വൃത്ത സ്തൂപികയും സിലിണ്ടറും എടുത്താൽ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നിൽ ഒരു ഭാഗമാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.



ചിത്രം. 8.33

ഈ ലളിതമായ പ്രവർത്തനത്തിൽ നിന്ന്, r, h എന്നിവ സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം എങ്കിൽ

3 x (വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം) = സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം $= \pi r^2 h$

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$ ഘ.മാത്രകൾ

ഉദാഹരണം 8.15

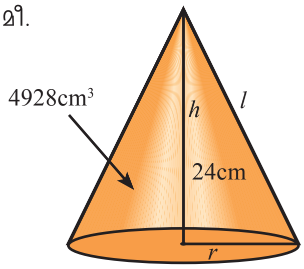
ഒരു ഘന വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം 4928 ഘ.സെ.മീ. അതിന്റെ ഉയരം 24 സെ.മീ. എങ്കിൽ വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക ($\pi = \frac{22}{7}$)

നിർദ്ധാരണം r, h, V എന്നിവ യഥാക്രമം ഒരു ഘന വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം, വ്യാപ്തം എന്നിരിക്കട്ടെ, V = 4928 ഘ.സെ.മീ. , h = 24 സെ.മീ.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 4928$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 24 = 4928$$

$$\Longrightarrow \quad r^2 = \frac{4928 \times 3 \times 7}{22 \times 24} = 196.$$



ചിത്രം. 8.34

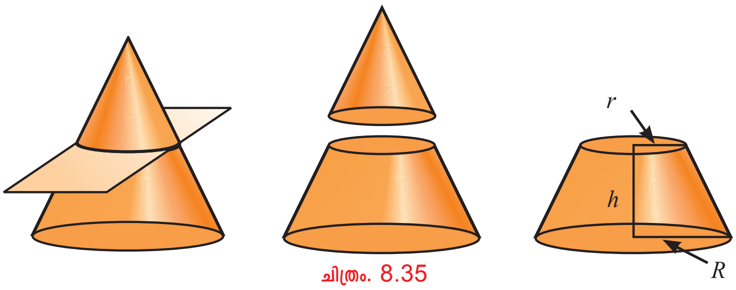
വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദ വ്യാസാർദ്ധം $r = \sqrt{196} = 14$ സെ.മീ.

8.3.3 വൃത്ത സ്തൂപികാപീഠ (Frustum) ത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

ഒരു സമവൃത്താകര വൃത്തസ്തൂപിക എടുത്ത് അതിനെ ഒരു ചെറിയ വൃത്തസ്തൂപിക ലഭിക്കത്തക്കവിധം ലഭിക്കുന്ന ശേഷിച്ചഭാഗത്തെ വൃത്തസ്തൂപികാപീഠം എന്നു പറയുന്നു. ചുവടെകൊടുത്തിട്ടുള്ള പ്രവർത്തനത്തിലൂടെ ഇത് വിശദീകരിക്കുക.

പ്രവർത്തനം

അല്പം കളിമണ്ണെടുത്ത് ഒരു സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപിക നിർമ്മിക്കുക. ഒരു കത്തികൊണ്ട് അതിന്റെ പാദത്തിന് സമാന്തരമായി മുറിയ്ക്കുക. ചെറിയ വൃത്ത സ്തൂപികാഭാഗം മാറ്റുക. എന്താണ് അവശേഷിക്കുന്നത്. ഈ ശേഷിച്ച ഭാഗത്തിനെയാണ് വൃത്ത സ്തൂപികാ പീഠം എന്നുവിളിക്കുന്നത്. Frustum എന്ന ലാറ്റിൻ പദത്തിന്റെ അർത്ഥം "വിച്ഛേദിക്കപ്പെട്ട കഷണം" എന്നും അതിന്റെ ബഹുപദം Frusta എന്നുമാകുന്നു.



ചിത്രം. 8.35

അതായത് ഒരു ഘന സമവൃത്താകാരവൃത്ത സ്തൂപികയെ അതിന്റെ പാദത്തിന് സമാന്തരമായി ഛേദിച്ചാൽ പാദം ഉൾപ്പെടുന്ന ഭാഗത്തെ വൃത്ത സ്തൂപികാ പീഠം എന്നു പറയുന്നു. ഒരു വൃത്ത സ്തൂപികാ പീഠത്തിനു മുകളിലും താഴെയും ഓരോ വൃത്താകാരതകിടുകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും

ഇപ്പോൾ നമുക്ക് വൃത്തസ്തൂപീകാ പീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കാം.

രണ്ട് സമവൃത്താകാര വൃത്ത സ്തൂപികകളുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമാണ് വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം (ചിത്രം 8.35 ശ്രദ്ധിക്കുക)

ഒരു ഘന സമവൃത്താകാരവൃത്തസ്തൂപിക പരിഗണിക്കുക.

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധം R എന്നിരിക്കട്ടെ r,x എന്നിവ തന്നിട്ടുള്ള വൃത്തസ്തൂപികയിൽ നിന്നും വൃത്തസ്തൂപികാപീഠം നീക്കിയതിനുശേഷമുള്ള ചെറിയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം എന്നിരിക്കട്ടെ.

വൃത്ത സ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ ഉയരം h എന്നിരിക്കട്ടെ.

വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, V = തന്നിട്ടുള്ള വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം - ചെറിയവൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

$$= \frac{1}{3}\times\pi\times R^2\times(x+h) - \frac{1}{3}\times\pi\times r^2\times x$$

$$V = \frac{1}{3}\pi[x(R^2-r^2)+R^2h]. \qquad (1)$$

ചിത്രം 8.36 ൽ നിന്ന് $\triangle BFE \sim \triangle DGE$

$$\therefore \quad \frac{BF}{DG} = \frac{FE}{GE}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{R}{r} = \frac{x+h}{x}$$

$$\Longrightarrow \quad Rx - rx = rh$$

$$\Longrightarrow \quad x(R-r) = rh$$

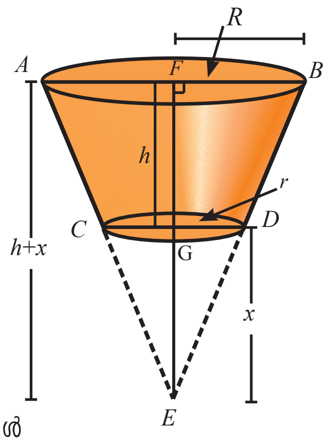
$$x = \frac{rh}{R-r} \qquad (2)$$

$$(1) \Longrightarrow \quad V = \frac{1}{3}\pi[x(R^2 - r^2) + R^2 h]$$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi[x(R-r)(R+r) + R^2 h]$$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi[rh(R+r) + R^2 h] \quad (2) \text{ ഉപയോഗിച്ച്}$$

വൃത്ത സ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$ ഘ.മാത്രകൾ



ചിത്രം. 8.36

കുറിപ്പ്

* വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം $= \pi(R+r)l$ ഇവിടെ $l = \sqrt{h^2 + (R^2 - r^2)}$

* വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $= \pi l(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2, l = \sqrt{h^2 + (R^2 - r^2)}$

(ഇത് പരീക്ഷയ്ക്ക് ഉള്ളതല്ല)

ഉദാഹരണം 8.16

വൃത്ത സ്തൂപികാ പീഠാകൃതിയിലുള്ള ബക്കറ്റിന്റെ രണ്ട് വൃത്താകാര അഗ്രങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ 15 സെ.മീ. 8 സെ.മീ. അതിന്റെ ആഴം 63 സെ.മീ ബക്കറ്റിന്റെ കൊള്ളളവ് ലിറ്ററിൽ കാണുക $(\pi = \frac{22}{7})$

നിർദ്ധാരണം ബക്കറ്റിന്റെ മുകൾഭാഗത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം R,അടിഭാഗത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം r,ആഴം h എന്നിരിക്കട്ടെ

R = 15 സെ.മീ. , r = 8 സെ.മീ. , h = 63 സെ.മീ.

ബക്കറ്റിന്റെ വ്യാപ്തം (frustum)

$$= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 63 \times (15^2 + 8^2 + 15 \times 8)$$

$$= 26994 \text{ ഘ. സെ.മീ.}$$

$$= \frac{26994}{1000} \text{ ലിറ്റർ } (1000 \text{ ഘ. സെ.മീ.} = 1 \text{ ലിറ്റർ})$$

ബക്കറ്റിന്റെ കൊള്ളളവ് $= 26.994$ ലിറ്റർ

ചിത്രം. 8.37

8.3.4 ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

(i) ഒരു ഘന ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ലഘുവായ പരീക്ഷണം ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ സൂത്രം സ്ഥിരീകരിക്കുന്നു.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ ഘ.മാത്രകൾ}$$

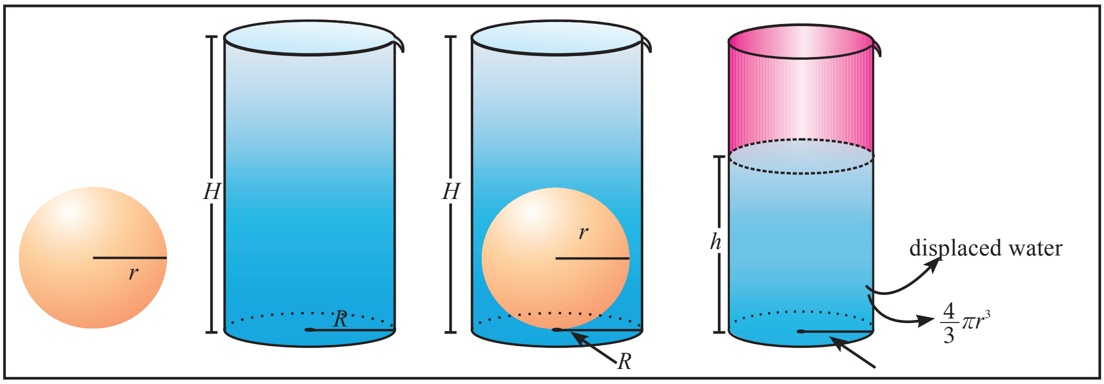
പ്രവർത്തനം

R വ്യാസാർദ്ധവും H ഉയരവുമുള്ള സിലിണ്ടറിൽ വെള്ളം നിറയ്ക്കുക. അതിൽ r വ്യാസാർദ്ധമുള്ള (ഇവിടെ $R > r$) ഒരു ഘന ഗോളത്തെ മുഴുവനായി മുക്കിയാൽ പുറത്തേക്കു ഒഴുകുന്ന വെള്ളത്തെ r വ്യാസാർദ്ധവും H ഉയരവുമുള്ള മറ്റൊരു സിലിണ്ടർ ആകൃതിയുള്ള പാത്രത്തിലേക്ക് മാറ്റുക. വെള്ളത്തിന്റെ ഉയരം എന്നത് വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ $\frac{4}{3}$ മടങ്ങായിരിക്കും. $(h = \frac{4}{3}r)$. ഇപ്പോൾ പുറത്തേയ്ക്ക് ഒഴുകിയ വെള്ളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എന്നത് ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന് സമമാണ്.

പുറത്തേയ്ക്ക് ഒഴുകിയ വെള്ളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം V = അടിഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണം X ഉയരം

$= x\pi r^2 r \frac{4}{3}$ വെള്ളത്തിന്റെ ഉയരം $(h = \frac{4}{3}r)$

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം V $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ഘ.മാത്രകൾ

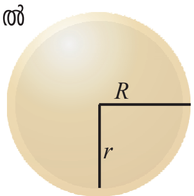


(ii) പൊള്ളയായ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

ഒരു പൊള്ളയായ ഗോളത്തിന്റെ ആന്തര, ബാഹ്യ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ യഥാക്രമം r, R എങ്കിൽ

പൊള്ളയായ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം = ബാഹ്യ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം − ആന്തര ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$



ചിത്രം. 8.39

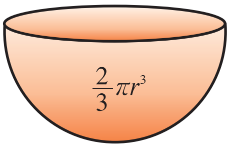
∴ പൊള്ളയായ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, $= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$ ഘ.മാത്രകൾ

(iii) അർദ്ധ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

അർദ്ധ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $= \frac{1}{2} \times$ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$= \frac{2}{3}\pi r^3$ ഘ.മാത്രകൾ



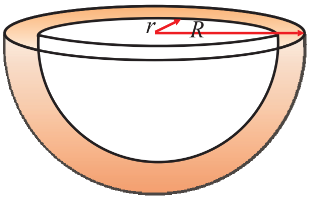
ചിത്രം. 8.40

(iv) പൊള്ളയായ അർദ്ധ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

പൊള്ളയായ അർദ്ധ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം = ബാഹ്യ അർദ്ധ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം − ആന്തര അർദ്ധ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$= \frac{2}{3} \times \pi \times R^3 - \frac{2}{3} \times \pi \times r^3$$

$= \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$ ഘ.മാത്രകൾ



ചിത്രം. 8.41

ഉദാഹരണം 8.17 8.4 സെ.മീ വ്യാസമുള്ള ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ലോഹ ഷോട്ട്പുട്ടിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക. $(\pi = \frac{22}{7})$

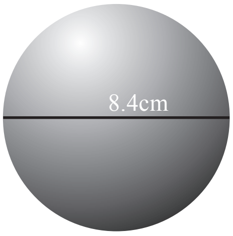
നിർദ്ധാരണം ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ലോഹ ഷോട്ട്പുട്ടിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം r എന്നിരിക്കട്ടെ.

$2r = 8.4$ സെ.മീ. $\Longrightarrow$ $r = 4.2$ സെ.മീ.

ഷോട്ട്പുട്ടിന്റെ വ്യാപ്തംV $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{42}{10} \times \frac{42}{10} \times \frac{42}{10}$

$\therefore$ ഷോട്ട്പുട്ടിന്റെ വ്യാപ്തം $= 310.464$ ഘന. സെ.മീ.



ചിത്രം. 8.42

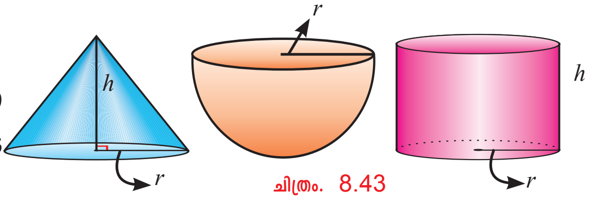
ഉദാഹരണം 8.18

ഒരു വൃത്ത സ്തൂപിക, അർദ്ധഗോളം, സിലിണ്ടർ എന്നിവയ്ക്ക് തുല്യ പാദമാണുള്ളത്. വൃത്ത സ്തൂപിക, സിലിണ്ടർ ഇവയുടെ ഉയരങ്ങൾ തുല്യവും അത് മൂന്നു രൂപങ്ങളുടെയും പൊതുവായ വ്യാസാർദ്ധത്തിനു തുല്യവുമെങ്കിൽ അവയുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം വൃത്ത സ്തൂപിക, അർദ്ധഗോളം, സിലിണ്ടർ ഇവയുടെ പൊതുവായ വ്യാസാർദ്ധം r എന്നിരിക്കട്ടെ. വൃത്ത സ്തൂപിക, സിലിണ്ടർ എന്നിവയുടെ ഉയരം h എന്നിരിക്കട്ടെ.

$\therefore$ ഇവിടെ $r = h$

V_1, V_2 and V_3 എന്നിവ യഥാക്രമം വൃത്ത സ്തൂപിക, അർദ്ധഗോളം, സിലിണ്ടർ എന്നിവയുടെ വ്യാപ്തങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം. 8.43

$$V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^2 h$$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi r^3 : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^3$$

$$\Longrightarrow V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1$$

ആവശ്യപ്പെട്ട അംശബന്ധം $1 : 2 : 3$.

ഉദാഹരണം 8.19

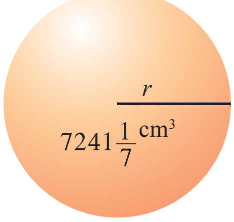
ഒരു ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $7241\frac{1}{7}$ ഘന. സെ.മീ. എന്നാൽ അതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക. $(\pi = \frac{22}{7})$

നിർദ്ധാരണം ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, വ്യാപ്തം എന്നിവ യഥാക്രമം r,V എന്നിരിക്കട്ടെ.

$V = 7241\frac{1}{7}$ ഘന. സെ.മീ.

$$\Longrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{50688}{7}$$

$$\Longrightarrow \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3 = \frac{50688}{7}$$



ചിത്രം. 8.44

$$r^3 = \frac{50688}{7} \times \frac{3 \times 7}{4 \times 22}$$

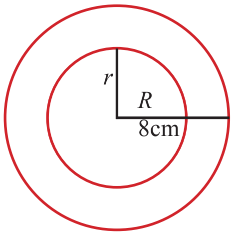
$$= 1728 = 4^3 \times 3^3$$

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം r = 12 സെ.മീ .

ഉദാഹരണം 8.20

ഒരു പൊള്ളയായ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{11352}{7}$ സെ.മീ.^{3} ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധം 8 സെ.മീ. എങ്കിൽ ആന്തര വ്യാസാർദ്ധം കാണുക ($\pi = \frac{22}{7}$)

നിർദ്ധാരണം പൊള്ളയായ ഗോളത്തിന്റെ ബാഹ്യ, ആന്തര വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ യഥാക്രമം R,r എന്നിരിക്കട്ടെ. പൊള്ള യായ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം V എന്നിരിക്കട്ടെ



ചിത്രം. 8.45

$$V = \frac{11352}{7}\ \text{cm}^3$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) = \frac{11352}{7}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}(8^3 - r^3) = \frac{11352}{7}$$

$$512 - r^3 = 387 \Longrightarrow r^3 = 125 = 5^3$$

$\therefore$ ആന്തര വ്യാസാർദ്ധം r = 5 സെ.മീ.

അഭ്യാസം 8.2

1. 14 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധവും, 30 സെ.മീ. ഉയരവുമുള്ള സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.

2. ഒരു ആശുപത്രിയിലെ ഒരു രോഗിക്ക് 7 സെ.മീ. വ്യാസമുള്ള സിലിണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള പിഞ്ഞാണത്തിൽ ദിവസവും സൂപ്പുകൊടുക്കുന്നു. 4 സെ.മീ. ഉയരത്തിൽ പിഞ്ഞാണത്തിൽ സൂപ്പ് നിറച്ചാൽ 250 രോഗി കൾക്ക് കൊടുക്കാൻ ദിവസേന എത്ര സൂപ്പ് തയ്യാറാക്കണം

3. ഒരു സമവൃത്താകാര ഘന സിലിണ്ടറിന്റെ പാദവ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം ഇവയുടെ തുക 37 സെ.മീ. സിലിണ്ടറി ന്റെ, ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം 1628 ച.സെ.മീ. എങ്കിൽ വ്യാപ്തം കാണുക.

4. ഒരു ഘന സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം 62.37 ഘ.സെ.മീ. അതിന്റെ ഉയരം 4.5 സെ.മീ. എങ്കിൽ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക

5. രണ്ട് സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറുകളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 2:5, ഉയരങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 5:3 എങ്കിൽ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കാണുക.

6. ഒരു സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം ഇവയുടെ അംശബന്ധം 5:7 അതിന്റെ വ്യാപ്തം 4400 ഘ.സെ.മീ. എങ്കിൽ സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക

7. 66 സെ.മീ. $\times$ 23 സെ.മീ. അളവുള്ള ഒരു ദീർഘ ചതുരാകൃതിയിലുള്ള ലോഹത്തകിടു ചുരുട്ടി 12 സെ.മീ. ഉയരമുള്ള ഒരു സിലിണ്ടർ ഉണ്ടാക്കുന്നു. സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.

8. ഒരു പെൻസിൽ സമവൃത്താകാരസിലിണ്ടർ ആകൃതിയിലാണ്. ആ പെൻസിലിന്റെ നീളം 28 സെ.മീ.ഉം അതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 3 മീ.മീ ഉം ആണ്. ഈയക്കോലിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 1 മീ.മീ എങ്കിൽ പെൻസിലിന്റെ മര ഭാഗത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.

9. ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധം, പാർശ്വോന്നതി എന്നിവ യഥാക്രമം 20 സെ.മീ., 29 സെ.മീ. വ്യാപ്തം കാണുക

10. 12 മീ. ഉയരത്തിൽ തടികൊണ്ട് നിർമ്മിതമായ ഘനവൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവ് 44 മീ. വ്യാപ്തം കാണുക

11. ഒരു പാത്രം വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠാകൃതിയിലാണ്. അതിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം യഥാക്രമം 8 സെ.മീ., 14 സെ.മീ. അതിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{5676}{3}$ ഘ.സെ.മീ.^{3} എങ്കിൽ മറ്റേ അഗ്രത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക

12. ഒരു വൃത്ത സ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ അഗ്രചുറ്റളവുകൾ 44 സെ.മീ., 8.4 π സെ.മീ. എന്നിവയാണ്. അതിന്റെ ആഴം 14 സെ.മീ. എങ്കിൽ വ്യാപ്തം കാണുക.

13. 5 സെ.മീ. 12 സെ.മീ., 13 സെ.മീ. എന്നീ വശങ്ങളുള്ള ഒരു സമകോണ ത്രികോണം ABC യുടെ 12 സെ.മീ. വശത്തെ അക്ഷമായി ചുഴറ്റിയാൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഘന രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.

14. സമവൃത്താകാരവൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2:3 അതിന്റെ വ്യാപ്തം 100.48 ഘ.സെ.മീ. എങ്കിൽ പാർശ്വോന്നതി കാണുക ($\pi = 3.14$)

15. വൃത്താകാര പാദമുള്ള ഒരു വൃത്ത സ്തൂപികയുട വ്യാപ്തം 216 π ഘ.സെ.മീ. പാദ വ്യാസാർദ്ധം 9 സെ.മീ. എങ്കിൽ ഉയരം കാണുക

16. ഒരു ലോഹഗോളത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 0.7 സെ.മീ. ഘനത്വം 7.95 ഗ്രാം/സെ.മീ.^{3} എങ്കിൽ 200 ലോഹഗോളങ്ങളുടെ ദ്രവ്യമാനം കാണുക. (ദ്രവ്യമാനം = വ്യാപ്തം x ഘനത്വം)

17. ഒരു പൊള്ളയായ ഗോളത്തിന്റെ ബാഹ്യ, ആന്തര വ്യാസാർദ്ധങ്ങൽ 12 സെ.മീ., 10 സെ.മീ. അതിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക;

18. ഒരു അർദ്ധ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം 1152 π ച.സെ.മീ. അതിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക,

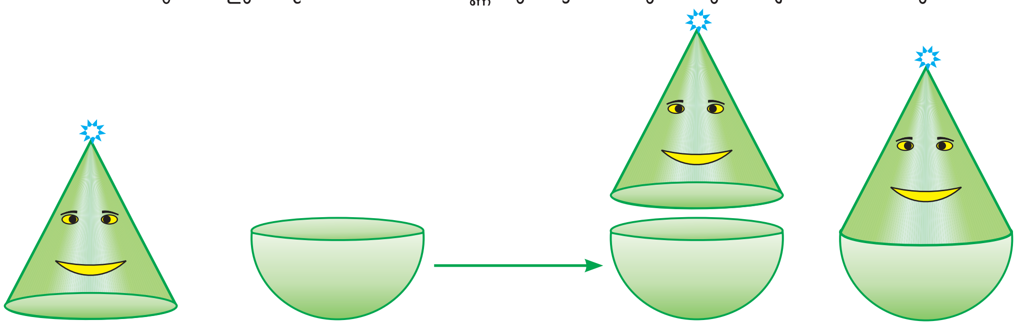
19. 14 സെ.മീ. വശമുള്ള ഒരുസമചതുര ഘനികയിൽ നിന്നും വെട്ടിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കാണുക

20. ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ബലൂണിൽ വായു നിറയ്ക്കുമ്പോൾ വ്യാസാർദ്ധം 7 സെ.മീ. ൽ നിന്ന് 14 സെ.മീ. ആയി ഉയരുന്നു. ഈ രണ്ടു സന്ദർഭങ്ങളിൽ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കാണുക.

8.4 മിശ്രഘനരൂപങ്ങൾ

നമ്മുടെ ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ ഒന്നിലധികം ഘനരൂപങ്ങൾ ചേർന്ന വസ്തുക്കളായ, കളിപ്പാട്ടങ്ങൾ, വാഹനങ്ങൾ, പാത്രങ്ങൾ, ഉപകരണങ്ങൾ മുതലായവ നാം കാണാറുണ്ട്.

അത്തരം ഘനരൂപങ്ങളുടെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണവും വ്യാപ്തവും നമുക്ക് എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാം.



ചിത്രം. 8.46

മിശ്ര ഘന രൂപങ്ങളുടെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം ഓരോ ഘന രൂപങ്ങളുടെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ തുക ആകണമെന്നില്ല. മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ മിശ്ര ഘന രൂപത്തിന്റെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെയും വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെയും തുകയാണെന്ന് കാണാം. എന്നാൽ മിശ്രഘന രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ഒരുമിച്ച് ചേർന്നിരിക്കുന്ന ഘന രൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുകയാണ്. ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്,

ഘന രൂപത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം = അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം + വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

ഘന രൂപത്തിന്റെ ആകെ വ്യാപ്തം = അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം + വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം.

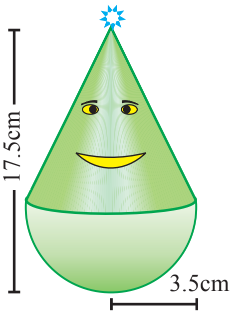
ഉദാഹരണം 8.21

ഒരു മരപ്പാവ അർദ്ധഗോളത്തിനുമുകളിൽ വൃത്തസ്തൂപിക ഘടിപ്പിച്ച ആകൃതിയിലാണ്. അർദ്ധഗോളത്തിന്റെയും വൃത്തസ്തൂപികയുടെയും പാദത്തിന്റെ പൊതുവായ വ്യാസാർദ്ധം 3.5 സെ.മീ. ആണ്. പാവയുടെ ആകെ ഉയരം 17.5 സെ.മീ. എങ്കിൽ പാവ നിർമ്മിക്കാനുപയോഗിച്ച മരത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക ($\pi = \frac{22}{7}$)

നിർദ്ധാരണം

അർദ്ധഗോളാകാരഭാഗം :
വ്യാസ്യാർദ്ധം r = 3.5 സെ.മീ.

വൃത്തസ്തൂപികാകാര ഭാഗം :
വ്യാസാർദ്ധം r = 3.5 സെ.മീ.
ഉയരം, h = 17.5 − 3.5 = 14 സെ.മീ.



ചിത്രം. 8.47

മരത്തിന്റെ വ്യാപ്തം = അർദ്ധ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം + വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം.

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{\pi r^2}{3}(2r + h)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5 \times 3.5}{3} \times (2 \times 3.5 + 14) = 269.5$$

പാവ നിർമ്മിക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച മരത്തിന്റെ വ്യാപ്തം = 269.5 ഘ. സെ.മീ.

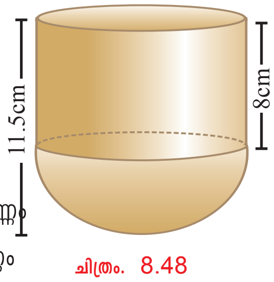
ഉദാഹരണം 8.22

ഒരു കോപ്പയുടെ ആകൃതി അർദ്ധഗോളത്തിനു മുകളിൽ സിലിണ്ടർ എന്ന പോലെയാണ് സിലിണ്ടർ ഭാഗത്തിന്റെ ഉയരം 8 സെ.മീ. ഉം. കോപ്പയുടെ ആകെ ഉയരം 11.5 സെ.മീ. ഉം ആണ്. അതിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക ($\pi = \frac{22}{7}$)

നിർദ്ധാരണം

അർദ്ധഗോളാകാരഭാഗം
വ്യാസാർദ്ധം r = 11.5 − 8 = 3.5 സെ.മീ.

സിലിണ്ടറാകാരഭാഗം
വ്യാസാർദ്ധം r = 3.5 സെ.മീ. = $\frac{7}{2}$ സെ.മീ.



ചിത്രം. 8.48

കോപ്പയുടെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം = { അർദ്ധഗോള ഭാഗത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം + സിലിണ്ടർ ഭാഗത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

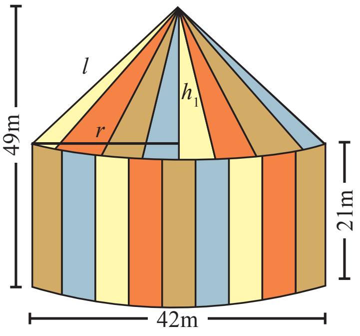
$$= 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2}\left(\frac{7}{2} + 8\right)$$

∴ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തർണ്ണം = 253 ച.സെ.മീ.

ഉദാഹരണം 8.23

ഒരു സർക്കസ് കൂടാരം നിർമ്മിച്ചിരിക്കുന്നത് ഒരു സിലിണ്ടറിനുമുകളിൽ വൃത്ത സ്തൂപികാരൂപത്തിലാണ്. കൂടാരത്തിന്റെ ആകെ ഉയരം 49 മീ. പാദവ്യാസം 42 മീ. ഉം സിലിറിന്റെ ഉയരം 21 മീ. ഉം ആണ്. ഒരു ച.മീ. ക്യാൻവാസിന്റെ വില 12.50 രൂപ പ്രകാരം ആ കൂടാരം നിർമ്മിക്കാൻ ആവശ്യമായ ക്യാൻവാസിന്റെ വില കാണുക ($\pi = \frac{22}{7}$)



ചിത്രം. 8.49

നിർദ്ധാരണം

സിലിണ്ടറാകാരഭാഗം

വ്യാസം, $2r = 42$ മീ.

വ്യാസാർദ്ധം, $r = 21$ മീ.

ഉയരം , $h = 21$ മീ.

വൃത്ത സ്തൂപികാകാര ഭാഗം

വ്യാസാർദ്ധം, $r = 21$ മീ.

ഉയരം , $h_1 = 49 - 21 = 28$ മീ.

പാർശ്വോന്നതി, $l = \sqrt{h_1^2 + r^2}$

$= \sqrt{28^2 + 21^2}$

$= 7\sqrt{4^2 + 3^2} = 35$ മീ.

ആവശ്യമായ ക്യാൻവാസിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം = സിലിണ്ടറാകാരഭാഗത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം + വൃത്ത സ്തൂപികാകാര ഭാഗത്തിന്റെ വക്രതലവിസ്തീർണ്ണം

$$= 2\pi rh + \pi rl = \pi r(2h + l)$$

$$= \frac{22}{7} \times 21(2 \times 21 + 35) = 5082$$

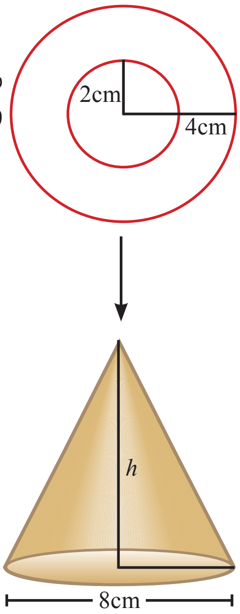
∴ ക്യാൻവാസിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= 5082$ മീ.^{2}

ഒരു ചതുരശ്ര മീറ്റർ ക്യാൻവാസിന്റെ വില = ₹12.50

ക്യാൻവാസിന്റെ ആകെ വില $= 5082 \times 12.5 =$ ₹63525

ഉദാഹരണം 8.24

ബാഹ്യ, ആന്തരവ്യാസങ്ങൾ യഥാക്രമം 8 സെ.മീ. 4 സെ.മീ. ഉള്ള ഒരുഅകം പൊള്ളയായ ഗോളം ഉരുക്കി 8 സെ.മീ. പാദ വ്യാസമുള്ള ഒരു സമവൃത്താകാര വൃത്ത സ്തൂപിക ഉണ്ടക്കുന്നു. അതിന്റെ ഉയരം കാണുക.



ചിത്രം. 8.50

നിർദ്ധാരണം R, r എന്നിവ പൊള്ളയായ ഗോളത്തിന്റെ ബാഹ്യ ആന്തരവ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഉണ്ടാക്കിയ വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ ഉയരം h ഉം വ്യാസാർദ്ധം r_1 ഉം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ

പൊള്ളയായഗോളം

ബാഹ്യം

$2R = 8$ സെ.മീ.

$\Longrightarrow R = 4$ സെ.മീ.

ആന്തരം

$2r = 4$ സെ.മീ.

$\Longrightarrow r = 2$ സെ.മീ.

വൃത്ത സ്തൂപിക

$2r_1 = 8$

$\Longrightarrow r_1 = 4$

പൊള്ളയായ ഗോളത്തെ ഉരുക്കി ഒരു ഘന വൃത്ത സ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കിയാൽ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം = പൊള്ളയായ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\Longrightarrow \frac{1}{3}\pi r_1^2 h = \frac{4}{3}\pi[R^3 - r^3]$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times(4^3-2^3)$$

$$\Longrightarrow \quad h = \frac{64-8}{4} = 14$$

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം $\quad h = 14$ സെ.മീ.

ഉദാഹരണം 8.25

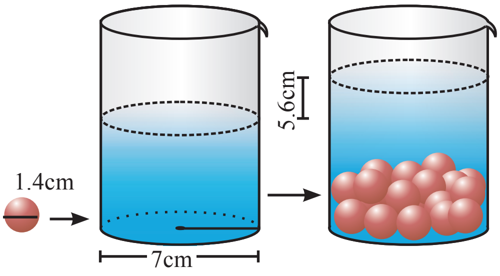
ഭാഗികമായി വെള്ളം നിറച്ച 7 സെ.മീ. വ്യാസമുള്ള ഒരു സിലിണ്ടറാകാര ബീക്കറിൽ 1.4 സെ.മീ. വീതം വ്യാസമുള്ള ഗോളാകാര മാർബിളുകൾ ഇടുന്നു. ജലനിരപ്പ് 5.6 സെ.മീ. ഉയരുന്നതിന് എത്രമാർബിളുകൾ ഇടണം.

നിർദ്ധാരണം ആവശ്യമായ മാർബിളുകളുടെ എണ്ണം n എന്നിരിക്കട്ടെ

മാർബിളുകൾ		സിലിണ്ടറാകാര ബീക്കർ	
വ്യാസം,	$2r_1 = 1.4$ സെ.മീ.	വ്യാസം,	$2r_2 = 7$ സെ.മീ.
വ്യാസാർദ്ധം	$r_1 = 0.7$ സെ.മീ.	വ്യാസാർദ്ധം ,	$r_2 = \frac{7}{2}$ സെ.മീ.

ഉയർന്ന ജലനിരപ്പിന്റെ ഉയരം h എന്നിരിക്കട്ടെ

$$h = 5.6 \text{ cm}$$



ചിത്രം. 8.51

ബീക്കറിൽ മാർബിളുകൾ ഇട്ടശേഷം ഉയർന്ന ജലത്തിന്റെ

വ്യാപ്തം = n മാർബിളുകളുടെ വ്യാപ്തം

$$\Longrightarrow \quad \pi r_2^2 h = n\times\frac{4}{3}\pi r_1^3$$

$$\therefore \quad n = \frac{3r_2^2 h}{4r_1^3}$$

$$n = \frac{3\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times5.6}{4\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}} = 150.$$

$\therefore$ ആവശ്യമായ മാർബിളുകളുടെ എണ്ണം 150.

ഉദാഹരണം 8.26

14 സെ.മീ. വ്യാസമുള്ള ഒരു സിലിണ്ടറാകാര കുഴലിലൂടെ 15 കി.മീ / മണിക്കൂർ വേഗതയിൽ വെള്ളം ഒഴുകി 50 മീ നീളവും 44 മീ. വീതിയുള്ള ദീർഘചതുര ഘനികാകൃതിയുള്ള ടാങ്കിൽ വീഴുന്നു. എത്ര മണിക്കൂറിൽ ടാങ്കിലെ ജലനിരപ്പ് 21 സെ.മീ. ഉയരും. ($\pi = \frac{22}{7}$)

നിർദ്ധാരണം വെള്ളത്തിന്റെ വേഗത = 15 കി.മീ. / മണിക്കൂർ

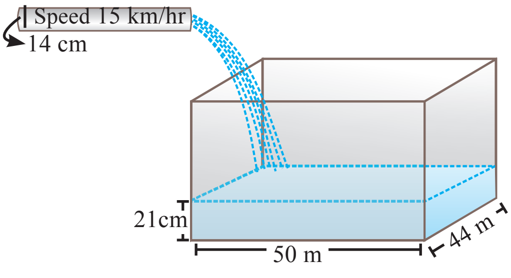
= 15000 മീ. / മണിക്കൂർ

കുഴലിന്റെ വ്യാസം 2r = 14 സെ.മീ.

$\therefore \quad r = \frac{7}{100}$ മീ.

ഉയർന്ന ജല നിരപ്പിന്റെ ഉയരം h എന്നിരിക്കട്ടെ

$\therefore \quad h = 21$ സെ.മീ. $= \frac{21}{100}$ മീ.



ചിത്രം. 8.52

1 മണിക്കൂറിൽ പ്രവഹിക്കുന്ന ജലത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

= കുഴലിന്റെ തിര്യക് ഛേദത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം × സമയം × വേഗത

$= \pi r^2 \times 1 \times 15000$

$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{100} \times \frac{7}{100} \times 15000$ ഘ.മീ.

ടാങ്കിലെ ആവശ്യപ്പെട്ട ജലത്തിന്റെ വ്യാപ്തം,

$$lbh = 50 \times 44 \times \frac{21}{100}$$

ആവശ്യപ്പെട്ട ജലത്തിന്റെ അളവ് ലഭിക്കുന്നത് ആവശ്യമായ മണിക്കൂർ T എന്നിരിക്കട്ടെ.

∴ T മണിക്കൂറിൽ പ്രവഹിക്കുന്ന ജലത്തിന്റെ വ്യാപ്തം = ടാങ്കിലെ ആവശ്യപ്പെട്ട ജലത്തിന്റെ അളവ്

$$\Longrightarrow \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{100}\right)^2 \times T \times 15000 = 50 \times 44 \times \frac{21}{100}$$

T = 2 മണിക്കൂർ.

ആവശ്യപ്പെട്ട ജലനിരപ്പ് ഉയരുന്നതിന് 2 മണിക്കൂർ എടുക്കും.

ഉദാഹരണം 8.27

55 സെ.മീ. × 40 സെ.മീ. × 15 സെ.മീ. അളവുകളുള്ള ഒരു ദീർഘ ചതുര ഘനികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ഇരുമ്പുതകിടിനെ ഉരുക്കി ഒരു കുഴലായി രൂപാന്തരപ്പെടുത്തുന്നു. അതിന്റെ ബാഹ്യവ്യാസം, കനം യഥാക്രമം 8 സെ.മീ., 1 സെ.മീ. എന്നാണ് കുഴിന്റെ നീളം കാണുക ($\pi = \frac{22}{7}$)

നിർദ്ധാരണം കുഴലിന്റെ നീളം h_1 എന്നിരിക്കട്ടെ. കുഴലിന്റെ ബാഹ്യ, ആന്തര വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ യഥാക്രമം R,r എന്നിരിക്കട്ടെ

ഇരുമ്പ് തകിട് : (l)(b)(h) = 55×40×15.

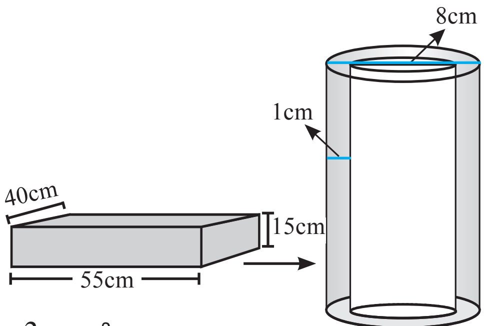
ഇരുമ്പുകുഴൽ :

ബാഹ്യവ്യാസം, 2R = 8സെ.മീ.

∴ ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധം, R = 4 സെ.മീ.

കനം, w = 1സെ.മീ.

∴ ആന്തരവ്യാസാർദ്ധം, $r = R - w = 4 - 1 = 3$സെ.മീ.



ചിത്രം. 8.53

ഇരുമ്പു കുഴലിന്റെ വ്യാപ്തം = ഇരുമ്പു തകിടന്റെ വ്യാപ്തം

$$\Longrightarrow \pi h_1 (R + r)(R - r) = lbh$$

$$\frac{22}{7} \times h_1 (4 + 3)(4 - 3) = 55 \times 40 \times 15$$

കുഴലിന്റെ നീളം $h_1 = 1500$ സെ.മീ.

= 15 മീ.

അഭ്യാസം 8.3

1. ഒരു കളിപ്പാട്ടം അർദ്ധഗോളത്തിനുമുകളിൽ വൃത്ത സ്തൂപിക ഘടിപ്പിച്ച ആകൃതിയിലാണ്. അർദ്ധ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസം 3.6 സെ.മീ. കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ ആകെ ഉയരം 4.2 സെ.മീ. അതിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക

2. ഒരു ഘന രൂപം അർദ്ധ ഗോളത്തിനു മുകളിൽ സിലിണ്ടർ ഘടിപ്പിച്ച ആകൃതിയിലാണ്. ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാസം, ആകെ ഉയരം എന്നിവ യഥാക്രമം 21 സെ.മീ., 25.5 സെ.മീ. എങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.

3. ഒരു ക്യാപ്സ്യൂൾ സിലിണ്ടറിന്റെ രണ്ട് അഗ്രങ്ങളിലും അർദ്ധ ഗോളങ്ങൾ ഘടിപ്പിച്ച ആകൃതിയിലാണ് അതിന്റെ ആകെ ഉയരം 14 മി.മീ. ഉം വ്യാസം 5 മി.മീ. ഉം എങ്കിൽ അതിന്റെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

4. ഒരു കൂടാരം സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിനു മുകളിൽ ഒരു വൃത്ത സ്തൂപിക ഘടിപ്പിച്ച ആകൃതിയിലാണ്. ആകെ ഉയരം, പാദവ്യാസം എന്നിവ 13.5 മീ., 28 മീ. സിലിണ്ടറാകാര ഭാഗത്തിന്റെ ഉയരം 3 മീ. എങ്കിൽ കൂടാരത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

5. കളിമണ്ണ് ഉപയോഗിച്ച്, ഒരു വിദ്യാർത്ഥി 48 സെ.മീ. ഉയരവും 12 സെ.മീ. പാദ വ്യാസാർദ്ധവുമുള്ള ഒരു സമവൃത്താകാരാ വൃത്ത സ്തൂപിക നിർമ്മിച്ചു. മറ്റൊരു വിദ്യാർത്ഥി അതിനെ ഒരു ഗോളമാക്കി രൂപാന്തരപ്പെടുത്തുന്നു. ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക

6. 24 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു ഘന ഗോളത്തെ ഉരുക്കി ഒരേ തിര്യക് ഛേദമുള്ള നീളമുള്ള കമ്പിയാക്കി മാറ്റുന്നു. അതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 1.2 മി.മീ. എങ്കിൽ കമ്പിയുടെ നീളം കാണുക

7. പൂർണ്ണമായും ജലം നിറച്ച 5 സെ.മീ. ആന്തര വ്യാസാർദ്ധവും 24 സെ.മീ. ഉയരവുമുള്ള ഒരു സമവൃത്താകാര പാത്രത്തിൽ നിന്നും 10 സെ.മീ. ആന്തരവ്യാസാർദ്ധമുള്ള സിലിണ്ടറാകാരപാത്രത്തിലേക്കു പകരുന്നു. സിലിണ്ടറാകാര പാത്രത്തിലെ ഉയർന്ന ജല നിരപ്പിന്റെ ഉയരം കാണുക.

8. ഭാഗികമായി ജലം നിറച്ച സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടർ ആകൃതിയിലുള്ള പാത്രത്തിലേക്ക് 6 സെ.മീ. വ്യാസമുള്ള ഒരു ഗോളം ഇടുന്നു. പാത്രത്തിന്റെ വ്യാസം 12 സെ.മീ. ആണ്. ഗോളം വെള്ളത്തിൽ പൂർണ്ണമായും മുങ്ങിയിരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ജലനിരപ്പ് എത്ര ഉയർന്നു എന്നു കാണുക.

9. 7 സെ.മീ. ആന്തര വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു സിലിണ്ടറാകാര കുഴലിലൂടെ 5 സെ.മീ. / സെക്കന്റിൽ വെള്ളം ഒഴുകുന്നു. അരമണിക്കൂറിൽ കുഴലിലൂടെ പ്രവഹിക്കുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ലിറ്ററിൽ കാണുക.

10. 4 മീ. വ്യാസവും 10 മീ. ഉയരവുമുള്ള സിലിണ്ടറാകാര ടാങ്കിലെ വെള്ളം 10 സെ.മീ. വ്യാസമുള്ള സിലിണ്ടറാകാര കുഴിലിലൂടെ 2.5 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിൽ ഒഴുകുന്നു, ടാങ്കിലെ പകുതി ഭാഗം വെള്ളം ഒഴുകുന്നതിന് (കുറയുന്നതിന്) എടുക്കുന്ന സമയം എത്രയെന്നു കാണുക. (ആരംഭത്തിൽ ടാങ്കിൽ ജലം പൂർണ്ണമായും നിറഞ്ഞിരുന്നു എന്നു കരുതുക)

11. 18 സെ.മീ. വ്യാസ്യാർദ്ധമുള്ള ഒരു ഗോളാകാരഘന വസ്തുവിനെ ഉരുക്കി 3 വ്യത്യസ്ത വലിപ്പങ്ങളിലുള്ള ചെറിയ ഘന ഗോളങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു. അവയിൽ രണ്ടെണ്ണത്തിന്റെ വ്യസാർദ്ധങ്ങൾ 2 സെ.മീ., 12 സെ.മീ. എങ്കിൽ മൂന്നാമത്തെ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക

12. പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറാകാര കുഴലിന്റെ നീളം 40 സെ.മീ. അതിന്റെ ആന്തര, ബാഹ്യ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ യഥാക്രമം 4 സെ.മീ.യ, 12 സെ.മീ. അതിനെ ഉരുക്കി 20 സെ.മീ. നീളമുള്ള ഒരു ഘന സിലിണ്ടറാക്കി വാർത്തെടുത്തു. പുതിയ ഘന രൂപത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക.

13. 8 സെ.മീ. വ്യാസവും 12 സെ.മീ. ഉയരവുമുള്ള ഇരുമ്പുകൊണ്ടുള്ള ഒരു വൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയെ ഉരുക്കി 4 മീ. വീതം വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഗോളാകാര ഈയ ഗോളങ്ങളായി വാർത്തെടുക്കുന്നു. എത്ര ഈയഗോളങ്ങൾ നിർമ്മിക്കാൻ കഴിയും.

14. 12 സെ.മീ. വ്യാസവും 15 സെ.മീ. ഉയരവുമുള്ള ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിൽ നിറയെ ഐസ്ക്രീം ഉണ്ട്. ഇതിനെ ഉയരം 12 സെ.മീ., വ്യാസം 6 സെ.മീ. ഉള്ള വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ മുകൾഭാഗത്തിൽ അർദ്ധ ഗോളാകാര ആകൃതിയിൽ ഐസ് ക്രീം വരത്തക്കവിധം നിറച്ചു. എങ്കിൽ ലഭ്യമായ ഐസ്ക്രീം എത്ര വൃത്ത സ്തൂപികകളിൽ നിറയ്ക്കാം ?

15. നീളം 4.4 മീ. വീതി 2 മീ. ഉള്ള ഒരു ദീർഘ ചതുരാകാര പാദമുള്ള ഒരു വലിയ പാത്രം മഴവെള്ള ശേഖരണ ത്തിന് ഉപയോഗിച്ചു. ജലനിരപ്പ് 4 സെ.മീ. ഉയരമുള്ള ഈ പാത്രത്തിൽ നിന്ന് 20 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള സിലിണ്ടറാകാര പാത്രത്തിലേക്ക് വെള്ളം മാറ്റുന്നു. സിലിണ്ടറിലെ ജലനിരപ്പിന്റെ ഉയരം എന്തായിരിക്കും.

16. 32 സെ.മീ. ഉയരവും 18 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധവുമുള്ള ഒരു സിലിണ്ടറാകാര ബക്കറ്റ് നിറയെ മണൽ നിറച്ചി രിക്കുന്നു. ഇതിനെ തറയിൽ വൃത്ത സ്തൂപികാകൃയിൽ കൂട്ടിയിട്ടു. വൃത്തസ്തൂപികാകാര കൂമ്പാരത്തിന്റെ ഉയരം 24 സെ.മീ. എങ്കിൽ മണൽ കൂമ്പാരത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധവും പാർശ്വോന്നതിയും കാണുക.

17. 14 സെ.മീ. വ്യാസമുള്ള സിലിണ്ടർ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു കിണർ 20 മീ. ആഴം വരെ കുഴിക്കുന്നു. കുഴി ച്ചെടുത്ത മണ്ണ് 20 മീ x 14 മീ. പാദ അളവുകളിൽ ഒരേ കനത്തിൽ വിതറി മേട് ആക്കുന്നു. മേടിന്റെ ഉയരം കാണുക

അഭ്യാസം 8.4

ശരിയായ ഉത്തരം തെരെഞ്ഞെടുക്കുക

1. 1 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധവും 1 സെ.മീ. ഉയരവുമുള്ള ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

   (A) π സെ.മീ.^{2} (B) 2π സെ.മീ.^{2} (C) 3π സെ.മീ.^{3} (D) 2 സെ.മീ.^{2}

2. വ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം h ന്റെ പകുതിയുള്ള ഒരു ഘന വൃത്താകാരസിലിണ്ടറിന്റെ ആകെ ഉപരിപതല വിസ്തീർണ്ണം

   (A) $\frac{3}{2}\pi h$ ച.മാ. (B) $\frac{2}{3}\pi h^2$ ച.മാ. (C) $\frac{3}{2}\pi h^2$ ച.മാ. (D) $\frac{2}{3}\pi h$ ച.മാ.

3. ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ പാദ വിസ്തീർണ്ണം 80 സെ.മീ.^{2} അതിന്റെ ഉയരം 5 സെ.മീ. എങ്കിൽ വ്യാപ്തം

   (A) 400 സെ.മീ.^{3} (B) 16 സെ.മീ.^{3} (C) 200 സെ.മീ.^{3} (D) $\frac{400}{3}$ സെ.മീ.^{3}

4. ഒരു ഘന വൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം 200π സെ.മീ.^{2} ഉം വ്യാസാർദ്ധം 5 സെ.മീ. എങ്കിൽ ഉയരം, വ്യാസാർദ്ധം എന്നിവയുടെ തുക

   (A) 20 സെ.മീ. (B) 25 സെ.മീ. (C) 30 സെ.മീ. (D) 15 സെ.മീ.

5. വ്യാസാർദ്ധം a മാത്രകളും ഉയരം b മാത്രകളും ഉള്ള ഒരു സമ വൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

   (A) $\pi a^2 b$ ച.മാ. (B)$2\pi ab$ ച.മാ. (C) 2π ച.മാ. (D) 2 ച.മാ.

6. സമവൃത്താകാരവൃത്ത സ്തൂപികയുടെയും സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെയും വ്യാസ്യാർദ്ധം, ഉയരം എന്നിവ യഥാക്രമം തുല്യമാണ്. സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം 12 സെ.മീ.^{2} എങ്കിൽ വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

   (A) 1200 **സെ.മീ.**^{3} B) 360 **സെ.മീ.**^{3} (C) 40 **സെ.മീ.**^{3} (D) 90 **സെ.മീ.**^{3}

7. ഒരു സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാസം, ഉയരം എന്നിവ യഥാക്രമം 12 സെ.മീ., 8 സെ.മീ., എങ്കിൽ പാർശ്വോന്നതി

(A) 10 സെ.മീ. (B) 20 സെ.മീ. (C) 30 സെ.മീ. (D) 96 സെ.മീ.

8. ഒരു സമ വൃത്താകാര സ്തൂപികുടെ പാദ ചുറ്റളവ് പാർശ്വോന്നതി എന്നിവ യഥാക്രമം 120π സെ.മീ. ഉം 10 സെ.മീ. ഉം എങ്കിൽ വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

(A) 1200π സെ.മീ.^{2} (B) 600π സെ.മീ.^{2} (C) 300π സെ.മീ.^{2} (D) 600 സെ.മീ.^{2}

9. ഒരു സമവൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, പാദ വിസ്തീർണ്ണം എന്നിവ യഥാക്രമം $48\,\pi$ സെ.മീ.^{3}, 12π സെ.മീ.^{2} എങ്കിൽ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം

(A) 6 സെ.മീ. (B) 8 സെ.മീ. (C) 10 സെ.മീ. (D) 12 സെ.മീ.

10. ഒരു സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം, പാദവിസ്തീർണ്ണം എന്നിവ യഥാക്രമം 5 സെ.മീ., 48 ച. സെ.മീ. എങ്കിൽ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

(A) 240 സെ.മീ.^{3} (B) 120 സെ.മീ.^{3} (C) 80 സെ.മീ.^{3} (D) 480 സെ.മീ.^{3}

11. രണ്ടു സിലിണ്ടറുകളുടെ ഉയരങ്ങളുടെ അംശബന്ധം, വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം എന്നിവ യഥാക്രമം 1:2, 2:1 ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കാണുക

(A) 4 : 1 (B) 1 : 4 (C) 2 : 1 (D) 1 : 2

12. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 2 സെ.മീ. എങ്കിൽ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

(A) 8π സെ.മീ.^{2} (B) 16 സെ.മീ.^{2} (C) 12π സെ.മീ.^{2} (D) 16π സെ.മീ.^{2} .

13. 2 സെ.മീ. വ്യാസമുള്ള ഒരു ഘന അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം

(A) 12 സെ.മീ.^{2} (B) 12π സെ.മീ.^{2} (C) 4π സെ.മീ.^{2} (D) 3π സെ.മീ.^{2}.

14. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{9}{16}\pi$ ഘ.സെ.മീ. എങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം

(A) $\frac{4}{3}$ സെ.മീ. (B) $\frac{3}{4}$ സെ.മീ. (C) $\frac{3}{2}$ സെ.മീ. (D) $\frac{2}{3}$ സെ.മീ.

15. രണ്ടു ഗോളങ്ങളുടെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 9:25 ആയാൽ അവയുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം.

(A) 81 : 625 (B) 729 : 15625 (C) 27 : 75 (D) 27 : 125.

16. 'a' മാത്രകൾ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു ഘന അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം

(A) $2\pi a^2$ ച.മാ. (B) $3\pi a^2$ ച.മാ. (C) $3\pi a$ ച.മാ. (D) $3a^2$ ച.മാ..

17. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം $100\,\pi$ ച.സെ.മീ എങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം

(A) 25 സെ.മീ. (B) 100 സെ.മീ. (C) 5സെ.മീ. (D) 10 സെ.മീ.

18. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം 36π ആയാൽ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

(A) 12π സെ.മീ.^{3} (B) 36π സെ.മീ.^{3} (C) 72π സെ.മീ.^{3} (D) 108π സെ.മീ.^{3}.

19. ഒരു ഘന അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം 12π സെ.മീ.^{2} എങ്കിൽ അതിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

(A) 6π സെ.മീ.^{2} (B) 24π സെ.മീ.^{2} (C) 36π സെ.മീ.^{2} (D) 8π സെ.മീ.^{2}.

20. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം മറ്റൊരു ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ പകുതിയെങ്കിൽ അതതിന്റെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം.

(A) 1 : 8 (B) 2: 1 (C) 1 : 2 (D) 8 : 1

21. ഒരു ഘന ഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം 24 സെ.മീ. ഈ ഗോളത്തെ രണ്ട് അർദ്ധ ഗോളങ്ങളായി വിഭജിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ഒരു അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം

(A) 12 സെ.മീ.^{2} (B) 8 സെ.മീ.^{2} (C) 16 സെ.മീ.^{2} (D) 18 സെ.മീ.^{2}

22. തുല്യവ്യാസാർദ്ധങ്ങളുള്ള രണ്ട് സമവൃത്താകാര വൃത്ത സ്തൂപികകളുടെ ചെരിവുയരങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 4:3 എങ്കിൽ അവയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം

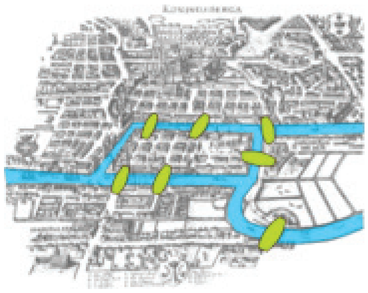
(A) 16 : 9 (B) 2 : 3 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ ?

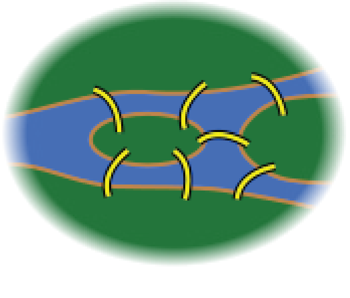
കൊനിഗ്സ് ബെർഗിലെ ഏഴ് പാലങ്ങൾ ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിലെ ഒരു ശ്രദ്ധാർഹമായ ചിരിത്രപ്രശ്നമാണ്. ഏഴ് പാലങ്ങൾ മുഖേന ഒന്നിനൊന്ന് ബന്ധിക്കപ്പെട്ട രണ്ട് വലിയ ദ്വീപുകൾ ഉൾപ്പെട്ട പ്രൂഷ്യയിലെ കൊനിക്സ് ബെർഗ് നഗരം (ഇപ്പോൾ റഷ്യയിലെ കാലിനിൻഗ്രാഡ്) പ്രീഗൽ നദിയുടെ ഇരുവശങ്ങളിലുമായി സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. (ചിത്രം ശ്രദ്ധിക്കുക)

ഓരോ പാലത്തിലും ഒരു പ്രാവശ്യം മാത്രം കടന്നുചെന്ന് നഗരത്തിലെ എല്ലാ സ്ഥലങ്ങളിലും ചെല്ലുന്നതിനുള്ള വഴി കണ്ടുപിടിക്കുക എന്നതാണ് പ്രശ്നം. പാലത്തിലൂടെയല്ലാതെ ദ്വീപിലെത്താൻ മറ്റ് പാതയില്ല. ഓരോ പ്രാവശ്യവും പാലങ്ങളെ പൂർണ്ണമായും കടന്നു ചെല്ലേണ്ടതാണ് (ഒരാൾ പാലത്തിന്റെ പകുതി ഭാഗം സഞ്ചരിച്ച്, തിരിഞ്ഞ് വേറെ വഴിയിൽ ശേഷിച്ച പകുതി ദൂരത്തെ കടന്നു ചെല്ലാൻ പാടില്ല).

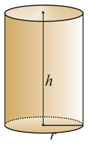
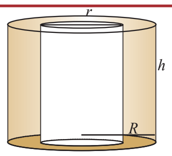
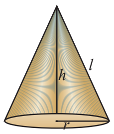
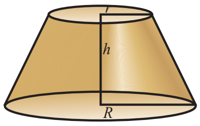
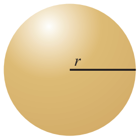
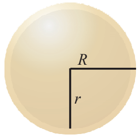
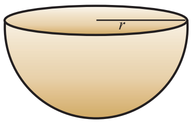
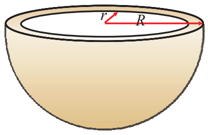
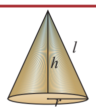
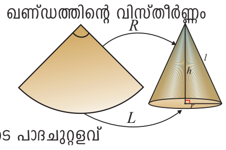
1735 ൽ ഈ പ്രശ്നത്തിന് നിർദ്ധാരണം ഇല്ല എന്ന് ലിയോനാർഡ് ഓയിലർ തെളിയിച്ചു. ഓയിലറിന്റെ ഈ വിപരീതഫലം ഗ്രാഫ് സിദ്ധാന്തത്തിനും topology യുടെ ആശയത്തിനും അടിത്തറപാകി.



$\Longleftrightarrow$



ഓർമ്മിക്കേണ്ടവ

ക്രമ നമ്പർ	പേര്	ചിത്രം	പാർശ്വ അല്ലെങ്കിൽ വക്രതല (ച. മീ.)	വിസ്തീർണ്ണ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം (ച. മീ.)	വ്യാപ്തം (ഘ. മാ.)
1	**സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടർ**		$2\pi rh$	$2\pi r(h+r)$	$\pi r^2 h$
2	**സമവൃത്താരകാര പൊള്ളയായ സിലിണ്ടർ**		$2\pi h(R+r)$	$2\pi(R+r)(R-r+h)$	$\pi R^2 h-\pi r^2 h$ $\pi h(R^2-r^2)$ $\pi h(R+r)(R-r)$
3	**സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപിക**		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
4	**വൃത്തസ്തൂപിക പീഠം**		- - - - - - -	- - - - - - - - - - - - - - -	$\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$
5	**ഗോളം**		$4\pi r^2$	- - -	$\frac{4}{3}\pi r^3$
6	**പൊള്ളയായ ഗോളം**		- - -	- - -	$\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$
7	**അർദ്ധഗോളം**		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$
8	**പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളം**		$2\pi(R^2+r^2)$	$2\pi(R^2+r^2)+\pi(R^2-r^2)$	$\frac{2}{3}\pi(R^3-r^3)$
9	**വൃത്ത ഖണ്ഡത്തെ വൃത്തസ്തൂപികയാക്കി മാറ്റൽ**  $l=\sqrt{h^2+r^2}$ $h=\sqrt{l^2-r^2}$ $r=\sqrt{l^2-h^2}$ വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം = വൃത്ത ഖണ്ഡത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $\pi rl = \frac{\theta}{360}\times\pi r^2$  വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ ചാപ നീളം= വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവ്				10. കുഴലിലൂടെ ഒഴുകുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം = { തിര്യക് ഛേദത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം × വേഗത × സമയം } 11. വാർത്തെടുക്കുന്ന പുതിയ ഘന രൂപങ്ങളുടെ എണ്ണം = ഉരുക്കിയ ഘന വസ്തുവിന്റെ വ്യാപ്തം / കിട്ടിയ ഒരു ഘന വസ്തുവിന്റെ വ്യാപ്തം	
12	പരിവർത്തനം 1 മീ.^{3} = 1000 ലിറ്റർ , 1 ഡെ.മീ.^{3} = 1 ലിറ്റർ , 1000 സെ.മീ.^{3} = 1 ലിറ്റർ , 1000 ലിറ്റർ = 1 കി.ലിറ്റർ				

9 പ്രായോഗിക ജ്യാമിതി

Give me a place to stand, and I shall move the earth
-Archimedes

- മുഖവുര
- സ്പർശ രേഖകൾ
- ത്രികോണങ്ങൾ
- ചക്രീയ ചതുർഭുജം

ബ്രഹ്മഗുപ്ത
(598-668 AD)
ഇന്ത്യ
(പുരാതന ഇന്ത്യയിലെ പ്രശസ്തനായ ശാസ്ത്രജ്ഞൻ)

"ബ്രഹ്മാസ്പുത സിദ്ധാന്ത്" എന്ന പുസ്തകം ബ്രഹ്മഗുപ്ത രചിച്ചു. ജ്യാമിതിയിൽ അദ്ദേഹത്തിന്റെ ഏറ്റവും വലിയ നേട്ടം എന്നത് ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ സൂത്രവാക്യമാണ്.

p, q, r, s *എന്നിവ ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ, അദ്ദേഹം വിസ്തീർണ്ണത്തിന് ഒരു ഏകദേശ സൂത്രവാക്യവും, കൃത്യമായ സൂത്രവാക്യവും നൽകി.*

ഏകദേശ വിസ്തീർണ്ണം

$$\left(\frac{p+r}{2}\right)\left(\frac{q+s}{2}\right).$$

കൃത്യമായ വിസ്തീർണ്ണം

$$\sqrt{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)},$$

$$2t = p+q+r+s.$$

9.1 മുഖവുര

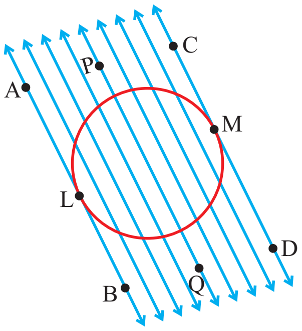
ഈജിപ്റ്റിൽ 3000 ബി.സി.യോടെ ഉപയോഗത്തിൽ വന്ന ജ്യാമിതി ആദ്യകാലങ്ങളിൽ നിലം അളക്കുന്നതിനു വേണ്ടിയാണ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്. നീളങ്ങൾ, കോണളവുകൾ, വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ, വ്യാപ്തങ്ങൾ എന്നിവ അനുബന്ധിച്ചുള്ള ചില ആനുഭവിക തത്വങ്ങളുടെ ശേഖരമായ ജ്യാമിതി, നിർമ്മാണ പ്രവർത്തനങ്ങൾ, ജ്യോതിശാസ്ത്രം, മറ്റു കൈത്തൊഴിലുകൾ എന്നിവയുടെ പ്രായോഗികാവശ്യങ്ങൾ നിറവേറ്റുന്നതിനുവേണ്ടിയാണ് പരിപോഷിപ്പിച്ചത്.

അടുത്ത കാലങ്ങളിൽ ജ്യാമിതിയെ അതിന്റെ മറ്റു ഘടകങ്ങളായ ബീജഗണിതം, വിശകലനം തുടങ്ങിയവയേക്കാൾ പ്രാധാന്യം കുറഞ്ഞതായി തീർക്കാൻ പാഠ്യപദ്ധതിയിൽ പുനരൂപീകരണശ്രമങ്ങൾ നടക്കുന്നുണ്ട്. പക്ഷേ പല ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞരും ഈ രൂപീകരണത്തെ ശക്തമായി എതിർക്കുന്നുണ്ട്. യഥാർത്ഥത്തിൽ ഗണിത ശാസ്ത്രമേഖലകളിലെ ആശയങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് ജ്യാമിതി സഹായകമാകുന്നുണ്ട്. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ നമുക്ക് വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖകൾ, ത്രികോണങ്ങൾ, ചക്രീയ ചതുർഭുജങ്ങൾ എന്നിവ തന്നിട്ടുള്ള യഥാർത്ഥ അളവുകളുടെ സഹായത്താൽ എങ്ങനെ വരയ്ക്കാമെന്നു പഠിയ്ക്കാം.

ഒൻപതാം ക്ലാസ്സിൽ നാം വൃത്തവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഞാൺ, വൃത്തഖണ്ഡം, വൃത്താംശം. തുടങ്ങിയവയെക്കുറിച്ച് പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ഇപ്പോൾ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ **സ്പർശരേഖ, ഛേദരേഖ** തുടങ്ങിയ ചിലതിനെക്കുറിച്ച് താഴെ പ്പറയുന്ന പ്രവർത്തനങ്ങളിലൂടെ ഓർമ്മിക്കാം.

പ്രവൃത്തി

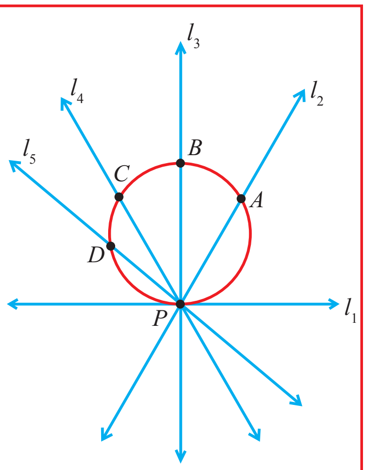
ഒരു കടലാസെടുത്ത് ഏതെങ്കിലും വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിൽ PQ എന്ന ഛേദരേഖ വരയ്ക്കുക. PQ നു സമാന്തരമായി സാദ്ധ്യമായ ഛേദരേഖകൾ PQ വിന്റെ ഇരു വശങ്ങളിലുമായി വരയ്ക്കുക. ഛേദരേഖകളുടെ സ്പർശബിന്ദു PQ ന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളിലും അടുത്തടുത്തു വരുന്നതു ശ്രദ്ധിക്കുക. ഒരു



സന്ദർഭത്തിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും ഇരു വശങ്ങളിലും ഒന്നാകുന്നത് കാണാൻ നിങ്ങൾക്ക് സാധിക്കും. PQനു സമാന്തരമായ ഛേദകങ്ങളിൽ AB,CD എന്നീ നേർരേഖകൾ വൃത്തത്തിൽ കൃത്യമായി ഒരു ബിന്ദുവിൽ അതായത് യഥാക്രമം L,M എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കുന്നതു ശ്രദ്ധിക്കുക. ഈ രേഖകൾ AB,CD എന്നിവയെ L,M എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖകൾ എന്നു പറയുന്നു.

പ്രവൃത്തി

ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൻമേൽ Pഎന്ന ബിന്ദു കുറിക്കുക. ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചതുപോലെ P യിലൂടെ ധാരാളം രേഖകൾ വരയ്ക്കുക. P യിലൂടെ പോകുന്ന രേഖകൾ വൃത്തത്തെ രണ്ടുസ്ഥലങ്ങളിൽ ഛേദിക്കുന്നതായി കാണാം. l_2, l_3, l_4, l_5 എന്നീ നേർരേഖകൾ വൃത്തത്തെ യഥാക്രമം A, B, C,D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഈ രേഖകൾ l_2, l_3, l_4, l_5 വൃത്തത്തിന്റെ ഛേദരേഖകളാണ്. എന്നാൽ l_1 എന്ന രേഖ വൃത്തത്തിൽ കൃത്യമായി P എന്ന ഒരു ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. ഈ രേഖ l_1 നെ P എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള സ്പർശരേഖ എന്നു പറയുന്നു.



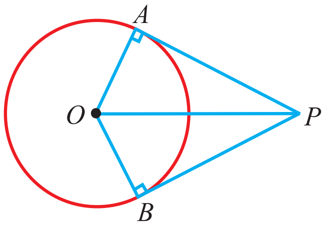
ഒരു വൃത്തത്തിൽ സ്പർശബിന്ദുവിൽ നിന്നും വരയ്ക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധം ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള സ്പർശരേഖയ്ക്കു ലംബമായിരിക്കുമെന്ന് നമുക്കറിയാം.

AP എന്നത് ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വെളിയിലുള്ള ബിന്ദു P യിൽ നിന്നും A വഴിയായുള്ള സ്പർശരേഖ എന്നിരിക്കട്ടെ.

സമകോണ $\triangle OPA$ - യിൽ $OA \perp AP$

$OP^2 = OA^2 + AP^2$ (പൈതഗോറസിന്റെ പ്രമേയമനുസരിച്ച്)

$AP = \sqrt{OP^2 - OA^2}$.



9.2 ഒരു വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖകൾ നിർമ്മിക്കൽ

ഇനി നമുക്ക് ഒരു വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

(i) കേന്ദ്രം ഉപയോഗിച്ച്

(ii) സ്പർശരേഖ - ഞാൺ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച്

9.2.1 ഒരു വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖ നിർമ്മിക്കൽ (കേന്ദ്രം ഉപയോഗിച്ച്)

ഫലങ്ങൾ

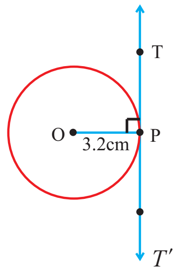
ഒരു വൃത്തത്തിന് സ്പർശബിന്ദുവിൽ നിന്നു വരയ്ക്കപ്പെടുന്ന വ്യാസാർദ്ധം ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള സ്പർശരേഖയ്ക്കു ലംബമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 9.1

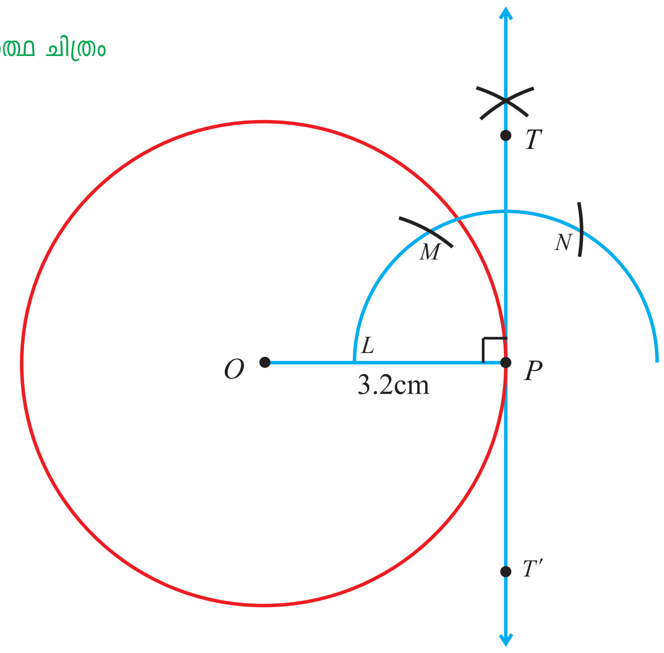
3.2 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിൻമേൽ P എന്ന ബിന്ദുകുറിച്ച് P യിലൂടെ വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കുക. (കേന്ദ്രം ഉപയോഗിച്ച്)

തന്നിട്ടുള്ളത് : വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം = 3.2 സെ.മീ.

ഏകദേശ ചിത്രം



യഥാർത്ഥ ചിത്രം



നിർമ്മിതി

(i) O കേന്ദ്രമാക്കി 3.2 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

(ii) വൃത്തത്തിൻമേലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു P എന്നിരിക്കട്ടെ. OP യോജിപ്പിക്കുക.

(iii) P കേന്ദ്രമാക്കി OP യെ L ൽ ഛേദിക്കുമാറ് ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക.

(iv) $\overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MN}$ ആകത്തക്കവിധം ചാപത്തിൽ M, N കുറിയ്ക്കുക.

(v) കോൺ $\angle MPN$ ന്റെ ദ്വിഭാജകം PT വരയ്ക്കുക.

(vi) TP യെ T' വരെ നീട്ടി ആവശ്യമായ സ്പർശരേഖ $T'PT$ വരയ്ക്കുക.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

ഒരാൾക്ക് വൃത്തത്തിൽ P വഴിയായ OP എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് PT എന്ന ലംബരേഖ വരയ്ക്കാൻ കഴിയും. PT എന്നത് P വഴിയായുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖ ആയിരിക്കും.

9.2.2 സ്പർശരേഖ – ഞാൺ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖ നിർമ്മിക്കൽ

ഫലം **സ്പർശരേഖ – ഞാൺ സിദ്ധാന്തം**

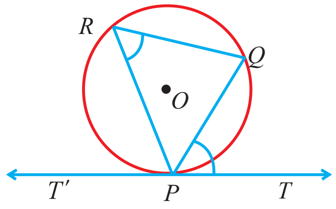
ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു സ്പർശരേഖയ്ക്കും, സ്പർശബിന്ദു വഴിയുള്ള ഞാണിനും ഇടയിലുള്ള കോൺ അതിനെതിരെയുള്ള വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണിനു തുല്യമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 9.2

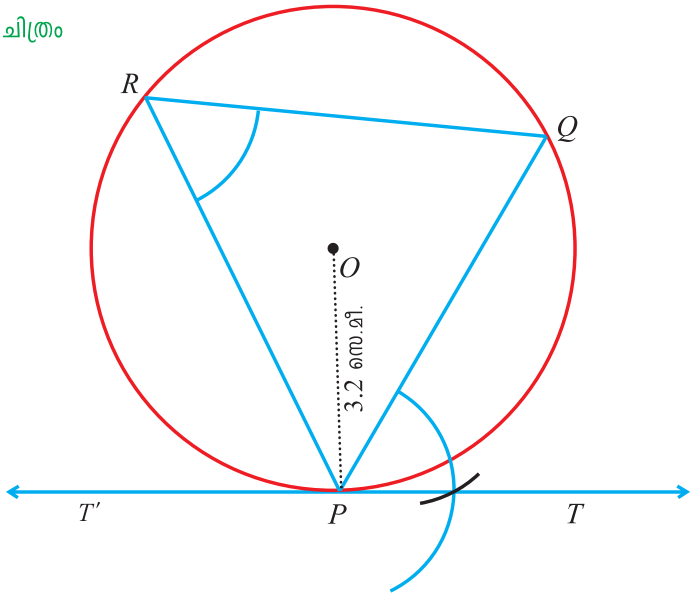
3.2 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുളള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. സ്പർശരേഖ-ഞാൺ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിൻമേലുള്ള P എന്ന ബിന്ദുവഴി വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കുക.

തന്നിട്ടുള്ളത് : വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം = 3.2 സെ.മീ.

ഏകദേശ ചിത്രം



യഥാർത്ഥ ചിത്രം



നിർമ്മിതി

(i) O കേന്ദ്രമാക്കി 3.2 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക

(ii) വൃത്തത്തിൻമേലുള്ള ഒരു ബിന്ദു P കുറിയ്ക്കുക.

(iii) P വഴിയായി ഞാൺ PQ വരയ്ക്കുക.

(iv) P, Q എന്നിവയിൽ നിന്ന് വേർപ്പെട്ട് P, Q, R എന്നിവ എതിർ ഘടികാര ദിശയിൽ വരുമാറ് R എന്ന ബിന്ദു വൃത്തത്തിൻ മേൽ കുറിയ്ക്കുക.

(v) PR, PQ എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക.

(vi) P യിൽ $\angle QPT = \angle PRQ$ നിർമ്മിക്കുക.

(vii) TP, T' വരെ നീട്ടി ആവശ്യമായ സ്പർശരേഖ $T'PT$ വരയ്ക്കുക.

9.2.3 വൃത്തത്തിന് വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് തന്നിട്ടുള്ള വൃത്തത്തിന് ഒരു ജോഡി സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കൽ

ഫലങ്ങൾ

(i) വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിന് രണ്ട് സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കാം.

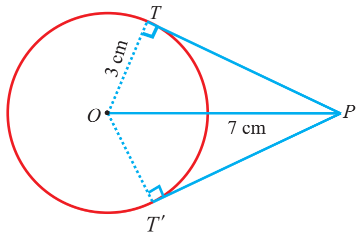
(ii) വ്യാസങ്ങൾ വൃത്ത പരിധിയിൽ 90° കോണളവ് ഉണ്ടാക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.3

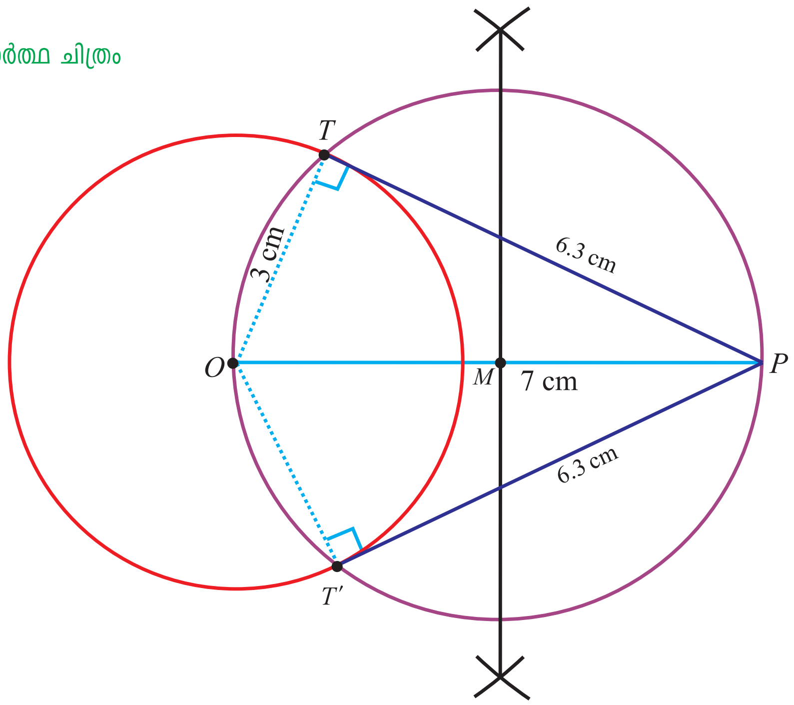
3 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 7 സെ.മീ. അകലെയുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖകൾ വരച്ച് സ്പർശരേഖകളുടെ നീളം അളക്കുക.

തന്നിട്ടുള്ളത് : വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം $= 3$ സെ.മീ. $OP = 7$ സെ.മീ.

ഏകദേശ ചിത്രം



യഥാർത്ഥ ചിത്രം



നിർമ്മിതി

(i) O കേന്ദ്രമാക്കി 3 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

(ii) O യിൽ നിന്നും 7 സെ.മീ. അകലെ P എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. OP യോജിപ്പിക്കുക.

(iii) OPയുടെ ലംബദ്വിഭാജകം വരയ്ക്കുക. അത് OP യെ M ൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(iv) M കേന്ദ്രമാക്കി, $MO\ (=MP)$ വ്യാസാർദ്ധമാക്കി മറ്റൊരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക

(v) രണ്ടു വൃത്തങ്ങളും. T , T' എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു

(vi) PT , PT' എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക ഇവയാണ് ആവശ്യപ്പെട്ട സ്പർശരേഖകൾ

സ്പർശരേഖയുടെ നീളം $PT = 6.3$ സെ.മീ.

ശരിനോക്കൽ

സമകോണ ΔOPT യിൽ

$$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{7^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40} \qquad \therefore \quad PT = 6.3$$ സെ.മീ. (ഏകദേശമായി).

അഭ്യാസം 9.1

1. 4.2 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരച്ച് വൃത്തത്തിൻമേൽ ഒരു ബിന്ദു കുറിയ്ക്കുക. കേന്ദ്രം ഉപയോഗിച്ച് ആ ബിന്ദു വഴി സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കുക.

2. 4.8 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിൻമേൽ ഒരു ബിന്ദു കുറിയ്ക്കുക. സ്പർശരേഖ ഞാൺ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് ആ ബിന്ദു വഴി സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കുക.

3. 10 സെ.മീ. വ്യാസത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 13 സെ.മീ. അകലെ P എന്ന ബിന്ദു കുറിയ്ക്കുക വൃത്തത്തിന് PA, PB എന്നീ സ്പർശരേഖകൾ വരച്ച് നീളങ്ങൾ അളക്കുക

4. 6 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 10 സെ.മീ. അകലെയുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിന് രണ്ട് സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കുക. സ്പർശരേഖകളുടെ നീളങ്ങൾ അളക്കുക

5. 3 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും 9 സെ.മീ. അകലെയുള്ള ഒരു ബിന്ദു വിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിന് രണ്ട് സ്പർശരേഖകൾ വരച്ച് നീളങ്ങൾ അളക്കുക.

9.3 ത്രികോണങ്ങളുടെ നിർമ്മിതി

വശങ്ങളും അളവുകളും തന്നിരുന്നാൽ ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നാം മുമ്പ് പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ഈ ഭാഗത്തിൽ

(i) ആധാരം, ശീർഷകോൺ, ആധാരത്തിൻമേലുള്ള ഉന്നതി

(ii) ആധാരം, ശീർഷകോൺ, ശീർഷത്തിൽ നിന്നും ആധാരത്തിൻമേലുള്ള മധ്യമം

എന്നിവ തന്നിരുന്നാൽ ത്രികോണങ്ങൾ നിർമ്മിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു പഠിക്കാം.

തന്നിട്ടുള്ള രേഖാഖണ്ഡത്തിനുമുകളിൽ θ കോണളവ് ഉൾകൊള്ളുന്ന വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ നിർമ്മിതി

തന്നിട്ടുള്ള രോഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മുകളിൽ തന്നിട്ടുള്ള കോണളവ് ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വൃത്തഖണ്ഡം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

നിർമ്മിതി

(i) ഒരു രേഖാഖണ്ഡം $\overline{BC}$ വരയ്ക്കുക

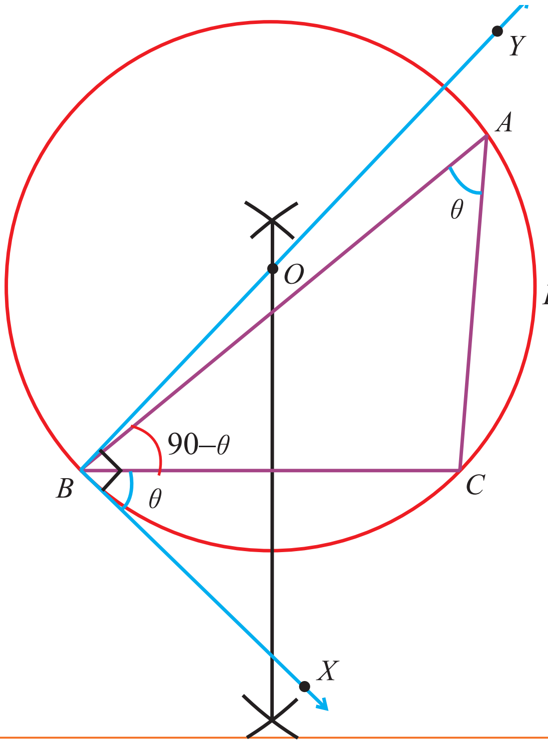
(ii) B യിൽ $\angle CBX = \theta$ വരയ്ക്കുക.

(iii) $BY \perp BX$ വരയ്ക്കുക

(iv) BCയുടെ ലംബദ്വിഭാജകം വരയ്ക്കുക. അത് BY നെ O യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(v) O കേന്ദ്രമാക്കി OB വ്യാസാർദ്ധമാക്കി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക

(vi) വൃത്തത്തിൻമേൽ A എന്ന ബിന്ദു കുറിയ്ക്കുക. സ്പർശരേഖ - ഞാൺ സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച് ദീർഘചാപം BAC ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട കോണളവ് θ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വൃത്തഖണ്ഡം.



ആധാരവും ശീർഷകോണും തന്നിരുന്നാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ നിർമ്മിതി

ആധാരവും ശീർഷകോണും തന്നിരുന്നാൽ ത്രികോണം എങ്ങനെ നിർമ്മിക്കാം എന്നതിനെ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പടികളിലൂടെ വിശദമാക്കാം.

നിർമ്മിതി

(i) രേഖാഖണ്ഡം AB വരയ്ക്കുക.

(ii) A യിൽ തന്നിട്ടുള്ള കോണളവ് $\angle BAX = \theta$ വരയ്ക്കുക.

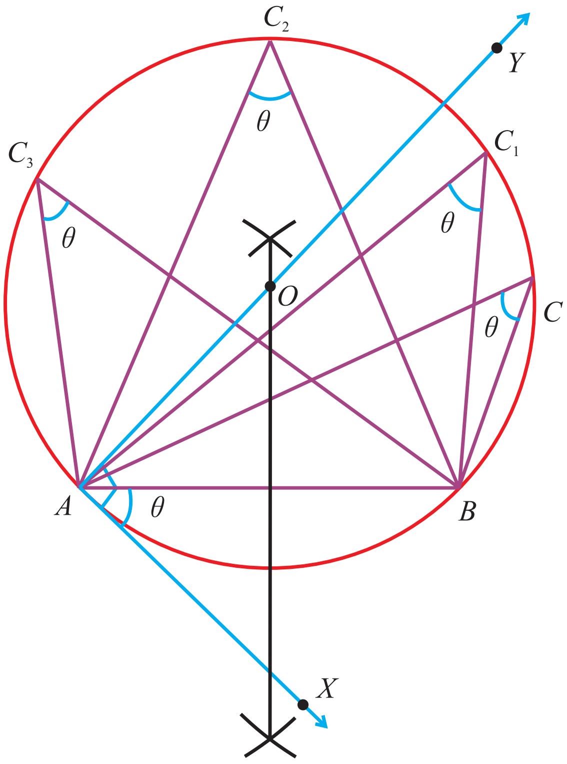
(iii) $AY \perp AX$ വരയ്ക്കുക.

(iv) AB - യുടെ ലംബദ്വിഭാജകം വരയ്ക്കുക. അത് AY നെ O യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(v) O കേന്ദ്രമാക്കി OA വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

(vi) എതിർ വൃത്തചാപത്തിൽ C എന്ന ബിന്ദു കുറിച്ച് AC യും BC യും യോജിപ്പിക്കുക.

(vii) $\triangle ABC$ യാണ് ആവശ്യപ്പെട്ട ത്രികോണം.



$\triangle ABC$ എന്നത് തന്നിട്ടുള്ള ആധാരവും ശീർഷകോണും ഉള്ള പല ത്രികോണങ്ങളിൽ ഒന്നാണ് എന്ന് നാം അറിയുന്നു.

$AX \perp AY$ എന്നതു ശ്രദ്ധിക്കുക. അതുകൊണ്ട് $\angle XAY = 90^\circ$. കൂടാതെ $OB = OA$. (വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ)

AX എന്നത് വൃത്തത്തിലുള്ള സ്പർശരേഖയാണ്. C എന്നത് വൃത്തത്തിൻമേലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ്

അതിനാൽ, $\angle BAX = \angle ACB$ (സ്പർശരേഖ - ഞാൺ സിദ്ധാന്തം).

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

ഒരു വൃത്തത്തിൻമേലുള്ള ബിന്ദുക്കൾ $C_1, C_2, C_3, \ldots$ ആണെങ്കിൽ $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$, $\triangle ABC_3$, $\cdots$ എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ ആരേ ആധാരവും ഒരേ ശീർഷകോണ അളവും ഉള്ള ത്രികോണങ്ങളാണ്.

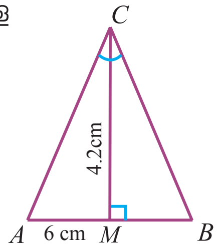
9.3.1 ആധാരവും, ശീർഷകകോണും ആധാരത്തിൻമേലുള്ള ഉന്നതിയും തന്നിരുന്നാൽ ത്രികോണങ്ങളുടെ നിർമ്മിതി

ഉദാഹരണം 9.4

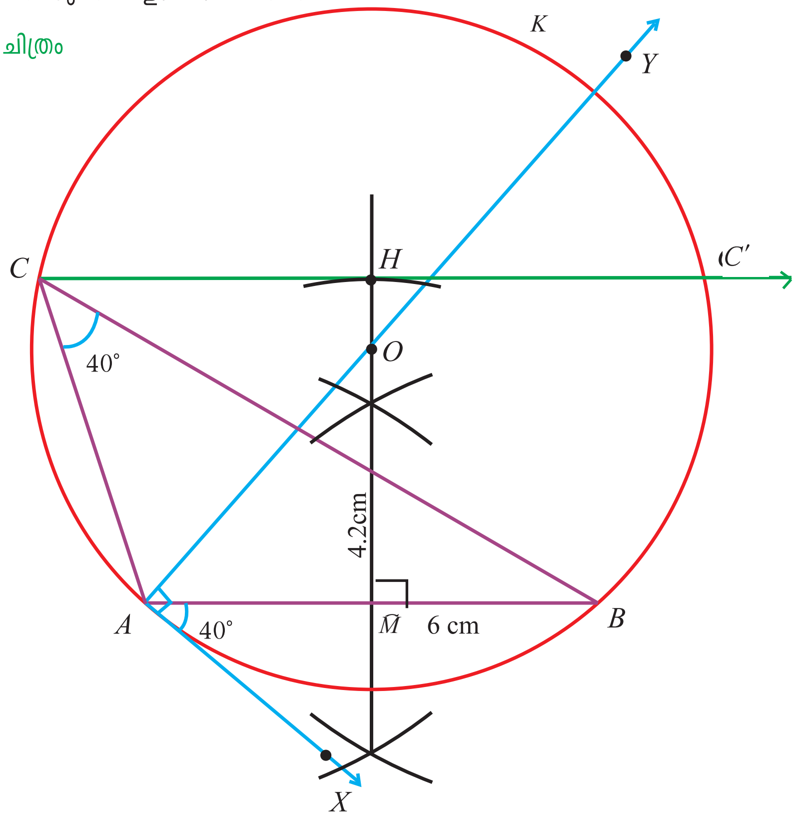
$AB = 6$ സെ.മീ., $\angle C = 40^\circ$, C യിൽ നിന്നും AB യിലേക്കുള്ള ഉന്നതിയുടെ നീളം 4.2സെ.മീ. അളവുകളുള്ള $\triangle ABC$ നിർമ്മിക്കുക.

തന്നിട്ടുള്ളത് : $\triangle ABC$ യിൽ $AB = 6$സെ.മീ. $\angle C = 40^\circ$. C യിൽ നിന്നും AB യിലേക്കുള്ള ഉന്നതിയുടെ നീളം 4.2സെ.മീ.

ഏകദേശ ചിത്രം



യഥാർത്ഥ ചിത്രം



നിർമ്മിതി

(i) $AB = 6$സെ.മീ എന്ന ഒരു രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

(ii) $\angle BAX = 40^\circ$ വരത്തക്കവണ്ണം AX വരയ്ക്കുക.

(iii) $AY \perp AX$ വരയ്ക്കുക.

(iv) AB യുടെ ലംബദ്വിഭാജകം വരയ്ക്കുക. അത് AY നെ O യിലും , ABയെ Mലും ഛേദിക്കുന്നു.

(v) O കേന്ദ്രമാക്കി OA വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

(vi) വൃത്തഖണ്ഡം AKB യിൽ കോണളവ് 40° ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.

(vii) ലംബദ്വിഭാജകം MO യിൽ, $MH = 4.2$ സെ.മീ. വരത്തക്കവണ്ണം H എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക.

(viii) AB യ്ക്കു സമാന്തരമായി CHC' വരയ്ക്കുക. ഇത് വൃത്തത്തെ C, C' എന്നിവയിൽ സന്ധിക്കുന്നു

(ix) ΔABC പൂർത്തിയാക്കുക. ഇത് ആവശ്യപ്പെട്ട ത്രികോണങ്ങളിൽ ഒന്നാകുന്നു.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

$\triangle ABC'$ എന്നതും ആവശ്യപ്പെട്ട മറ്റൊരു ത്രികോണം ആകുന്നു.

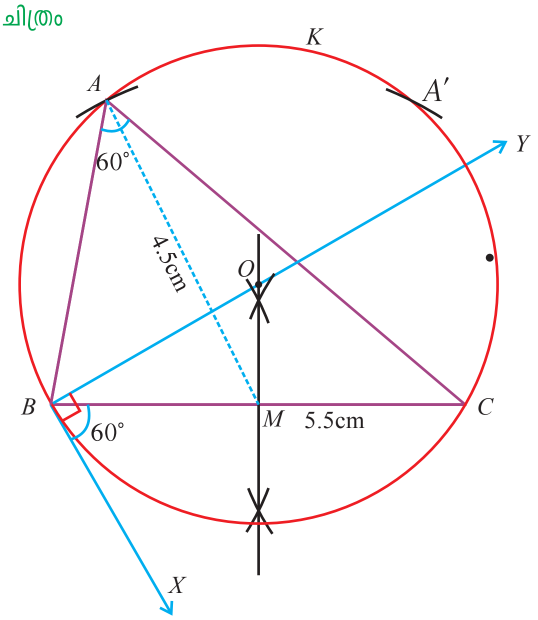
9.3.2 ആധാരം, ശീർഷകോൺ, ആധാരത്തിൻമേലുള്ള മധ്യമം എന്നിവ തന്നിരുന്നാൽ ത്രികോണം നിർമ്മിക്കൽ

ഉദാഹരണം 9.5

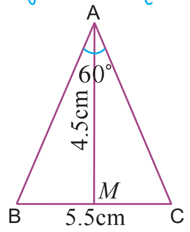
ആധാരം $BC = 5.5$സെ.മീ. , $\angle A = 60^\circ$, ശീർഷകോൺ A യിൽ നിന്നുള്ള മധ്യമം $AM = 4.5$ സെ.മീ അളവുകളുള്ള $\triangle ABC$ നിർമ്മിക്കുക.

തന്നിട്ടുള്ളത് : $\triangle ABC$ യിൽ $BC = 5.5$ സെ.മീ. , $\angle A = 60^\circ$, മധ്യമം $AM = 4.5$ സെ.മീ.

യഥാർത്ഥ ചിത്രം



ഏകദേശ ചിത്രം



നിർമ്മിതി

(i) $BC = 5.5$ സെ.മീ. നീളത്തിൽ ഒരു രേഖാഖണ്ഡം വരയക്കുക

(ii) $\angle CBX = 60^\circ$ വരത്തക്കവണ്ണം B യിലൂടെ BX വരയ്ക്കുക

(iii) $BY \perp BX$ വരയ്ക്കുക

(iv) BCയുടെ ലംബദ്വിഭാജകം വരയ്ക്കുക. അത് BY നെ O യിലും BC യെ M ലും ഛേദിക്കുന്നു.

(v) O കേന്ദ്രമാക്കി OB വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിൽ ബിന്ദു K കുറിക്കുക.

(vi) ദീർഘവൃത്തഖണ്ഡം BKC യിൽ കോൺ 60° ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.

(vii) M കേന്ദ്രമാക്കി 4.5 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപം വൃത്തത്തിൻമേൽ വരയ്ക്കുക. ഈ ചാപം വൃത്തത്തെ A, A' എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

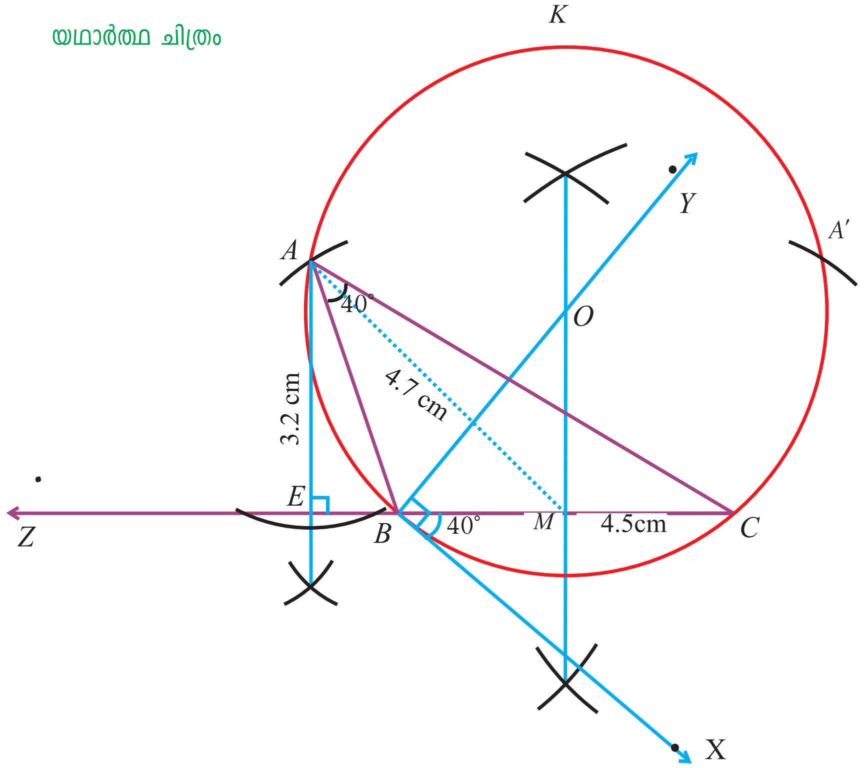
(viii) AB, AC യോജിപ്പിക്കുക.

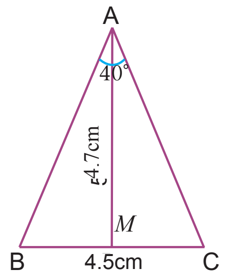
(ix) $\triangle ABC$ അല്ലെങ്കിൽ $\Delta A'BC$ ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട ത്രികോണം.

ഉദാഹരണം 9.6

ആധാരം $BC = 4.5$സെ.മീ. , $\angle A = 40^\circ$, ശീർഷം A യിൽ നിന്നും BC യിലേക്കുള്ള മധ്യമം $AM = 4.7$സെ.മീ അളവുകളുള്ള $\triangle ABC$ നിർമ്മിക്കുക. A യിൽ നിന്നും BC യിലേക്കുള്ള ഉന്നതിയുടെ നീളം കാണുക.

തന്നിട്ടുള്ളത് : $\triangle ABC$ യിൽ $BC = 4.5$ സെ.മീ. , $\angle A = 40^\circ$ യിൽ നിന്നും BC യിലേക്കുള്ള മധ്യമം 4.7സെ.മീ.





നിർമ്മിതി

(i) $BC = 4.5$ സെ.മീ എന്ന ഒരു രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

(ii) $\angle CBX = 40^\circ$ വരത്തക്കവണ്ണം BX വരയ്ക്കുക.

(iii) $BY \perp BX$ വരയ്ക്കുക.

(iv) BCയുടെ ലംബദ്വിഭാജകം വരയ്ക്കുക. അത് BY നെ O യിലും BC യെ M ലും ഛേദിക്കുന്നു.

(v) O കേന്ദ്രമാക്കി OB വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിൽ K എന്ന ബിന്ദു കുറിക്കുക.

(vi) ദീർഘവൃത്തഖണ്ഡം BKC കോണളവ് 40° ഉൾക്കൊള്ളുന്നു

(vii) M കേന്ദ്രമാക്കി 4.7 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു വൃത്ത ചാപം വരയ്ക്കുക. അത് വൃത്തത്തെ A, A' എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(viii) AB, AC യോജിപ്പിക്കുക. $\triangle ABC$ അല്ലെങ്കിൽ $\triangle A'BC$ ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട ത്രികോണം.

(ix) CB യെ CZ വരെ നീട്ടുക.

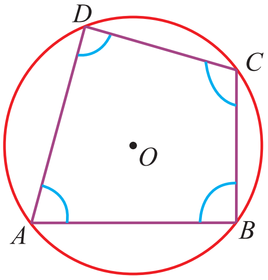
(x) $AE \perp CZ$ വരയ്ക്കുക

(xi) ഉന്നതി AE യുടെ നീളം 3.2 സെ.മീ. ആകുന്നു.

അഭ്യാസം 9.2

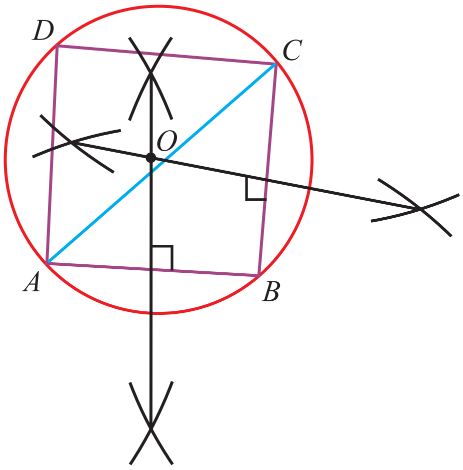
1. $AB = 5.2$ സെ.മീ. നീളമുള്ള രേഖാഖണ്ഡത്തിൽ കോൺ 48° ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വൃത്തഖണ്ഡം നിർമ്മിക്കുക.
2. ആധാരം $PQ = 6$ സെ.മി., $\angle R = 60^\circ$, ശീർഷം R ൽ നിന്നും PQ യിലേക്കുള്ള ഉന്നതി 4 സെ.മീ. $\triangle PQR$ നിർമ്മിക്കുക.
3. $PQ = 4$ സെ.മീ., $\angle R = 60^\circ$, R ൽ നിന്നും PQ യിലേക്കുള്ള ഉന്നതിയുടെ നീളം 4.5 സെ.മീ. $\triangle PQR$ നിർമ്മിക്കുക.
4. $BC = 5$ സെ.മീ., $\angle A = 45^\circ$, A ൽ നിന്നും BC യിലേക്കുള്ള മധ്യമം കൂടാതെ 4 സെ.മീ. $\triangle ABC$ നിർമ്മിക്കുക
5. ആധാരം $BC = 5$ സെ.മീ., $\angle BAC = 40^\circ$, A ൽ നിന്നും BC യിലേക്കുള്ള മധ്യമം 6 സെ.മീ. $\triangle ABC$ നിർമ്മിക്കുക. A ൽ നിന്നുള്ള ഉന്നതിയുടെ നീളം അളന്നെഴുതുക.

9.4 ചക്രീയചതുർഭുജത്തിന്റെ നിർമ്മിതി



ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാല് ശീർഷങ്ങളും ഒരു വൃത്തപരിധിയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ ആ ചതുർഭുജത്തെ ചക്രീയ ചതുർഭുജം എന്നു പറയുന്നു. ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ സംപൂരകങ്ങളാണ്. അതായത് എതിർകോണുകളുടെ തുക 180^0. അതിനാൽ ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജം നിർമ്മിക്കുന്നതിന് അഞ്ച് അളവുകൾക്ക് പകരം നാല് അളവുകൾ മതിയാകും.

ആവശ്യമുള്ള അളവുകൾ തന്നിരുന്നാൽ ചക്രീയ ചതുർഭുജം $ABCD$ നിർമ്മിക്കുന്നതിനുള്ള പടികളെകുറിച്ച് നമുക്ക് വിശദമാക്കാം.



(i) ഏകദേശ ചിത്രം വരയ്ക്കുക. തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ കൊണ്ട് $\triangle ABC$ അല്ലെങ്കിൽ $\triangle ABD$ വരയ്ക്കുക

(ii) AB യുടെയും, BC യുടെയും ലംബദ്വിഭാജകങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അവ O യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(iii) O കേന്ദ്രമാക്കി OA (= OB = OC) വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ $\triangle ABC$ യ്ക്ക് പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക

(iv) തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ ഉപയോഗിച്ച് നാലാമത്തെ ശീർഷം D കണ്ടുപിടിച്ച് AD,CD യോജിപ്പിക്കുക.

(v) $ABCD$ ആവശ്യപ്പെട്ട ചക്രീയ ചതുർഭുജം ആകുന്നു.

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾകൊണ്ട് ചക്രീയ ചതുർഭുജം നിർമ്മിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

(i) മൂന്നു വശങ്ങളും ഒരു വികർണ്ണവും (ii) രണ്ടു വശങ്ങളും രണ്ടു വികർണ്ണങ്ങളും (iii) മൂന്നു വശങ്ങളും ഒരു കോണും (iv) രണ്ടു വശങ്ങളും രണ്ടു കോണുകളും (v) ഒരു വശവും, മൂന്നു കോണുകളും (vi) രണ്ടു വശങ്ങളും ഒരു കോണും, ഒരു സമാന്തര രേഖയും.

മാതൃക I (ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്നുവശങ്ങളും ഒരു വികർണ്ണവും തന്നിരുന്നാൽ)

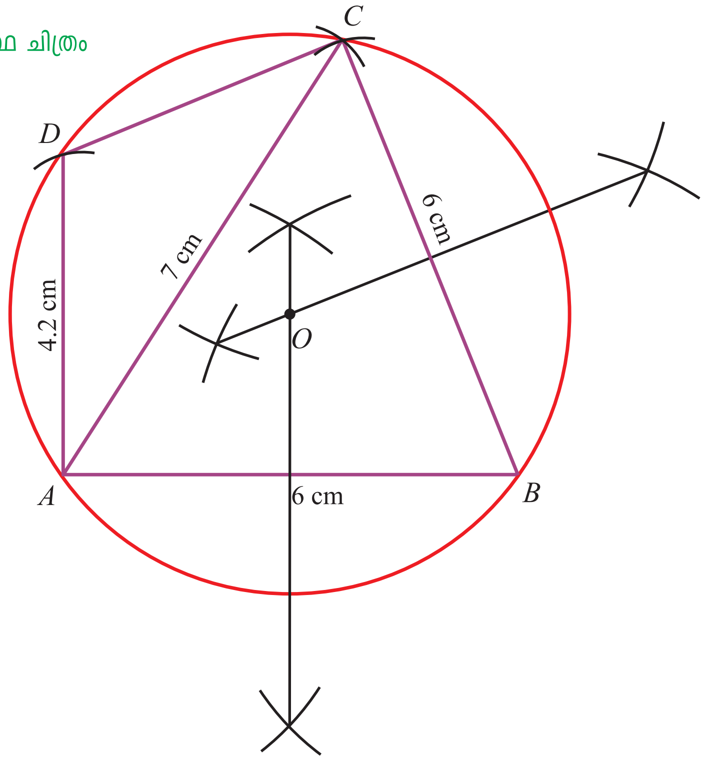
ഉദാഹരണം 9.7

$AB = 6$ സെ.മീ. , $AC = 7$ സെ.മീ. , $BC = 6$ സെ.മീ. , $AD = 4.2$ സെ.മീ. എന്നീ അളവുകളുള്ള ചക്രീയ ചതുർഭുജം $ABCD$ നിർമ്മിക്കുക

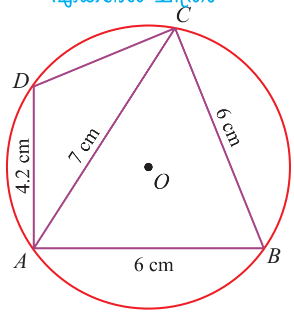
തന്നിട്ടുള്ളത് : ചക്രീയചതുർഭുജം $ABCD$ യിൽ $AB = 6$ സെ.മീ. , $AC = 7$ സെ.മീ.

$BC = 6$ സെ.മീ. , $AD = 4.2$ സെ.മീ.

യഥാർത്ഥ ചിത്രം



ഏകദേശ ചിത്രം



നിർമ്മിതി

(i) ഒരു ഏകദേശ ചിത്രം വരച്ച് അളവുകൾ കുറിയ്ക്കുക $AB = 6$ സെ.മീ. നീളത്തിൽ രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

(ii) A, B കേന്ദ്രമാക്കി യഥാക്രമം 7 സെ.മീ., 6 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ വൃത്ത ചാപങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഇവ C യിൽ ഛേദിക്കുന്നു. AB, AC യോജിപ്പിക്കുക.

(iii) AB, BC എന്നിവയുടെ ലംബദ്വിഭാജകങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അവ O യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(iv) O കേന്ദ്രമാക്കി OA $(= OB = OC)$ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ $\triangle ABC$ യ്ക്ക് പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

(v) A കേന്ദ്രമാക്കി 4.2 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന ചാപം പരിവൃത്തത്തെ D യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(vi) AD, CD യോജിപ്പിക്കുക.

$ABCD$ ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട ചക്രീയചതുർഭുജം.

മാതൃക II (ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളും, രണ്ട് വികർണ്ണങ്ങളും തന്നിരുന്നാൽ)

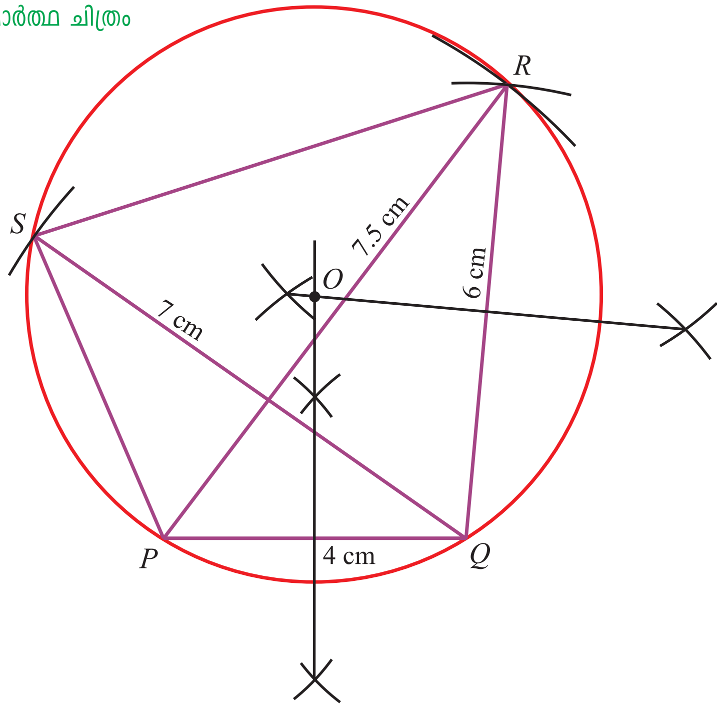
ഉദാഹരണം 9.8

$PQ = 4$ സെ.മീ. , $QR = 6$ സെ.മീ. , $PR = 7.5$ സെ.മീ. ,

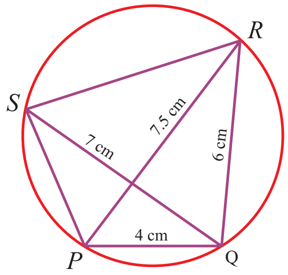
$QS = 7$ സെ.മീ അളവുകളുള്ള ചക്രീയചതുർഭുജം $PQRS$ നിർമ്മിക്കുക.

തന്നിട്ടുള്ളത് : ചക്രീയചതുർഭുജം $PQRS$ ൽ , $PQ = 4$ സെ.മീ. , $QR = 6$ സെ.മീ. , $PR = 7.5$ സെ.മീ., $QS = 7$സെ.മീ.

യഥാർത്ഥ ചിത്രം



ഏകദേശ ചിത്രം



നിർമ്മിതി

(i) ഒരു ഏകദേശ ചിത്രം വരച്ച് അളവുകൾ കുറിയ്ക്കുക. $PQ= 4$ സെ.മീ. നീളത്തിൽ രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

(ii) P, Q കേന്ദ്രമാക്കി യഥാക്രമം 7.5, 6.5 സെ.മീ., വ്യാസാർദ്ധമുള്ള വൃത്ത ചാപങ്ങൾ വരച്ച് അവ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ R എന്ന് കുറിക്കുക.

(iii) PR, QR യോജിപ്പിക്കുക

(iv) PQ, QRഎന്നിവയുടെ ലംബദ്വിഭാജകങ്ങൾ പരസ്പരം O യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(v) O കേന്ദ്രമാക്കി $OP(=OQ=OR)$ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ $\triangle PQR$ ന് പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

(vi) Q കേന്ദ്രമാക്കി 7 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക. അത് വൃത്തത്തെ S ൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(vii) PS, RS യോജിപ്പിക്കുക.

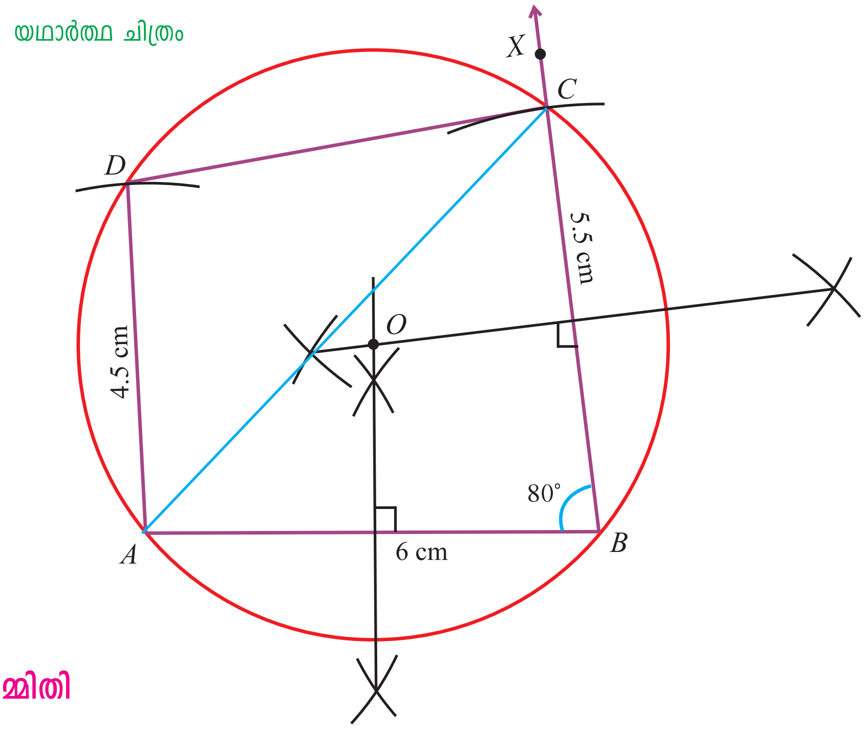
(ix) $PQRS$ ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട ചക്രീയചതുർഭുജം.

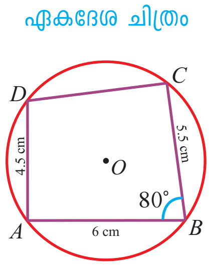
മാതൃക III (ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളും ഒരു കോണും തന്നിരുന്നാൽ)

ഉദാഹരണം 9.9

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾക്ക് ചക്രീയചതുർഭുജം $ABCD$ നിർമ്മിക്കുക. $AB = 6$ സെ.മീ., $BC = 5.5$ സെ.മീ., $\angle ABC = 80^\circ$, $AD = 4.5$ സെ.മീ.

തന്നിട്ടുള്ളത് : ചക്രീയചതുർഭുജം $ABCD$ യിൽ, $AB = 6$ സെ.മീ., $BC = 5.5$ സെ.മീ., $\angle ABC = 80^\circ$, $AD = 4.5$സെ.മീ.





നിർമ്മിതി

(i) ഒരു ഏകദേശ ചിത്രം വരച്ച് അളവുകൾ കുറിയ്ക്കുക $AB=6$ സെ.മീ. നീളത്തിൽ രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക

(ii) $\angle ABX = 80^0$ വരത്തക്കവിധം B വഴി BX വരയ്ക്കുക.

(iii) B കേന്ദ്രമാക്കി 5.5 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന ചാപം BX നെ C യിൽ ഛേക്കിക്കുന്നു. AB, AC യോജിപ്പിക്കുക

(iv) AB, BC എന്നിവയുടെ ലംബദ്വിഭാജകങ്ങൾ പരസ്പരം O യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(v) O കേന്ദ്രമാക്കി $OA(=OB=OC)$ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ $\triangle ABC$ യ്ക്ക് പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

(vi) A കേന്ദ്രമാക്കി 4.5 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു ചാപം വൃത്തത്തെ D ൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(vii) AD, CD യോജിപ്പിക്കുക.

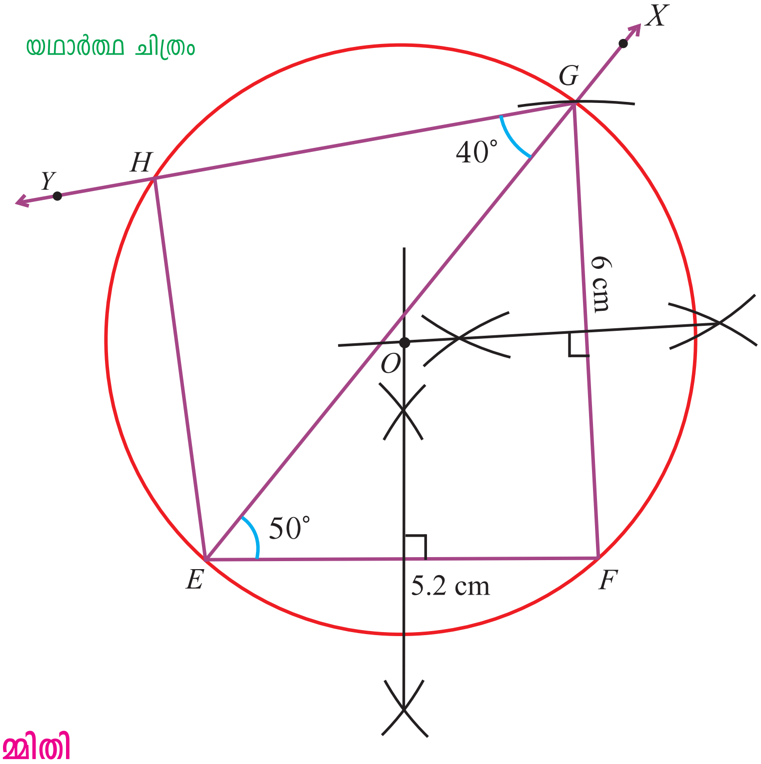
(viii) $ABCD$ ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട ചക്രീയചതുർഭുജം.

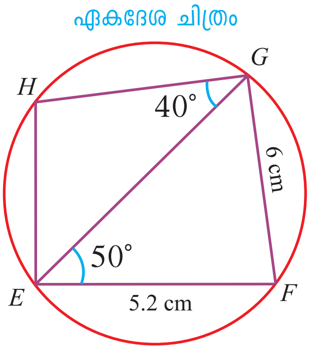
മാതൃക IV (ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളും രണ്ടു കോണുകളും തന്നിരുന്നാൽ)

ഉദാഹരണം 9.10

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾക്ക് ചക്രീയചതുർഭുജം $EFGH$ നിർമ്മിക്കുക $EF = 5.2$ സെ.മീ., $\angle GEF = 50^\circ$, $FG = 6$ സെ.മീ. , $\angle EGH = 40^\circ$.

തന്നിട്ടുള്ളത് : ചക്രീയചതുർഭുജം $EFGH$ ൽ, $EF = 5.2$ സെ.മീ., $\angle GEF = 50^\circ$, $FG = 6$സെ.മീ., $\angle EGH = 40^o$.





നിർമ്മിതി

(i) ഏകദേശ ചിത്രം വരച്ച് അളവുകൾ കുറിയ്ക്കുക
$EF = 5.2$ സെ.മീ. നീളത്തിൽ രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക

(ii) $\angle FEX = 50^\circ$ വരത്തക്കവണ്ണം E വഴി EX വരയ്ക്കുക.

(iii) F കേന്ദ്രമാക്കി 6 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന ചാപം EX നെ G ൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(iv) FG യോജിപ്പിക്കുക.

(v) EF, FG യുടെ ലംബദ്വിഭാജകങ്ങൾ പരസ്പരം O യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(vi) O കേന്ദ്രമാക്കി OE $(= OF = OG)$ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ $\triangle EFG$ യ്ക്ക് ഒരു പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക

(vii) G യിൽ നിന്നും $\angle EGY = 40^\circ$ വരത്തക്കവണ്ണം GY വരയ്ക്കുക.

(viii) GY പരിവൃത്തത്തെ Hൽ ഛേദിക്കുന്നു. EH യോജിപ്പിക്കുക

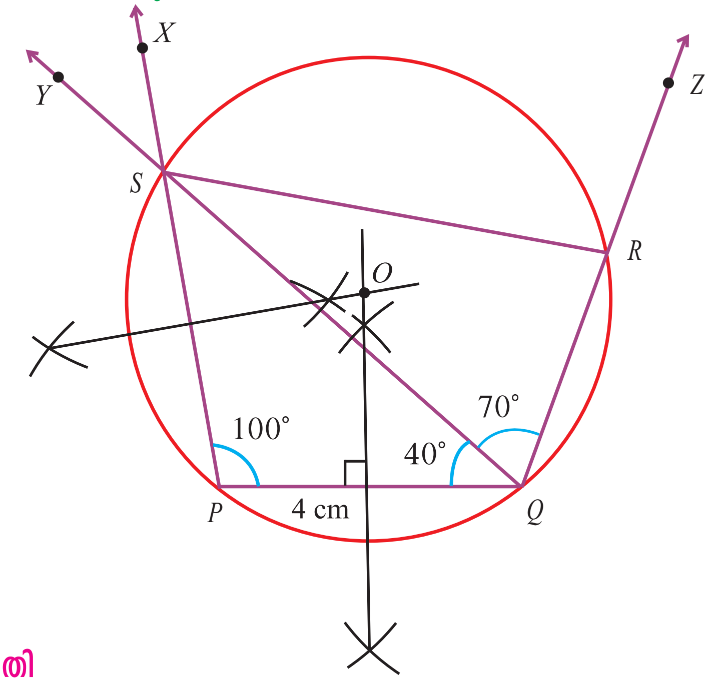
$EFGH$ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട ചക്രീയചതുർഭുജം.

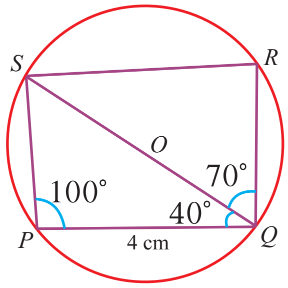
മാതൃക V (ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശവും മൂന്നു കോണുകളും തന്നിരുന്നാൽ)

ഉദാഹരണം 9.11

$PQ = 4$ സെ.മീ., $\angle P = 100^\circ$, $\angle PQS = 40^\circ$, $\angle SQR = 70^\circ$ അളവുകളുള്ള ചക്രീയചതുർഭുജം $PQRS$ നിർമ്മിക്കുക.

തന്നിട്ടുള്ളത് : ചക്രീയചതുർഭുജം $PQRS$, ൽ $PQ = 4$ സെ.മീ., $\angle P = 100^\circ$, $\angle PQS = 40^\circ$, $\angle SQR = 70^\circ$





നിർമ്മിതി

(i) ഏകദേശ ചിത്രം വരച്ച് അളവുകൾ കുറിയ്ക്കുക.
$PQ=4$ സെ.മീ. നീളത്തിൽ രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

(ii) $\angle QPX = 100^0$ വരത്തക്കവണ്ണം P വഴി PX വരയ്ക്കുക.

(iii) $\angle PQY = 40^0$ വരത്തക്കവണ്ണം Q വഴി QY വരയ്ക്കുക. QY, PX നെ S ൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(iv) PQ, PS ന്റെ ലംബദ്വിഭാജകങ്ങൾ പരസ്പരം O യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(v) O കേന്ദ്രമാക്കി $(OP = OQ = OS)$ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ $\triangle PQS$ ന് പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

(vi) $\angle SQZ=70^0$ വരത്തക്കവണ്ണം Q വഴി QZ വരയ്ക്കുക. അത് വൃത്തത്തെ R ൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(vii) RS യോജിപ്പിക്കുക.

$PQRS$ ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട ചക്രീയചതുർഭുജം.

മാതൃക VI

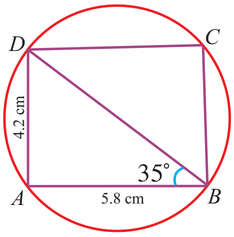
(ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളും ഒരുകോണും ഒരു സമാന്തരരേഖയും തന്നിരുന്നാൽ)

ഉദാഹരണം 9.12

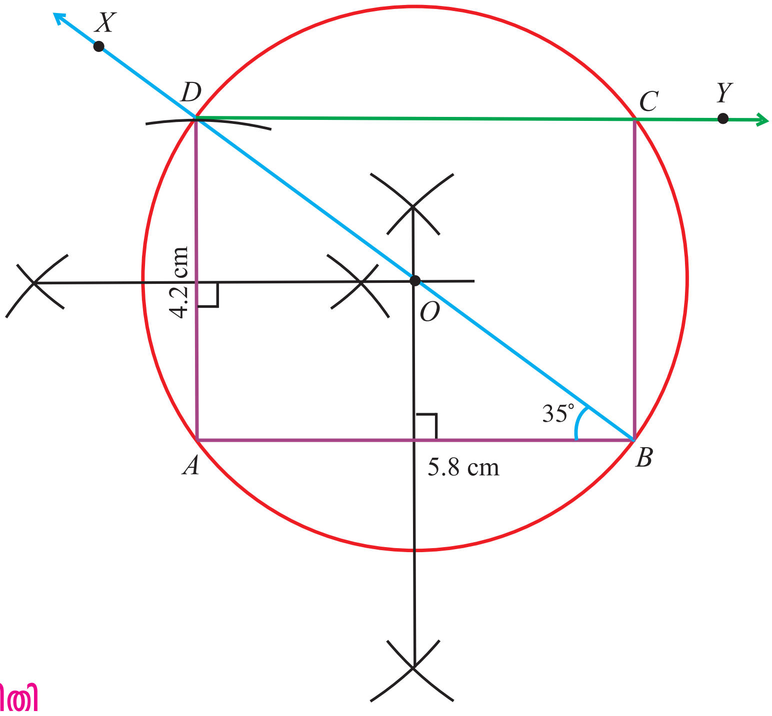
ചക്രീയചതുർഭുജം $ABCD$ നിർമ്മിക്കുക $AB = 5.8$ സെ.മീ., $\angle ABD = 35^\circ$, $AD = 4.2$ സെ.മീ. , $AB \parallel CD$.

തന്നിട്ടുള്ളത് : ചക്രീയചതുർഭുജം $ABCD$ ൽ, $AB = 5.8$ സെ.മീ., $\angle ABD = 35^\circ$, $AD = 4.2$ സെ.മീ. , $AB \parallel CD$

ഏകദേശ ചിത്രം



യഥാർത്ഥ ചിത്രം



നിർമ്മിതി

(i) ഒരു ഏകദേശ ചിത്രം വരച്ച് അളവുകൾ കുറിയ്ക്കുക.

$AB = 5.8$ സെ.മീ. നീളത്തിൽ രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

(ii) $\angle ABX = 35^\circ$ വരത്തക്കവിധം B വഴി BX വരയ്ക്കുക.

(iii) A കേന്ദ്രമാക്കി 4.2 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന ചാപം BX നെ D ൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(iv) AB, AD യുടെ ലംബദ്വിഭാജകങ്ങൾ O യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(v) O കേന്ദ്രമാക്കി $(OA = OB = OD)$ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ $\triangle ABD$ പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

(vi) $DY \parallel AB$ വരത്തക്കവണ്ണം DY വരയ്ക്കുക. ഇത് വൃത്തത്തെ C ൽ ഛേദിക്കുന്നു

BC യോജിപ്പിക്കുക.

(vii) $ABCD$ ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട ചക്രീയചതുർഭുജം.

അഭ്യാസം 9.3

1. $PQ = 6.5$ സെ.മീ. , $QR = 5.5$ സെ.മീ. , $PR = 7$ സെ.മീ., $PS = 4.5$ സെ.മീ. എന്നീ അളവുകളുള്ള ചക്രീയചതുർഭുജം $PQRS$ നിർമ്മിക്കുക.

2. $AB = 6$ സെ.മീ. , $AD = 4.8$ സെ.മീ. , $BD = 8$ സെ.മീ., $CD = 5.5$ cm. എന്നീ അളവുകളുള്ള ചക്രീയചതുർഭുജം $ABCD$ നിർമ്മിക്കുക

3. $PQ = 5.5$ സെ.മീ. , $QR = 4.5$ സെ.മീ. , $\angle QPR = 45^\circ$, $PS = 3$ സെ.മീ. എന്നീ അളവുകളുള്ള ചക്രീയചതുർഭുജം $PQRS$ നിർമ്മിക്കുക

4. $AB = 7$ സെ.മീ. , $\angle A = 80^\circ$, $AD = 4.5$ സെ.മീ. , $BC = 5$ സെ.മീ. എന്നീ അളവുകളുള്ള ചക്രീയചതുർഭുജം $ABCD$ നിർമ്മിക്കുക

5. $KL = 5.5$ സെ.മീ. , $KM = 5$ സെ.മീ. , $LM = 4.2$ സെ.മീ, $LN = 5.3$ സെ.മീ. എന്നീ അളവുകളുള്ള ചക്രീയചതുർഭുജം $KLMN$ നിർമ്മിക്കുക

6. $EF = 7$ സെ.മീ. , $EH = 4.8$ സെ.മീ. , $FH = 6.5$ സെ.മീ., $EG = 6.6$ സെ.മീ.എന്നീ അളവുകളുള്ള ചക്രീയചതുർഭുജം $EFGH$ നിർമ്മിക്കുക

7. $AB = 6$ സെ.മീ. , $\angle ABC = 70^\circ$, $BC = 5$ സെ.മീ., $\angle ACD = 30^\circ$ എന്നീ അളവുകളുള്ള ചക്രീയചതുർഭുജം $ABCD$ നിർമ്മിക്കുക

8. $PQ = 5$ സെ.മീ. , $QR = 4$ സെ.മീ. , $\angle QPR = 35^\circ$, $\angle PRS = 70^\circ$ എന്നീ അളവുകളുള്ള ചക്രീയചതുർഭുജം $PQRS$ നിർമ്മിക്കുക

9. $AB = 5.5$ സെ.മീ , $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ACD = 30^\circ$ എന്നീ അളവുകളുള്ള ചക്രീയചതുർഭുജം $ABCD$ നിർമ്മിക്കുക

10. $AB = 6.5$ സെ.മീ. , $\angle ABC = 110^\circ$, $BC = 5.5$ സെ.മീ. , $AB \parallel CD$ എന്നീ അളവുകളുള്ള ചക്രീയചതുർഭുജം $ABCD$ നിർമ്മിക്കുക

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ ?

1901 മുതൽ ഓരോ വർഷവും ഭൗതീക ശാസ്ത്രം, രസതന്ത്രം, ശരീരശാസ്ത്രം, വൈദ്യ ശാസ്ത്രം, സാഹിത്യം, സമാധാനം എന്നീ മേഖലകളിൽ നേട്ടങ്ങൾ കൈവരിച്ചവർക്ക് പ്രശസ്തി യാർജ്ജിച്ച നോബൽ സമ്മാനം നൽകി വരുന്നു. സ്വീഡനിലെ സ്റ്റോക്ക് ഹോമിലുള്ള നോബൽ ഫൗണ്ടേഷൻ ഏർപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ള അന്താരാഷ്ട്ര അവാർഡാണ് നോബൽ സമ്മാനം. ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിന് നോബൽ സമ്മാനമില്ല.

നാലു വർഷത്തിലൊരിക്കൽ സമ്മേളിക്കുന്ന അന്താരാഷ്ട്ര ഗണിതശാസ്ത്ര സംഘത്തിന്റെ (International Mathematical Union) സമ്മേളനത്തിൽ നാൽപതു വയസ്സിനു താഴെയുള്ള രണ്ടോ, മൂന്നോ, നാലോ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാർക്ക് നൽകി വരുന്ന സമ്മാനമാണ് ഫീൽഡ്സ് മെഡൽ.

ഫീൽഡ്സ് മെഡലിനെ പലപ്പോഴും ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിന്റെ നോബൽ സമ്മാനമായി വിശേഷിപ്പിക്കാറുണ്ട്.

10

ഗ്രാഫുകൾ

- മുഖവുര
- ദ്വിഘാതഗ്രാഫുകൾ
- പ്രത്യേകതരം ഗ്രാഫുകൾ

റെനെ ഡസ്ക്കാർട്ട്സ്
(1596-1650)
ഫ്രാൻസ്

ഡസ്കാർട്ട്സ് ആശുപത്രി കിടക്കയിലായിരിക്കുമ്പോൾ ഒരു ശലഭം തന്റെ മുറിയുടെ മൂലയിൽ കറങ്ങി നടക്കുന്നത് കണ്ട് കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തെ ആസൂത്രണം ചെയ്തു.

നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങളുപയോഗിച്ച് ഗ്രാഫുകൾ കുറിക്കുന്നതിന് വഴിയൊരുക്കിയ വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതിയെ അദ്ദേഹം സൃഷ്ടിച്ചു.

I think, therefore I am

- Rene Descartes

10.1 മുഖവുര

പല വിവരങ്ങളും നല്കുന്ന ചിത്രങ്ങളാണ് ഗ്രാഫുകൾ. തൂക്കവും വയസ്സും പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതുപോലെ രണ്ട് വ്യത്യസ്തമായ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ ഗ്രാഫുകൾ വ്യക്തമാക്കുന്നു. ചില സമയങ്ങളിൽ ബീജഗണിതത്തെ ദൃശ്യവൽക്കരിക്കുവാൻ പ്രയാസമാണ്. പ്രതീകാത്മകമായ പ്രകടനങ്ങൾക്കും ഗ്രാഫുകൾക്കും ഇടയിലുള്ള ബന്ധത്തെക്കുറിച്ച പഠനം യഥാർത്ഥത്തിൽ ബീജഗണിത മാതൃകയ്ക്ക് ഒരു പ്രവേശനകവാടം തുറക്കുന്നു.

പരിഗണനയിലുള്ള ഒരു പ്രശ്നത്തെ വിവരിക്കുന്നതിന് സൂക്ഷ്മമായ ഗ്രാഫ് യുക്തമായി വരയ്ക്കുന്നതിനുള്ള പരിശീലനം വിദ്യാർത്ഥികൾ നേടിയെടുക്കേണ്ടതാണ്. ശ്രദ്ധാപൂർവ്വം വരച്ച ഒരു ഗ്രാഫ് ഒരു പ്രശ്നത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനത്തെ നിവൃത്തി ചെയ്യുന്നതോടൊപ്പം ബീജഗണിതക്രിയയുടെ സൂക്ഷ്മതയ്ക്ക് ഒരു വിലയേറിയ പരിശോധനയായും പ്രയോജനപ്പെടുന്നു. ഗ്രാഫിന്റെ ഫലങ്ങൾ ഏകദേശ സാദൃശ്യത്തിന് മാത്രമാണ് ഉത്തമം എന്നത് ഒരാൾ ഒരിക്കലും മറക്കാൻ പാടില്ല. മാത്രമല്ല ഗ്രാഫുകൾ വരയ്ക്കുമ്പോൾ അനുപാതത്തിന്റെ സൂക്ഷ്മതയ്ക്കും പ്രാധാന്യമുണ്ട്.

10.2 ദ്വിഘാതഗ്രാഫുകൾ

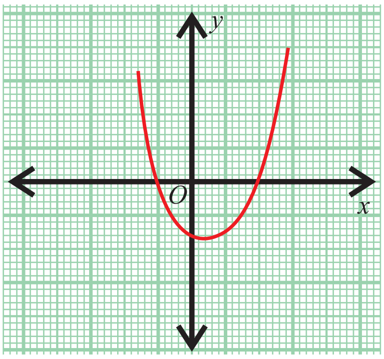
നിർവ്വചനം

$f : A \to B$ എന്നത് ഒരു ഫലനമെന്നിരിക്കട്ടെ. A യും B യും $\mathbb{R}$ ന്റെ ഉപഗണങ്ങൾ. എല്ലാ ക്രമജോടികളുടേയും ഗണം $\{(x,y) \mid x \in A, y = f(x)\}$ എന്നതിനെ f ന്റെ **ഗ്രാഫ്** എന്ന്പറയുന്നു.

x ലുള്ള ഒരു ബഹുപദഫലനത്തെ ഗ്രാഫ് മുഖേന സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്. ഏകഘാത ബഹുപദം $y = f(x) = ax + b, a \neq 0$ യുടെ ഗ്രാഫ് ചായ്വ് a ഉള്ള ഒരു ചരിഞ്ഞ രേഖയാണ്.

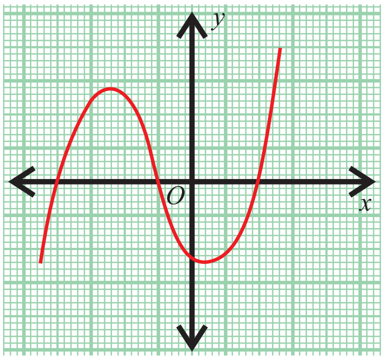
ദ്വിഘാതബഹുപദം $y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$ യുടെ ഗ്രാഫ് തുടർച്ചയായ നേർരേഖ അല്ലാത്ത വക്രമാണ്. ഇതിനെ പരാബൊള എന്നുപറയുന്നു.

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഗ്രാഫുകൾ വിവിധ തരം ബഹുപദങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.



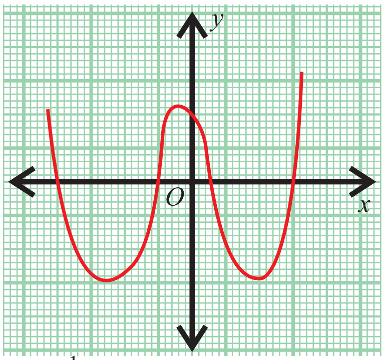
$y = (x+1)(x-2)$,

ഘാതം 2 ഉള്ള ഒരു ബഹുപദം



$y = (x+4)(x+1)(x-2)$,

ഘാതം 3 ഉള്ള ഒരു ബഹുപദം



$y = \frac{1}{14}(x+4)(x+1)(x-3)(x-0.5)$

ഘാതം 4 ഉള്ള ഒരു ബഹുപദം

ഒൻപതാം ക്ലാസ്സിൽ രേഖീയ ബഹു പദം $y = ax + b,\ a \neq 0$ യുടെ ഗ്രാഫുകൾ എങ്ങനെ വരയ്ക്കാമെന്ന് പഠിച്ചു. ഇപ്പോൾ നമുക്ക് $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ [a, b, c എന്നിവ വാസ്തവിക സ്ഥിരങ്ങൾ $a \neq 0$] എന്ന ദ്വിഘാത ഫലനങ്ങളുടെ ഗ്രാഫിലേക്ക് ശ്രദ്ധ കേന്ദ്രീകരിച്ച് അവയുടെ സ്വഭാവം വിശദീകരിക്കാം.

$y = ax^2 + bx + c$ യുടെ ഗ്രാഫ്

$y = ax^2 + bx + c$ പരിഗണിക്കാം. പൂർണ്ണവർഗ്ഗമാക്കൽ രീതിയിൽ മുകളിലുള്ള പരിമേയ വ്യംജകത്തെ താഴെ കാണുന്നവിധം എഴുതാം.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

അതായത് $\frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2-4ac}{4a}\right) \geq 0$ (വ്യംജകത്തിന്റെ വർഗ്ഗം എപ്പോഴും ധനമാണ്)

വക്രത്തിന്റെ (പരാബൊള) ശീർഷങ്ങൾ $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

$a > 0$ എങ്കിൽ വക്രം മുകളിലേക്ക് തുറന്നിരിക്കുന്നു. അത് $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ എന്ന രേഖയിലോ അതിന് മുകളിലോ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. കൂടാതെ $x = -\frac{b}{2a}$ യ്ക്ക് പ്രതിസാമ്യമാണ്.

$a < 0$ എങ്കിൽ വക്രം കീഴോട്ട് തുറന്നിരിക്കുന്നു. അത് $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ എന്ന രേഖയിലോ, കീഴോട്ടോ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. കൂടാതെ $x = -\frac{b}{2a}$ യ്ക്കും പ്രതിസാമ്യമാണ്.

താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ ദ്വിഘാത വ്യംജകങ്ങളുടെ ചില ഉദാഹരണങ്ങളും അവയുടെ ഗ്രാഫുകളുടെ സ്വഭാവവും കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ക്രമ സംഖ്യ	ബഹുപദ വ്യംജകം ($y = ax^2 + bx + c$)	ശീർഷം	a യുടെ ചിഹ്നം	വക്രത്തിന്റെ സ്വഭാവം
1	$y = 2x^2$ $a = 2,\ b = 0,\ c = 0$	(0, 0)	ധനം	(i) മുകളിലേയ്ക്ക് തുറന്നിരിക്കുന്നു (ii) $y = 0$ എന്ന രേഖയിലോ, അതിനുമുകളിലോ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. (iii) x=0യ്ക്ക്, അതായത് y അക്ഷത്തിന് പ്രതിസാമ്യമാണ്.
2	$y = -3x^2$ $a = -3,\ b = 0,\ c = 0$	(0, 0)	ഋണം	(i) താഴേയ്ക്ക് തുറന്നിരിക്കുന്നു (ii) $y = 0$ എന്ന രേഖയിലോ, അതിനു താഴെയോ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. (iii) x=0യ്ക്ക്, അതായത് y അക്ഷത്തിന് പ്രതിസാമ്യമാണ്.
3	$y = x^2 - 2x - 3$ $a = 1, b = -2, c = -3$	(1, –4)	ധനം	(i) മുകളിലേയ്ക്ക് തുറന്നിരിക്കുന്നു (ii) y = -4 എന്ന രേഖയിലോ, അതിനുമുകളിലോ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. (iii) x= 1 ന് പ്രതിസാമ്യമാണ്.

ദ്വിഘാത സമീകരണം $y = ax^2 + bx + c$ യുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുന്ന വിധം

(i) $y = ax^2 + bx + c$ ഉപയോഗിച്ച് x ന്റെ വ്യത്യസ്തമായ മൂല്യങ്ങൾ കൊണ്ട് y യുടെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിച്ച് പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക.

(ii) അനുയോജ്യമായ തോത് തെരഞ്ഞെടുക്കുക x അക്ഷത്തിന് ഉപയോഗിച്ച തോത് y അക്ഷത്തിന്റെ തോതിനു സമമാകണമെന്നില്ല. തോത് എടുക്കുമ്പോൾ ഏറ്റവും വലിയ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാനുള്ള സാധ്യതയ്ക്ക് മുൻഗണന കൊടുക്കേണ്ടതാണ്. വലിയ ഗ്രാഫിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന ഫലങ്ങൾ കൂടുതൽ കൃത്യമായിരിക്കും.

(iii) ബിന്ദുക്കളെ ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക. $y = ax^2 + bx + c$ യുടെ ഗ്രാഫിൽ നേർരേഖകളില്ലാത്തതിനാൽ അവയെ ഒരു ഒഴുക്കൻ വക്രരേഖയാൽ (smooth curve) യോജിപ്പിക്കുക.

ഉദാഹരണം 10.1

$y = 2x^2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ആദ്യം x നു -3 മുതൽ 3 വരെയുള്ള പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ എടുത്ത് y യുടെ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ച് പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

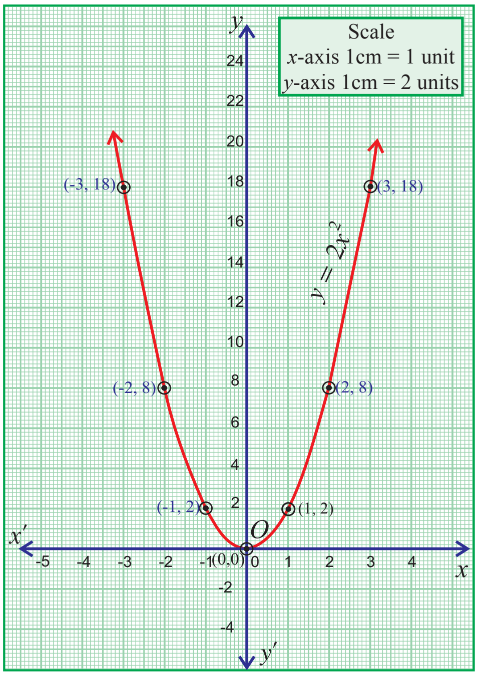
$(-3, 18), (-2, 8), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 8), (3, 18)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ കുറിക്കുക.

ബിന്ദുക്കളെയെല്ലാം ഒരു ഒഴുക്കൻ വക്രമായി യോജിപ്പിക്കുക. ഇപ്പോൾ $y = 2x^2$ എന്ന ഗ്രാഫ് കിട്ടുന്നു.

കുറിപ്പ്

(i) ഗ്രാഫ് y അക്ഷത്തെ സംബന്ധിച്ച് പ്രതിസാമ്യമാണ്. അതായത് y അക്ഷത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തു വരുന്ന ഗ്രാഫിന്റെ ഭാഗം, വലതുവശത്തുവരുന്ന ഗ്രാഫിന്റെ ഭാഗത്തിന്റെ പ്രതിബിംബമാണ്.

(ii) y യുടെ മൂല്യങ്ങൾ ഋണ സംഖ്യ അല്ലാത്തതുകൊണ്ട് ഗ്രാഫ് x അക്ഷത്തിന്റെ താഴെ വരുന്നില്ല



ചിത്രം. 10.1

ഉദാഹരണം 10.2

$y = -3x^2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക

നിർദ്ധാരണം

ആദ്യം x നു -3 മുതൽ 3 വരെയുള്ള പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ എടുത്ത് y യുടെ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ച് പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക.

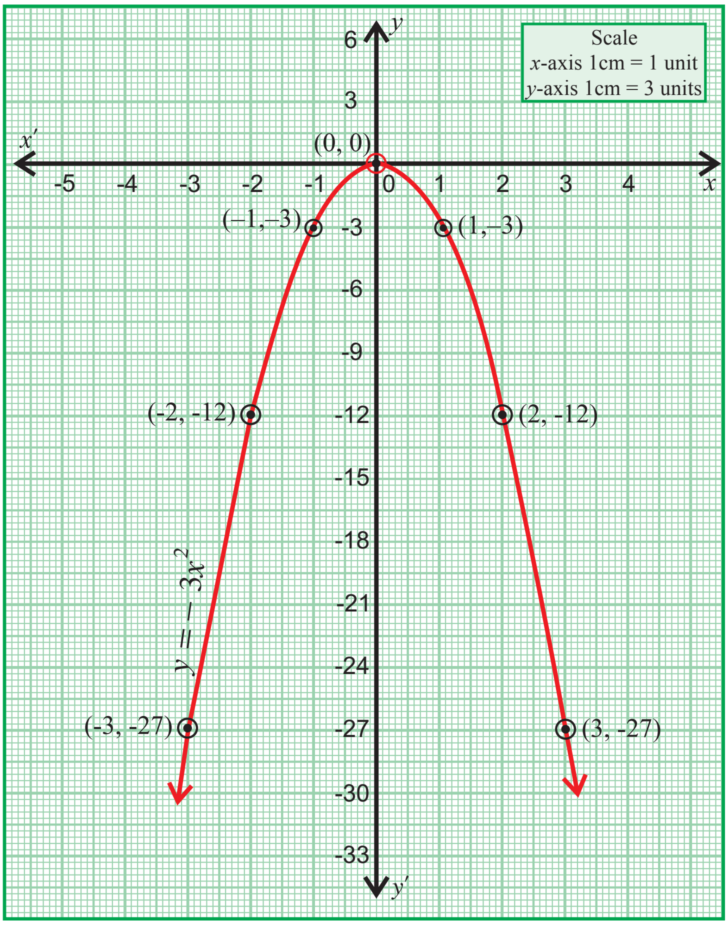
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = -3x^2$	-27	-12	-3	0	-3	-12	-27

(–3, –27), (–2, –12), (–1, –3), (0, 0), (1,–3), (2, –12), (3, –27) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ കുറിച്ച് ഒരു ഒഴുക്കൻ വക്രമായി യോജിപ്പിക്കുക. ഇപ്പോൾ $y = -3x^2$ എന്ന ഗ്രാഫ് കിട്ടുന്നു.

കുറിപ്പ്

(i) ഋണ സംഖ്യയായതിനാൽ $y = -3x^2$ എന്ന ഗ്രാഫ് x അക്ഷത്തിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്ത് വരുന്നില്ല.

(ii) ഗ്രാഫ് y അക്ഷത്തെ സംബന്ധിച്ച് പ്രതിസാമ്യമാണ്.



ചിത്രം.10.2

10.2.1 $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന് ഗ്രാഫ് മുഖേന നിർദ്ധാരണം

ആദ്യം ദ്വിഘാത സമീകരണം $y = ax^2 + bx + c$ യുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. വക്രരേഖ x അക്ഷത്തിൽ ഛേദിച്ചാൽ, വക്രരേഖയും x അക്ഷവും സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ x നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളാണ് തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ.

ഉദാഹരണം 10.3

$x^2 - 2x - 3 = 0$ എന്ന ഗ്രാഫ് വരച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

നിർദ്ധാരണം

$y = x^2 - 2x - 3$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാം

x നു -3 മുതൽ 4 വരെയുള്ള പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ എടുത്ത് y യുടെ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ച് പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക.

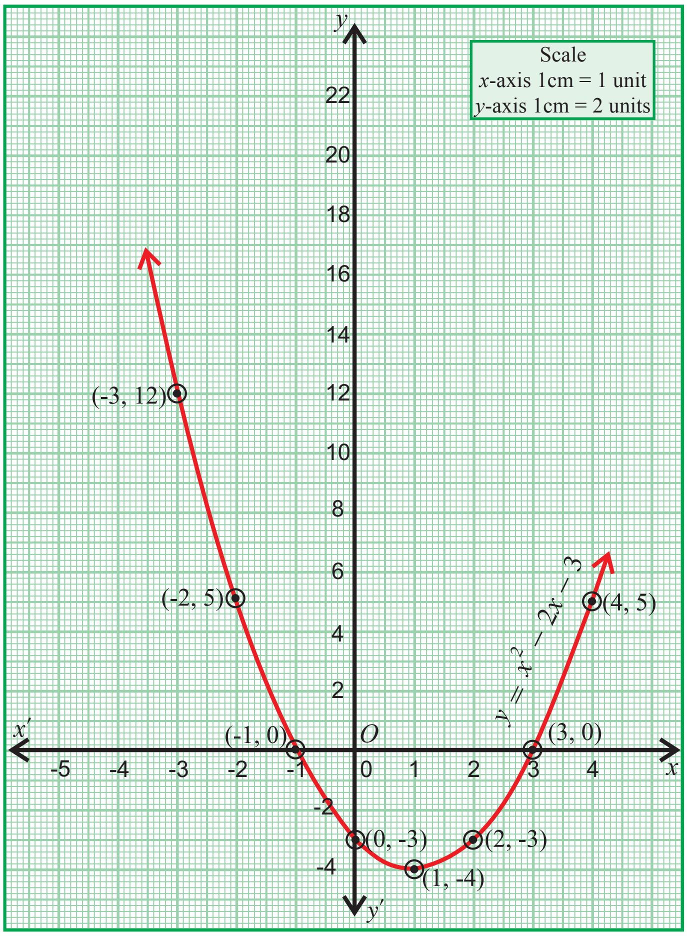
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	9	4	1	0	1	4	9	16
$-2x$	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
y	12	5	0	-3	-4	-3	0	5

$(-3, 12), (-2, 5), (-1, 0), (0, -3), (1, -4), (2, -3), (3, 0), (4, 5)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഗ്രാഫ് ഷീറ്റിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി, ഒരു ഒഴുക്കൻ വക്രമായി യോജിപ്പിക്കുക.

ഈ വക്രം x അക്ഷത്തെ $(-1, 0), (3, 0)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

ഈ ബിന്ദുക്കളുടെ x നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $-1,3$ ആണ്.

നിർദ്ധാരണഗണം = $\{-1, 3\}$.



ചിത്രം. 10.3

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

(i) x അക്ഷത്തിൽ എല്ലായ്പ്പോഴും $y = 0$ ആയിരിക്കും

(ii) y യുടെ മൂല്യങ്ങൾ ധനസംഖ്യകളും ഋണസംഖ്യകളും ആകുന്നു. അതിനാൽ വക്രം x അക്ഷത്തിന്റെ മുകളിലും താഴെയും സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

(iii) $x= 1$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ വക്രം പ്രതിസാമ്യമാണ്. ഇത് y അക്ഷത്തിനു പ്രതിസാമ്യമല്ല.

ഉദാഹരണം 10.4

$2x^2 + x - 6 = 0$ എന്ന ഗ്രാഫ് വരച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

നിർദ്ധാരണം

$x = -3$ മുതൽ 3 വരെയുള്ള മൂല്യങ്ങൾ എടുത്ത് സമാനമായ $y = 2x^2 + x - 6$ ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ച് പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക.

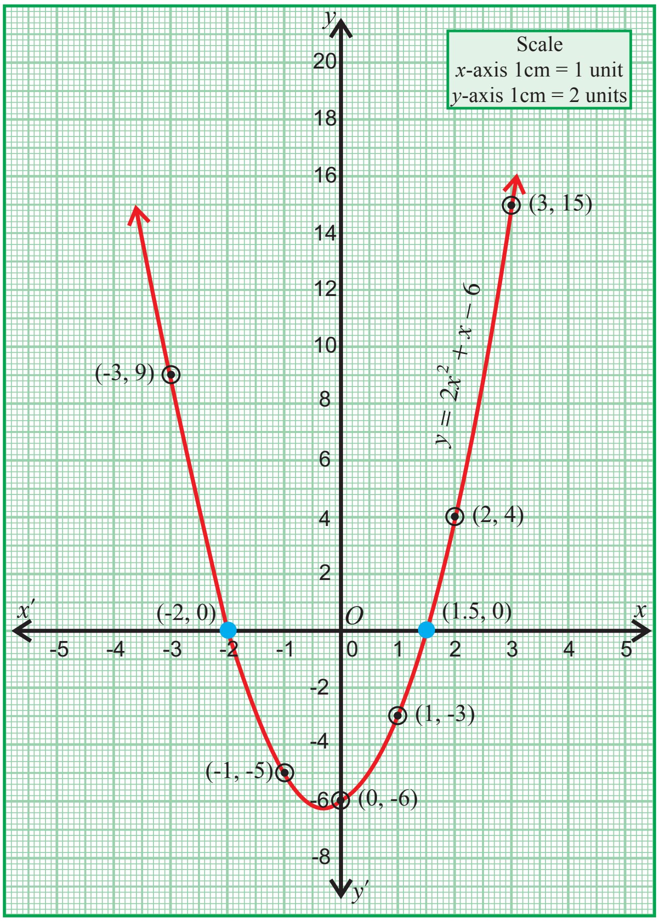
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6
y	9	0	-5	-6	-3	4	15

$(-3, 9), (-2, 0), (-1, -5), (0, -6), (1, -3), (2, 4), (3, 15)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഗ്രാഫ് ഷീറ്റിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി, ഒരു ഒഴുക്കൻ വക്രമായി യോജിപ്പിക്കുക

ഇപ്പോൾ $y = 2x^2 + x - 6$ ന്റെ ഗ്രാഫ് കിട്ടുന്നു.

വക്രം x അക്ഷത്തെ $(-2, 0)$ $(1.5, 0)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കളുടെ x നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $-2, 1.5$ ആകുന്നു

അതിനാൽ, നിർദ്ധാരണ ഗണം $= \{-2, 1.5\}$.



ചിത്രം. 10.4

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

$2x^2 + x - 6 = 0$ യെ ഗ്രാഫ് മുഖേന താഴെ പറയുന്നവിധത്തിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം

(i) $y = 2x^2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക

(ii) $y = 6 - x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക

(iii) രണ്ടുഗ്രാഫുകളും പ്രതിഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ x നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങളാണ് $2x^2 + x - 6 = 0$ ന്റെ നിർദ്ധാരണം.

ഉദാഹരണം 10.5

$y = 2x^2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $2x^2 + x - 6 = 0$ എന്ന സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം

$y = 2x^2$ എന്നതിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാം. $y = 2x^2$ ന്റെ പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

$(-3, 18)$, $(-2, 8)$, $(-1,2)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 8)$, $(3, 18)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഗ്രാഫിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

ബിന്ദുക്കളെ ഒരു ഒഴുക്കൻ വക്രമായി യോജിപ്പിക്കുക.

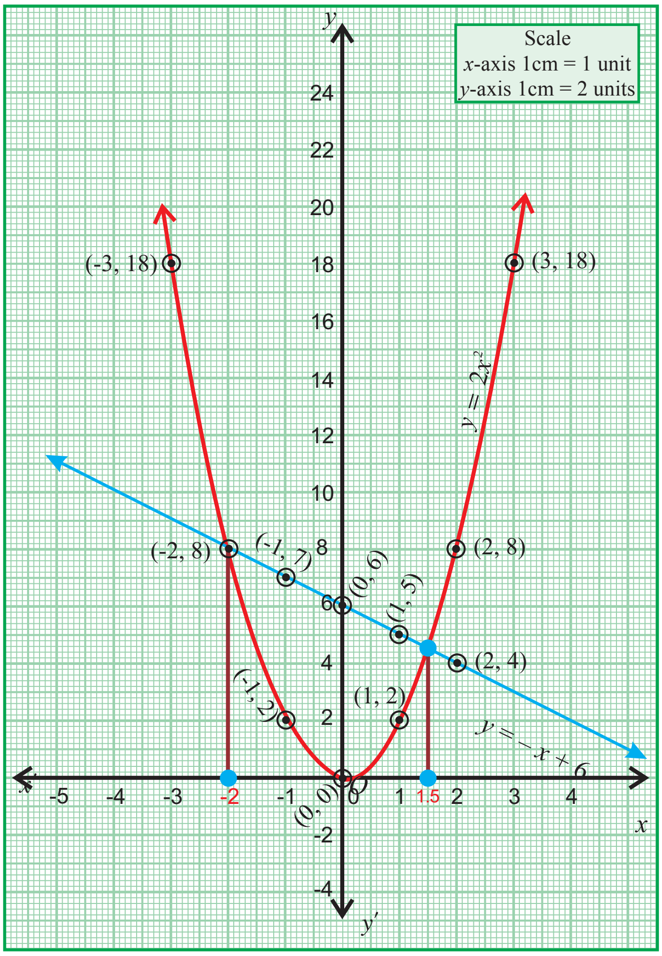
$2x^2 + x - 6 = 0$ യുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുന്നതിന് $y = 2x^2$, $2x^2 + x - 6 = 0$ എന്നീ സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യേണ്ടതാണ്.

ഇപ്പോൾ $2x^2 + x - 6 = 0$.

$\Longrightarrow \quad y + x - 6 = 0$, $y = 2x^2$ ആയതിനാൽ

$y = -x + 6$

$2x^2 + x - 6 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ $y = 2x^2$, $y = -x + 6$ എന്നീ സമീകരണങ്ങളുടെ പ്രതിച്ഛേദബിന്ദുക്കളുടെ x നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളാണ്.



ചിത്രം. 10.5

നേർരേഖ $y = -x + 6$ ന് പട്ടിക തയ്യാറാക്കാം

x	-1	0	1	2
$y = -x + 6$	7	6	5	4

ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിച്ച് നേർരേഖ വരയ്ക്കുക.

നേർരേഖയുടെയും വക്രത്തിന്റെയും പ്രതിച്ഛേദബിന്ദുക്കൾ $(-2 , 8)$,$(1.5 , 4.5)$ ആകുന്നു. അവയുടെ x നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $-2, 1.5$ ആണ്.

$2x^2 + x - 6 = 0$ ന്റെ നിർദ്ധാരണഗണം $= \{-2 , 1.5\}$

ഉദാഹരണം 10.6

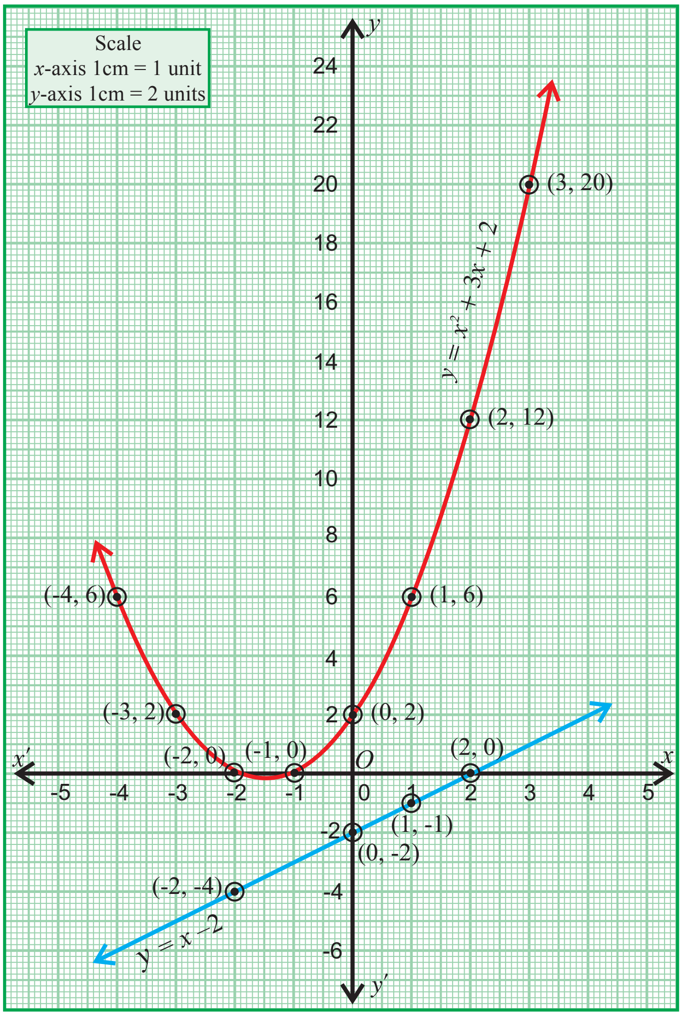
$y = x^2 + 3x + 2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $x^2 + 2x + 4 = 0$ എന്ന സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം

ആദ്യം നമുക്ക് $y = x^2 + 3x + 2$ ന്റെ പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9
$3x$	–12	–9	–6	–3	0	3	6	9
2	2	2	2	2	2	2	2	2
y	6	2	0	0	2	6	12	20

(–4, 6), (–3, 2), (–2, 0), (–1, 0), (0, 2), (1, 6), (2, 12) ,(3, 20) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.



ചിത്രം. 10.6

ബിന്ദുക്കളെ ഒരു ഒഴുക്കൻ വക്രമായി യോജിപ്പിക്കുക $y = x^2 + 3x + 2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് കിട്ടുന്നു.

ഇപ്പോൾ, $x^2 + 2x + 4 = 0$

$\implies x^2 + 3x + 2 - x + 2 = 0$

$\implies y = x - 2 \quad \because y = x^2 + 3x + 2$

$x^2 + 2x + 4 = 0$ ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ $y = x - 2$, $y = x^2 + 3x + 2$ എന്നീ ഗ്രാഫുകളുടെ പ്രതിച്ഛേദബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും കിട്ടുന്നു.

ആദ്യം നമുക്ക് $y = x - 2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാം. ഇപ്പോൾ $y = x - 2$ ന്റെ പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക.

x	–2	0	1	2
$y = x - 2$	–4	–2	–1	0

$y = x - 2$ എന്ന നേർരേഖ $y = x^2 + 3x + 2$ എന്ന വക്രത്തെ പ്രതിച്ഛേദിക്കുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് $x^2 + 2x + 4 = 0$ന് വാസ്തവിക മൂലങ്ങൾ ഇല്ല.

അഭ്യാസം 10.1

1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

   (i) $y = 3x^2$

   (ii) $y = -4x^2$

   (iii) $y = (x + 2)(x + 4)$

   (iv) $y = 2x^2 - x + 3$

2. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളെ ഗ്രാഫ് മുഖേന നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

   (i) $x^2 - 4 = 0$

   (ii) $x^2 - 3x - 10 = 0$

   (iii) $(x - 5)(x - 1) = 0$

   (iv) $(2x + 1)(x - 3) = 0$

3. $y = x^2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $x^2 - 4x - 5 = 0$ എന്ന സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.
4. $y = x^2 + 2x - 3$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $x^2 - x - 6 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ കാണുക
5. $y = 2x^2 + x - 6$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $2x^2 + x - 10 = 0$ എന്ന സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.
6. $y = x^2 - x - 8$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $x^2 - 2x - 15 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ കാണുക
7. $y = x^2 + x - 12$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $x^2 + 2x + 2 = 0$ എന്ന സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

10.3 ചില പ്രത്യേകതരം ഗ്രാഫുകൾ

ഈ വിഭാഗത്തിൽ

(i) സമാനുപാത മാറ്റം (ii) വിപരീതാനുപാത മാറ്റം

എന്നീ രണ്ടു തരങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ വരയ്ക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് പഠിക്കാം

y, x നോട് നേർ അനുപാതത്തിലാണെങ്കിൽ, $y = kx$ (k ചില ധനസംഖ്യകൾ) ആകുന്നു. ഇവിടെ ചരങ്ങൾ സമാനുപാതത്തിലാണെന്ന് പറയാം. ഗ്രാഫ് ഒരു നേർരേഖയാകുന്നു.

y, xനോട് വിപരീത അനുപാതത്തിലാണെങ്കിൽ, $y = \frac{k}{x}$ (k ചില ധനസംഖ്യകൾ)ആകുന്നു. ഇവിടെ ചരങ്ങൾ വിപരീതാനുപാതമാറ്റത്തിലാണെന്ന് പറയാം. ഇതിന്റെ ഗ്രാഫ് ഒരു വക്രരേഖയാണ്. ഇത് ദീർഘചതുര ഹൈപ്പർബൊള എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. (ദീർഘചതുര ഹൈപ്പർബൊളയുടെ സമവാക്യം $xy = k,\ k > 0$ ആകുന്നു.)

ഉദാഹരണം 10.7

താഴെ പറയുന്ന പട്ടികയ്ക്ക് ഗ്രാഫ് വരച്ച് ഏതുതരം മാറ്റമാണ് ഉൾക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നത് എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക. മാറ്റത്തിന്റെ അനുപാത സ്ഥിരത കാണുക.

x	2	3	5	8	10
y	8	12	20	32	40

$x = 4$ ആകുമ്പോൾ y യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

പട്ടികയിൽ നിന്നും x കൂടുമ്പോൾ y ഉം കൂടുന്നതായി കാണാം. അതുകൊണ്ട് ഇത് സമാനുപാതമാറ്റത്തിലാണ്.

$y \propto k$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതിനാൽ, $y = kx$

$\Longrightarrow \quad \frac{y}{x} = k$ ഇതിൽ k അനുപാതസ്ഥിരത

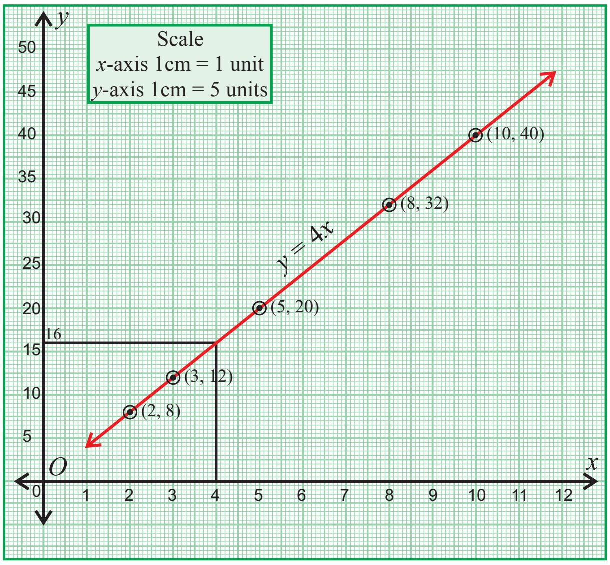
തന്നിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ നിന്നും.

$$k = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \cdots = \frac{40}{10}. \quad \therefore\ k = 4$$

$y = 4x$ എന്ന ബന്ധം ഒരു നേർരേഖയുടെ ഗ്രാഫ് ആണ്.

(2, 8), (3, 12), (5, 20), (8, 32) , (10, 40) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ നേർരേഖ കിട്ടുന്നു.

x=4 ആകുമ്പോൾ $y = 4x = 16$ എന്നത് വ്യക്തമാണ്.



ചിത്രം. 10.7

ഉദാഹരണം 10.8

ഒരു സൈക്കിൾ യാത്രക്കാരൻ A യിൽ നിന്നും B യിലേക്ക് ഒരു വഴിയിലൂടെ നിശ്ചിതവേഗതയിൽ വ്യത്യസ്ത ദിവസങ്ങളിൽ സഞ്ചരിച്ചു. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പട്ടിക അദ്ദേഹത്തിന്റെ സഞ്ചാരവേഗതയും, അതിനെടുത്ത സമയവും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

വേഗത (കി.മി./മണിക്കൂർ) x	2	4	6	10	12
സമയം മണിക്കൂർ y	60	30	20	12	10

വേഗത - സമയം ഗ്രാഫ് വരച്ച് അതുപയോഗിച്ച്

(i) അദ്ദേഹം മണിക്കൂറിൽ 5 കി.മീ. വേഗതയിൽ സഞ്ചരിച്ചാൽ ആവശ്യമായ സമയം കാണുക.

(ii) അദ്ദേഹം നിശ്ചിത ദൂരം സഞ്ചരിക്കാൻ 40 മണിക്കൂർ എടുത്തുവെങ്കിൽ, വേഗത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

പട്ടികയിൽ നിന്ന് x കൂടുമ്പോൾ y കുറയുന്നതായികാണാം. ഇത്തരം മാറ്റത്തെ വിപരീതാനുപാതമാറ്റം എന്നു പറയുന്നു. അതിനാൽ $xy = \mathrm{k}$ ആകുന്നു.

ഇവിടെ $xy = 120$.

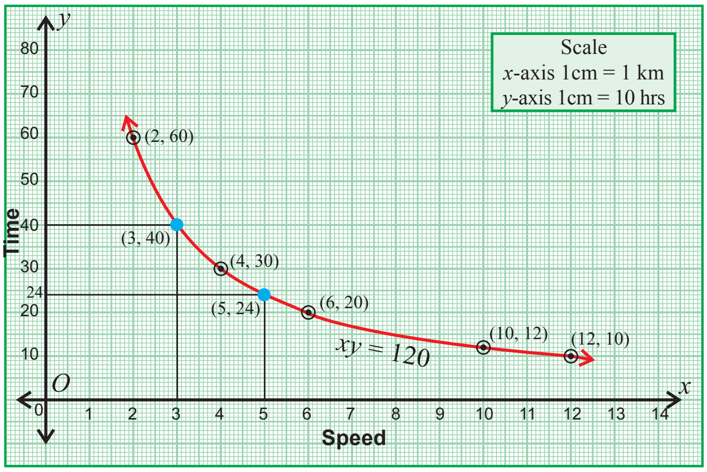
$$y = \frac{120}{x}.$$

(2 , 60), (4 , 30), (6 , 20), (10 , 12) ,(12 ,10) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ അടയാളപ്പെടുത്തി ഒരു ഒഴുക്കൻ വക്രമായി യോജിപ്പിക്കുക.

ഗ്രാഫിൽ നിന്നും

(i) മണിക്കൂറിൽ 5 കി.മീ. വേഗതയിൽ സഞ്ചരിച്ചാൽ ആവശ്യമായ സമയം 24 മണിക്കൂർ ആകുന്നു.

(ii) സഞ്ചരിക്കാൻ 40 മണിക്കൂർ എടുത്തപ്പോൾ സഞ്ചാരവേഗത 3 കി.മീ. / മണിക്കൂർ ആകുന്നു.



ചിത്രം. 10.8

ഉദാഹരണം 10.9

ഒരു ബാങ്ക് മുതിർന്ന പൗരൻമാരുടെ നിക്ഷേപങ്ങൾക്ക് 10% സാധാരണ പലിശ നൽകുന്നു. നിക്ഷേപത്തുകയും ഒരു വർഷപലിശയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച്

(i) ₹650 നിക്ഷേപിച്ചാൽ പലിശ

(ii) ₹45 പലിശ കിട്ടുന്നതിന് നിക്ഷേപതുക എന്നിവ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

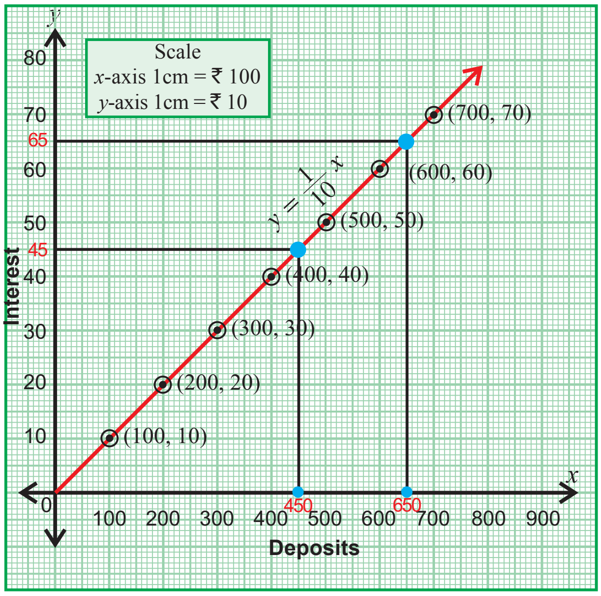
താഴെ പറയുന്ന പട്ടിക തയ്യാറാക്കാം.

നിക്ഷേപം ₹ x	100	200	300	400	500	600	700
പലിശ ₹ y	10	20	30	40	50	60	70

$y = \frac{1}{10}x$ എന്നത് വ്യക്തമാണ്. കൂടാതെ ഗ്രാഫ് ഒരു നേർരേഖയാണ്. പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക ഗ്രാഫിൽ നിന്നും നമുക്ക് കാണാൻ കഴിയുന്നത്.

(i) ₹650 നിക്ഷേപിക്കുമ്പോൾ പലിശ ₹65 ആകുന്നു.

(ii) പലിശ ₹45 കിട്ടുമ്പോൾ നിക്ഷേപതുക ₹450 ആകുന്നു.



ചിത്രം. 10.9

അഭ്യാസം 10.2

1. ഒരു ബസ് മണിക്കൂറിൽ 40 കി.മീ. വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ദൂരസമയസൂത്രം എഴുതി അതിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. ഇത് ഉപയോഗിച്ച് 3 മണിക്കൂറിൽ യാത്ര ചെയ്യുന്ന ദൂരം കാണുക.

2. താഴെകൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ, വാങ്ങിയ നോട്ടുബുക്കുകളുടെ എണ്ണവും വിലയും കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

നോട്ട്ബുക്കിന്റെ എണ്ണം x	2	4	6	8	10	12
വില ₹ y	30	60	90	120	150	180

ഗ്രാഫ് വരച്ച് അതിൽ നിന്നും (i) 7 നോട്ട് ബുക്കിന്റെ വില കാണുക.

(ii) ₹ 165ന് എത്ര നോട്ടുബുക്കുകൾ വാങ്ങാം.

3.

സമചതുരത്തിന്റെ വശം സെ.മീ. x	1	3	5	7	8
വിസ്തീർണ്ണം സെ.മീ. y	2	6	10	14	16

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പട്ടികയ്ക്ക് ഗ്രാഫ് വരച്ച് അതിൽ നിന്ന്

(i) $x = 4$ എങ്കിൽ y യുടെ മൂല്യം ? (ii) $y = 12$ എങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം കാണുക?

4. 1 ലിറ്റർ പാലിന്റെ വില ₹ 25 ആണ്. പാലിന്റെ അളവിനും വിലയ്ക്കും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് താഴെ പറയുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

   (i) ആനുപാതിക സ്ഥിരത.

   (ii) 3 ലിറ്റർ പാലിന്റെ വില.

5. $xy = 20$, $x, y > 0$ എന്നതിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. അതുപയോഗിച്ച് $x = 5$ ആകുമ്പോൾ y ന്റെ മൂല്യവും $y = 10$ ആകുമ്പോൾ, x ന്റെ മൂല്യവും കാണുക.

6.

തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം x	3	4	6	8	9	16
ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം y	96	72	48	36	32	18

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പട്ടികയിലെ അളവുകൾക്ക് ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. അതുപയോഗിച്ച് 12 തൊഴിലാളികൾക്ക് ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ ആവശ്യമായ ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക.

ശ്രദ്ധാർഹമായ ഉദ്ധരണികൾ

1. ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിൽ ഒരു ചോദ്യ ആവിഷ്ക്കരണത്തിന്റെ കല അതിന്റെ നിർദ്ധാരണത്തിനെക്കാൾ ഉയർന്നതാണ് - ജോർജ് കേന്റർ

2. മറ്റെല്ലാ ശാസ്ത്രങ്ങളെക്കാൾ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന് പ്രത്യേക ആദരവ് കിട്ടുന്നതിന് കാരണം അതിന്റെ നിയമങ്ങൾ അസന്നിഗ്ദവും തർക്കമറ്റതുമാണ്. എന്നാൽ മറ്റ് ശാസ്ത്രങ്ങൾ ഒരു പരിധിവരെ വാദിക്കത്തക്കതും പുതുതായി കണ്ടുപിടിക്കുന്ന വസ്തുതകളാൽ പുറന്തള്ളപ്പെടാനുള്ള അപകടസാധ്യത ഉള്ളവയാണ് - ആൽബർട്ട് ഐൻസ്റ്റീൻ

11

സാംഖ്യികം

It is easy to lie with statistics. It is hard to tell the truth without it
-Andrejs Dunkels

- മുഖവുര
- വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ അളവുകൾ
  - പരിസരം
  - വ്യതിയാനം
  - പ്രമാണ വിചലനം
- വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം

കാൾ പിയേഴ്സൺ

(1857-1936)

ഇംഗ്ലണ്ട്

ബ്രിട്ടീഷ് സ്ഥിതി വിവര ശാസ്ത്രജ്ഞനായ കാൾ പിയേഴ്സൺ ആധുനിക സ്ഥിതി വിവര ശാസ്ത്ര മേഖലയുടെ മുഖ്യ സ്ഥാപകനാണ്. അദ്ദേഹം ഗണിത ശാസ്ത്ര സ്ഥിതി വിവര കണക്കിന്റെ വ്യവസ്ഥിതി ദൃഢീകരിച്ചു.

അദ്ദേഹം ഭൗതി ക ശാസ്ത്രത്തിൽ നിന്നും കടം എടുത്ത ചലനങ്ങൾ എന്ന ആശയത്തെ പരിചയപ്പെടുത്തി. പിൽക്കാലത്ത് ഐൻസ്റ്റീനിന്റേയും മറ്റു ശാസ്ത്ര ജ്ഞൻമാരുടേയും സിദ്ധാന്തങ്ങളുടെ ഭാഗമായി മാറിയ ധാരാളം പ്രമേയങ്ങൾ അദ്ദേഹത്തിന്റെ പുസ്തകമായ 'The Grammar of Science' ൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു.

11.1 മുഖവുര

ക്രോക്സ്സ്ടൺ, കൗഡൻ എന്നിവരുടെ അഭിപ്രായത്തിൽ സാംഖ്യികത്തെ സംഖ്യാപരമായ വിവരങ്ങളുടെ ശേഖരണം, അവതരണം, വിശകലനം, വ്യാഖ്യാനം എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു. സാംഖ്യിക ശാസ്ത്രം ഗണിതത്തിന്റെ അത്യന്താപേക്ഷിതമായ ഒരു ശാഖയാണെന്ന് പ്രൊഫ. ആർ.എ.ഫിഷർ അഭിപ്രായപ്പെടുന്നു. കൂടാതെ ഗണിത ശാസ്ത്രത്തെ നിരീക്ഷണ വിവരങ്ങളിൽ പ്രയോഗിക്കാമെന്ന് അദ്ദേഹം അഭിപ്രായപ്പെട്ടു. പ്രൊഫസർ. ഹൊറേൽ സെക്രിസ്റ്റ് സാംഖ്യികത്തെ ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വിധത്തിൽ നിർവ്വചിച്ചു.

ഹോറേസ് സെക്റിസ്റ്റ് സാഖ്യികത്തെ താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ നിർവ്വചിക്കുന്നു. സാഖ്യികം എന്നത് പലവിധ കാരണങ്ങളാൽ നിശ്ചിത അളവിൽ ബാധിക്കപ്പെട്ട വിവരങ്ങളുടെ ശേഖരണമാണ്. ഈ വിവരങ്ങൾ സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് രേഖപ്പെടുത്തി, ക്രമപ്പെടുത്തി അല്ലെങ്കിൽ കൃത്യമായി നിർണ്ണയിച്ച് നേരത്തേ തീരുമാനിക്കപ്പെട്ട ലക്ഷ്യത്തിനായി അവയെ ക്രമമായി ശേഖരിക്കുന്നതും അവയ്ക്കിടയിലുള്ള ബന്ധങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതുമാണ് സാംഖ്യികം.

ജെ.എഫ്. ബറോൺ പ്രപഞ്ച പാണ്ഡിത്യത്തിന്റെ മൂലതത്വം എന്ന പുസ്തകത്തിലാണ് ആദ്യമായി സാംഖ്യികം എന്ന പദം ഉപയോഗിച്ചത്. ആധുനിക കാലങ്ങളിൽ, സാംഖ്യികം വിവരശേഖരണം അവയുടെ പട്ടികാ രൂപത്തിലും ചിത്രരൂപത്തിലുമുള്ള അവതരണം എന്നിവ മാത്രമായിരുന്നില്ല. സസൂക്ഷ്മം നിരീക്ഷിച്ച വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന് അനിശ്ചിത സന്ദർഭങ്ങളിൽ എല്ലാ പ്രശ്നങ്ങൾക്കും പരിഹാരം കാണുന്നതും, അനുമാനിക്കുന്നതുമായ ശാസ്ത്രീയ തത്വങ്ങൾ നിറഞ്ഞ ശാഖയായി ഇത് പരിഗണിക്കുന്നു.

കേന്ദ്ര പ്രവണതയുടെ അളവുകളായ മാധ്യം, മീഡിയൻ, മോഡ് എന്നിവയെക്കുറിച്ച് നാം മുമ്പ് പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. വിതരണത്തിന്റെ കേന്ദ്ര ഭാഗത്തുള്ള നിരീക്ഷണങ്ങളെ ഏകീകരിക്കുന്ന ആശയം അവ നമുക്ക് നൽകുന്നു. വിതരണത്തിന്റെ മുഴുവൻ ആശയവും കേന്ദ്ര പ്രവണതയുടെ അളവുകൾക്ക് നൽകാൻ കഴിയുന്നില്ല.

ഉദാഹരണമായി, ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ശ്രേണികളെ പരിഗണിക്കുക.

1. 82,74,89,95
2. 120,62,28,130 രണ്ട് വിതരണങ്ങൾക്കും ഒരേ മാധ്യം 85 ആണ്.

ആദ്യത്തേതിൽ സംഖ്യകൾ മാധ്യം 85-നോട് അടുത്താണ്. എന്നാൽ രണ്ടാമത്തെ ശ്രേണിയിൽ സംഖ്യകൾ മാധ്യത്തിൽ നിന്നും വളരെ അകലെയാണ്. അതിനാൽ കേന്ദ്ര പ്രവണതയുടെ അളവുകൾ നമ്മെ ശരിയായ നിഗമനത്തിൽ

എത്തിക്കുന്നില്ല. മാധ്യത്തിനു ചുറ്റും വിവരങ്ങൾ എത്ര മാത്രം വ്യാപിച്ചിരിക്കുന്നു എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്ന അളവ് നമുക്ക് ആവശ്യമാണ്.

11.2 വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ അളവുകൾ

വിവരങ്ങളുടെ വിതരണം എന്ത് മാത്രം വ്യാപിച്ചിരിക്കുന്നു എന്നതിനെക്കുറിച്ചുള്ള ആശയം, വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ അളവുകൾ തരുന്നു. പരിസരം (R), ചതുർത്ഥക വിചലനം (Q.D), മാധ്യ വിചലനം (M.D), പ്രമാണ വിചലനം (S.D) എന്നിവ വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ അളവുകളാണ്. അവയിൽ ചിലത് നമുക്ക് വിശദമായി പഠിക്കാം.

11.2.1 പരിസരം

വ്യതിയാന വ്യാപ്തികളിൽ ഏറ്റവും ലളിതമായ അളവാണ് പരിസരം. ഒരു കൂട്ടം പ്രാപ്താങ്കങ്ങളിൽ ഏറ്റവും വലുതും ഏറ്റവും ചെറുതും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ് പരിസരം.

$\therefore$ പരിസരം = ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യം − ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം

$= L - S.$

പരിസരത്തിന്റെ ഗുണാങ്കം $= \dfrac{L-S}{L+S}$

ഉദാഹരണം 11.1

43, 24, 38, 56, 22, 39, 45 എന്നീ വിവരങ്ങളുടെ പരസരവും പരിസരത്തിന്റെ ഗുണാങ്കവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളെ ആരോഹണ ക്രമത്തിൽ ക്രമീകരിക്കുക.

22, 24, 38, 39, 43, 45, 56.

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന്, ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യം $L = 56$, ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം $S = 22$.

$\therefore$ പരിസരം $= L - S$

$= 56 - 22 = 34$

പരിസരത്തിന്റെ ഗുണാങ്കം $= \dfrac{L-S}{L+S}$

$= \dfrac{56-22}{56+22} = \dfrac{34}{78} = 0.436.$

ഉദാഹരണം 11.2

ഒരു ക്ലാസ്സിലെ 13 വിദ്യാർത്ഥികളുടെ തൂക്കം (കി.ഗ്രാമിൽ) 42.5, 47.5, 48.6, 50.5, 49, 46.2, 49.8, 45.8, 43.2, 48, 44.7, 46.9, 42.4. ആണ്. അവയുടെ പരിസരവും പരിസരത്തിന്റെ ഗുണാങ്കവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളെ ആരോഹണക്രമത്തിൽ ക്രമീകരിക്കുക.

42.4, 42.5, 43.2, 44.7, 45.8, 46.2, 46.9, 47.5, 48, 48.6, 49, 49.8, 50.5

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന്, ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യം $L = 50.5$ ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം $S = 42.4$

പരിസരം $= L - S$

$= 50.5 - 42.4 = 8.1$

പരിസരത്തിന്റെ ഗുണാങ്കം $= \dfrac{L-S}{L+S} = \dfrac{50.5-42.4}{50.5+42.4} = \dfrac{8.1}{92.9}$

$= 0.087.$

ഉദാഹരണം 11.3

വിവരങ്ങളുടെ ശേഖരണത്തിലെ ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യം 7.44. പരിസരം 2.26, എങ്കിൽ ആ ശേഖരണത്തിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം പരിസരം = ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യം – ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം

$\Longrightarrow$ 7.44 – ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം= 2.26

$\therefore$ ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം = 7.44 – 2.26 = 5.18.

11.2.2 പ്രമാണ വിചലനം

വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ അളവ് കാണുന്നതിന്, വിവരങ്ങളുടെ ഓരോ മൂല്യത്തിൽ നിന്നും മാധ്യത്തെ കുറച്ച് വർഗ്ഗം കണ്ട്, വർഗ്ഗങ്ങളുടെ ശരാശരി കാണേണ്ടതാണ്. ഈ വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ അളവിനെ വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി എന്നും അതിന്റെ ധനവർഗ്ഗമൂലത്തെ പ്രമാണ വിചലനം എന്നും പറയുന്നു. വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി എല്ലായ്പ്പോഴും ധനമാണ്.

ഗാസ്സ് (Gauss) ഉപയോഗിച്ച 'മാധ്യപിശക് ' (Mean error) എന്ന പദത്തിനു പകരം 1894-ൽ കാൾപിയേഴ്സൺ പ്രമാണ വിചലനം എന്ന പദം ഉപയോഗിച്ചു.

വിവരങ്ങളുടെ അതേ മാത്രകളിൽ പ്രമാണ വിചലനവും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അത് മാധ്യത്തിൽ നിന്നും എത്ര വ്യതിയാനത്തിലാണെന്ന് പ്രകടമാണ്. കുറഞ്ഞ പ്രമാണവിചലനം വിവരങ്ങൾ മാധ്യത്തോട് വളരെ അടുത്താണെന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. നേരെ മറിച്ച് കൂടിയ പ്രമാണവിചലനം വിവരം മൂല്യങ്ങളുടെ കൂടിയ അന്തരത്തിൽ വ്യാപിച്ചിരിക്കുന്നു എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$\overline{x}$, σ എന്നിവ യഥാക്രമം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ഒരു വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം, പ്രമാണവിചലനം എന്നിവയെയാണ്. വിവരങ്ങളുടെ സ്വഭാവത്തെ ആശ്രയിച്ച് അവയെ ആരോഹണ ക്രമത്തിലോ, അവരോഹണ ക്രമത്തിലോ ക്രമീകരിച്ച് പല രീതികളിൽ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സൂത്രങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് പ്രമാണവിചലനം കണക്കാക്കാം.
(സൂത്രങ്ങൾക്ക് തെളിവുകൾ ആവശ്യമില്ല).

വിവരം	പ്രത്യക്ഷരീതി	യഥാർത്ഥ മാധ്യ രീതി	അഭ്യൂഹ മാധ്യ രീതി	സ്റ്റെപ്പ് ഡീവിയേഷൻ രീതി
തരം തിരിക്കാത്ത	$\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}-\left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$ $d=x-\overline{x}$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}-\left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$ $d=x-A$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}-\left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}\times c$ $d=\frac{x-A}{c}$
തരം തിരിച്ച		$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}-\left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}-\left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}\times c$

കുറിപ്പ്

n ഇനങ്ങളുടെ (സംഖ്യകൾ) ശേഖരണത്തിന് താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ ശരിയാണ്.

$$\sum(x-\overline{x})=0\ ,\quad \sum x = nx\ ,\quad \sum \overline{x} = n\overline{x}.$$

(i) പ്രത്യക്ഷ രീതി

ഇനങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ എളുപ്പത്തിൽ ലഭിക്കുമ്പോൾ ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കാൻ കഴിയും.

ഈ രീതിയിൽ പ്രമാണവിചലനം കാണുന്ന സൂത്രം $=\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}-\left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

ഉദാഹരണം 11.4

ഒരു മാസത്തിൽ 8 വിദ്യാർത്ഥികൾ വായിക്കുന്ന ഗ്രന്ഥങ്ങളുടെ എണ്ണം

2, 5, 8, 11, 14, 6, 12, 10. വിവരങ്ങളുടെ പ്രമാണവിചലനം കണക്കാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

x	x^2
2	4
5	25
6	36
8	64
10	100
11	121
12	144
14	196
$\sum x=68$	$\sum x^2=690$

ഇനങ്ങളുടെ എണ്ണം, $n = 8$

പ്രമാണവിചലനം, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{690}{8} - \left(\frac{68}{8}\right)^2}$

$= \sqrt{86.25 - (8.5)^2}$

$= \sqrt{86.25 - 72.25}$

$= \sqrt{14} \simeq 3.74.$

(ii) യഥാർത്ഥ മാധ്യ രീതി

മാധ്യം ഒരു ഭിന്നമല്ലാതിരുന്നാൽ ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കാൻ കഴിയും.

ഈ രീതിയിൽ, പ്രമാണവിചലനം $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\overline{x})^2}{n}}$ അല്ലെങ്കിൽ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$, $d = x - \overline{x} =$

ഉദാഹരണം 11.5

ഒരു ക്ലാസ്സിൽ പൊതുവിജ്ഞാന പരീക്ഷ നടത്തിയതിൽ 40 മാർക്കിന് 6 വിദ്യാർത്ഥികൾ നേടിയ മാർക്കുകൾ 20, 14, 16, 30, 21 , 25. വിവരങ്ങളുടെ പ്രമാണവിചലനം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ഇപ്പോൾ സമാന്തര മാധ്യം $= \frac{\sum x}{n} = \frac{20 + 14 + 16 + 30 + 21 + 25}{6}$

$\Longrightarrow \quad \overline{x} = \frac{126}{6} = 21.$

നമുക്ക് താഴെ കാണുന്ന വിധം പട്ടിക രൂപീകരിക്കാം.

x	$d = x - \overline{x}$	d^2
14	-7	49
16	-5	25
20	-1	1
21	0	0
25	4	16
30	9	81
$\sum x = 126$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 172$

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{172}{6}}$

$= \sqrt{28.67}$

$\sigma \simeq 5.36.$

(iii) അഭ്യൂഹ മാധ്യ രീതി

തന്നിട്ടുള്ള വിവരത്തിന്റെ മാധ്യം പൂർണ്ണാങ്കമല്ലെങ്കിൽ നമുക്ക് പ്രമാണവിചലനം കണക്കാക്കുന്നതിന് അഭ്യൂഹ മാധ്യ രീതി ഉപയോഗിക്കാം. $x-A$ എന്ന വ്യത്യാസങ്ങൾ ചെറിയ സംഖ്യകൾ (പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ) വരത്തക്ക വിധം അനുയോജ്യമായ സംഖ്യ A യെ തെരഞ്ഞെടുക്കുക. സംഖ്യ A യെ അഭ്യൂഹമാധ്യം എന്നു പറയുന്നു. ഇത് മാധ്യത്തോട് അടുത്തസംഖ്യയായിരിക്കും.

$d = x - A$ ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് വ്യതിയാനങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

പ്രമാണവിചലനം, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$.

കുറിപ്പ്

അഭ്യൂഹ മാധ്യ രീതിയും സ്റ്റെപ് ഡീവിയേഷൻ രീതിയും പ്രത്യക്ഷ രീതിയുടെ ലഘൂകരിച്ച രൂപങ്ങളാണ്.

ഉദാഹരണം: 11.6

62, 58, 53, 50, 63, 52, 55 എന്നീ മൂല്യങ്ങളുടെ പ്രമാണവിചലനം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം അഭ്യൂഹ മാധ്യം A=55 എന്ന് എടുത്ത് താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വിധം പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക.

x	$d = x - A$ $= x - 55$	d^2
50	–5	25
52	–3	9
53	–2	4
55	0	0
58	3	9
62	7	49
63	8	64
	$\sum d = 8$	$\sum d^2 = 160$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{160}{7} - \left(\frac{8}{7}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{160}{7} - \frac{64}{49}}$$
$$= \sqrt{\frac{1056}{49}}$$
$$= \frac{32.49}{7}$$

$\therefore$ പ്രമാണവിചലനം $\sigma \simeq 4.64$

(iv) സ്റ്റെപ് ഡീവിയേഷൻ രീതി

ഒരു പൊതു ഘടകമുള്ള വലിയ സംഖ്യകളുടെ പ്രമാണവിചലനം കാണുന്നതിന് ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കാം. അഭ്യൂഹ മാധ്യം A തെരഞ്ഞെടുക്കുക. $d = \frac{x-A}{c}$, $x-A$ (c എല്ലാ ഇനങ്ങളുടേയും പൊതുഘടകം ഉപയോഗിച്ച് d കണക്കാക്കുക.

ഈ രീതിയിൽ, പ്രമാണവിചലനം $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c.$

ഉദാഹരണം 11.7

ഒരു പരീക്ഷയിൽ ഗണിതത്തിന് 10 വിദ്യാർത്ഥികൾ നേടിയ മാർക്കുകൾ 80, 70, 40, 50, 90, 60, 100, 60, 30, 80 പ്രമാണവിചലനം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം എല്ലാ വിവരങ്ങളുടേയും പൊതുഘടകം 10 ആണെന്ന് കാണാം. അഭ്യൂഹ മാധ്യം $A = 70$ എന്ന് എടുക്കുക. ഇനങ്ങളുടെ എണ്ണം $n = 10$.

$c = 10,\ d = \dfrac{x - A}{10}$ എന്നെടുത്ത് താഴെ കാണുന്ന പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക.

x	$d = \dfrac{x-70}{10}$	d^2
30	-4	16
40	-3	9
50	-2	4
60	-1	1
60	-1	1
70	0	0
80	1	1
80	1	1
90	2	4
100	3	9
	$\sum d = -4$	$\sum d^2 = 46$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{46}{10} - \left(\frac{-4}{10}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{46}{10} - \frac{16}{100}} \times 10 \qquad = \sqrt{\frac{460 - 16}{100}} \times 10$$

$\therefore$ പ്രമാണവിചലനം, $\sigma \simeq 21.07$.

മുകളിൽ പറഞ്ഞ പ്രത്യക്ഷരീതി, യഥാർത്ഥ മാധ്യരീതി, അഭ്യൂഹ മാധ്യരീതി, സ്റ്റെപ്പ് ഡിവിയേഷൻ രീതി എന്നിവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു രീതി ഉപയോഗിച്ചാൽ വിവരശേഖരണത്തിന്റെ പ്രമാണവിചലനം ലഭിക്കും. പ്രതീക്ഷിച്ചതു പോലെ ഒരേ വിവരങ്ങൾക്ക് വ്യത്യസ്ത രീതികൾ ഉപയോഗിച്ചാൽ വ്യത്യസ്ത ഉത്തരങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നില്ല. ഈ വസ്തുത താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണത്തിൽ വിശദീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. മുകളിൽ പ്രസ്താവിച്ച ഏതെങ്കിലും ഒരു രീതി വിദ്യാർത്ഥികൾ ഉപയോഗിക്കേണ്ടതാണ്.

ഫലങ്ങൾ

(i) ഒരു വിവരണത്തിലെ ഓരോ മൂല്യത്തിനോടും ഒരേ സംഖ്യ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യുമ്പോൾ പ്രമാണവിചലനം വ്യത്യാസപ്പെടുന്നില്ല.

(ii) ഒരു വിവരശേഖരണത്തിലെ ഓരോ മൂല്യത്തേയും പൂജ്യമല്ലാത്ത സ്ഥിരം k കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാലോ, ഹരിച്ചാലോ കിട്ടുന്ന പുതിയ പ്രമാണവിചലനം, ആദ്യത്തെ പ്രമാണ വിചലനത്തെ k കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയോ, ഹരിക്കുകയോ ചെയ്യുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയാണ്.

ഉദാഹരണം: 11.8

3, 5, 6, 7 എന്നീ വിവരങ്ങളുടെ പ്രമാണവിചലനം കാണുക. ഓരോ മൂല്യത്തിനോടും 4 വീതം കൂട്ടി പുതിയ വിവരത്തിന്റെ പ്രമാണവിചലനം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള വിവരം 3, 5, 6, 7

$A = 6$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

x	$d = x - 6$	d^2
3	-3	9
5	-1	1
6	0	0
7	1	1
	$\sum d = -3$	$\sum d^2 = 11$

പ്രമാണവിചലനം, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{11}{4} - \left(\frac{-3}{4}\right)^2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{35}}{4}$

തന്നിട്ടുള്ള വിവരത്തിലെ ഓരോ മൂല്യത്തോടും 4 കൂട്ടുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന പുതിയ വിവരം 7, 9, 10, 11

$A = 10$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

x	$d = x - 10$	d^2
7	-3	9
9	-1	1
10	0	0
11	1	1
	$\sum d = -3$	$\sum d^2 = 11$

പ്രമാണവിചലനം $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{11}{4} - \left(\frac{-3}{4}\right)^2}$

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{35}}{4}$

മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഉദാഹരണങ്ങൾ ഓരോ മൂല്യത്തിനോടും 4 കൂട്ടിയാൽ പ്രമാണവിചലനം മാറുന്നില്ല.

ഉദാഹരണം 11.9

40, 42 , 48 എന്നിവയുടെ പ്രമാണവിചലനം കാണുക. ഓരോ മൂല്യത്തേയും 3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ പുതിയ പ്രമാണവിചലനം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾ

40, 42, 48 പരിഗണിച്ച് σ കാണുക.

അഭ്യൂഹമാധ്യം $A = 44$

x	$d = x - 44$	d^2
40	-4	16
42	-2	4
48	4	16
	$\sum d = -2$	$\sum d^2 = 36$

പ്രമാണവിചലനം $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{36}{3} - \left(\frac{-2}{3}\right)^2}$

$= \frac{\sqrt{104}}{3}$

മൂല്യങ്ങളെ 3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത്

120,126,144 അഭ്യൂഹമാധ്യം A =132.

പുതിയ വിവരങ്ങളുടെ പ്രമാണവിചലനം σ_1 എന്നിരിക്കട്ടെ.

x	$d = x - 132$	d^2
120	-12	144
126	-6	36
144	12	144
	$\sum d = -6$	$\sum d^2 = 324$

പ്രമാണവിചലനം $= \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{324}{3} - \left(\frac{-6}{3}\right)^2}$

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{312}{3}} = \sqrt{104}$

മുകളിൽ കൊടുത്ത ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്ന് ഓരോ മൂല്യത്തേയും 3 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന പ്രമാണ വിചലനം, ആദ്യത്തെ പ്രമാണവിചലനത്തെ 3 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 11.10

ആദ്യത്തെ n നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ പ്രമാണവിചലനത്തിൽ നിന്ന് $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ എന്ന സൂത്രം രൂപീകരിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം ആദ്യത്തെ n നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകൾ $1, 2, 3, \cdots, n$.

അവയുടെ കൂട്ടുശരാശരി $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n}$

$$= \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

ആദ്യത്തെ n നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക $\sum x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

പ്രമാണവിചലനം $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{(2n+1)}{3} - \frac{(n+1)}{2}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{2(2n+1)-3(n+1)}{6}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{4n+2-3n-3}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}.$$

ആദ്യത്തെ n നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ പ്രമാണവിചലനം $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

പൊതു വ്യത്യാസം d ഉള്ള കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായുള്ള n പദങ്ങളുടെ പ്രമാണവിചലനം $\sigma = d\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

(i) $i, i+1, i+2, \cdots, i+n$ ന്റെ പ്രമാണവിചലനം $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$, $i \in \mathbb{N}$

(ii) തുടർച്ചയായുള്ള n ഇരട്ട പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ പ്രമാണവിചലനം $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$, $n \in \mathbb{N}$

(iii) തുടർച്ചയായുള്ള n ഒറ്റ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ പ്രമാണവിചലനം $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$, $n \in \mathbb{N}$

ഉദാഹരണം 11.11

ആദ്യത്തെ 10 നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ പ്രമാണവിചലനം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ആദ്യത്തെ n നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ പ്രമാണവിചലനം $= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

തരം തിരിച്ച വിവരത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ 10 നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ പ്രമാണവിചലനം

$$= \sqrt{\frac{10^2-1}{12}} = \sqrt{\frac{100-1}{12}} \simeq 2.87.$$

തരം തിരിച്ച വിവരത്തിന്റെ പ്രമാണവിചലനം

(i) പ്രത്യക്ഷ രീതി

തരം തിരിക്കപ്പെട്ട വിവരങ്ങളിൽ, ഓരോ മൂല്യത്തേയും സമാന്തര മാധ്യത്തിൽ നിന്നും വ്യതിയാനങ്ങൾ എടുത്താൽ പ്രമാണ വിചലനം കാണുന്ന സൂത്രം $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$, ഇവിടെ $d = x - \overline{x}$ എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കാം.

ഉദാഹരണം 11.12

48 വിദ്യാർത്ഥികൾ ഗണിതത്തിലെ ഒരു പ്രശ്നോത്തരിയിൽ വാങ്ങിയ മാർക്കുകൾ താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. പ്രമാണവിചലനം കണക്കാക്കുക.

വിവരം x	6	7	8	9	10	11	12
ആവർത്തനം f	3	6	9	13	8	5	4

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള വിവരത്തെ താഴെയുള്ള പട്ടികയിൽ കാണുന്ന വിധം രൂപീകരിക്കുക.

x	f	fx	$d = x - \overline{x}$ $= x - 9$	fd	fd^2
6	3	18	-3	-9	27
7	6	42	-2	-12	24
8	9	72	-1	-9	9
9	13	117	0	0	0
10	8	80	1	8	8
11	5	55	2	10	20
12	4	48	3	12	36
	$\sum f=48$	$\sum fx=432$	$\sum d = 0$	$\sum fd = 0$	$\sum fd^2 = 124$

സമാന്തര മാധ്യം, $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{432}{48} = 9.$

പ്രമാണവിചലനം $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$

$$= \sqrt{\frac{124}{48}}$$

$$= \sqrt{2.58} \simeq 1.61.$$

(ii) അഭ്യൂഹ മാധ്യ രീതി

അഭ്യൂഹ മാധ്യത്തിൽ നിന്നും വ്യതിയാനങ്ങൾ എടുത്താൽ പ്രമാണവിചലനം

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd}{\Sigma f}\right)^2} \quad \text{ഇവിടെ } d = x - A.$$

ഉദാഹരണം 11.13

താഴെ തന്ന വിതരണത്തിന് പ്രമാണവിചലനം കാണുക.

x	70	74	78	82	86	90
f	1	3	5	7	8	12

നിർദ്ധാരണം അഭ്യൂഹ മാധ്യം $A = 82$ എന്ന് നമുക്ക് എടുക്കാം.

x	f	$d = x - 82$	fd	fd^2
70	1	-12	-12	144
74	3	-8	-24	192
78	5	-4	-20	80
82	7	0	0	0
86	8	4	32	128
90	12	8	96	768
	$\sum f = 36$		$\sum fd = 72$	$\sum fd^2 = 1312$

പ്രമാണവിചലനം σ

$$= \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1312}{36} - \left(\frac{72}{36}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{328}{9} - 2^2}$$

$$= \sqrt{\frac{328 - 36}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{292}{9}} = \sqrt{32.44}$$

$$\therefore \quad \sigma \simeq 5.7$$

ഉദാഹരണം 11.14

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിതരണത്തിന് വ്യതിയാന വർഗ്ഗശരാശരി കാണുക.

വർഗ്ഗം	3.5-4.5	4.5-5.5	5.5-6.5	6.5-7.5	7.5-8.5
ആവർത്തനം	9	14	22	11	17

നിർദ്ധാരണം അഭ്യൂഹ മാധ്യം $A = 6$ എന്നെടുക്കുക.

വർഗ്ഗം 1	x മധ്യവില	f	$d = x - 6$	fd	fd^2
3.5-4.5	4	9	–2	–18	36
4.5-5.5	5	14	–1	–14	14
5.5-6.5	6	22	0	0	0
6.5-7.5	7	11	1	11	11
7.5-8.5	8	17	2	34	68
		$\sum f = 73$		$\sum fd = 13$	$\sum fd^2 = 129$

വ്യതിയാന വർഗ്ഗശരാശരി $\sigma^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fd}{\sum f}\right)^2$

$$= \frac{129}{73} - \left(\frac{13}{73}\right)^2 = \frac{129}{73} - \frac{169}{5329}$$

$$= \frac{9417 - 169}{5329} = \frac{9248}{5329}$$

വ്യതിയാന വർഗ്ഗശരാശരി $\sigma^2 \simeq 1.74.$

(iii) സ്റ്റെപ് ഡീവിയേഷൻ രീതി

ഉദാഹരണം 11.15

അന്താരാഷ്ട്ര ഫുട്ബോൾ മാച്ചുകളിൽ 71 മികച്ച കളിക്കാർ സ്കോർ ചെയ്ത ഗോളുകൾ താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. പ്രമാണ വിചലനം കാണുക.

വർഗ്ഗം	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
ആവർത്തനം	8	12	17	14	9	7	4

നിർദ്ധാരണം $A = 35,\ c = 10$ എന്നെടുക്കുക

വർഗ്ഗം	x മധ്യവില	f	$x–A$	$d = \dfrac{x - A}{c}$	fd	fd^2
0–10	5	8	–30	–3	–24	72
10–20	15	12	–20	–2	–24	48
20–30	25	17	–10	–1	–17	17
30–40	35	14	0	0	0	0
40–50	45	9	10	1	9	9
50–60	55	7	20	2	14	28
60–70	65	4	30	3	12	36
		$\sum f = 71$			$\sum fd = -30$	$\sum fd^2 = 210$

പ്രമാണ വിചലനം $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \times c$

$$= \sqrt{\frac{210}{71} - \left(\frac{-30}{71}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{210}{71} - \frac{900}{5041}} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{14910 - 900}{5041}} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{14010}{5041}} \times 10 = \sqrt{2.7792} \times 10$$

പ്രമാണ വിചലനം $\sigma \simeq 16.67$.

ഉദാഹരണം 11.16

40 കമ്പി കഷ്ണങ്ങളുടെ നീളം സെന്റീമീറ്ററിന് ശരിയാക്കി താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി കണക്കാക്കുക.

നീളം സെന്റീമീറ്റർ	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70
കമ്പി കഷ്ണങ്ങളുടെ എണ്ണം	2	3	8	12	9	5	1

നിർദ്ധാരണം അഭ്യൂഹ മാധ്യ രീതി $A = 35.5$ എന്നെടുക്കുക

നീളം	മധ്യവില x	കഷ്ണങ്ങളുടെ എണ്ണം (f)	$d = x - A$	fd	fd^2
1-10	5.5	2	−30	−60	1800
11-20	15.5	3	−20	−60	1200
21-30	25.5	8	−10	−80	800
31-40	35.5	12	0	0	0
41-50	45.5	9	10	90	900
51-60	55.5	5	20	100	2000
61-70	65.5	1	30	30	900
		$\sum f = 40$		$\sum fd = 20$	$\sum fd^2 = 7600$

വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി $\sigma^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2 = \frac{7600}{40} - \left(\frac{20}{40}\right)^2$

$$= 190 - \frac{1}{4} = \frac{760 - 1}{4} = \frac{759}{4}$$

$\therefore \quad \sigma^2 = 189.75$

11.2.3 വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം (Coefficient of variation)

വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം എന്നത് മാധ്യത്തിൽ വ്യതിയാനത്തിനുള്ള ശതമാനമാണ്. ഇതിനെ

$$\text{C.V} = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$$

പ്രമാണ വിചലനം σ, തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ മാധ്യം $\overline{x}$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം. കൂടാതെ ഇതിനെ ആപേക്ഷിക പ്രമാണ വിചലനം എന്നും പറയാം.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

(i) രണ്ടോ, അതിലധികമോ വിവരശേഖരണങ്ങളുടെ സ്ഥിരത താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിന് വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം സഹായിക്കുന്നു.

(ii) വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം കൂടുതലാണെങ്കിൽ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ സ്ഥിരത കുറവാണ്.

(iii) വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം കുറവാണെങ്കിൽ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ സ്ഥിരത കൂടുതലാണ്.

ഉദാഹരണം 11.17

18, 20, 15, 12, 25 എന്നീ വിവരങ്ങളുടെ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ സമാന്തര മാധ്യം കണക്കാക്കുക.

$$\text{കൂട്ടുശരാശരി } \bar{x} = \frac{12+15+18+20+25}{5}$$

$$= \frac{90}{5} = 18.$$

x	$d = x - 18$	d^2
12	-6	36
15	-3	9
18	0	0
20	2	4
25	7	49
	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 98$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{98}{5}}$$

$$= \sqrt{19.6} \simeq 4.428.$$

$$\therefore \quad \text{വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

$$= \frac{4.428}{18} \times 100 = \frac{442.8}{18}.$$

$$\therefore \quad \text{വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം} = 24.6$$

ഉദാഹരണം 11.18

5 ക്രിക്കറ്റ് കളികളിൽ 2 ബാറ്റ്സ്മാൻമാർ നേടിയ ഓട്ടങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഓട്ടങ്ങൾ നേടിയതിൽ ആരാണ് സ്ഥിരതയുള്ളവൻ (മെച്ചപ്പെട്ടവൻ) എന്ന് കാണുക.

ബാറ്റ്സ്മാൻ A	38	47	34	18	33
ബാറ്റ്സ്മാൻ B	37	35	41	27	35

നിർദ്ധാരണം

ബാറ്റ്സ്മാൻ A

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
18	– 16	256
33	– 1	1
34	0	0
38	4	16
47	13	169
170	0	442

$$\bar{x} = \frac{170}{5} = 34$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{442}{5}} = \sqrt{88.4}$$

$$\simeq 9.4..$$

വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം, $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{9.4}{34} \times 100$$

$$= \frac{940}{34}$$

$$= 27.65.$$

∴ ബാറ്റ്സ്മാൻ A നേടിയ ഓട്ടങ്ങളുടെ

വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം = 27.65 (1)

ബാറ്റ്സ്മാൻ B

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
27	– 8	64
35	0	0
35	0	0
37	2	4
41	6	36
175	0	104

$$\bar{x} = \frac{175}{5} = 35$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{104}{5}} = \sqrt{20.8}$$

$$\simeq 4.6.$$

വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം

$$= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

$$= \frac{4.6}{35} \times 100$$

$$= \frac{460}{35} = \frac{92}{7} = 13.14.$$

∴ ബാറ്റ്സ്മാൻ B നേടിയ ഓട്ടങ്ങളുടെ

വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം = 13.14 (2)

(1) , (2) ൽ നിന്ന് B യുടെ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം A യുടെ വ്യതിയാനഗുണാങ്കത്തെക്കാൾ കുറവാണ്.

∴ ഓട്ടങ്ങൾ നേടിയതിൽ സ്ഥിരത ബാറ്റ്സ്മാൻ B യ്ക്കാണ്.

ഉദാഹരണം 11.19

30 ഇനങ്ങളുടെ മാധ്യം 18 ഉം പ്രമാണ വിചലനം 3ഉം ആകുന്നു. എല്ലാ ഇനങ്ങളുടെ തുകയും കൂടാതെ എല്ലാ ഇനങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം 30 ഇനങ്ങളുടെ മാധ്യം $\bar{x} = 18$

30 ഇനങ്ങളുടെ തുക , $\sum x = 30 \times 18 = 540$ $\left(\bar{x} = \frac{\sum x}{n}\right)$

പ്രമാണ വിചലനം, $\sigma = 3$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

$$\implies \quad \frac{\sum x^2}{30} - 18^2 = 9$$

$$\implies \quad \frac{\sum x^2}{30} - 324 = 9$$

$$\implies \quad \sum x^2 - 9720 = 270$$

$$\sum x^2 = 9990$$

$$\therefore \quad \sum x = 540 \;, \quad \sum x^2 = 9990.$$

ഉദാഹരണം 11.20

20 ഇനങ്ങളുടെ മാധ്യവും പ്രമാണ വിചലനവും യഥാക്രമം 40, 15 എന്ന് കാണപ്പെട്ടു. പുനഃ പരിശോധന സമയത്ത് ഇനം 43 നെ 53എന്ന് എഴുതിയത് കണ്ടുപിടിക്കപ്പെട്ടു. ശരിയായ മാധ്യവും പ്രമാണ വിചലനവും കണക്കാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം ശരിയായ മാധ്യം നമുക്ക് കാണാം.

20 ഇനങ്ങളുടെ മാധ്യം, $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 40$

$$\implies \quad \frac{\sum x}{20} = 40$$

$$\implies \quad \sum x = 20 \times 40 = 800$$

ശരിയാക്കപ്പെട്ട $\sum x = 800 + 43 - 53 = 790.$

$\therefore$ ശരിയായ മാധ്യം $= \frac{790}{20} = 39.5$ (1)

വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി $\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = 225$

$$\implies \quad \frac{\sum x^2}{20} - 40^2 = 225$$

$$\implies \quad \sum x^2 - 32000 = 225 \times 20 = 4500.$$

$$\therefore \quad \sum x^2 = 32000 + 4500 = 36500$$

ശരിയാക്കപ്പെട്ട $\sum x^2 = 36500 - 53^2 + 43^2 = 36500 - 2809 + 1849$

$= 36500 - 960 = 35540.$

ശരിയാക്കപ്പെട്ട $\sigma^2 = \frac{\text{ശരിയാക്കപ്പെട്ട} \sum x^2}{n} - (\text{ശരിയാക്കപ്പെട്ട മാധ്യം})^2$

$= \frac{35540}{20} - (39.5)^2$

$= 1777 - 1560.25 = 216.75.$

ശരിയാക്കപ്പെട്ട $\sigma = \sqrt{216.75} \simeq 14.72.$

$\therefore$ ശരിയാക്കപ്പെട്ട മാധ്യം $= 39.5$ ശരിയാക്കപ്പെട്ട S.D. $\simeq 14.72.$

ഉദാഹരണം 11.21

ശേഖരിക്കപ്പെട്ട വിവരത്തിൽ നിന്ന് $\sum x = 35, n = 5, \sum (x-9)^2 = 82$ എങ്കിൽ $\sum x^2, \sum (x-\overline{x})^2$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $\sum x = 35\ ,\ n = 5.$

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{35}{5} = 7.$$

$\sum x^2$ കണക്കാക്കാം.

$$\sum (x-9)^2 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum (x^2 - 18x + 81) = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - \left(18\sum x\right) + \left(81\sum 1\right) = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 630 + 405 = 82 \qquad \because \sum x = 35\ , \sum 1 = 5$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 = 307.$$

$\sum (x-\overline{x})^2$ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്

$$\sum (x-9)^2 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum (x-7-2)^2 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum [(x-7)-2]^2 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum (x-7)^2 - 2\sum [(x-7)\times 2] + \sum 4 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum (x-\overline{x})^2 - 4\sum (x-\overline{x}) + 4\sum 1 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum (x-\overline{x})^2 - 4(0) + (4\times 5) = 82 \qquad \because \sum 1 = 5\ ,\ \sum (x-\overline{x}) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \sum (x-\overline{x})^2 = 62$$

$$\therefore \quad \sum x^2 = 307\ , \sum (x-\overline{x})^2 = 62.$$

ഉദാഹരണം 11.22

രണ്ട് അനുക്രമങ്ങളുടെ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കങ്ങൾ 58 , 69 ആകുന്നു. അവയുടെ പ്രമാണ വിചലനങ്ങൾ 21.2 , 15.6 ആകുന്നു. അവയുടെ സമാന്തര മാധ്യങ്ങൾ എന്ത്?

നിർദ്ധാരണം വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം $\text{C.V} = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100.$

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100.$$

ഒന്നാമത്തെ അനുക്രമത്തിന്റെ മാധ്യം $\overline{x_1} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100.$

$$= \frac{21.2}{58} \times 100 \qquad \because \quad \text{C.V} = 58\ ,\ \sigma = 21.2$$

$$= \frac{2120}{58} = 36.6.$$

രണ്ടാമത്തെ അനുക്രമത്തിന്റെ മാധ്യം $\overline{x_2} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100$

$= \frac{15.6}{69} \times 100 \qquad \because \quad C.V = 69, \quad \sigma = 15.6$

$= \frac{1560}{69}$

$= 22.6.$

ഒന്നാമത്തെ അനുക്രമത്തിന്റെ സമാന്തര മാധ്യം = 36.6, രണ്ടാമത്തെ അനുക്രമത്തിന്റെ സമാന്തര മാധ്യം = 22.6.

അഭ്യാസം 11.1

1. താഴെ കാണുന്നവയുടെ പരിസരവും പരിസരത്തിന്റെ ഘടകവും കാണുക.

   (i) 59, 46, 30, 23, 27, 40, 52,35, 29

   (ii) 41.2, 33.7, 29.1, 34.5, 25.7, 24.8, 56.5, 12.5

2. ശേഖരിക്കപ്പെട്ട വിവരത്തിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം 12. അതിന്റെ പരിസരം 59. ശേഖരിക്കപ്പെട്ട വിവരത്തിലെ ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യം കാണുക.

3. 50 അളവുകളിൽ ഏറ്റവും വലുത് 3.84 കിലോഗ്രാം,പരിസരം 0.46 കിലോഗ്രാം.എങ്കിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യം കാണുക.

4. 20 നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനം $\sqrt{5}$ ഓരോ നിരീക്ഷണത്തേയും 2കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ഫലങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനവും വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരിയും കാണുക.

5. ആദ്യത്തെ 13 നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ പ്രമാണ വിചലനം കണക്കാക്കുക.

6. താഴെ തന്ന വിവരങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനം കാണുക.

   (i) 10, 20, 15, 8, 3, 4 (ii) 38, 40, 34 ,31, 28, 26, 34

7. പ്രമാണ വിചലനം കണക്കാക്കുക.

x	3	8	13	18	23
f	7	10	15	10	8

8. ഒരു സ്കൂളിലെ 200 വിദ്യാർത്ഥികൾ പുസ്തക പ്രദർശന മേളയിൽ നിന്ന് വാങ്ങിയ പുസ്തകങ്ങളുടെ എണ്ണം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

പുസ്തകങ്ങളുടെ എണ്ണം	0	1	2	3	4
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	35	64	68	18	15

   പ്രമാണ വിചലനം കണക്കാക്കുക.

9. തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾക്ക് വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി കണക്കാക്കുക.

x	2	4	6	8	10	12	14	16
f	4	4	5	15	8	5	4	5

10. ഒരു സംഘം ആളുകൾ ഒരു നടപ്പാത കടക്കുന്നതിന് എടുത്ത സമയം (സെക്കന്റിൽ) താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

സമയം (സെക്കന്റ്)	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
ആളുകളുടെ എണ്ണം	4	8	15	12	11

വിവരങ്ങളുടെ വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരിയും പ്രമാണ വിചലനവും കാണുക.

11. 45 വീട്ടുടമസ്ഥർ ചേർന്ന് അവരുടെ തെരുവിൽ ചെടികൾ നട്ടുപിടിപ്പിക്കുന്നതിന് പണം സംഭാവന ചെയ്യുന്നു. ശേഖരിച്ച തുക താഴെക്കൊടുത്ത പട്ടികയിൽ കാണാം.

തുക (₹)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
വീട്ടുടമസ്ഥരുടെ എണ്ണം	2	7	12	19	5

വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരിയും പ്രമാണ വിചലനവും കണക്കാക്കുക.

12. താഴെ തന്ന വിവരണത്തിന് വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി കാണുക.

വർഗ്ഗം	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
ആവൃത്തി	15	25	28	12	12	8

13. 100 ഇനങ്ങളുടെ മാധ്യം 48 ഉം പ്രമാണവിചലനം 10 ഉം ആകുന്നു. എല്ലാ ഇനങ്ങളുടെ തുകയും കൂടാതെ എല്ലാ ഇനങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയും കാണുക.

14. 20 ഇനങ്ങളുടെ മാധ്യവും പ്രമാണവിചലനവും യഥാക്രമം 10, 2 എന്ന് കാണപ്പെട്ടു. കണക്കു കൂട്ടൽ സമയത്ത് ഇനം 12 നു പകരം 8 എടുത്തിരുന്നത് കണ്ടുപിടിക്കപ്പെട്ടു. ശരിയായ മാധ്യവും പ്രമാണവിചലനവും കണക്കാക്കുക.

15. $n = 10, \bar{x} = 12, \sum x^2 = 1530$ ആണെങ്കിൽ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

16. തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾക്ക് വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക. 20, 18, 32, 24, 26.

17. ശേഖരിക്കപ്പെട്ട വിവരങ്ങളുടെ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം 57 , S.D 6.84 എങ്കിൽ മാധ്യം കാണുക.

18. 100 സ്ഥാനാർത്ഥികളുടെ ശരാശരി ഉയരം 163.8 സെ.മീ, വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം 3.2 ആകുന്നു. അവരുടെ ഉയരങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനം എന്ത് ?

19. $\sum x = 99, n = 9, \sum (x-10)^2 = 79$ എങ്കിൽ $\sum x^2, \sum (x-\bar{x})^2$ കാണുക.

20. ഒരു ക്ലാസ്സിലെ A, B എന്നീ രണ്ടു വിദ്യാർത്ഥികൾ നേടിയ മാർക്കുകൾ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

A	58	51	60	65	66
B	56	87	88	46	43

ഇവരിൽ ആരാണ് കൂടുതൽ സ്ഥിരതയുള്ളത് എന്ന് കാണുക?

അഭ്യാസം 11.2

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

1. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 , 29. ആദ്യത്തെ 10 അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ പരിസരം

(A) 28 (B) 26 (C) 29 (D) 27

2. വിവരങ്ങളുടെ ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം 14.1, പരിസരം 28.4. ഏറ്റവും കൂടിയ മൂല്യം

(A) 42.5 (B) 43.5 (C) 42.4 (D) 42.1

3. ശേഖരിച്ച വിവരത്തിന്റെ ഏറ്റവും കൂടിയ മൂല്യം 72,കുറഞ്ഞ മൂല്യം 28. എങ്കിൽ പരിസരത്തിന്റെ ഘടകം.

(A) 44 (B) 0.72 (C) 0.44 (D) 0.28

4 ശേഖരിച്ച 11 ഇനങ്ങളുടെ $\Sigma x = 132$, എങ്കിൽ സമാന്തര മാധ്യം

(A) 11 (B) 12 (C) 14 (D) 13

5. ഏതെങ്കിലും n ഇനങ്ങളുടെ ശേഖരണം $\Sigma(x - \overline{x}) =$

(A) Σx (B) $\overline{x}$ (C) $n\overline{x}$ (D) 0

6. ഏതെങ്കിലും n ഇനങ്ങളുടെ ശേഖരണം $(\Sigma x) - \overline{x} =$

(A) $n\overline{x}$ (B) $(n-2)\overline{x}$ (C) $(n-1)\overline{x}$ (D) 0

7. $x, y. z$ പ്രമാണവിചലനം t എങ്കിൽ $x+5,\ y+5,\ z+5$ ന്റെ പ്രമാണവിചലനം

(A) $\frac{t}{3}$ (B) $t+5$ (C) t (D) $x\,y\,z$

8. ഒരു കൂട്ടം വിവരങ്ങളുടെ S.D 1.6.എങ്കിൽ വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി

(A) 0.4 (B) 2.56 (C) 1.96 (D) 0.04

9. വിവരത്തിന്റെ വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി 12.25. എങ്കിൽ പ്രമാണവിചലനം ?

(A) 3.5 (B) 3 (C) 2.5 (D) 3.25

10. ആദ്യത്തെ 11 നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $5\sqrt{2}$ (D) 10

11. 10, 10, 10, 10, 10 ഇവയുടെ വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി

(A) 10 (B) $\sqrt{10}$ (C) 5 (D) 0

12. 14, 18, 22, 26, 30 എന്നിവയുടെ വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി 32. എങ്കിൽ 28, 36,44,52,60ന്റെ വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി

(A) 64 (B) 128 (C) $32\sqrt{2}$ (D) 32

13. ശേഖരിക്കപ്പെട്ട വിവരത്തിന്റെ S.D $2\sqrt{2}$ ആകുന്നു. ഓരോ മൂല്യത്തേയും 3കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ പുതിയ വിവരത്തിന്റെ S.D

(A) $\sqrt{12}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) $6\sqrt{2}$ (D) $9\sqrt{2}$

14. $\sum(x-\overline{x})^2 = 48,\ \overline{x} = 20\ ,\ n = 12$ തന്നിരുന്നാൽ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം

(A) 25 (B) 20 (C) 30 (D) 10

15. വിവരത്തിന്റെ മാധ്യവും പ്രമാണ വിചലനവും യഥാക്രമം 48, 12 ആണ്. എങ്കിൽ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം

(A) 42 (B) 25 (C) 28 (D) 48

ഓർമ്മിക്കേണ്ടവ

- (i) പരിസരം $= L - S$, നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യത്തിനും ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യത്തിനും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം.

  (ii) പരിസരത്തിന്റെ ഗുണാങ്കം $= \dfrac{L-S}{L+S}$.

- തരം തിരിക്കാത്ത വിവരങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനം

  (i) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum d^2}{n}}$ ഇവിടെ $d = x - \overline{x}$, $\overline{x}$ മാധ്യം

  (ii) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum d^2}{n} - \left(\dfrac{\sum d}{n}\right)^2}$ ഇവിടെ $d = x - A$, A അഭ്യൂഹമാധ്യം

- തരം തിരിച്ച വിവരങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനം

  (i) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f}}$ ഇവിടെ $d = x - \overline{x}$, $\overline{x}$ മാധ്യം

  (ii) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$ ഇവിടെ $d = x - A$, A അഭ്യൂഹമാധ്യം

- വിവരങ്ങളുടെ ഓരോ മൂല്യത്തിനോടും ഒരേ സംഖ്യ കൂട്ടുകയോ, കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യുമ്പോൾ പ്രമാണ വിചലനം വ്യത്യാസപ്പെടുന്നില്ല.

- വിവരങ്ങളുടെ ഓരോ മൂല്യത്തിനേയും k കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയോ, ഹരിക്കുകയോ ചെയ്യുമ്പോൾ പ്രമാണ വിചലനവും അതേ സംഖ്യ k കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയോ ഹരിക്കുകയോ ചെയ്യപ്പെടുന്നു.

- ആദ്യത്തെ n നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ പ്രമാണ വിചലനം $\sigma = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{12}}$.

- വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി എന്നത് പ്രമാണ വിചലനത്തിന്റെ വർഗ്ഗമാകുന്നു.

- വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം $= \dfrac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$. രണ്ടോ, അതിലധികമോ വിവരങ്ങളുടെ വ്യതിയാനങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിന് വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം ഉപയോഗിക്കാം.

12

സംഭാവ്യത

It is remarkable that a science which began with the consideration of games of chance should have become the most important object of human knowledge
-P.D. Laplace.

- മുഖവുര
- സംഭാവ്യതയുടെ ഉത്തമ നിർവ്വചനം
- സങ്കലന സിദ്ധാന്തം

പിയറി ഡി. ലാപ്ലേസ്
(1749-1827)
ഫ്രാൻസ്

എല്ലാ കാലത്തേയും വളരെ ശ്രേഷ്ഠൻമാരായ ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരിൽ ഒരാളായാണ് ലാപ്ലേസ് ഓർമ്മിക്കപ്പെടുന്നത്. ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ അദ്ദേഹത്തെ ഫ്രഞ്ച് ന്യൂട്ടൻ എന്നും പരാമർശിക്കാറുണ്ട്. 1812 – ൽ ലാപ്ലേസ് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിലെ ധാരാളം അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങൾ സ്ഥിരീകരിച്ചു. അദ്ദേഹം inductive reasoning രീതിയിൽ ഗണിതത്വങ്ങളെ സംഭാവ്യതയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ പ്രസ്ഥാവിച്ചു. അദ്ദേഹമാണ് സംഭാവ്യതയുടെ നിയമങ്ങൾ ആദ്യമായി പരിചയപ്പെടുത്തിയത്. അദ്ദേഹത്തിന്റെ തത്വങ്ങളിലൊന്ന് "സംഭാവ്യത എന്നത് അനുകൂല സംഭവങ്ങൾക്കും സാദ്ധ്യതയുള്ള എല്ലാ സംഭവങ്ങൾക്കും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധമാണ് ".

12.1 മുഖവുര

ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ നാം കാണുന്ന അല്ലെങ്കിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ഏറെക്കുറെ എല്ലാ കാര്യങ്ങളും സാദ്ധ്യതയെ ആശ്രയിച്ചാണിരിക്കുന്നത്. ഭൂമികുലുക്കം, ചുഴലിക്കാറ്റ്, സുനാമി, മിന്നൽ, പകർച്ച വ്യാധികൾ തുടങ്ങിയ സംഭവങ്ങൾ എല്ലാം സംഭവിക്കുന്നത് പ്രവചനാതീതമായാണ്. അപ്രതീക്ഷിതമായി സംഭവിക്കുന്ന ഇത്തരം സംഭവങ്ങൾ മനുഷ്യ സമൂഹത്തിന് കനത്ത നഷ്ടം ഉണ്ടാക്കുന്നു. മുൻപു നടന്ന സംഭവങ്ങളെ ആസ്പദമാക്കി, ഇത്തരം സംഭവങ്ങളെ വളരെ സൂക്ഷ്മതയോടു കൂടി മുൻകൂട്ടി പ്രവചിക്കുവാൻ കഴിഞ്ഞാൽ മനുഷ്യ സമൂഹത്തിന്റെ നന്മയ്ക്കായി ഒരാൾക്ക് പ്രതിരോധ നടപടികളെ കുറിച്ചും അഥവാ നശീകരണ നിയന്ത്രണ പരിശീലനത്തെ കുറിച്ചും ചിന്തിക്കുവാൻ കഴിയുന്നതാണ്. യഥാർത്ഥത്തിൽ സംഭവിക്കുന്നതിനു മുൻപുള്ള ഇത്തരം പ്രവചനങ്ങൾക്ക് സംഭാവ്യതാ സിദ്ധാന്തത്തെ കുറിച്ചുള്ള പഠനം ആവശ്യമാണ്.

1654 ൽ 'ചെവിലയർ ഡിമിയർ' ഉന്നയിച്ച ഒരു ചൂതാട്ടക്കാരന്റെ വിവാദ പ്രശ്നം ഫ്രഞ്ച് ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരായ 'ബ്ലാസി പാസ്ക്കലിന്റേയും' 'പിയറി ഡി ഫെർമേറ്റിന്റേയും' ആശയ വിനിമയത്തിന് വഴി തെളിയിച്ച് ഗണിതത്തിന്റെ സംഭാവ്യതാ സിദ്ധാന്തത്തെ രൂപീകരിച്ചു. ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരുടെ കുടുംബത്തിൽപ്പെട്ട ക്രിസ്റ്റ്യൻ ഗഗൻസ് (1629-1695), ബർനോലി (1654-1705), ഡിമോയ്‌വർ (1667-1754), പിയറി ഡി ലാപ്ലേസ് (1749-1827), ഗാസ് (1777-1855), പോയിസൺ (1781-1845), ചെബിഷിവ് (1821-1894), മാർക്കോ (1856-1922) എന്നീ ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാർ സംഭാവ്യതാ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പുരോഗതിയ്ക്ക് ഗണ്യമായ സംഭാവനകൾ നൽകിയവരാണ്. ആധുനീക സംഭാവ്യതാ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനം എന്ന് കണക്കാക്കപ്പെടുന്ന ഒരു സ്പഷ്ടമായ സമീപനം 1933 - ൽ റഷ്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ എ. കോൾമോഗോറോവ് പരിചയപ്പെടുത്തി.

സംഭാവ്യത എപ്പോഴും സംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യമായ അല്ലെങ്കിൽ അസാധ്യമായ സംഭവങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ളതാണ്. സംഭാവ്യതയുടെ പഠനത്തിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന പദങ്ങളായ യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണങ്ങൾ, ശ്രമങ്ങൾ, സാമ്പിൾ സ്പേസ്, വിവിധ തരം സംഭവങ്ങൾ തുടങ്ങിയവയെ നിർവ്വചിക്കാം.

ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻമാർ പരീക്ഷണം ,ഫലങ്ങൾ തുടങ്ങിയ വാക്കുകളെ വ്യാപകമായ അർത്ഥത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നു. നിരീക്ഷണം അല്ലെങ്കിൽ അളക്കൽ പ്രക്രിയയെയാണ് പരീക്ഷണം എന്നു പറയുന്നത്. ഒരു ദിവസം വായനശാലയിൽ വരുന്നവരുടെ എണ്ണം രേഖപ്പെടുത്തുക, ഒരു നാണയം ടോസ് ഇടുക, ഒരു സഞ്ചിയിലെ പല നിറങ്ങ ളിലുള്ള പന്തുകളിൽ നിന്ന് ഒരു പന്ത് എടുക്കുന്നത്, ഒരു ദിവസം ഒരു പ്രത്യേകസ്ഥലത്ത് നടക്കുന്ന അത്യാഹിതങ്ങളുടെ കണക്കെടുപ്പ് തുടങ്ങിയവയെല്ലാം പരീക്ഷണങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

പരീക്ഷണം നടത്തുന്നതിന് മുൻപ് യഥാർത്ഥഫലം പ്രവചിക്കാൻ സാധിക്കാത്തതിനെയാണ് യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണമെന്നുപറയുന്നത്. എന്നാൽ ഒരാൾക്ക് ഒരു പരീക്ഷണത്തിന്റെ എല്ലാ സാദ്ധ്യഫലങ്ങളേയും രേഖപ്പെടുത്താൻ കഴിയും.

ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിൽ *(random experiment)* സാദ്ധ്യമായ എല്ലാ ഫലങ്ങളുടേയും ഗണത്തെ സാമ്പിൾ സ്പേസ് എന്നുപറയുന്നു. ഇതിനെ S എന്നുകുറിക്കുന്നു. ഒരു പരീക്ഷണത്തെ ഓരോ പ്രാവശ്യവും ചെയ്യുന്നതിനെ ശ്രമം *(trial)* എന്നുപറയുന്നു.

സാമ്പിൾ സ്പേസ് S ന്റെ ഓരോ ഉപഗണത്തേയും ഒരു സംഭവം *(event)* എന്നുപറയുന്നു.

A എന്നത് S ന്റെ ഉപഗണമെന്നിരിക്കട്ടെ. ഒരു പരീക്ഷണം നടത്തുമ്പോൾ പുറത്തു വരുന്ന ഫലങ്ങൾ A യിലുള്ള വയാണ് എങ്കിൽ A എന്ന സംഭവം നടന്നു എന്നുപറയാം.

ചില ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ നമുക്ക് യാദ്ധ്യചികസംഭവം, സാമ്പിൾ സ്പേസ്, സംഭവങ്ങൾ എന്നിവയെ വിശദീകരിക്കാം.

യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണം	സാമ്പിൾ സ്പേസ്	ചില സംഭവങ്ങൾ
തുല്യസാദ്ധ്യതയുള്ള ഒരു നാണയം ഒരു പ്രാവശ്യം ടോസിട്ടാൽ	$S=\{H,T\}$	തല കിട്ടുന്നതിനുള്ള സാദ്ധ്യത, $\{H\}$ ഒരു സംഭവമാണ്. പൂവ് കിട്ടു ന്നതിനുള്ള സാദ്ധ്യത, $\{T\}$ മറ്റൊരു സംഭവമാണ്.
തുല്യ സാദ്ധ്യതയുള്ള ഒരു നാണയം രണ്ടു പ്രാവശ്യം ടോസിട്ടാൽ	$S=\{HT,HH,TT,TH\}$	$\{HT,HH\}$, $\{TT\}$ എന്നിവ ചില സംഭവങ്ങളാണ്
തുല്യ സാദ്ധ്യതയുള്ള ഒരു പകിട ഒരു പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടുമ്പോൾ	$S=\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{1,3,5\}$,$\{2,4,6\}$,$\{3\}$, $\{6\}$ എന്നിവ ചില സംഭവങ്ങളാണ്

സമ സന്ദർഭ സംഭവങ്ങൾ

രണ്ടോ അതിലധികമോ സംഭവങ്ങളിൽ ഓരോന്നും സംഭവിക്കാൻ തുല്യ സാദ്ധ്യത ഉണ്ടെങ്കിൽ അവയെ സമ സന്ദർഭ സംഭവങ്ങളെന്നു പറയുന്നു.

ഒരു നാണയം ടോസിടുമ്പോൾ ഒരു തല കിട്ടുന്നതും, ഒരു പൂവ് കിട്ടുന്നതും സമസന്ദർഭ സംഭവങ്ങളാണ്.

പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങൾ

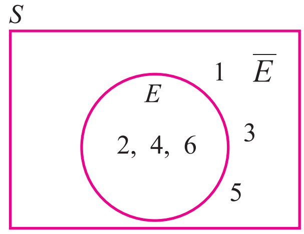
ചിത്രം.12.1

രണ്ടോ അതിലധികമോ സംഭവങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഭവം സംഭവിയ്ക്കുന്നത് മറ്റേ സംഭവം സംഭവിക്കുന്നതിനെ ബഹിഷ്കരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അവയെ പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങൾ എന്നുപറയുന്നു.അതായത് പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങൾ ഒരേ സമയത്ത് സംഭവിക്കാൻ സാദ്ധ്യതയില്ല. A യും B യും പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ $A \cap B = \phi$.

ഒരു നാണയം ടോസിടുമ്പോൾ, തല കിട്ടുന്നതിനുള്ള സാദ്ധ്യത, പൂവ് കിട്ടുന്നതിന്നുള്ള സാദ്ധ്യതയെ തള്ളിക്കളയുന്നു.അതുപോലെ തുല്യ സാദ്ധ്യതയുള്ള ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ സാദ്ധ്യതയുള്ള 6 ഫലങ്ങളും പരസ്പരം വർജ്ജകങ്ങളാണ്. എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ, പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ രണ്ടോ, അതിലധികമോ മുഖങ്ങൾ ഒരേ സമയത്ത് പ്രത്യക്ഷപ്പെടുന്നില്ല.

പൂരക സംഭവങ്ങൾ

E എന്നത് ഒരു യാദൃശ്ചിക സംഭവവും, S എന്നത് അതിന്റെ സാമ്പിൾ സ്പേസും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. E ൽ ഇല്ലാത്തതും എന്നാൽ സാമ്പിൾ സ്പേസിൽ ഉള്ളതുമായ മറ്റു ഫലങ്ങളുടെ ഗണത്തെ E യുടെ പൂരക സംഭവം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $\overline{E}$ എന്ന് കുറിക്കുന്നു. അതായത് $\overline{E} = S - E$. E , $\overline{E}$ പരസ്പരം വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണ്.



ചിത്രം. 12.2

ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ 2 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള ഒരു സംഭവമാണ് $E = \{2, 4, 6\}$

അതിനാൽ E യുടെ പൂരകഗണം $\overline{E} = \{1, 3, 5\}$

സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങൾ

സംഭവങ്ങൾ $E_1, E_2, \cdots, E_n$ എന്നിവയുടെ യോഗം സാമ്പിൾ സ്പേസ് S ആണെങ്കിൽ അവ സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളാണ്.

സുനിശ്ചിത സംഭവം

ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാമ്പിൾ സ്പേസിനെ സുനിശ്ചിത സംഭവമെന്നു പറയണമെങ്കിൽ അതിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു അംഗമെങ്കിലും പരീക്ഷണത്തിന്റെ ശ്രമത്തിൽ തീർച്ചയായും ഉണ്ടായിരിക്കേണ്ടതാണ്.

ഉദാഹരണമായി ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ $1, 2, 3, 4, 5, 6$ എന്നിവയിലേതെങ്കിലും ഒന്നു കിട്ടുന്നത് ഒരു സുനിശ്ചിത സംഭവമാണ്.

അസാദ്ധ്യ സംഭവം

ഒരിക്കലും നടക്കാൻ സാദ്ധ്യത ഇല്ലാത്ത സംഭവത്തെ അസാദ്ധ്യ സംഭവം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ ϕ എന്ന് കുറിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ 7 കിട്ടുന്നത് ഒരു അസാദ്ധ്യ സംഭവമാണ്.

അനുകൂല ഫലങ്ങൾ

ആഗ്രഹിച്ച സംഭവം സംഭവിക്കുന്നതിന് യോജിച്ച ഫലങ്ങളെ അനുകൂല ഫലങ്ങൾ എന്നുപറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ, ഒറ്റസംഖ്യ കിട്ടുന്ന സംഭവം E ആണെങ്കിൽ $1, 3, 5$ എന്നിവ E യുടെ അനുകൂല ഫലങ്ങളാണ്.

കുറിപ്പ്

ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ സാമ്പിൾസ്പേസ് പരിമിതവും എല്ലാ ഫലങ്ങളും സമസന്ദർഭവുമായ യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണങ്ങളെയാണ് നാം പരിഗണിക്കുന്നത്. അതിനാൽ തുല്യസാധ്യതയുള്ള പകിടകളും നാണയങ്ങളുമാണ് പരാമർശിക്കേണ്ടത്.

12.2 സംഭാവ്യതയുടെ ഉത്തമ നിർവ്വചനം

ഒരു സാമ്പിൾസ്പേസ് ഉൾക്കൊള്ളുന്ന n ഫലങ്ങളിൽ m എന്നതു A എന്ന സംഭവത്തിന്റെ അനുകൂലഫലങ്ങളാണെങ്കിൽ, നമുക്ക് $n(S) = n$, $n(A) = m$ എന്ന് എഴുതാം. A എന്ന സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യതയെ m ന്റെയും n ന്റെയും അംശബന്ധമായി നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇതിനെ $P(A)$ എന്ന് കുറിക്കാം.

ie $$\text{P(A)} = \frac{\text{A യ്ക്ക് അനുകൂലമായ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{\text{ഫലങ്ങളുടെ ആകെ എണ്ണം}}$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n}.$$

കുറിപ്പ്

(i) സാധ്യമായ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം അനന്തവും സമസന്ദർഭവുമല്ലെങ്കിൽ മുകളിൽ പറഞ്ഞ സംഭാവ്യതയുടെ ഉത്തമനിർവ്വചനം പ്രയോഗികമല്ല.

(ii) A എന്ന സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത 0 യ്ക്കും 1 നും ഇടയിലാണ് എന്നാൽ രണ്ടും ഉൾപ്പെടുന്നു;

ie $0 \le P(A) \le 1$.

(iii) സുനിശ്ചിത സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത 1 ആകുന്നു. ie $P(S) = 1$.

(iv) അസാദ്ധ്യ സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത 0 ആകുന്നു. ie $P(\phi) = 0$.

(v) സംഭവിക്കാൻ സാദ്ധ്യത ഇല്ലാത്ത A എന്ന സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത

$$P(A \text{ അല്ല}) = P(\overline{A}) \text{ അല്ലെങ്കിൽ } P(A') = \frac{n-m}{n} = \frac{n}{n} - \frac{m}{n}$$

$$\Longrightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A).$$

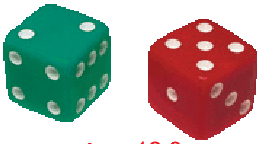
(vi) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

ഉദാഹരണം 12.1

ഒരു പകിട ഒരു പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടുമ്പോൾ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയുടെ സംഭാവ്യത കാണുക.

(i) 4 എന്ന സംഖ്യ. (ii) ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ.

(iii) 6 ന്റെ ഒരു അഭാജ്യഘടകം (iv) 4 നെക്കാൾ വലിയ ഒരു സംഖ്യ



ചിത്രം. 12.3

നിർദ്ധാരണം ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ സാമ്പിൾ സ്പേസ് $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$\therefore n(S) = 6$

(i) 4 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം A എന്നിരിക്കട്ടെ.

$A = \{4\} \ \therefore n(A) = 1$.

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}.$$

(ii) ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം B എന്നിരിക്കട്ടെ.

$B = \{2, 4, 6\} \quad \therefore \ n(B) = 3$.

$$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

(iii) 6 ന്റെ ഒരു അഭാജ്യഘടകം കിട്ടുന്നതിന്നുള്ള സംഭവം C എന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ $C = \{2, 3\} \quad \therefore\ n(C) = 2$.

എന്തെന്നാൽ $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

(iv) 4 നേക്കാൾ വലിയ ഒരു സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം D എന്നിരിക്കട്ടെ.

$D = \{5, 6\} \quad n(D) = 2$.

എന്തെന്നാൽ $P(D) = \dfrac{n(D)}{n(S)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

ഉദാഹരണം 12.2

ഒരു നാണയം രണ്ടു പ്രാവശ്യം ടോസ്സിടുന്നു. എങ്കിൽ

(i) രണ്ടു തലകൾ (ii) കുറഞ്ഞത് ഒരു തല (iii) കൃത്യമായി ഒരു പൂവ്

കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ഒരു നാണയം രണ്ടു പ്രാവശ്യം ടോസ് ചെയ്യുമ്പോൾ, സാമ്പിൾ സ്പേസ്

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

$$\therefore \quad n(S) = 4.$$

(i) രണ്ടു തലകൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം A എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ $A = \{HH\}$.

$$n(A) = 1.$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}.$$

(ii) കുറഞ്ഞത് ഒരു തലയെങ്കിലും കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം B എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ $n(B) = 3$.

$$\therefore \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{4}.$$

(iii) കൃത്യമായി ഒരു പൂവ് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം C എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ $C = \{HT, TH\}$

$$n(C) = 2.$$

$$\therefore \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

ഉദാഹരണം 12.3

ആദ്യത്തെ 20 നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളിൽ നിന്നും സമസന്ദർഭ രീതിയിൽ ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ അതൊരു അഭാജ്യസംഖ്യ ആയിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത് ?

നിർദ്ധാരണം ഇവിടെ $S = \{1, 2, 3, \cdots, 20\}$.

$$\therefore \quad n(S) = 20.$$

ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭവം A എന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ, $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

$$\therefore \quad n(A) = 8.$$

എന്തെന്നാൽ $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$.

ഉദാഹരണം 12.4

35 ഇനങ്ങളുള്ള ഒരു സാമ്പിളിൽ 7 ഇനങ്ങൾ കേടുവന്നതാണ്. യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുത്ത ഒരു ഇനം കേടില്ലാത്തതായിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

നിർദ്ധാരണം ആകെ ഇനങ്ങളുടെ എണ്ണം $n(S) = 35$.

കേടായ ഇനങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 7$.

കേടില്ലാത്ത ഒരു ഇനം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭവം A എന്നിരിക്കട്ടെ.

കേടില്ലാത്ത ഇനങ്ങളുടെ എണ്ണം, $n(A) = 35 - 7 = 28$.

$\therefore$ കേടില്ലാത്ത ഇനം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{35} = \frac{4}{5}.$$

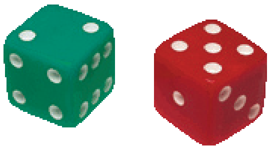
ഉദാഹരണം 12.5

രണ്ട് തുല്യ സാധ്യതയുള്ള പകിടകൾ ഒരേ സമയം ഉരുട്ടുമ്പോൾ

(i) തുക 8 (ii) രണ്ടു പകിടകളിലും ഒരേ സംഖ്യ (iii) തുക 8 ൽ കൂടുതൽ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം രണ്ട് പകിടകൾ ഉരുട്ടുമ്പോൾ സാമ്പിൾ സ്പേസ്

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$$



ചിത്രം. 12.4

$$\therefore\ n(S) = 6 \times 6 = 36.$$

(i) തുക 8 കിട്ടുന്നതിന്നുള്ള സംഭവം A എന്നിരിക്കട്ടെ

$$\therefore \quad A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}.$$

എങ്കിൽ $n(A) = 5$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}.$$

(ii) രണ്ടു പകിടകളിലും ഒരേ സംഖ്യകിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം B എന്നിരിക്കട്ടെ

$$\therefore \quad B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}.$$

$$n(B) = 6.$$

$$\therefore \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

(iii) തുക 8 ൽ കൂടുതൽ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം C എന്നിരിക്കട്ടെ

എങ്കിൽ, $C = \{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$.

$$n(C) = 10.$$

$$\therefore \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

ഉദാഹരണം 12.6

52 കാർഡുകൾ ഉള്ള ഒരു കശക്കിയ കെട്ടിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായ ഒരു കാർഡ് എടുത്തു എങ്കിൽ അത്

(i) ഒരു കിങ് കാർഡ് (ii) ഒരു ബ്ലാക്ക് കിങ് കാർഡ്

(iii) ഒരു സ്പേഡ് കാർഡ് (iv) ഒരു ഡയമൺഡ് 10 എന്നിവ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ആകെ കാർഡുകളുടെ എണ്ണം $n(S) = 52$

52 കാർഡുകളുടെ വിവരം

Spade ♠	Hearts ♥	Clavor ♣	Diamond ♦
A	A	A	A
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
J	J	J	J
Q	Q	Q	Q
K	K	K	K
13	13	13	13

(i) ഒരു കിങ് കാർഡ് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം A എന്നിരിക്കട്ടെ

$$\therefore n(A) = 4.$$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

(ii) ഒരു ബ്ലാക്ക് കിങ് കാർഡ് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം B എന്നിരിക്കട്ടെ

$$n(B) = 2.$$

$$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}.$$

(iii) ഒരു സ്പേഡ് കാർഡ് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം C എന്നിരിക്കട്ടെ

$$n(C) = 13.$$

$$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

(iv) ഒരു ഡയമൺഡ് 10 കാർഡ് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം D എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$n(D) = 1.$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{1}{52}.$$

ഉദാഹരണം 12.7

35 വിദ്യാർത്ഥികളുള്ള ഒരു ക്ലാസ്സിൽ 20 ആൺകുട്ടികളും 15 പെൺകുട്ടികളും ഉണ്ട്. അതിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു വിദ്ധ്യാർത്ഥിയെ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ അത് (i) ആൺകുട്ടി (ii) പെൺകുട്ടി ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാമ്പിൾ സ്പേസ് S എന്നിരിക്കട്ടെ. ഒരു ആൺകുട്ടി, ഒരു പെൺകുട്ടി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭവങ്ങൾ യഥാക്രമം B , G എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\therefore\ n(S) = 35,\ n(B) = 20,\ n(G) = 15.$$

(i) ഒരു ആൺകുട്ടിയെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{20}{35}$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{4}{7}.$$

(ii) ഒരു പെൺകുട്ടിയെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{15}{35}$

$$\Rightarrow P(G) = \frac{3}{7}.$$

ഉദാഹരണം 12.8

ഒരു പ്രത്യേക ദിവസം മഴ പെയ്യുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.76. എങ്കിൽ ആ ദിവസം മഴ പെയ്യാതിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്.?

നിർദ്ധാരണം മഴ പെയ്യുന്നതിനുള്ള സംഭവം A എന്നിരിക്കട്ടെ. മഴ പെയ്യാതിരിക്കാനുള്ള സംഭവം $\overline{A}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ $P(A) = 0.76.$

$$P(\overline{A}) = 1 - 0.76 \qquad \because P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$$= 0.24.$$

$\therefore$ മഴ പെയ്യാതിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.24.

ഉദാഹരണം 12.9

ഒരു സഞ്ചിയിൽ 5 ചുവപ്പ് പന്തുകളും കുറച്ച് നീല പന്തുകളും ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു നീല പന്ത് എടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത ഒരു ചുവപ്പ് പന്ത് എടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യതയുടെ മൂന്നു മടങ്ങാണ്, എങ്കിൽ സഞ്ചിയിലുള്ള നീല പന്തുകളുടെ എണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം നീല പന്തുകളുടെ എണ്ണം x എന്നിരിക്കട്ടെ

$\therefore$ പന്തുകളുടെ ആകെ എണ്ണം $n(S) = 5 + x$.

നീല പന്ത് എടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭവം B എന്നും, ചുവപ്പ് പന്ത് എടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭവം R എന്നും ഇരിക്കട്ടെ.

തന്നിട്ടുള്ളത് $P(B) = 3P(R)$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n(B)}{n(S)} = 3\frac{n(R)}{n(S)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{5+x} = 3\left(\frac{5}{5+x}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad x = 15$$

നീല പന്തുകളുടെ എണ്ണം $= 15$.

ഉദാഹരണം 12.10

സംഭാവ്യത കാണുക

(i) യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുത്ത ഒരു അധിവർഷം 53 വെള്ളിയാഴ്ചകൾ ഉൾക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതിന്

(ii) യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുത്ത ഒരു അധിവർഷം 52 വെള്ളിയാഴ്ചകൾ ഉൾക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതിന്

(iii) യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുത്ത ഒരു സാധാരണ വർഷം 53 വെള്ളിയാഴ്ചകൾ ഉൾക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതിന്

നിർദ്ധാരണം (i) ഒരു അധിവർഷത്തിന്റെ ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 366$ ദിവസങ്ങൾ. അതായത് 52 ആഴ്ചകളും 2 ദിവസങ്ങളും

ഇപ്പോൾ 52 ആഴ്ചകളിൽ 52 വെള്ളിയാഴ്ചകൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നു. കൂടാതെ ബാക്കിയുള്ള 2 ദിവസങ്ങൾക്ക് താഴെ പറയുന്ന ഏഴിൽ ഒരു സാധ്യതയുണ്ട്.

(ഞായ,തി), (തി,ചൊ), (ചൊ,ബു), (ബു,വ്യാ), (വ്യാ,വെ), (വെ,ശ), (ശ,ഞായ).

ഒരു അധിവർഷത്തിൽ 53 വെള്ളിയാഴ്ചകൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത മുകളിൽ തന്നിട്ടുള്ള 7 സാദ്ധ്യതകളിൽ ഒരു വെള്ളിയാഴ്ച ഉൾക്കൊള്ളുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യതയ്ക്കു സമമാണ്.

ഇവിടെ = (ഞായ,തി), (തി,ചൊ), (ചൊ,ബു), (ബു,വ്യാ), (വ്യാ,വെ), (വെ,ശ), (ശ,ഞായ)

എങ്കിൽ $n(S) = 7$.

ബാക്കിയുള്ള 2 ദിവസങ്ങളിൽ വെള്ളിയാഴ്ച വരുന്നതിനുള്ള സംഭവം A എന്നിരിക്കട്ടെ.

$A = \{$(വ്യാ,വെ), (വെ,ശ)$\}$ എങ്കിൽ $\mathrm{n}(A) = 2$.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{7}.$$

(ii) ഒരു അധിവർഷത്തിൽ 52 വെള്ളിയാഴ്ചകൾ മാത്രം കിട്ടുമ്പോൾ, ബാക്കിയുള്ള 2 ദിവസങ്ങളിൽ ഒരു വെള്ളിയാഴ്ചയും ഉണ്ടായിരിക്കുന്നതല്ല.

ബാക്കിയുള്ള 2 ദിവസങ്ങളിൽ വെള്ളിയാഴ്ച വരാതിരിക്കാനുള്ള സംഭവം B എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ

$B = \{$(ഞായ,തി), (തി,ചൊ), (ചൊ,ബു), (ബു,വ്യാ), (ശ,ഞായ)$\}$

$n(B) = 5$.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{7}.$$

A, B യും പൂരക സംഭവങ്ങളാണെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

(iii) ഒരു സാധാരണ വർഷത്തിലെ ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം = 365 ദിവസങ്ങൾ. അതായത് 52 ആഴ്ചകളും 1 ദിവസവും

ഒരു സാധാരണ വർഷത്തിൽ 53 വെള്ളിയാഴ്ചകൾ കിട്ടുന്നതിന് 7 സാദ്ധ്യതകളിൽ ഒരു വെള്ളിയാഴ്ച ഉണ്ടായിരിക്കേണ്ടതാണ്. ഞായ,തി,ചൊ,ബു,വ്യാ,വെ,ശനി

ഇവിടെ $S = \{$ഞായ, തി, ചൊ, ബു, വ്യാ, വെ, ശനി$\}$.

$\therefore \quad n(S) = 7$.

ബാക്കിയുള്ള ഒരു ദിവസം ഒരു വെള്ളിയാഴ്ച കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം C എന്നിരിക്കട്ടെ.

$C = \{$വെള്ളി$\} \implies n(C) = 1$.

$$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{7}.$$

ഒരു സാധാരണ വർഷത്തിൽ 53 വെള്ളിയാഴ്ചകൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത

ഉദാഹരണം 12.11

ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിലെ ഒരു സംഭവം A ആണ് $P(A):P(\overline{A}) = 7:12$, എങ്കിൽ $P(A)$ കാണുക

നിദ്ധാരണം $P(A):P(\overline{A}) = 7:12$

എന്നാൽ $P(A) = 7k$, $P(\overline{A}) = 12k.$, $k > 0$

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$. എങ്കിൽ

$7k + 12k = 1 \implies 19k = 1$.

$$k = \frac{1}{19}$$

$$\therefore \quad P(A) = 7k = \frac{7}{19}.$$

മറ്റൊരു രീതി

$$\frac{P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{7}{12}$$

$$12P(A) = 7 \times P(\overline{A})$$

$$= 7\,[1 - P(A)]$$

$$19P(A) = 7$$

$$P(A) = \frac{7}{19}$$

അഭ്യാസം 12. 1

1. 100 ടിക്കറ്റുകൾ ഉള്ള ഒരു സഞ്ചിയിൽ നിന്നും ഒരു ടിക്കറ്റ് എടുക്കുന്നു.ടിക്കറ്റുകൾക്ക് 1 മുതൽ 100 വരെ എണ്ണം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്. 10 കൊണ്ട്നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാൻ കഴിയുന്ന ഒരു സംഖ്യ വരുന്ന ഒരു ടിക്കറ്റ് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത് ?

2. ഒരു പകിട രണ്ടു പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടുന്നു. തുക 9 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

3. 2 പകിടകൾ ഒരേ സമയത്ത് ഉരുട്ടുന്നു. മുഖ സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കുന്ന രണ്ടക്ക സംഖ്യകൾ 3 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന സംഖ്യയായിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

4. 3 ചീഞ്ഞമുട്ടകൾ 12 നല്ലമുട്ടകളുമായി കലർന്നിരിക്കുന്നു. അതിൽ നിന്ന് യാദൃശ്ചികമായി ഒരു മുട്ട എടുത്താൽ ആ മുട്ട ഒരു ചീഞ്ഞമുട്ടയായിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

5. രണ്ട് നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയത്ത് ടോസിട്ടാൽ അധികപക്ഷമായി ഒരു തല കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

6. 52 കാർഡുകളുള്ള കശക്കിയ കെട്ടിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു കാർഡ് എടുത്തു. എങ്കിൽ എടുത്ത കാർഡ്?
   (i) ഒരു ഡയമൺഡ് (ii) ഒരു ഡയമൺഡ് അല്ലാത്ത (iii) ഒരു Ace അല്ലാത്ത
   ആയിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

7. 3 നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയത്ത് ടോസിട്ടാൽ
   (i) കുറഞ്ഞത് ഒരു തല (ii) കൃത്യമായി 2 തലകൾ (iii) കുറഞ്ഞത് 2 തലകൾ
   കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

8. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 1 മുതൽ 6 വരെ അക്കമിട്ട 6 വെള്ള പന്തുകളും 7 മുതൽ 10 വരെ അക്കമിട്ട 4 ചുവപ്പ് പന്തുകളും ഉണ്ട്. അതിൽ നിന്നും യദൃശ്ചികമായി ഒരു പന്ത് എടുത്താൽ അത്
   (i) ഒരു ഇരട്ട അക്കമിട്ട പന്ത് (ii) ഒരു വെള്ള പന്ത് കിട്ടാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

9. 1 മുതൽ 100 വരെയുള്ള പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു സംഖ്യ തെരഞ്ഞെടുത്തു എങ്കിൽ അത് (i) ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗം (ii) ഒരു പൂർണ്ണഘനമല്ല എന്നിവയുടെ സംഭാവ്യത കാണുക.

10. ഒരു വിനോദസഞ്ചാര സംഘത്തിനുവേണ്ടി ഒരു വിനോദസാഞ്ചാരി അർജന്റീന, ബംഗ്ലാദേശ്, ചൈന, അംഗോള, റഷ്യ, അൾജീരിയ, എന്നീരാജ്യങ്ങളിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു രാജ്യം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. തെരഞ്ഞെടുത്ത രാജ്യം 'അ' എന്ന അക്ഷരത്തിൽ തുടങ്ങുന്ന രാജ്യത്തെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുളള സംഭാവ്യത കാണുക?

11. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 4 പച്ച, 5 നീലം, 3 ചുവപ്പ് പന്തുകൾ ഉണ്ട്. യാദൃശ്ചികമായി ഒരു പന്ത് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു അത് (i) ചുവപ്പ് നിറം (ii) പച്ച നിറമല്ല എന്നിവയുടെ സംഭാവ്യത കാണുക.

12. 1 മുതൽ 20 വരെ അക്കമിട്ട 20 കാർഡുകളിൽ നിന്നും ഒരു കാർഡ് യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുത്തു എങ്കിൽ ആ കാർഡിലെ അക്കം
   (i) 4 ന്റെ ഒരു ഗുണിതം (ii) 6 ന്റെ ഒരു ഗുണിതമല്ല എന്നിവയുടെ സംഭാവ്യത കാണുക.

13. 3, 5, 7 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു രണ്ടക്ക സംഖ്യ ഉണ്ടാക്കി. ആ സംഖ്യ 57 നേക്കാൾ കൂടുതൽ (അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാൻ പാടില്ല) ആയിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

14. 3 പകിടകൾ ഒരേ സമയം ഉരുട്ടുന്നു. മൂന്ന് പകിടകളിലും ഒരേ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

15. രണ്ടു പകിടകൾ ഒരേ സമയം ഉരുട്ടുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന മുഖസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ ആയിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

16. ഒരു ഭരണിയിൽ നീല, പച്ച, വെള്ള എന്നീ ഒരോ നിറങ്ങളിൽ 54 മാർബിൾകല്ലുകൾ ഉണ്ട്. അതിൽ നിന്നും ഒരു കല്ലെടുത്താൽ ഒരു നീല മാർബിൾ കല്ല് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{3}$ ഒരു പച്ച മാർബിൾ കല്ല് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{4}{9}$ എന്നാൽ ആ ഭരണിയിൽ എത്ര വെള്ള മാർബിൾ കല്ലുകൾ ഉണ്ട്?

17. ഒരു സഞ്ചിയിലുള്ള 100 ഷർട്ടുകളിൽ 88 എണ്ണം നല്ലതും, 8 എണ്ണം ചെറിയ പോരായ്മ ഉള്ളതും 4 എണ്ണം കൂടുതൽ പോരായ്മ ഉള്ളതുമാണ്. വ്യാപാരി A നല്ല ഷർട്ടുകൾ മാത്രമേ അംഗീകരിക്കുകയുള്ളൂ എന്നാൽ വ്യാപാരി B കൂടുതൽ പോരായ്മയുള്ള ഷർട്ടുകൾ അംഗീകരിക്കുകയില്ല. യാദൃശ്ചികമായി ഒരു ഷർട്ട് എടുത്താൽ അത് (i) A (ii) B അംഗീകരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

18. ഒരു സഞ്ചിയിലുള്ള 12 പന്തുകളിൽ x പന്തുകൾ വെള്ളനിറമുള്ളവയാണ്. (i) യാദൃശ്ചികമായി ഒരു പന്ത് എടുത്താൽ അത് വെള്ള പന്തായിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്? (ii) 6 വെള്ള പന്തുകൾ കൂടെ സഞ്ചിയിൽ വച്ചതിനുശേഷം ഒരു വെള്ള പന്ത് കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത (i) ൽ കിട്ടുന്ന സംഭാവ്യതയുടെ 2 മടങ്ങാണ് എങ്കിൽ x കാണുക.

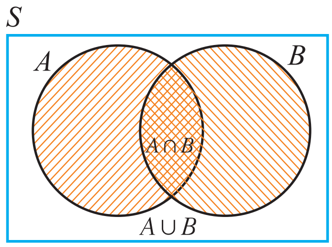
19. പിക്കി ബാങ്കിൽ 100 അൻപത് പൈസ നാണയങ്ങളും, 50 ഒരു രൂപാനാണയങ്ങളും, 20 രണ്ടു രൂപാ നാണയങ്ങളും 10 അഞ്ച് രൂപാ നാണയങ്ങളും ഉണ്ട്. യാദൃശ്ചികമായി ഒരു നാണയമെടുത്താൽ അത് (i) ഒരു അൻപത് പൈസാനാണയങ്ങളും (ii) അഞ്ച് രൂപാ നാണയമല്ലാതിരിക്കാൻ എന്നിവയുടെ സംഭാവ്യത കാണുക.

12.3 സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലന സിദ്ധാന്തം

S എന്ന ശൂന്യമല്ലാത്ത പരിമിത ഗണത്തിലെ ഉപഗണങ്ങളാണ് A, B എന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നാൽ

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

രണ്ടു വശങ്ങളേയും $n(S)$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ



ചിത്രം. 12.5

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \qquad (1)$$

ഉപഗണങ്ങൾ A യും B യും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത് ഒരു യാദൃശ്ചികപരീക്ഷണത്തിലെ രണ്ടുസംഭവങ്ങളും, S എന്നത് പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാമ്പിൾ സ്പേസുമാണെങ്കിൽ (1)

$$(1) \implies \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

ഈ ഫലത്തെ സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലനസിദ്ധാന്തം എന്നു പറയുന്നു.

കുറിപ്പ്

(i) സംഭവം A സംഭവിച്ചാൽ അല്ലെങ്കിൽ സംഭവം B സംഭവിച്ചാൽ അല്ലെങ്കിൽ സംഭവങ്ങൾ A യും B യും ഒരുമിച്ചു സംഭവിച്ചാൽ, സംഭവം $A \cup B$ സംഭവിച്ചു എന്നു പറയാം. സംഭവങ്ങൾ A യും B യും ഒരേ സമയം സംഭവിക്കുകയാണെങ്കിൽ സംഭവം $A \cap B$ സംഭവിച്ചു എന്നു പറയാം..

(ii) A യും B യും പരസ്പരം വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണെങ്കിൽ, $A \cap B = \phi$.

അതിനാൽ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \because P(A \cap B) = 0$.

(iii) ഗണസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ഭാഷയിൽ $A \cap \overline{B}$ എന്നത് $A \setminus B$ യ്ക്ക് തുല്യമാണ്.

ഫലങ്ങൾ (തെളിവില്ലാത്ത)

(i) A, B, C എന്നിവ ഒരു സാമ്പിൾ സ്പേസ് Sലെ ഏതെങ്കിലും 3 സംഭവങ്ങൾ

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

(ii) A_1, A_2 , A_3 എന്നിവ പരസ്പരം വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണെങ്കിൽ

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

(iii) $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ എന്നിവ പരസ്പരവർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണെങ്കിൽ

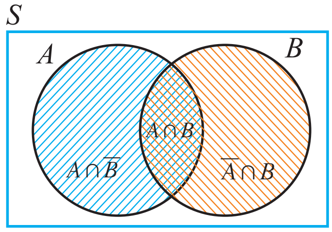
$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n)$$

(iv) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B),$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$A \cap \overline{B}$ അർത്ഥമാക്കുന്നത് A മാത്രം, B അല്ല എന്നാണ്

ഇതുപോലെ, $\overline{A} \cap B$ അർത്ഥമാക്കുന്നത് B മാത്രം, A അല്ല എന്നാണ്



ചിത്രം. 12.6

ഉദാഹരണം 12.12

മൂന്നു നാണയങ്ങൾ ഒരേസമയം ടോസിടുന്നു.സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലനസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് കൃത്യമായി രണ്ടു പൂവുകളോ അല്ലെങ്കിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു തലയോ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം സാമ്പിൾ സ്പേസ് $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT, TTH, THT, THH\}$.

$n(S) = 8.$

കൃത്യമായി രണ്ട് പൂവുകൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം A എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$A = \{HTT, TTH, THT\}, \quad n(A) = 3.$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}.$$

കുറഞ്ഞത് ഒരു തലയെങ്കിലും കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം B എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$B = \{HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}, \ n(B) = 7.$$

$$\therefore \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{8}.$$

ഇപ്പോൾ A യും B യും പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളല്ലാത്ത സംഭവങ്ങൾ എന്തെന്നാൽ

$$A \cap B = A, \quad P(A \cap B) = P(A) = \frac{3}{8}.$$

$\therefore P(A$ അല്ലെങ്കിൽ $B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}.$$

കുറിപ്പ്

മുകളിലുള്ള ഉദാഹരണത്തിൽ സംഭവ്യതയുടെ സങ്കലനസിദ്ധാന്തമാണ് നാം ഉപയോഗിച്ചത്.

ഇവിടെ $A \cup B = B.$ എന്നതിനാൽ $\cup\, P(A \cup B) = P(B) = \frac{7}{8}$

ഉദാഹരണം 12.13

ഒരു പകിട രണ്ടു പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടുന്നു. ഉരുട്ടിയ പകിടകളിൽ ഒന്നിലെങ്കിലും 5 എന്ന സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.(സങ്കലനസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിക്കുക)

നിർദ്ധാരണം ഒരു പകിട രണ്ടുപ്രാവശ്യം ഉരുട്ടിയാൽ, $n(S) = 36$.

ഒന്നാമത്തെ ഉരുട്ടലിൽ 5 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം A എന്നിരിക്കട്ടെ,

$$\therefore \quad A = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}.$$

$$n(A) = 6, \quad P(A) = \frac{6}{36}.$$

രണ്ടാമത്തെ ഉരുട്ടലിൽ 5 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം B എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\therefore \quad B = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\}.$$

$$n(B) = 6, \quad P(B) = \frac{6}{36}.$$

$A \cap B = \{(5,5)\}$ ആയതിനാൽ A, B എന്നിവ പരസ്പരവർജ്ജകങ്ങളായ സംഭവങ്ങൾ അല്ല.

$$\therefore \quad n(A \cap B) = 1, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

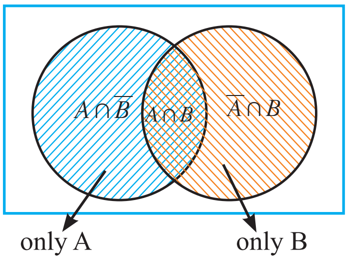
$\therefore$ സങ്കലന സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച്

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

ഉദാഹരണം 12.14

ഒരു പെൺകുട്ടിയെ ഒരു മെഡിക്കൽ കോളേജിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്നതിനുള്ള സംഭവ്യത 0.16. അവൾക്ക് ഒരു എഞ്ചിനീയറിംഗ് കോളേജിൽ പ്രവേശനത്തിന് തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.24. രണ്ടു കോളേജിലും തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.11.



ചിത്രം. 12.7

(i) പെൺക്കുട്ടിയെ കുറഞ്ഞത് രണ്ട് കോളേജിൽ ഒന്നിലെങ്കിലും തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

(ii) പെൺക്കുട്ടിയെ മെഡിക്കൽ കോളേജിൽ മാത്രമോ അല്ലെങ്കിൽ എഞ്ചിനീയറിംഗ് കോളേജിൽ മാത്രമോ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ഒരു മെഡിക്കൽ കോളേജിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടാനുള്ള സംഭവം A എന്നും ഒരു എഞ്ചിനീയറിംഗ് കോളേജിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടാനുള്ള സംഭവം B എന്നും ഇരിക്കട്ടെ.

(i) $P(A) = 0.16, \quad P(B) = 0.24, \; P(A \cap B) = 0.11$

$P($ രണ്ടു കോളേജിൽ ഒന്നിലെങ്കിലും തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്നതിന്$)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.16 + 0.24 - 0.11 = 0.29.$$

(ii) P(രണ്ടു കോളേജിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിൽ മാത്രം തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്നതിന്)

$= P$ (A മാത്രം അല്ലെങ്കിൽ B മാത്രം)

$$= P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$$

$$= [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= (0.16 - 0.11) + (0.24 - 0.11) = 0.18.$$

ഉദാഹരണം 12.15

"ENTERTAINMENT"എന്ന വാക്കിലുള്ള അക്ഷരങ്ങളിൽ നിന്ന് യാദൃശ്ചികമായി ഒരു അക്ഷരം തെരഞ്ഞെടുത്താൽ അതു ഒരു സ്വാരാക്ഷരം അല്ലെങ്കിൽ T ആയിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക. (അക്ഷരങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാവുന്നതാണ്)

നിർദ്ധാരണം ENTERTAINMENT എന്ന വാക്കിൽ 13 അക്ഷരങ്ങൾ ഉണ്ട്.

$$\therefore \quad n(S) = 13.$$

ഒരു സ്വാരക്ഷരം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭവം A എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\therefore \quad n(A) = 5.$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{13}.$$

അക്ഷരം T തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭവം B എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\therefore \quad n(B) = 3$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{13}.$$

$P(A$ അല്ലെങ്കിൽ$B) = P(A) + P(B)$ $\because$ Aയും Bയും പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങൾ

$$= \frac{5}{13} + \frac{3}{13} = \frac{8}{13}.$$

ഉദാഹരണം 12.16

A, B, C എന്നിവ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് പരസ്പര വർജ്ജകവും സമ്പൂർണ്ണവുമായ സംഭവങ്ങൾഎന്നിരിക്കട്ടെ. $P(B) = \frac{3}{2}P(A)$, $P(C) = \frac{1}{2}P(B)$.ഏങ്കിൽ $P(A)$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$P(A) = p.$$

$$P(B) = \frac{3}{2}P(A) = \frac{3}{2}p.$$

$$P(C) = \frac{1}{2}P(B) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}p\right) = \frac{3}{4}p.$$

A, B, C എന്നിവ പരസ്പരവർജ്ജകവും സമ്പൂർണ്ണവുമായ സംഭവങ്ങൾ

$$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C), \ S = A \cup B \cup C$$

ഇപ്പോൾ $P(S) = 1.$

അതായത് $P(A)+P(B)+P(C)=1$

$$\Longrightarrow \quad p+\frac{3}{2}p+\frac{3}{4}p=1$$

$$\Longrightarrow \quad 4p+6p+3p=4$$

$$p=\frac{4}{13}.$$

$$P(A)=\frac{4}{13}.$$

ഉദാഹരണം 12.17

52 കാർഡുകളുള്ള ഒരു കെട്ടിൽനിന്നും ഒരു കാർഡ് എടുത്താൽ അത് ഒരു കിങ് അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ഹാർട്ട് അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ചുവപ്പ് കാർഡ് ആയിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം ഒരു കിങ്, ഒരു ഹാർട്ട്, ഒരു ചുവപ്പ് കാർഡ് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവങ്ങൾ യഥാക്രമം A, B, C എന്നിരിക്കട്ടെ.

$n(S)=52,\ n(A)=4,\ n(B)=13,\ n(C)=26.$ കൂടാതെ

$n(A\cap B)=1,\ n(B\cap C)=13,\ n(C\cap A)=2$ കൂടാതെ $n(A\cap B\cap C)=1.$

$$\therefore\ P(A)=\frac{4}{52},\ P(B)=\frac{13}{52},\ P(C)=\frac{26}{52}.$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{52},\ P(B\cap C)=\frac{13}{52},\ P(C\cap A)=\frac{2}{52},\ P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{52}.$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$$

$$=\frac{4}{52}+\frac{13}{52}+\frac{26}{52}-\frac{1}{52}-\frac{13}{52}-\frac{2}{52}+\frac{1}{52}=\frac{44-16}{52}$$

$$=\frac{7}{13}.$$

ഉദാഹരണം 12.18

ഒരു സഞ്ചിയിൽ 10 വെള്ള, 5 കറുപ്പ്, 3 പച്ച, 2 ചുവപ്പ് പന്തുകൾ ഉണ്ട്. യാദൃശ്ചികമായി ഒരു പന്തെടുത്താൽ അത് വെള്ള അല്ലെങ്കിൽ കറുപ്പ് അല്ലെങ്കിൽ പച്ചയായിരിക്കാനുള്ള സംഭവ്യത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം സാമ്പിൾ സ്പേസ് S എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\therefore\quad n(S)=20.$$

ഒരു വെള്ള, കറുപ്പും,പച്ചയും പന്തുകൾ എടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭവം യഥാക്രമം W, B, G എന്നിരിക്കട്ടെ.

വെള്ള പന്ത് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $P(W)=\dfrac{n(W)}{n(S)}=\dfrac{10}{20}.$

ഒരു കറുത്ത പന്ത് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{5}{20}.$

ഒരു പച്ചപന്ത് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $P(G)=\dfrac{n(G)}{n(S)}=\dfrac{3}{20}.$

$\therefore$ ഒരു വെള്ള അല്ലെങ്കിൽ ഒരു കറുപ്പ് അല്ലെങ്കിൽ ഒരു പച്ച പന്ത് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവ്യത

$P(W\cup B\cup G)=P(W)+P(B)+P(G)$ $\quad\because W, B, G$ എന്നിവ പരസ്പരവർജ്ജകങ്ങളാണ്.

$$=\frac{10}{20}+\frac{5}{20}+\frac{3}{20}=\frac{9}{10}$$

കുറിപ്പ്: $P(W\cup B\cup G)=P(R')=1-P(R)=1-\frac{2}{20}=\frac{9}{10}$ എന്ന രീതിയിലും ഉത്തരം കിട്ടുന്നതാണ്

അഭ്യാസം 12.2

1. A യും B യും പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണ് $P(A)=\frac{3}{5}, P(B)=\frac{1}{5}$ എങ്കിൽ $P(A\cup B)$ കാണുക
2. A, B എന്നിവ രണ്ട് സംഭവങ്ങളാണ് $P(A)=\frac{1}{4}, P(B)=\frac{2}{5}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$ എങ്കിൽ $P(A\cap B)$ കാണുക.
3. A, B എന്നീ രണ്ടു സംഭവങ്ങളിൽ $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{7}{10}, P(A\cup B)=1$ എങ്കിൽ (i) $P(A\cap B)$ (ii) $P(A'\cup B')$ എന്നിവ കാണുക.
4. ഒരു പകിട രണ്ടു പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടുന്നു. ആദ്യത്തെ പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടുമ്പോൾ ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിന് അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടു ഉരുട്ടലിലും മുഖസംഖ്യകളുടെ തുക 8 കിട്ടുന്നതിന് ഉള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.
5. 1 മുതൽ 50 വരെ അക്കമിട്ട പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളിൽ നിന്ന് യാദൃശ്ചികമായി ഒരു സംഖ്യ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ, അത് 4 അല്ലെങ്കിൽ 6 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന ഒരു സംഖ്യ ആയിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.
6. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 50 സാക്ഷകളും 150 ആണികളും ഉണ്ട്. പകുതി സാക്ഷകളും പകുതി ആണികളും തുരുമ്പിച്ചതാണ്. യാദൃശ്ചികമായി ഒന്ന് തെരഞ്ഞെടുത്താൽ, അത് തുരുമ്പിച്ചത് അല്ലെങ്കിൽ ഒരു സാക്ഷ ആയിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.
7. രണ്ട് പകിടകൾ ഒരേ സമയം ഉരുട്ടുന്നു. മുഖങ്ങളിലെ സംഖ്യകളുടെ തുകയെ 3 കൊണ്ടോ, 4 കൊണ്ടോ നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാൻ സാധിക്കാത്തതിന്റെ സംഭവ്യത കാണുക.
8. ഒരു കൂടയിൽ 20 ആപ്പിളുകളും 10 ഓറഞ്ചുകളുമുണ്ട്. അതിൽ 5 ആപ്പിളുകളും 3 ഓറഞ്ചുകളും അഴുകിയതാണ്. ഒരാൾ യാദൃശ്ചികമായി ഒരു പഴമെടുത്താൽ അത് ആപ്പിൽ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു നല്ല പഴം ആയിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.
9. ഒരു ക്ലാസ്സിലെ വിദ്യാർത്ഥികളിൽ 40% പേർ ഗണിത പ്രശ്നോത്തരിയിലും, 30% പേർ ജീവശാസ്ത്ര പ്രശ്നോത്തരിയിലും, 10% പേർ രണ്ടു പ്രശ്നോത്തരിയിലും പങ്കെടുത്തു.ക്ലാസ്സിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു വിദ്യാർത്ഥിയെ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ ആ വിദ്യാർത്ഥി ഗണിത പ്രശ്നോത്തരി അല്ലെങ്കിൽ ജീവശാസ്ത്ര പ്രശ്നോത്തരി അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടു പ്രശ്നോത്തരിയിലും പങ്കെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.
10. 52 കാർഡുകളുള്ള നന്നായി കശക്കപ്പെട്ട കെട്ടിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു കാർഡ് എടുത്താൽ അത് ഒരു സ്പേഡ് അല്ലെങ്കിൽ ഒരു കിങ് ആയിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.
11. ഒരു പെട്ടിൽ 10 വെള്ള, 6 ചുവപ്പ്, 10 കറുപ്പ് പന്തുകളുണ്ട്. അതിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു പന്ത് എടുക്കുന്നു. അത് വെള്ള അല്ലെങ്കിൽ ചുവപ്പ് ആയിരക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യതകാണുക.
12. 2,5,9 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യ (സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാൻ പാടില്ല) രൂപീകരിക്കുന്നു. ആ സംഖ്യ 2 അല്ലെങ്കിൽ 5 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.
13. "ACCOMMODATION" എന്ന വാക്കിലെ ഒരോ അക്ഷരത്തേയും ഒരോ കഷണം പേപ്പറിൽ എഴുതി, ആ 13 കഷണം പേപ്പറുകളേയും ഒരു ഭരണിയിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. ഭരണിയിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു കഷണം പേപ്പറെടുത്താൽ അത്

    (i) അക്ഷരം 'A' അല്ലെങ്കിൽ 'O' ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

    (ii) അക്ഷരം 'M' അല്ലെങ്കിൽ 'C' ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

14. ഒരു പുതിയ കാറിന്റെ രൂപരേഖയ്ക്ക് പാരിതോഷികം ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.25 അതിലെ ഇന്ധന ഉപയോഗ നൈപുണ്യത്തിന് പാരിതോഷികം ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.35 രണ്ടു പാരിതോഷികവും ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.15 എങ്കിൽ

(i) കുറഞ്ഞത് ഒരു പാരിതോഷികം.

(ii) രേയൊരു പാരിതോഷികം മാത്രം ലഭിക്കുക എന്നിവയുടെ സംഭാവ്യത കാണുക.

15. A, B , C എന്നിവയ്ക്ക് ഒരു പ്രശ്നം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത യഥാക്രമം $\frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{7}$ ആകുന്നു. A യ്ക്കും B യ്ക്കും നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{8}{15}$, B യ്ക്കും C യ്ക്കും നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{2}{7}$. A യ്ക്കും C യ്ക്കും നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{12}{35}$. മൂന്നുപേർക്കും പ്രശ്നം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{8}{35}$. എങ്കിൽ അവരിൽ ഒരാളെ കൊണ്ടെങ്കിലും പ്രശ്നം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യപ്പെടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക.

അഭ്യാസം 12.3

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക

1. ϕ ഒരു അസാദ്ധ്യ സംഭവമെങ്കിൽ $P(\phi) =$

(A) 1 (B) $\frac{1}{4}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

2. ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാമ്പിൾ സ്പേസിൽ S, എങ്കിൽ $P(S) =$

(A) 0 (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

3. A എന്ന സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത p, എങ്കിൽ p തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നത്

(A) $0 < p < 1$ (B) $0 \le p \le 1$ (C) $0 \le p < 1$ (D) $0 < p \le 1$

4. A, B ഏതെങ്കിലും രണ്ടു സംഭവങ്ങൾ, S അവയുടെ സാമ്പിൾ സ്പേസ് എങ്കിൽ $P(\overline{A} \cap B) =$

(A) $P(B) - P(A \cap B)$ (B) $P(A \cap B) - P(B)$

(C) $P(S)$ (D) $P[(A \cup B)']$

5. ഒരു വിദ്യാർത്ഥി ഗണിതത്തിന് 100 മാർക്ക് വാങ്ങുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{4}{5}$. അവർ 100 മാർക്ക് വാങ്ങാതിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

6. A യും B യും രണ്ട് സംഭവങ്ങളാണെങ്കിൽ

$P(A) = 0.25, P(B) = 0.05, P(A \cap B) = 0.14,$ എന്നാൽ $P(A \cup B) =$

(A) 0.61 (B) 0.16 (C) 0.14 (D) 0.6

7. 20 ഇനങ്ങൾ അടങ്ങിയിട്ടുള്ള ഒരു സാമ്പിൾ സ്പേസിൽ 6 എണ്ണം കേടായവയാണ്. അതിൽ നിന്നും ഒരെണ്ണം യാദൃശ്ചികമായി എടുക്കുന്നു. അത് കേടില്ലാത്തതായിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

(A) $\frac{7}{10}$ (B) 0 (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{2}{3}$

8. A യും B യും പരസ്പരവർജ്ജക സംഭവങ്ങളും S സാമ്പിൾ സ്പേസും ആണെങ്കിൽ $P(A) = \frac{1}{3}P(B)$, $S = A \cup B$, എന്നാൽ $P(A) =$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{8}$

9. A, B, C എന്നീ മൂന്നു പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളുടെ സംഭാവ്യത $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}$ എങ്കിൽ $P(A \cup B \cup C) =$

(A) $\frac{19}{12}$ (B) $\frac{11}{12}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) 1

10. $P(A) = 0.25, P(B) = 0.50, P(A \cap B) = 0.14$ എങ്കിൽ P (A യുമല്ല B യുമല്ല) =

(A) 0.39 (B) 0.25 (C) 0.11 (D) 0.24

11. 5 കറുപ്പ് പന്തുകളും, 4 വെള്ള പന്തുകളും, 3 ചുവപ്പ് പന്തുകളും അടങ്ങുന്ന ഒരു സഞ്ചിയിൽ നിന്ന് യാദൃശ്ചികമായി ഒരു പന്ത് തെരഞ്ഞെടുത്തു. അത് ചുവപ്പ് അല്ലാതിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത.

(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{4}{12}$ (C) $\frac{3}{12}$ (D) $\frac{3}{4}$

12. രണ്ടു പകിടകൾ ഒരേ സമയം ഉരുട്ടുന്നു. മുഖങ്ങളിൽ ഒരേ സംഖ്യകിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത.

(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{2}{3}$

13. ഒരു പകിട ഒരു പ്രവശ്യം ഉരുട്ടുമ്പോൾ ഭാജ്യ അല്ലെങ്കിൽ അഭാജ്യ സംഖ്യകിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$

14. ഒരു നാണയം 3 പ്രാവശ്യം ടോസ്സിടുമ്പോൾ 3 തലകൾ അല്ലെങ്കിൽ 3 പൂവുകൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$

15. 52 കാർഡുകൾ അടങ്ങിയ ഒരു കെട്ടിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു കാർഡ് എടുക്കുന്നു.അത് ഒരു ഏസോ, ഒരു കിങ്ങോ അല്ലാതിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത

(A) $\frac{2}{13}$ (B) $\frac{11}{13}$ (C) $\frac{4}{13}$ (D) $\frac{8}{13}$

16. ഒരു അധിവർഷത്തിൽ 53 വെള്ളിയാഴ്ചകൾ അല്ലെങ്കിൽ 53 ശനിയാഴ്ചകൾ ഉണ്ടായിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{3}{7}$

17. ഒരു സാധാരണ വർഷത്തിൽ 53 ഞായറാഴ്ചകൾ അല്ലെങ്കിൽ 53 തിങ്കളാഴ്ചകൾ ഉണ്ടായിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) 0

18. 52 കാർഡുകളടങ്ങിയ ഒരു കെട്ടിൽ നിന്ന് ഒരു കാർഡ് തെരഞ്ഞെടുത്താൽ, അത് ഹാർട്ട് കാർഡിലെ രാജ്ഞി യായിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത

(A) $\frac{1}{52}$ (B) $\frac{16}{52}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{1}{26}$

19. സുനിശ്ചിത സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത

(A) 1 (B) 0 (C) 100 (D) 0.1

20. ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഫലം വിജയമോ തോൽവിയോ ആയിരിക്കുന്നതാണ്. വിജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യത തോൽവിയുടെ സംഭാവ്യതയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണെങ്കിൽ വിജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യത

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) 0

ഉത്തരങ്ങൾ

1. ഗണങ്ങളും ഫലനങ്ങളും

അഭ്യാസം 1.1

2. (i) A (ii) ϕ **3.** (i) {b, c} (ii) ϕ (iii) $\{a, e, f, s\}$

4. (i) {2, 4, 6, 7, 8, 9} (ii) {4, 6} (iii) {4, 6, 7, 8, 9}

10. {–5, –3, –2}, {–5, –3}, സംയോജനമല്ല.

അഭ്യാസം 1.2

2. (i) $A' \cup (A \cap B)$ അല്ലെങ്കിൽ $(A \backslash B)'$ (ii) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ (iii) $A \backslash (B \cup C)$ (iv) $(A \cap B) \backslash C$

5. (i) {12} (ii) {4, 8, 12, 20, 24, 28}

അഭ്യാസം 1.3

1. 300 **2.** 430 **3.** 35 **5.** 100 **6.** 30% **7.** (i) 10 (ii) 25 (iii) 15

8. (i) 450 (ii) 3550 (iii) 1850 **9.** 15

അഭ്യാസം 1.4

1. (i) ഫലനമല്ല (ii) ഫലനമാണ് **2.** മണ്ഡലം ={1, 2, 3, 4, 5}; രംഗം ={1, 3, 5, 7, 9}

3. (i) one-one ഫലനവുമല്ല onto ഫലനവുമല്ല (ii) സ്ഥിരഫലനം (iii) one-one onto ഫലനം

4. (i) ഫലനമല്ല (ii) one-one ഫലനം (iii) ഫലനമല്ല (iv) ബൈജക്ടീവ്

5. $a=-2,\ b=-5,\ c=8,\ d=-1$ **6.** രംഗം $\left\{-\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}\right\}$; Aയിലിരുന്ന് Aയ്ക്ക് f ഒരു ഫലനമല്ല

7. one-one, onto ഫലനം **8.** (i) 12 , 14 (ii) 13 , 15 **9.** $a = 9,\ b = 15$

10. (i) $f = \{(5, -7), (6, -9), (7, -11), (8, -13)\}$

(ii) സഹമണ്ഡലം $= \{-11, 4, 7, -10, -7, -9, -13\}$

(iii) രംഗം $= \{-7, -9, -11, -13\}$ (iv) one-one ഫലനം

11. (i) ഫലനം (ii) ഫലനം (iii) ഫലനമല്ല (iv) ഫലനമല്ല (v) ഫലനം

12.

x	–1	–3	–5	–4
$f(x)$	2	1	6	3

13. $\{(6,1), (9,2), (15,4), (18,5), (21,6)\}$

x	6	9	15	18	21
$f(x)$	1	2	4	5	6

14. $\{(4,3),(6,4),(8,5),(10,6)\}$

x	4	6	8	10
$f(x)$	3	4	5	6

15. (i) 16 (ii) –32 (iii) 5 (iv) $\frac{2}{3}$ **16.** (i) 23 (ii) 34 (iii) 2

അഭ്യാസം 1.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	C	A	A	B	A	B	B	B
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
A	B	C	D	A	D	D	B	A	C

2. വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ അനുക്രമങ്ങളും ശ്രേണികളും

അഭ്യാസം 2.1

1. (i) $-\frac{1}{3}, 0, 1$ (ii) $-27,\ 81,\ -243$ (iii) $-\frac{3}{4},\ 2,\ -\frac{15}{4}$

2. (i) $\frac{9}{17}, \frac{11}{21}$ (ii) –1536, 18432 (iii) 36, 78 (iv) –21,57

3. 378, $\frac{25}{313}$ **4.** 195, 256 **5.** 2, 5, 15, 35, 75 **6.** 1, 1, 1, 2, 3, 5

അഭ്യാസം 2.2

1. A.P : 6, 11, 16, $\cdots$; പൊതുപദം $5n+1$ **2.** പൊതുവ്യത്യാസം –5, $t_{15} = 55$

3. $t_{29} = 3$ **4.** $t_{12} = 23\sqrt{2}$ **5.** $t_{17} = 84$ **6.** (i) 27 പദങ്ങൾ (ii) 34 പദങ്ങൾ

8. $t_{27} = 109$ **9.** $n = 10$ **10.** 7 **11.** ആദ്യവർഷം : 100, $t_{15} = 2200$

12. 2560 **13.** 10, 2, –6 അല്ലെങ്കിൽ –6, 2, 10 **14.** 2, 6, 10 അല്ലെങ്കിൽ 10, 6, 2

16. A.P., ₹91,500

അഭ്യാസം 2.3

1. (i) G.P. , $r = 2$ (ii) G.P. , $r = 5$ (iii) G.P. , $r = \frac{2}{3}$ (iv) G.P. , $r = \frac{1}{12}$
(v) G.P. , $r = \frac{1}{2}$ (vi) G.P. അല്ല

2. -2^7 **3.** 2, 6, 18 , $\cdots$ **4.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$ **5.** (i) $n = 8$ (ii) $n = 11$ **6.** $n = 5$ **7.** $r = 5$

8. $r = \frac{5}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{2}{5}$; പദങ്ങൾ $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$. അല്ലെങ്കിൽ $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$. **9.** 18, 6, 2 അല്ലെങ്കിൽ 2, 6, 18

10. 4, 2, 1 അല്ലെങ്കിൽ 1, 2, 4 **11.** $1, 3, 9, \cdots$ അല്ലെങ്കിൽ $9, 3, 1, \cdots$ **12.** $1000\left(\frac{105}{100}\right)^{12}$

13. $50,000 \times \left(\frac{55}{100}\right)^{15}$

അഭ്യാസം 2.4

1. (i) 2850 (ii) 7875 **2.** 1020 **3.** (i) 260 (ii) 375 **4.** (i) 1890 (ii) 50 **5.** –3240

6. $\frac{39}{11} + \frac{40}{11} + \frac{41}{11} + \cdots$ **7.** 8 പദങ്ങൾ **8.** 55350 **9.** 740 **10.** 7227 **11.** 36

12. 13995 **13.** 15 ദിവസങ്ങൾ **14.** A.P., ₹37,200 **15.** A.P. അല്ല.

16. 156 പ്രാവശ്യം **20.** 1225 ഇഷ്ടികകൾ

അഭ്യാസം 2.5

1. $s_{20} = \frac{15}{4}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right]$ **2.** $s_{27} = \frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{27}\right]$ **3.** (i) 765 (ii) $\frac{5}{2}(3^{12}-1)$

4. (i) $\frac{1-(0.1)^{10}}{0.9}$ (ii) $\frac{10}{81}(10^{20}-1)-\frac{20}{9}$ **5.** (i) $n = 6$ (ii) $n = 6$ **6.** $\frac{75}{4}\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{23}\right]$

7. $3 + 6 + 12 + \cdots$ **8.** (i) $\frac{70}{81}[10^n - 1] - \frac{7n}{9}$ (ii) $1 - \frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]$

9. $s_{15} = \frac{5(4^{15}-1)}{3}$ **10.** 2-ാമത്തെ സാധ്യത; മാങ്ങകളുടെ എണ്ണം 1023. **11.** $r = 2$

അഭ്യാസം 2.6

1. (i) 1035 (ii) 4285 (iii) 2550 (iv) 17395 (v) 10630 (vi) 382500

2. (i) $k = 12$ (ii) $k = 9$ **3.** 29241 **4.** 91 **5.** 3818 സെ.മീ^{2} **6.** 201825 സെ.മീ^{3}

അഭ്യാസം 2.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	C	D	D	A	B	B	B	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	B	D	A	B	B	A	C	A

3. ബീജഗണിതം

അഭ്യാസം 3.1

1. $4, \frac{3}{2}$ **2.** 1 , 5 **3.** 3 , 2 **4.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ **5.** 1 , 5 **6.** $\frac{11}{23}, \frac{22}{31}$

7. 2 , 4 **8.** 2 , 1 **9.** $5, \frac{1}{7}$ **10.** 6 , – 4

അഭ്യാസം 3.2

1. (i) 4 , 3 (ii) 0.4, 0.3 (iii) 2 , 3 (iv) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

2. (i) 23 , 7 (ii) ₹18,000 , ₹14,000 (iii) 42 (iv) ₹800 (v) 253 സെ.മീ^{2} (vi) 720കി.മീ

അഭ്യാസം 3.3

1. (i) 4, – 2 (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$ (iv) 0, – 2 (v) $\sqrt{15}, -\sqrt{15}$ (vi) $\frac{2}{3}, 1$

(vii) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ (viii) – 13, 11

2. (i) $x^2 - 3x + 1$ (ii) $x^2 - 2x + 4$ (iii) $x^2 + 4$ (iv) $x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{5}$

(v) $x^2 - \frac{x}{3} + 1$ (vi) $x^2 - \frac{x}{2} - 4$ (vii) $x^2 - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$ (viii) $x^2 - \sqrt{3}x + 2$

അഭ്യാസം 3.4

1. (i) $x^2 + 2x - 1,\ 4$ (ii) $3x^2 - 11x + 40,\ -125$ (iii) $x^2 + 2x - 2,\ 2$

(iv) $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{9},\ -\frac{50}{9}$ (v) $2x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x + \frac{51}{32},\ -\frac{211}{32}$

(vi) $x^3 - 3x^2 - 8x + \frac{55}{2},\ -\frac{41}{2}$

2. $a = -6,\ b = 11,$ ശിഷ്ടം 5 **3.** $p = -2,\ q = 0,$ ശിഷ്ടം -10 –

അഭ്യാസം 3.5

1. (i) $(x-1)(x+2)(x-3)$ (ii) $(x-1)(2x+3)(2x-1)$ (iii) $(x-1)(x-12)(x-10)$
(iv) $(x-1)(4x^2-x+6)$ (v) $(x-1)(x-2)(x+3)$ (vi) $(x+1)(x+2)(x+10)$
(vii) $(x-2)(x-3)(2x+1)$ (viii) $(x-1)(x^2+x-4)$ (ix) $(x-1)(x+1)(x-10)$
(x) $(x-1)(x+6)(2x+1)$ (xi) $(x-2)(x^2+3x+7)$ (xii) $(x+2)(x-3)(x-4)$

അഭ്യാസം 3.6

1. (i) $7x^2yz^3$ (ii) x^2y (iii) $5c^3$ (iv) $7xyz^2$
2. (i) $c-d$ (ii) $x-3a$ (iii) $m+3$ (iv) $x+11$ (v) $x+2y$
(vi) $2x+1$ (vii) $x-2$ (viii) $(x-1)(x^2+1)$ (ix) $4x^2(2x+1)$ (x) $(a-1)^3(a+3)^2$
3. (i) x^2-4x+3 (ii) $x+1$ (iii) $2(x^2+1)$ (iv) x^2+4

അഭ്യാസം 3.7

1. x^3y^2z 2. $12x^3y^3z$ 3. $a^2b^2c^2$ 4. $264a^4b^4c^4$ 5. a^{m+3}
6. $xy(x+y)$ 7. $6(a-1)^2(a+1)$ 8. $10xy(x+3y)(x-3y)(x^2-3xy+9y^2)$
9. $(x+4)^2(x-3)^3(x-1)$ 10. $420x^3(3x+y)^2(x-2y)(3x+1)$

അഭ്യാസം 3.8

1. (i) $(x-3)(x-2)(x+6)$ (ii) $(x^2+2x+3)(x^4+2x^2+x+2)$
(iii) $(2x^2+x-5)(x^3+8x^2+4x-21)$ (iv) $(x^3-5x-8)(2x^3-3x^2-9x+5)$
2. (i) $(x+1)(x+2)^2$ (ii) $(3x-7)^3(4x+5)$ (iii) $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$
(iv) $x(x+2)(5x+1)$ (v) $(x-2)(x-1)$ (vi) $2(x+1)(x+2)$

അഭ്യാസം 3.9

1. (i) $\frac{2x+3}{x-4}$ (ii) $\frac{1}{x^2-1}$ (iii) $(x-1)$ (iv) $\frac{x^2+3x+9}{x+3}$
(v) x^2-x+1 (vi) $\frac{x+2}{x^2+2x+4}$ (vii) $\frac{x-1}{x+1}$ (viii) $(x+3)$
(ix) $\frac{(x-1)}{(x+1)}$ (x) 1 (xi) $\frac{(x+1)}{(2x-1)}$ (xii) $(x-2)$

അഭ്യാസം 3.10

1. (i) $3x$ (ii) $\frac{x+9}{x-2}$ (iii) $\frac{1}{x+4}$ (iv) $\frac{1}{x-1}$ (v) $\frac{2x+1}{x+2}$ (vi) 1
2. (i) $\frac{x-1}{x}$ (ii) $\frac{x-6}{x-7}$ (iii) $\frac{x+1}{x-5}$ (iv) $\frac{x-5}{x-11}$ (v) 1 (vi) $\frac{3x+1}{4(3x+4)}$ (vii) $\frac{x-1}{x+1}$

അഭ്യാസം 3.11

1. (i) x^2+2x+4 (ii) $\frac{2}{x+1}$ (iii) $\frac{2(x+4)}{x+3}$ (iv) $\frac{2}{x-5}$

(v) $\frac{x+1}{x-2}$ (vi) $\frac{4}{x+4}$ (vii) $\frac{2}{x+1}$ (viii) 0

2. $\frac{2x^3+2x^2+5}{x^2+2}$ **3.** $\frac{5x^2-7x+6}{2x-1}$ **4.** 1

അഭ്യാസം 3.12

1. (i) $14|a^3b^4c^5|$ (ii) $17|(a-b)^2(b-c)^3|$ (iii) $|x-11|$

(iv) $|x+y|$ (v) $\frac{11}{9}\left|\frac{x^2}{y}\right|$ (vi) $\frac{8}{5}\left|\frac{(a+b)^2(x-y)^4(b-c)^3}{(x+y)^2(a-b)^3(b+c)^5}\right|$

2. (i) $|4x-3|$ (ii) $|(x+5)(x-5)(x+3)|$ (iii) $|2x-3y-5z|$

(iv) $\left|x^2+\frac{1}{x^2}\right|$ (v) $|(2x+3)(3x-2)(2x+1)|$ (vi) $|(2x-1)(x-2)(3x+1)|$

അഭ്യാസം 3.13

1. (i) $|x^2-2x+3|$ (ii) $|2x^2+2x+1|$ (iii) $|3x^2-x+1|$ (iv) $|4x^2-3x+2|$

2. (i) $a=-42, b=49$ (ii) $a=12, b=9$ (iii) $a=49, b=-70$ (iv) $a=9,\ b=-12$

അഭ്യാസം 3.14

1. $\{-6,3\}$ **2.** $\left\{-\frac{4}{3},3\right\}$ **3.** $\left\{-\sqrt{5},\frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$ **4.** $\left\{-\frac{3}{2},5\right\}$ **5.** $\left\{-\frac{4}{3},2\right\}$

6. $\left\{5,\frac{1}{5}\right\}$ **7.** $\left\{-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right\}$ **8.** $\left\{\frac{1}{b^2},\frac{1}{a^2}\right\}$ **9.** $\left\{-\frac{5}{2},3\right\}$ **10.** $\left\{7,\frac{8}{3}\right\}$

അഭ്യാസം 3.15

1. (i) $\{-7,1\}$ (ii) $\left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$ (iii) $\left\{-3,\frac{1}{2}\right\}$

(iv) $\left\{\frac{a-b}{2},-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}$ (v) $\{\sqrt{3},1\}$ (vi) $\{-1,3\}$

2. (i) $\{4,3\}$ (ii) $\left\{\frac{2}{5},\frac{1}{3}\right\}$ (iii) $\left\{\frac{1}{2},2\right\}$ (iv) $\left\{-\frac{2b}{3a},\frac{b}{a}\right\}$

(v) $\left\{\frac{1}{a},a\right\}$ (vi) $\left\{\frac{a+b}{6},\frac{a-b}{6}\right\}$ (vii) $\left\{\frac{(9+\sqrt{769})}{8},\frac{(9-\sqrt{769})}{8}\right\}$ (viii) $\left\{-1,\frac{b^2}{a^2}\right\}$

അഭ്യാസം 3.16

1. 8 അല്ലെങ്കിൽ $\frac{1}{8}$ **2.** 9 , 6 **3.** 20 മീ, 5മീ അല്ലെങ്കിൽ 10മീ, 10മീ **4.** $\frac{3}{2}$ മീ

5. 45 കി.മീ/മണി **6.** 5 കി.മീ/മണി **7.** അച്ഛന്റെ വയസ്സ് = 49, മകന്റെ വയസ്സ് =7 **8.** 24സെ.മീ **9.** 12 ദിവസങ്ങൾ

10. ഒന്നാമത്തെ തീവണ്ടിയുടെ വേഗത = 20 കി.മീ/മണി , രണ്ടാമത്തെ തീവണ്ടിയുടെ വേഗത = 15കി.മീ/മണി

അഭ്യാസം 3.17

1. (i) വാസ്തവികം (ii) വാസ്തവികമല്ല (iii) വാസ്തവികം, തുല്യം (iv) വാസ്തവികം, തുല്യം
(v) വാസ്തവികമല്ല (vi) വാസ്തവികം

2. (i) $\frac{25}{2}$ (ii) ± 3 (iii) -5 അല്ലെങ്കിൽ 1 (iv) 0 അല്ലെങ്കിൽ 3

അഭ്യാസം 3.18

1. (i) 6,5 (ii) $-\frac{r}{k}, p$ (iii) $\frac{5}{3}, 0$ (iv) $0, -\frac{25}{8}$

2. (i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (ii) $x^2 - 6x + 2 = 0$ (iii) $4x^2 - 16x + 9 = 0$

3. (i) $\frac{13}{6}$ (ii) $\pm\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{35}{18}$ **4.** $\frac{4}{3}$ **5.** $4x^2 - 29x + 25 = 0$

6. $x^2 - 3x + 2 = 0$ **7.** $x^2 - 11x + 1 = 0$ **8.** (i) $x^2 - 6x + 3 = 0$
(ii) $27x^2 - 18x + 1 = 0$ (iii) $3x^2 - 18x + 25 = 0$ **9.** $x^2 + 3x - 4 = 0$

10. $k = -18$ **11.** $a = \pm 24$ **12.** $p = \pm 3\sqrt{5}$

അഭ്യാസം 3.19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	A	A	C	D	B	C	C	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	A	A	A	D	D	D	B	C
21	22	23	24	25					
D	A	C	C	A					

4. മാട്രിക്സുകൾ

അഭ്യാസം 4.1

1. $\begin{pmatrix} 400 & 500 \\ 200 & 250 \\ 300 & 400 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 400 & 200 & 300 \\ 500 & 250 & 400 \end{pmatrix}$, 3×2, 2×3 **2.** $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 13 \end{pmatrix}$

3. (i) 2×3 (ii) 3×1 (iii) 3×3 (iv) 1×3 (v) 4×2

4. $1 \times 8,\ 8 \times 1,\ 2 \times 4,\ 4 \times 2$

5. $1 \times 30, 30 \times 1, 2 \times 15, 15 \times 2, 3 \times 10, 10 \times 3, 5 \times 6, 6 \times 5, 10 \times 1, 1 \times 10, 15 \times 1, 1 \times 15$

6. (i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ **7.** (i) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

8. (i) 3×4 (ii) 4, 0 (iii) 2-ാമത്തെ വരി, 3-ാമത്തെ നിര **9.** $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

അഭ്യാസം 4.2

1. $x = 2,\ y = -4,\ z = -1$ **2.** $x = 4,\ y = -3$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 16 & -6 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 33 & -45 \end{pmatrix}$ **6.** $a = 3,\ b = -4$

7. $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{11}{5} & 3 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{pmatrix}$ **8.** $x = -3, -3,\ y = -1, 4$

11. ടിവി, ഡിവിഡി, വിഡിയോഗെയിം, സിഡി

$\begin{pmatrix} 55 & 27 & 20 & 16 \\ 72 & 30 & 25 & 27 \\ 47 & 33 & 18 & 22 \end{pmatrix}$ കട I, കട II, കട III

12. കുട്ടികൾ, പ്രായപൂർത്തിയായവർ

$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$ 2 മണിയ്ക്കുമുമ്പ്, 2 മണിയ്ക്കുശേഷം

അഭ്യാസം 4.3

1. (i) 4×2 (ii) നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല (iii) 3×5 (iv) 2×2

2. (i) (6) (ii) $\begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 22 & 12 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} -40 & 64 \\ 22 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 12 & -42 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1750 \\ 1600 \\ 1650 \end{pmatrix}$ ഒന്നാം ദിവസം, രണ്ടാം ദിവസം, മൂന്നാം ദിവസം, (5000) **4.** $x = 3,\ y = 0$ **5.** $x = 2,\ y = -5$

7. $AB = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 12 & 0 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 17 & 6 \end{pmatrix},\ AB \neq BA$ **11.** $x = -3, 5$

അഭ്യാസം 4.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	A	D	B	D	B	C	C	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	D	D	B	C	B	A	C	B	D

5. വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി

അഭ്യാസം 5.1

1. (i) $(-2, 1)$ (ii) $(0,2)$ **2.** (i) $(5,-2)$ (ii) $(2, -1)$ **3.** $(-12, 8)$

4. $(2, -2)$ **6.** $(-24,-2)$ **7.** $(-2,3)$ **8.** $(-6,-3)$ **9.** $(-1,0), (-4,2)$

10. $\left(-3, \frac{3}{2}\right),\ (-2, 3),\ \left(-1, \frac{9}{2}\right)$ **11.** 4 : 7 ആന്തരികമായി

12. 5:2 ആന്തരികമായി, $\left(0, \frac{17}{7}\right)$ **13.** $\frac{\sqrt{130}}{2},\ \sqrt{13},\ \frac{\sqrt{130}}{2}$

അഭ്യാസം 5.2

1. (i) 3 ച.മാത്രകൾ (ii) 32 ച.മാത്രകൾ (iii) 19 ച.മാത്രകൾ

2. (i) $a = -3$ (ii) $a = \frac{13}{2}$ (iii) $a = 1, 3$

3. (i) സമരേഖീയമാണ് (ii) സമരേഖീയമല്ല (iii) സമരേഖീയമാണ്

4. (i) k = 1 (ii) k = 2 (iii) $k = \frac{7}{3}$

5. (i) 17 ച.മാത്രകൾ (ii) 43 ച.മാത്രകൾ (iii) 60.5 ച.മാത്രകൾ 7. 1 ച.മാത്രകൾ, 1 : 4

അഭ്യാസം 5.3

1. (i) 45° (ii) 60° (iii) 0° 2. (i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $\sqrt{3}$ (iii) നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല

3. (i) 1 (ii) –2 (iii) 1 4. (i) 45° (ii) 30° (iii) $\tan\theta = \frac{b}{a}$

5. $-\frac{1}{2}$ 6. (i) 0 (ii) നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല (iii) 1 7. $\sqrt{3}$, 0 10. $a = -1$

11. $b = 6$ 12. $-\frac{9}{10}$ 13. $\frac{11}{7}, -13, -\frac{1}{4}$ 14. $\frac{1}{12}, -\frac{4}{5}, \frac{9}{2}$

അഭ്യാസം 5.4

1. $y = 5$, $y = -5$ 2. $y = -2$, $x = -5$ 3. (i) $3x + y - 4 = 0$ (ii) $\sqrt{3}x - y + 3 = 0$

4. $x - 2y + 6 = 0$ 5. (i) ചായ്‌വ് 1, y-അന്തഃഖണ്ഡം 1 (ii) ചായ്‌വ് $\frac{5}{3}$, y-അന്തഃഖണ്ഡം 0

(iii) ചായ്‌വ് 2, y-അന്തഃഖണ്ഡം $\frac{1}{2}$ (iv) ചായ്‌വ് $-\frac{2}{3}$, y-അന്തഃഖണ്ഡം $-\frac{2}{5}$

6. (i) $4x + y - 6 = 0$ (ii) $2x - 3y - 22 = 0$ 7. $2x - 2\sqrt{3}y + (3\sqrt{3} - 7) = 0$

8. (i) $x - 5y + 27 = 0$ (ii) $x + y + 6 = 0$ 9. $6x + 5y - 2 = 0$

11. (i) $3x + 2y - 6 = 0$ (ii) $9x - 2y + 3 = 0$ (iii) $15x - 8y - 6 = 0$

12. (i) 3,5 (ii) –8, 16 (iii) $-\frac{4}{3}, -\frac{2}{5}$, 13. $2x + 3y - 18 = 0$

14. $2x + y - 6 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$ 15. $x - y - 8 = 0$

16. $x + 3y - 6 = 0$ 17. $2x + 3y - 12 = 0$ 18. $x + 2y - 10 = 0, 6x + 11y - 66 = 0$

19. $x + y - 5 = 0$ 20. $3x - 2y + 4 = 0$

അഭ്യാസം 5.5

1. (i) $-\frac{3}{4}$ (ii) 7 (iii) $\frac{4}{5}$ 4. $a = 6$ 5. $a = 5$ 6. $p = 1,2$ 7. $h = \frac{22}{9}$

8. $3x - y - 5 = 0$ 9. $2x + y = 0$ 10. $2x + y - 5 = 0$ 11. $x + y - 2 = 0$

12. $5x + 3y + 8 = 0$ 13. $x + 3y - 7 = 0$ 14. $x - 3y + 6 = 0$

15. $x - 4y + 20 = 0$ 16. (3, 2) 17. 5 മാത്രകൾ 18. $x + 2y - 5 = 0$

19. $2x + 3y - 9 = 0$

അഭ്യാസം 5.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	A	D	A	B	D	A	D	C	C	B
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
C	C	C	D	B	B	D	A	A	B	B	

6. ജ്യാമിതി

അഭ്യാസം 6.1

1. (i) 20സെ.മീ (ii) 6സെ.മീ (iii) 1 **2.** (i) അല്ല (ii) ആണ് **3.** 7.5സെ.മീ **4.** 10.5സെ.മീ

6. 12സെ.മീ, 10സെ.മീ, **9.** (i) 7.5സെ.മീ (ii) 5.8സെ.മീ (iii) 4 **10.** (i) ആണ് (ii) അല്ല **11.** 18

അഭ്യാസം 6.2

1. (i) $x = 4$സെ.മീ, $y = 9$സെ.മീ (ii) $x = 3.6$ സെ.മീ, $y = 2.4$ സെ.മീ, $z = 10$സെ.മീ (iii) $x = 8.4$ സെ.മീ, $y = 2.5$ സെ.മീ **2.** 3.6 മീ **3.** 1.2 മീ **4.** 140 മീ **6.** 6 സെ.മീ **7.** 64 ച.സെ.മീ

8. 166.25 ച.സെ.മീ **9.** (i) $\frac{9}{64}$ (ii) $\frac{55}{64}$ **10.** 6.3 .ച.കി.മീ **11.** 72 സെ.മീ **12.** 9 മീ

13. (i) $\triangle XWY$, $\triangle YWZ$, $\triangle XYZ$ (ii) 4.8 മീ

അഭ്യാസം 6.3

1. 65° **2.** (i) 4 സെ.മീ (ii) 12 സെ.മീ **3.** (i) 12 സെ.മീ (ii) 1 സെ.മീ **6.** 30 സെ.മീ

അഭ്യാസം 6.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	A	D	B	C	B	D	B	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	C	D	D	A	B	B	D	C

7. ത്രികോണമിതി

അഭ്യാസം 7.1

1. (i) അല്ല (ii) അല്ല

അഭ്യാസം 7.2

1. 1.8മീ **2.** 30° **3.** ഇല്ല **4.** 174.7 മീ **5.** 40 സെ.മീ **6.** കാക്ക B

7. $5\sqrt{6}$ മീ **8.** 1912.40 മീ **9.** $30\sqrt{2}$ മീ **10.** 1.098 മീ **11.** $19\sqrt{3}$ മീ

12. കൊടുത്തു **13.** 87 മീ **14.** 3 മിനിറ്റുകൾ **15.** 3464 കി.മീ **16.** 40 മീ

17. 60 മീ ; $40\sqrt{3}$ മീ **18.** 90മീ

അഭ്യാസം 7.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	C	A	A	B	A	A	C	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	C	A	D	C	C	D	B	B	D

8. അളവുകൾ

അഭ്യാസം 8.1

1. 704സെ.മീ^{2}, 1936സെ.മീ^{2} 2. $h = 8$ സെ.മീ, 352സെ.മീ^{2} 3. $h = 40$ സെ.മീ, d = 35 സെ.മീ

4. ₹2640 5. $r = 3.5$ സെ.മീ, h = 7 സെ.മീ 6. $h = 28$സെ.മീ

7. $C_1 : C_2 = 5 : 2$ 8. 612πസെ.മീ^{2} 9. 3168 സെ.മീ^{2}

10. 550സെ.മീ^{2}, 704 സെ.മീ^{2} 11. $h = 15\sqrt{3}$ സെ.മീ, $l = 30$ സെ.മീ 12. 1416സെ.മീ^{2}

13. 23.1m^2 14. 10.5 സെ.മീ 15. $301\frac{5}{7}$ സെ.മീ^{2} 16. 2.8 സെ.മീ

17. 4158സെ.മീ^{2} 18. $C_1 : C_2 = 9 : 25$, $T_1 : T_2 = 9 : 25$

19. 44.1π സെ.മീ^{2}, 57.33π സെ.മീ^{2} 20. ₹246.40

അഭ്യാസം 8.2

1. 18480 സെ.മീ^{3} 2. 38.5 ലിറ്റർ 3. 4620 സെ.മീ^{3} 4. $r = 2.1$ സെ.മീ

5. $V_1 : V_2 = 20 : 27$ 6. 10സെ.മീ 7. 4158 സെ.മീ^{3} 8. 7.04 സെ.മീ^{3}

9. 8800സെ.മീ^{3} 10. 616 സെ.മീ^{3} 11. 5സെ.മീ 12. 1408.6 സെ.മീ^{3}

13. $314\frac{2}{7}$ സെ.മീ^{3} 14. $2\sqrt{13}$ സെ.മീ 15. 8 സെ.മീ 16. 2.29 കി.ഗ്രാം

17. $3050\frac{2}{3}$ സെ.മീ^{3} 18. 288πസെ.മീ^{2} 19. $718\frac{2}{3}$ സെ.മീ^{3} 20. 1: 8

അഭ്യാസം 8.3

1. 11.88π സെ.മീ^{2} 2. 7623സെ.മീ^{3} 3. 220 മി.മീ^{2} 4. 1034 മീ^{2}

5. 12 സെ.മീ 6. 12.8 കി.മീ 7. 2 സെ.മീ 8. 1 സെ.മീ

9. 1386 ലിറ്റർ 10. 3 മണി. 12 മിനിറ്റുകൾ 11. 16 സെ.മീ 12. 16 സെ.മീ

13. 750 ഈയഗോളങ്ങൾ 14. 10 വൃത്തസ്തൂപികകൾ 15. 70 സെ.മീ

16. $r = 36$ സെ.മീ, $l = 12\sqrt{13}$ സെ.മീ 17. 11മീ

അഭ്യാസം 8.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	C	A	A	B	C	A	B	D	C	C
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
D	D	B	D	B	C	B	D	A	D	C

10. ഗ്രാഫുകൾ

അഭ്യാസം 10.1

2. (i) $\{-2, 2\}$ (ii) $\{-2, 5\}$ (iii) $\{5, 1\}$ (iv) $\{-\frac{1}{2}, 3\}$

3. $\{-1, 5\}$ 4. $\{-2, 3\}$ 5. $\{-2.5, 2\}$ 6. $\{-3, 5\}$ 7. നിർദ്ധാരണമില്ല

അഭ്യാസം 10.2

1. 120 കി.മീ 2. (i) ₹105 (ii) 11 നോട്ടുബുക്കുകൾ 3. (i) $y = 8$ (ii) $x = 6$

4. (i) $k = 15$ (ii) ₹45 5. $y = 4; x = 2$ 6. 24 ദിവസങ്ങൾ

11. സാംഖ്യികം

അഭ്യാസം 11.1

1. (i) 36, 0.44 (ii) 44, 0.64 **2.** 71 **3.** 3.38 കി.ഗ്രാം **4.** $2\sqrt{5}$, 20 **5.** 3.74

6. (i) 5.97 (ii) 4.69 **7.** 6.32 **8.** 1.107 **9.** 15.08

10. 36.76, 6.06 **11.** 416, 20. 39 **12.** 54.19 **13.** 4800, 240400 **14.** 10.2, 1.99

15. 25 **16.** 20.43 **17.** 12 **18.** 5.24 **19.** 1159, 70 **20.** വിദ്യാർത്ഥി *A*

അഭ്യാസം 11.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	C	B	D	C	C	B	A	B
11	12	13	14	15					
D	B	C	D	B					

12. സംഭാവ്യത

അഭ്യാസം 12.1

1. $\frac{1}{10}$ **2.** $\frac{1}{9}$ **3.** $\frac{1}{3}$ **4.** $\frac{1}{5}$ **5.** $\frac{3}{4}$

6. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{12}{13}$ **7.** (i) $\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{1}{2}$

8. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{5}$ **9.** (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{24}{25}$ **10.** $\frac{1}{2}$ **11.** (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{2}{3}$

12. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{17}{20}$ **13.** $\frac{1}{3}$ **14.** $\frac{1}{36}$ **15.** $\frac{1}{6}$ **16.** 12

17. (i) $\frac{22}{25}$ (ii) $\frac{24}{25}$ **18.** (i) $\frac{1}{4}$ (ii) 3 **19.** (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

അഭ്യാസം 12. 2

1. $\frac{4}{5}$ **2.** $\frac{3}{20}$ **3.** (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{4}{5}$ **4.** $\frac{5}{9}$ **5.** $\frac{8}{25}$

6. $\frac{5}{8}$ **7.** $\frac{4}{9}$ **8.** $\frac{9}{10}$ **9.** $\frac{3}{5}$ **10.** $\frac{4}{13}$

11. $\frac{8}{13}$ **12.** $\frac{2}{3}$ **13.** $\frac{5}{13}, \frac{4}{13}$ **14.** (i) 0.45 (ii) 0.3 **15.** $\frac{101}{105}$

അഭ്യാസം 12. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	**D**	**B**	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**D**	**A**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	**C**	**C**	**B**	**B**	**D**	**D**	**A**	**A**	**B**

പലവക പ്രശ്നങ്ങൾ

(പരീക്ഷയ്ക്കുള്ളതല്ല)

1. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}, x \neq -1$, എങ്കിൽ $f(2x) = \dfrac{3f(x)+1}{f(x)+3}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

2. x ന്റെ എല്ലാ വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങൾക്കും $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15$ നെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക. $\left(\text{ഉത്തരം : } x = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right)$

3. $\log_{10}2$, $\log_{10}(2^x - 1)$, $\log_{10}(2^x + {}^x3)$ എന്നിവ ഇതേ ക്രമത്തിൽ ഒരു A.P. രൂപീകരിച്ചാൽ x ന്റെ മൂല്യം കാണുക. ? (ഉത്തരം : $x = \log_5 2$)

4. പൊതു അനുപാതം r ഉള്ള ഒരു G.P യിൽ ആദ്യത്തെ നാല് പദങ്ങളുടെ തുക 15, അവയുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക 85. എങ്കിൽ $14r^4 - 17r^3 - 17r^2 - 17r + 14 = 0$. എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. $\{b_n\}$ എന്ന അനുക്രമം ഒരു G.P. $\Leftrightarrow$ $b_n^2 = b_{n-1}\, b_{n+1}, n > 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. $17, 21, \cdots$ കൂടാതെ $16, 21, \cdots$ എന്നീ രണ്ട് AP യിലും ചില സംഖ്യകൾ കാണുന്നു. രണ്ട് പ്രോഗ്രഷനിലും കാണപ്പെടുന്ന ആദ്യത്തെ പത്ത് സംഖ്യകളുടെ തുക കാണുക. (ഉത്തരം : 1110)

7. $\{a_n\}$ എന്ന അനുക്രമം ഒരു A.P. $\Leftrightarrow$ $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n > 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9. $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

10. ഒരു രണ്ടക്ക സംഖ്യയെ അവയുടെ അക്കങ്ങളുടെ തുകയാൽ ഹരിച്ചാൽ ഹരണഫലം 4 ഉം ശിഷ്ടം 3 ഉം കിട്ടുന്നു. ആ രണ്ടക്ക സംഖ്യയെ അവയുടെ അക്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്താൽ ഹരിച്ചാൽ ഹരണഫലം 3 ഉം ശിഷ്ടം 5 ഉം കിട്ടുന്നു. രണ്ടക്ക സംഖ്യ കാണുക. (ഉത്തരം : 23)

11. 4 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 കിട്ടുന്ന എല്ലാ രണ്ടക്ക സംഖ്യകളുടേയും തുക കാണുക. (ഉത്തരം : 1210)

12. ലഘൂകരിക്കുക $\dfrac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b+c}} \times \left(1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$ $\left(\text{ഉത്തരം : } \dfrac{1}{2bc}\right)$

13. $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന് വാസ്തവിക മൂലങ്ങൾ ഇല്ല. $a + b + c < 0$. എങ്കിൽ c എന്ന സംഖ്യയുടെ ചിഹ്നം എന്തായിരിക്കും (സൂചന: $f(x) = 0$ യ്ക്ക് വാസ്തവിക മൂലങ്ങൾ ഇല്ലെങ്കിൽ, എല്ലാ x നും $f(x)$ ന് ഒരേ ചിഹ്നം ആയിരിക്കും) (ഉത്തരം : $c < 0$)

14. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - x + 6} > 0$ ആകത്തക്കവിധം എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾക്കും x കാണുക. (ഉത്തരം $x > 1$)

15. നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക. $1 + a + a^2 + \cdots + a^x = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$ (ഉത്തരം : $x = 15$)

16. കണക്കാക്കുക. $\dfrac{6x_1^2x_2 - 4x_1^3 + 6x_1x_2^2 - 4x_2^3}{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2}$, ഇവിടെ x_1, x_2 എന്നിവ $x^2 - 5x + 2 = 0$ യുടെ മൂലങ്ങളാണ്. (ഉത്തരം : $-\dfrac{320}{73}$)

17. സർവ്വസമവാക്യം തെളിയിക്കുക: $\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha - \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sec\alpha - 1}{\sin\alpha} = -1$

18. ഒട്ടകങ്ങളുടെ ഒരു കൂട്ടത്തിലെ നാലിലൊന്ന് കാട്ടിൽ കാണപ്പെടുന്നു. കൂട്ടത്തിലെ എണ്ണത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലത്തിന്റെ ഇരട്ടി പർവ്വതത്തിലേക്ക് പോയിക്കഴിഞ്ഞു. ബാക്കിയുള്ള 15 ഒട്ടകങ്ങൾ ഒരു നദിയുടെ തീരത്തിൽ കാണപ്പെടുന്നു. ഒട്ടകങ്ങളുടെ ആകെ എണ്ണം കാണുക.. (ഉത്തരം : 36)

19. ഒരു ട്രെയിൻ 30 കി.മീ ദൂരം നിശ്ചിതവേഗതയിൽ സഞ്ചരിച്ച ശേഷം എഞ്ചിൻ കോളാറിനാൽ അതിന്റെ യഥാർത്ഥ വേഗതയുടെ $\frac{4}{5}$ വേഗത കുറയുന്നു. തന്നിമിത്തം, ആ ട്രെയിൻ അതിന്റെ ലക്ഷ്യത്തിൽ 45 മിനിറ്റുകൾ വൈകി എത്തിച്ചേരുന്നു. എഞ്ചിൻ കോളാറ് 18 കി.മീ ദൂരം കൂടെ സഞ്ചരിച്ചതിനുശേഷം സംഭവിച്ചിരുന്നെങ്കിൽ ട്രെയിൻ 9 മിനിറ്റുകൾ നേരത്തെ എത്തിച്ചേരും. ട്രെയിനിന്റെ വേഗതയും സഞ്ചരിച്ച ദൂരവും കാണുക.
(ഉത്തരം: ട്രെയിനിന്റെ വേഗത 30 കി.മീ /മണി, സഞ്ചരിച്ച ദൂരം 120 കി.മീ.)

20. $\sin\theta + \sin^2\theta + \sin^3\theta = 1$, എങ്കിൽ $\cos^6 - 4\cos^4\theta + 8\cos^2\theta = 4$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

21. $\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta = l$, $\sec\theta - \cos\theta = m$ എങ്കിൽ $l^2m^2(l^2 + m^2 + 3) = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

22. ഒരു പർവ്വതത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്ന് അതിന്റെ ശിഖരത്തിന്റെ മേൽക്കോൺ 45°;മുകളിലേക്ക് 1000 മീ കയറിയശേഷം 30° കീഴ്കോണും, 60° മേൽക്കോണും കാണപ്പെട്ടു. പർവ്വതത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.
(ഉത്തരം : 1.366 കി.മീ.)

23. ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ എതിർശീർഷങ്ങൾ $(3, 4), (1, -1)$. എങ്കിൽ മറ്റ് രണ്ട് ശീർഷങ്ങളുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കാണുക. (ഉത്തരം : $\left(\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$)

24. ഒരു കൂടുന്ന G.P. യിൽ ആദ്യത്തേയും അവസാനത്തേയും പദങ്ങളുടെ തുക 66, രണ്ടാമത്തേയും അവസാനപദത്തിന്റെ മുന്നിലുള്ള പദത്തിന്റേയും ഗുണനഫലം 128 ഉം പദങ്ങളുടെ തുക 126ഉം ആകുന്നു. അനുക്രമത്തിൽ എത്ര പദങ്ങൾ ഉണ്ട്? (ഉത്തരം : 6)

25. തലത്തിൽ A എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ മേൽക്കോൺ α. A യുടെ തൊട്ടുമുകളിൽ b ഉയരത്തിൽ നിന്ന് ഗോപുരത്തിന്റെ ചുവട്ടിലേക്കുള്ള കീഴ്ക്കോൺ β ആകുന്നു. ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം $b\cot\beta\tan\alpha$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

26. ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കുളത്തിന്റെ അളവുകൾ 40 അടി × 20 അടി. കുളത്തിനുചുറ്റും ഒരേ വീതിയിലും ഒരേ ആഴത്തിലും അതിർത്തികെട്ടാൻ കൃത്യമായി 99 ഘന അടി കോൺക്രീറ്റ് ഉണ്ട്. അതിർത്തിക്ക് 3 ഇഞ്ച് ആഴമാണ് ഉള്ളത്. എല്ലാ കോൺക്രീറ്റും ഉപയോഗിച്ചാൽ അതിർത്തി എത്ര വീതി ഉള്ളതായിരിക്കും?
(ഉത്തരം : 3 അടി)

27. ലഘൂകരിക്കുക $(1+\frac{2}{2})(1+\frac{2}{3})(1+\frac{2}{4})\cdots(1+\frac{2}{n})$. (ഉത്തരം : $\frac{(n+1)(n+2)}{6}$)

28. മൂന്ന് വൃത്താകാരതകിടുകളിൽ രണ്ടിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം r ഇഞ്ചും മൂന്നാമത്തേതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം $2r$ ഇഞ്ചും ആകുന്നു. ഓരോന്നിന്റേയും അരികുകൾ തമ്മിൽ കൃത്യമായി ഒരു ബിന്ദു പൊതുവായി വരത്തക്കവിധം മൂന്ന് തകിടുകളും ഒരു തലത്തിൽ വെച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ തകിടുകളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ കൊണ്ടുണ്ടാകുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക. (ഉത്തരം : $2\sqrt{2}\,r^2$ ച. ഇഞ്ച്)

29. 8 ഇഞ്ച് വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ആറ് വൃത്താകാര തകിടുകൾ ഓരോന്നും അതിന്റെ അരികിലുള്ള മറ്റ് രണ്ടു വൃത്താകാരതകിടുകളെ ഓരോ ബിന്ദുവിൽ മാത്രം തൊടത്തക്കവിധം വൃത്താകാരത്തിൽ വെച്ചിരിക്കുന്നു. അതിന്റെ മധ്യഭാഗത്ത് 7 - മത്തെ തകിട് 6 തകിടുകളേയും ഒരോ ബിന്ദുവിലും തൊടത്തക്കവിധം വയ്ക്കാൻ സാധിക്കും എങ്കിൽ ആറ് തകിടുകളും മധ്യത്തിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.
(ഉത്തരം : $192\sqrt{3}$ ച. ഇഞ്ച്)

30. 4 സെ.മീ വ്യാസാർദ്ധവും 5 സെ.മീ ഉയരവുമുള്ള ഒരു സിലിണ്ടറാകാര മരകഷ്ണത്തിൽ നിന്ന് തുല്യ ആധാര വ്യാസാർദ്ധവും 3 സെ.മീ ഉയരവുമുള്ള ഒരു സമവൃത്താകാരവൃത്തസ്തൂപിക ചെത്തിയെടുക്കുന്നു. ബാക്കി മരകഷ്ണത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം 76π സെ.മീ² എന്ന് തെളിയിക്കുക.

31. $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

ഇവിടെ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

Reference

1. Peter J. Eccles, Introduction to Mathematical Reasoning, Cambridge University Press 2007
2. Ann Xavier Gantert, Algebra 2 and Trigonometry, Amsco School Publications Inc., 2009
3. Boris A Kordemsky, The Moscow Puzzles: 359 Mathematical Recreations, Dover Publications
4. Imre Lakatos, Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery, January 1976
5. Krishnan Namboodiri, Richard G. Niemi, Matrix Algebra, An Introduction, Sage Publications 1984
6. Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind, Challenging Problems in Geometry, Dover Publications
7. Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind, Challenging Problems in Algebra, Dover Publications
8. James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson, College Algebra, Thomson Brooks/Cole, Jan 2010
9. Michael Sullivan, College Algebra, Pearson Publishing, January 2007
10. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html
11. V.Govorov, P.Dybov, N.Miroshin, S.Smirnova, Problems in Mathematics, G.K. Publications 2010
12. H.S.Hall, S.R. Knight, Elementary Algebra for Schools, Surjeet Publications 2007
13. H.S.Hall, S.R. Knight, Higher Algebra, A.I.T.B.S Publishers 2009
14. D.Dorokhin, Z.Plaksenko, G.Bazhora, Collection of Problems and Exercises in Mathematics, Mir Publications 1990

ചോദ്യപേപ്പർ രൂപരേഖ

പാഠം : ഗണിതം

സമയം : 2.30 മണിക്കൂർ

ക്ലാസ് : X

മാർക്ക് : 100

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾക്കുള്ള മാർക്കുകളുടെ മൂല്യനിർണ്ണയം

ലക്ഷ്യങ്ങൾ	ശതമാനം
അറിവ്	19
മനസ്സിലാക്കൽ	31
പ്രയോഗം	23
നിപുണത	27
ആകെ	100

ചോദ്യങ്ങളുടെ മൂല്യനിർണ്ണയം

ചോദ്യങ്ങളുടെ വിവരം	ഭാഗം -A ഏറ്റവും ചെറിയ ഉത്തരം	ഭാഗം -B ചെറിയ ഉത്തരം	ഭാഗം-C വലിയ ഉത്തരം	ഭാഗം-D ഏറ്റവും വലിയ ഉത്തരം	ആകെ
ചോദ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം	15	10	9	2	36
മാർക്ക്	15	20	45	20	100
സമയം (മിനിട്ടുകളിൽ)	20	35	65	30	2.30 മണിക്കൂർ

ചോദ്യങ്ങളുടെ തരങ്ങൾ

നില	മാർക്കുകളുടെ ശതമാനം
പ്രയാസം	12
ശരാശരി	28
എളുപ്പം	60

വിഭാഗങ്ങളും തെരഞ്ഞെടുക്കലും

ഭാഗങ്ങൾ	ചോദ്യക്രമം		ചോദ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം	ഉത്തരം നൽകേണ്ട ചോദ്യം
	നിന്ന്	വരെ		
A	1	15	15	15
B	16	30	16 30 - ാമത്തെ ചോദ്യം നിർബന്ധമാണ്. ഇത് 'രണ്ടിലൊന്ന്' മാതൃകയാണ്	10
C	31	45	16 45 - ാമത്തെ ചോദ്യം നിർബന്ധമാണ്. ഇത് 'രണ്ടിലൊന്ന്' മാതൃകയാണ്	9
D	46		2 ഈ ചോദ്യം 'രണ്ടിലൊന്ന്' മാതൃകയാണ്	1
	47		2 ഈ ചോദ്യം 'രണ്ടിലൊന്ന്' മാതൃകയാണ്	1

ഉള്ളടക്കത്തിന്റെ മൂല്യനിർണ്ണയം

അദ്ധ്യായ ക്രമം.	അദ്ധ്യായം	ചോദ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം				ആകെ മാർക്ക്
		1 മാർക്ക്	2 മാർക്ക്	5 മാർക്ക്	10 മാർക്ക്	
1	ഗണങ്ങളും ഫലനങ്ങളും	1	2	2		15
2	വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ അനുക്രമങ്ങളും ശ്രേണികളും	2	1	2		14
3	ബീജഗണിതം	2	2	3		21
4	മാട്രിക്സുകൾ	1	2	1		10
5	വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി	2	2	2		16
6	ജ്യാമിതി	2	1	1		9
7	ത്രികോണമിതി	2	2	1		11
8	അളവുകൾ	1	2	2		15
9	പ്രയോഗിക ജ്യാമിതി				2	20
10	ഗ്രാഫുകൾ				2	20
11	സാംഖ്യികം	1	1	1		8
12	സംഭാവ്യത	1	1	1		8
ആകെ		15	16	16	4	167

ഉദാഹരണങ്ങൾ, അഭ്യാസങ്ങൾ, ആസൂത്രണ ചോദ്യങ്ങൾ എന്നിവയിലേക്കുള്ള മാർക്കുകളുടേയും, ചോദ്യങ്ങളുടേയും വിതരണം

	ഭാഗം A (1 മാർക്ക്)	ഭാഗം B (2 മാർക്ക്)	ഭാഗം C (5 മാർക്ക്)	ഭാഗം D (10 മാർക്ക്)	ആകെ മാർക്കുകൾ	ശതമാനം
പുസ്തകത്തിലെ ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്ന്	---	6 (2)	6 (5)	1 (10)	52	31
പുസ്തകത്തിലെ അഭ്യാസങ്ങളിൽ നിന്ന്	10 (1)	8 (2)	8 (5)	3 (10)	96	58
വ്യക്തമാക്കിയിട്ടുള്ള അധ്യായങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള ആസൂത്രണചോദ്യങ്ങൾ	5 (1)	2 (2)	2 (5)	---	19	11
ആകെ	15 (1)	16 (2)	16 (5)	4 (10)	167	100

- ബ്രാക്കറ്റിലെ സംഖ്യകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ഒരോ ചോദ്യത്തിനുമുള്ള മാർക്കാണ്.

ഭാഗം - A

1. 1 മുതൽ 15 വരെയുള്ള എല്ലാ 15 ചോദ്യങ്ങളും ശരിയായ ഉത്തരം തെരെഞ്ഞെടുക്കേണ്ട (multiple choice questions) മാതൃകയിലുള്ളവയാണ്. നിർബന്ധമായും ഉത്തരം എഴുതേണ്ട ഓരോ ചോദ്യത്തിനും 4 വികൽപ്പങ്ങളുണ്ട്. ഓരോ ചോദ്യത്തിനും ഒരു മാർക്ക്.
2. 15 ചോദ്യങ്ങളിൽ, 10 ചോദ്യങ്ങൾ പുസ്തകത്തിൽ തന്നിട്ടുള്ള ശരിയായ ഉത്തരം തെരെഞ്ഞെടുക്കുന്ന ചോദ്യങ്ങളാണ്, ബാക്കിയുള്ള 5 ചോദ്യങ്ങൾ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ, ഫലങ്ങൾ, ഉദാഹരണങ്ങൾ, അധ്യായങ്ങൾ എന്നിവ അടിസ്ഥാനമാക്കി 2, 3, 5, 6, 7 എന്നീ അഞ്ച് വ്യത്യസ്ത അധ്യായങ്ങളിൽ നിന്നും ആസൂത്രണം ചെയ്തിരിക്കുന്നു.

ഭാഗം - B

1. 16 മുതൽ 30 വരെ അക്കമുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ നിന്ന് 10 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം എഴുതുക. ഓരോ ചോദ്യത്തിനും 2 മാർക്ക്.
2. ആദ്യത്തെ 14 ചോദ്യങ്ങളിൽ നിന്ന് ഏതെങ്കിലും 9 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം എഴുതുക. ചോദ്യം 30 നിർബന്ധമാണ്. ഇത് മാത്രം രണ്ടിലൊന്ന്, മാതൃകയിലാണ്.
3. ആദ്യത്തെ 14 ചോദ്യങ്ങളുടെ ക്രമം പുസ്തകത്തിലെ അധ്യായങ്ങളുടെ ക്രമമായിരിക്കും.
4. ആദ്യത്തെ 14 ചോദ്യങ്ങളിൽ, 6 ചോദ്യങ്ങൾ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്നും, 8 ചോദ്യങ്ങൾ അഭ്യാസങ്ങളിൽ നിന്നുമാണ്.
5. 2, 3, 5, 8 എന്നീ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വ്യത്യസ്ത അധ്യായങ്ങളിലെ ഉദാഹരണങ്ങൾ, അഭ്യാസങ്ങളിലെ പ്രശ്നങ്ങൾ അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ് ചോദ്യം 30 ലെ രണ്ടു ചോദ്യങ്ങളും ആസൂത്രണം ചെയ്യപ്പെട്ടിട്ടുള്ളത്.

ഭാഗം - C

1. 31മുതൽ 45 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ നിന്നും 9 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം എഴുതുക. ഓരോ ചോദ്യത്തിനും 5 മാർക്ക്.
2. ആദ്യത്തെ 14 ചോദ്യങ്ങളിൽ നിന്നും ഏതെങ്കിലും 8 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം എഴുതുക. ചോദ്യം 45 നിർബന്ധമാണ്. ഇത് മാത്രം രണ്ട ിലൊന്ന് മാതൃകയിലാണ്.
3. ആദ്യത്തെ 14 ചോദ്യങ്ങളുടെ ക്രമം പുസ്തകത്തിലെ അധ്യായങ്ങളുടെ ക്രമമായിരിക്കും.
4. ആദ്യത്തെ 14 ചോദ്യങ്ങളിൽ, 6 ചോദ്യങ്ങൾ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്നും, 8 ചോദ്യങ്ങൾ അഭ്യാസങ്ങളിൽ നിന്നുമാണ്.
5. 2, 3, 5,8 എന്നീ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വ്യത്യസ്ത അധ്യായങ്ങളിലെ ഉദാഹരണങ്ങൾ, അഭ്യാസങ്ങളിലെ പ്രശ്നങ്ങൾ അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ് ചോദ്യം 45 ലെ രണ്ടു ചോദ്യങ്ങളും ആസൂത്രണം ചെയ്യപ്പെട്ടിട്ടുള്ളത്. .
6. 2, 3, 5, 8 എന്നീ അധ്യായങ്ങളിലെ ഉദാഹരണങ്ങൾ, അഭ്യാസങ്ങളിലെ പ്രശ്നങ്ങൾ അടിസ്ഥാനമാക്കി എല്ലാ ചോദ്യങ്ങളും വ്യത്യസ്ത അധ്യായങ്ങളിൽ നിന്നും ചോദ്യങ്ങൾ 30(a), 30(b), 45(a) , 45(b) ആസൂത്രണം ചെയ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

ഭാഗം - D

1. ഈ ഭാഗത്തിൽ 46, 47എന്നീ രണ്ടു ചോദ്യങ്ങളിൽ ഒന്ന്, 9 -ാം അധ്യായത്തിൽ നിന്നും, മറ്റേത് 10-ാം അധ്യായത്തിൽ നിന്നുമാണ്. ഓരോ ചോദ്യവും ഓരോ അധ്യായത്തിൽ നിന്നും രണ്ട് രണ്ടിലൊന്ന് (അല്ലെങ്കിൽ മാതൃക) മാതൃകയിലാണ്. ഓരോ ചോദ്യത്തിനും 10 മാർക്ക്.
2. രണ്ടു ചോദ്യങ്ങൾക്കും ഉത്തരം എഴുതുക.
3. 46(a), 47(a), 46(b), 47(b) എന്നീ ചോദ്യങ്ങളിൽ ഒന്ന് പുസ്തകത്തിലെ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്നാണ്. ബാക്കിയുള്ള മൂന്ന് ചോദ്യങ്ങൾ അഭ്യാസങ്ങളിൽ നിന്നാണ്.

BLUE PRINT - X Std.

അധ്യായം / വസ്തുത	അറിവ്				മനസ്സിലാക്കൽ				പ്രയോഗം				നിപുണത				ആകെ മാർക്ക്
	VSA	SA	LA	VLA	VSA	SA	LA	VLA	VSA	SA	LA	VLA	VSA	SA	LA	VLA	
ഗണങ്ങളും ഫലനങ്ങളും	1(1)	2(1)	5(1)			2(1)					5(1)						15
വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ അനുക്രമങ്ങളും ശ്രേണികളും		2(1)	5(1)		1(1)				1(1)		5(1)						14
ബീജഗണിതം		2(1)	5(1)		1(1)				1(1)	2(1)	5(1)				5(1)		21
മാട്രിക്സുകൾ						4(2)	5(1)		1(1)								10
വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി		2(1)			1(1)	2(1)	5(1)		1(1)		5(1)						16
ജ്യാമിതി					1(1)	2(1)	5(1)		1(1)								9
ത്രികോണമിതി					1(1)	2(1)	5(1)		1(1)	2(1)							11
അളവുകൾ	1(1)					2(1)	5(1)			2(1)	5(1)						15
പ്രയോഗിക ജ്യാമിതി																10(2)	20
ഗ്രാഫുകൾ																10(2)	20
സാംഖ്യികം			5(1)			2(1)			1(1)								8
സംഭാവ്യത		2(1)					5(1)		1(1)								8
ആകെ	2(2)	10(5)	20(4)		5(5)	16(8)	30(6)		8(8)	6(3)	25(5)				5(1)	40(4)	167

- ബ്രാക്കറ്റിലെ സംഖ്യകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ചോദ്യങ്ങളുടെ എണ്ണമാണ്.
- മറ്റേ സംഖ്യകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് മാർക്ക്.