எடுத்துக்காட்டு 5.22

$(-1,1)$, $(2,-4)$ ஆகிய புள்ளிகளின் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் என்க.

இங்கு $x_1 = -1$, $y_1 = 1$ மற்றும் $x_2 = 2$, $y_2 = -4$.

இரண்டு புள்ளிகள்-அமைப்பில் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y-1}{-4-1} = \frac{x+1}{2+1}$$

$$\Longrightarrow \quad 3y - 3 = -5x - 5$$

தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $5x + 3y + 2 = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.23

$A(2, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(4, 5)$ என்பன $\triangle ABC$-ன் உச்சிகள். உச்சி A-யிலிருந்து வரையப்படும் நடுக்கோட்டின் (median) சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு முக்கோணத்தின் ஓர் முனையையும், அதன் எதிர்ப் பக்கத்தின் நடுப்புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு நடுக்கோடாகும்.

BC-ன் நடுப்புள்ளி D என்க.

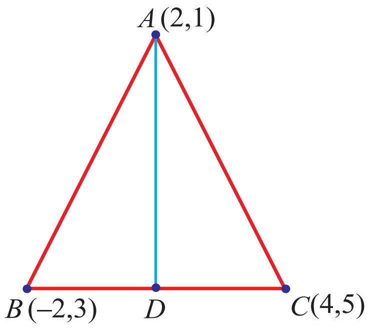
ஆகவே, BC-ன் நடுப்புள்ளி $D\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = D(1, 4)$

நடுக்கோடு AD இன் சமன்பாடு

$$\frac{y-1}{4-1} = \frac{x-2}{1-2} \qquad (\because (x_1, y_1) = (2,1),\ (x_2, y_2) = (1,4))$$

$$\frac{y-1}{3} = \frac{x-2}{-1}$$

எனவே, தேவையான நடுக்கோட்டின் சமன்பாடு $3x + y - 7 = 0$.



படம். 5.30

எடுத்துக்காட்டு 5.24

ஒரு நேர்க்கோட்டின் x-வெட்டுத்துண்டு $\frac{2}{3}$ மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு $\frac{3}{4}$ எனில், அக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : நேர்க்கோட்டின் x-வெட்டுத்துண்டு $a = \frac{2}{3}$

y-வெட்டுத்துண்டு $b = \frac{3}{4}$

வெட்டுத்துண்டு அமைப்பில் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \Longrightarrow \frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1 \quad \Longrightarrow \frac{3x}{2} + \frac{4y}{3} = 1$$

எனவே, தேவையான சமன்பாடு $9x + 8y - 6 = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.25

(6, -2) எனும் புள்ளி வழிச் செல்வதும் மற்றும் வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் 5 கொண்டதுமான நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு தேவையான நேர்க்கோடுகளின் x-வெட்டுத்துண்டு a மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு b என்க.

எனவே, $a + b = 5$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$\Longrightarrow \quad b = 5 - a$

வெட்டுத்துண்டு அமைப்பில் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Longrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{5-a} = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{(5-a)x + ay}{a(5-a)} = 1$$

$$(5-a)x + ay = a(5-a) \qquad (1)$$

இக்கோடு $(6,-2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்,

$$(1) \Longrightarrow (5-a)6 + a(-2) = a(5-a)$$

$$\Longrightarrow a^2 - 13a + 30 = 0.$$

$$\Longrightarrow (a-3)(a-10) = 0$$

எனவே, $a = 3$ அல்லது $a = 10$

$a = 3$ எனில், $(1) \Longrightarrow (5-3)x + 3y = 3(5-3)$

$$\Longrightarrow 2x + 3y - 6 = 0 \qquad (2)$$

$a = 10$ எனில், $(1) \Longrightarrow (5-10)x + 10y = 10(5-10)$

$$\Longrightarrow -5x + 10y = -50$$

$$\Longrightarrow x - 2y - 10 = 0. \qquad (3)$$

தேவையான நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $2x + 3y = 6$ மற்றும் $x - 2y - 10 = 0$.

பயிற்சி 5.4

1. x-அச்சிலிருந்து 5 அலகுகள் தொலைவில் உள்ளதும் x-அச்சுக்கு இணையானதுமான நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

2. $(-5,-2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் ஆயஅச்சுகளுக்கு இணையானதுமான நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

3. கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
   (i) சாய்வு -3; y-வெட்டுத்துண்டு 4.
   (ii) சாய்வுக்கோணம் 60^0, y-வெட்டுத்துண்டு 3.

4. ஒரு நேர்க்கோடு y-அச்சை ஆதிப்புள்ளிக்கு மேலாக 3 அலகுகள் தூரத்தில் வெட்டுகிறது மற்றும் $\tan\theta = \frac{1}{2}$ (θ என்பது நேர்க்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம்) எனில், அந்த நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. பின்வரும் நேர்க்கோடுகளின் சாய்வு மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு ஆகியனவற்றைக் காண்க.
(i) $y = x + 1$ (ii) $5x = 3y$ (iii) $4x - 2y + 1 = 0$ (iv) $10x + 15y + 6 = 0$

6. பின்வரும் விவரங்களுக்கு, நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
(i) சாய்வு -4 ; $(1, 2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கிறது.
(ii) சாய்வு $\frac{2}{3}$; $(5, -4)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கிறது.

7. சாய்வுக் கோணம் 30^0 கொண்ட மற்றும் $(4, 2)$, $(3, 1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

8. பின்வரும் புள்ளிகளின் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
(i) $(-2, 5)$, $(3, 6)$ (ii) $(0, -6)$, $(-8, 2)$

9. $P(1,-3), Q(-2,5), R(-3,4)$ ஆகிய முனைகளைக் கொண்ட $\triangle PQR$-ல் முனை R-இலிருந்து வரையப்படும் நடுக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு காணும் முறையைப் பயன்படுத்தி, பின்வரும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும் எனக் காட்டுக.
(i) $(4, 2)$, $(7, 5)$, $(9, 7)$ (ii) $(1, 4)$, $(3, -2)$, $(-3, 16)$

11. கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y-வெட்டுத்துண்டுகளைக் கொண்ட நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
(i) 2, 3 (ii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}$

12. கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y-வெட்டுத் துண்டுகளைக் காண்க.
(i) $5x + 3y - 15 = 0$ (ii) $2x - y + 16 = 0$ (iii) $3x + 10y + 4 = 0$

13. $(3, 4)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், வெட்டுத்துண்டுகளின் விகிதம் $3 : 2$ என உள்ளதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

14. $(2, 2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் 9 ஆகவும் கொண்ட நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

15. $(5, -3)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும், அளவில் சமமாகவும், ஆனால் குறி வெவ்வேறாகவும் உள்ள வெட்டுத் துண்டுகளைக் கொண்ட நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

16. $(9, -1)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் x-வெட்டுத்துண்டானது, y-வெட்டுத்துண்டின் அளவைப் போல் மும்மடங்கு கொண்டதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

17. ஒரு நேர்க்கோடு ஆயஅச்சுகளை A மற்றும் B ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது. AB-ன் நடுப்புள்ளி $(3, 2)$ எனில், AB-ன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

18. x-வெட்டுத்துண்டானது y-வெட்டுத்துண்டின் அளவை விட 5 அலகுகள் அதிகமாகக் கொண்ட ஒரு நேர்க்கோடானது $(22, -6)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கின்றது எனில், அக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

19. $ABCD$ என்ற சாய்சதுரத்தின் இரு முனைகள் $A(3, 6)$ மற்றும் $C(-1, 2)$ எனில், அதன் மூலை விட்டம் BD வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

20. $A(-2, 6)$, $B\ (3, -4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டை P என்ற புள்ளி உட்புறமாக $2 : 3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. புள்ளி P வழியாகச் செல்லும் சாய்வு $\frac{3}{2}$ உடைய, நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5.7 நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பு (General Form of Equation of a straight line)

பல்வேறு வடிவங்களில் அமைந்த நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளை $ax + by + c = 0$, (a, b, c என்பன $a \neq 0$ அல்லது $b \neq 0$ எனக் கொண்ட மெய்யெண் மாறிலிகள்) என்ற பொது அமைப்பிற்கு மாற்றலாம் என ஏற்கனவே குறிப்பிட்டுள்ளோம். இப்போது பின்வருவனவற்றைக் காண்போம்.

(i) $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு.

(ii) $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு.

(iii) $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு.

(iv) இரு வெட்டும் நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி.

(i) $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு (The slope and y-intercept of the straight line $ax + by + c = 0$)

$ax + by + c = 0$ என்பதை $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, $b \neq 0$ என மாற்றி அமைக்கலாம். (1)

(1) - ஐ சாய்வு-வெட்டுத்துண்டு அமைப்பில் உள்ள $y = mx + k$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட,

சாய்வு $m = -\frac{a}{b}$, y-வெட்டுத்துண்டு $= -\frac{c}{b}$ ஆகும்.

$\therefore$ $ax + by + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து,

சாய்வு $m = -\frac{x\text{-ன் கெழு}}{y\text{-ன் கெழு}}$, y-வெட்டுத்துண்டு $= -\frac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{y\text{-ன் கெழு}}$ எனப் பெறுகிறோம்.

(ii) $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு (Equation of a line parallel to the line $ax + by + c = 0$)

இரு நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகள் சமம் எனில், எனில் மட்டுமே அவை இணையாகும். எனவே, $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான கோடுகளின் சமன்பாடு $ax + by + k = 0$ என்ற வடிவில் அமையும். இது k-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும்.

(iii) $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சமன்பாடு (Equation of a line perpendicular to the line $ax + by + c = 0$)

ஆயஅச்சுக்களுக்கு இணையாக அமையாத இரு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில், எனில் மட்டுமே அவற்றின் சாய்வுகளின் பெருக்கற்பலன் -1 ஆகும். எனவே, $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக அமையும் எல்லா நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடு $bx - ay + k = 0$, k ஒரு மாறிலி ஆகும்.

குறிப்பு

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்ற இரு நேர்க்கோடுகள்

(i) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ எனில், எனில் மட்டுமே இணையாக அமையும்.

(ii) $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ எனில், எனில் மட்டுமே செங்குத்தாக அமையும்.

இங்கு நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளின் கெழுக்கள் பூச்சியமற்றவை.

(iv) இரு வெட்டும் கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளி (The point of intersection of two intersecting straight lines)

இரு நேர்க்கோடுகள் இணையாக இல்லையெனில், அவை ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும். அப்புள்ளி இவ்விரண்டு கோடுகளின் மீதும் அமையும். எனவே, அவைகளின் இரு சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதின் மூலம் வெட்டும் புள்ளியைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.26

$3x + 2y - 12 = 0$, $6x + 4y + 8 = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் இணை என நிறுவுக.

தீர்வு $3x + 2y - 12 = 0$-ன் சாய்வு $m_1 = -\dfrac{x\text{-ன் கெழு}}{y\text{-ன் கெழு}} = -\dfrac{3}{2}$

இவ்வாறே, $6x + 4y + 8 = 0$-ன் சாய்வு $m_2 = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$

$\therefore \quad m_1 = m_2$. ஆகவே, இவ்விரு நேர்க்கோடுகளும் இணையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.27

$x + 2y + 1 = 0$, $2x - y + 5 = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்தானவை என நிறுவுக.

தீர்வு $x + 2y + 1 = 0$-ன் சாய்வு $m_1 = -\dfrac{x\text{-ன் கெழு}}{y\text{-ன் கெழு}} = -\dfrac{1}{2}$

$2x - y + 5 = 0$-ன் சாய்வு $m_2 = -\dfrac{x\text{-ன் கெழு}}{y\text{-ன் கெழு}} = \dfrac{-2}{-1} = 2$

எனவே, சாய்வுகளின் பெருக்கற் பலன் $m_1m_2 = -\dfrac{1}{2} \times 2 = -1$

ஆகவே, இவ்விரு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை.

எடுத்துக்காட்டு 5.28

$x - 8y + 13 = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையானதும் $(2, 5)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

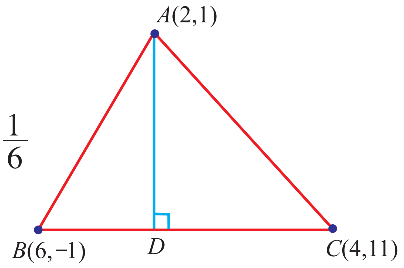
தீர்வு $x - 8y + 13 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் வடிவம் $x - 8y + k = 0$. இது $(2, 5)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்,

$$2 - 8(5) + k = 0 \implies k = 38.$$

$\therefore$ தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $x - 8y + 38 = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.29

$\triangle ABC$-ன் முனைகள் $A(2, 1)$, $B(6, -1)$, $C(4, 11)$ என்க. A-யிலிருந்து வரையப்படும் குத்துக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.



படம். 5.31

தீர்வு BC-ன் சாய்வு $= \dfrac{11+1}{4-6} = -6$

AD என்பது BC-க்குச் செங்குத்து. எனவே AD-ன் சாய்வு $= \dfrac{1}{6}$

$\therefore$ AD-ன் சமன்பாடு $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = \frac{1}{6}(x - 2) \implies 6y - 6 = x - 2$$

$\therefore$ தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $x - 6y + 4 = 0$ ஆகும்.

பயிற்சி 5.5

1. பின்வரும் நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகளைக் காண்க.
   (i) $3x + 4y - 6 = 0$ (ii) $y = 7x + 6$ (iii) $4x = 5y + 3$.
2. $x + 2y + 1 = 0$, $3x + 6y + 2 = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் இணை என நிறுவுக.
3. $3x - 5y + 7 = 0$, $15x + 9y + 4 = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்து என நிறுவுக.
4. $\dfrac{y}{2} = x - p$ மற்றும் $ax + 5 = 3y$ என்பன இணை எனில், a-ன் மதிப்பைக் காண்க.
5. $5x - 2y - 9 = 0$, $ay + 2x - 11 = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்து எனில், a-ன் மதிப்பைக் காண்க.
6. $8px + (2 - 3p)y + 1 = 0$, $px + 8y - 7 = 0$ ஆகியன செங்குத்து நேர்க்கோடுகள் எனில், p-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.
7. $(h, 3)$, $(4, 1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோடும், $7x - 9y - 19 = 0$ என்ற நேர்க்கோடும் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன எனில், h-ன் மதிப்பைக் காண்க.
8. $3x - y + 7 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையானதும் $(1, -2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
9. $x - 2y + 3 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தானதும் $(1, -2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
10. $(3, 4)$, $(-1, 2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத்துண்டின் மையக் குத்துக்கோட்டின் (perpendicular bisector) சமன்பாட்டைக் காண்க.

11. $2x+y-3=0$, $5x+y-6=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும், (1, 2), (2, 1) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாகவும் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

12. $5x-6y=1$, $3x+2y+5=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும், $3x-5y+11=0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு செங்குத்தாகவும் அமையும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

13. $3x-y+9=0$, $x+2y=4$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியுடன், $2x+y-4=0$, $x-2y+3=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

14. $\triangle ABC$-ன் முனைகள் $A(2,\ -4)$, $B(3,\ 3)$, $C(-1,\ 5)$ எனில், B-லிருந்து வரையப்படும் குத்துக்கோட்டு வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

15. $\triangle ABC$-ன் முனைகள் $A(-4,4)$, $B(8,4)$, $C(8,10)$ எனில், A-லிருந்து வரையப்படும் நடுக்கோட்டு வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

16. ஆதிப்புள்ளிலிருந்து $3x+2y=13$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளியைக் (foot of the perpendicular) காண்க.

17. ஒரு வட்டத்தின் இரு விட்டங்களின் சமன்பாடுகள் $x+2y=7$, $2x+y=8$ மற்றும் வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளி $(0,\ -2)$ எனில், இவ்வட்டத்தின் ஆரத்தை காண்க.

18. $2x-3y+4=0$, $x-2y+3=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியையும், $(3,\ -2)$, $(-5,\ 8)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளியையும், இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

19. இருசமபக்க முக்கோணம் $\triangle PQR$-ல் $PQ=PR$ மற்றும் அடிப்பக்கம் QR என்பது x-அச்சின் மீது அமைகிறது என்க. மேலும், முனை P ஆனது y-அச்சின் மீது அமைகிறது. PQ-ன் சமன்பாடு $2x-3y+9=0$ எனில், PR வழியாக செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

பயிற்சி 5.6

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. $(a,-b)$, $(3a,5b)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி

   (A) $(-a,2b)$ (B) $(2a,4b)$ (C) $(2a,2b)$ (D) $(-a,-3b)$

2. $A(1,-3)$, $B(-3,9)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டை 1:3 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி P

   (A) $(2,1)$ (B) $(0,0)$ (C) $\left(\frac{5}{3},\ 2\right)$ (D) $(1,-2)$

3. $A(3,4)$, $B(14,-3)$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத்துண்டு x-அச்சை P இல் சந்திக்கின்றது எனில், அக்கோட்டுத்துண்டை P பிரிக்கும் விகிதம்

   (A) 4 : 3 (B) 3 : 4 (C) 2 : 3 (D) 4 : 1

4. $(-2, -5), (-2, 12), (10, -1)$ ஆகிய புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் (centroid)

(A) $(6, 6)$ (B) $(4, 4)$ (C) $(3, 3)$ (D) $(2, 2)$

5. $(1, 2), (4, 6), (x, 6), (3, 2)$ என்பன இவ்வரிசையில் ஓர் இணைகரத்தின் முனைகள் எனில், x-ன் மதிப்பு

(A) 6 (B) 2 (C) 1 (D) 3

6. $(0,0), (2, 0), (0, 2)$ ஆகிய புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு

(A) 1 ச. அலகுகள் (B) 2 ச. அலகுகள் (C) 4 ச. அலகுகள் (D) 8 ச. அலகுகள்

7. $(1, 1), (0, 1), (0, 0), (1, 0)$ ஆகிய புள்ளிகளால் அமையும் நாற்கரத்தின் பரப்பு

(A) 3 ச. அலகுகள் (B) 2 ச. அலகுகள் (C) 4 ச. அலகுகள் (D) 1 ச. அலகுகள்

8. x-அச்சுக்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம்

(A) 0° (B) 60° (C) 45° (D) 90°

9. $(3, -2), (-1, a)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $-\frac{3}{2}$ எனில், a-ன் மதிப்பு

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

10. $(-2, 6), (4, 8)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

(A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

11. $9x - y - 2 = 0, 2x + y - 9 = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி

(A) $(-1, 7)$ (B) $(7, 1)$ (C) $(1, 7)$ (D) $(-1, -7)$

12. $4x + 3y - 12 = 0$ என்ற நேர்க்கோடு y-அச்சை வெட்டும் புள்ளி

(A) $(3, 0)$ (B) $(0, 4)$ (C) $(3, 4)$ (D) $(0, -4)$

13. $7y - 2x = 11$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

(A) $-\frac{7}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $-\frac{2}{7}$

14. $(2, -7)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், x-அச்சிற்கு இணையானதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

(A) $x = 2$ (B) $x = -7$ (C) $y = -7$ (D) $y = 2$

15. $2x - 3y + 6 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் x, y-வெட்டுத்துண்டுகள் முறையே

(A) 2, 3 (B) 3, 2 (C) $-3, 2$ (D) $3, -2$

16. ஒரு வட்டத்தின் மையம் $(-6, 4)$. ஒரு விட்டத்தின் ஒரு முனை $(-12, 8)$ எனில், அதன் மறு முனை

(A) $(-18, 12)$ (B) $(-9, 6)$ (C) $(-3, 2)$ (D) $(0, 0)$

17. ஆதிப்புள்ளி வழிச் செல்வதும் $2x + 3y - 7 = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்துமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

(A) $2x + 3y = 0$ (B) $3x - 2y = 0$ (C) $y + 5 = 0$ (D) $y - 5 = 0$

18. y-அச்சிற்கு இணையானதும் $(-2, 5)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

(A) $x - 2 = 0$ (B) $x + 2 = 0$ (C) $y + 5 = 0$ (D) $y - 5 = 0$

19. $(2, 5), (4, 6), (a, a)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றன எனில், a-ன் மதிப்பு

(A) -8 (B) 4 (C) -4 (D) 8

20. $y = 2x + k$ என்ற நேர்க்கோடு $(1, 2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கின்றது எனில், k-ன் மதிப்பு

(A) 0 (B) 4 (C) 5 (D) -3

21. சாய்வு 3 ஆகவும், y வெட்டுத்துண்டு -4 ஆகவும் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

(A) $3x - y - 4 = 0$ (B) $3x + y - 4 = 0$

(C) $3x - y + 4 = 0$ (D) $3x + y + 4 = 0$

22. $y = 0$ மற்றும் $x = -4$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

(A) $(0, -4)$ (B) $(-4, 0)$ (C) $(0, 4)$ (D) $(4, 0)$

23. $3x + 6y + 7 = 0$ மற்றும் $2x + ky = 5$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் செங்குத்தானவை எனில், k-ன் மதிப்பு

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

நினைவில் கொள்க

- $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
- $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டினை உட்புறமாக $l : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right)$ ஆகும்.
- தளத்தில் $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டினை வெளிப்புறமாக $l : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $Q\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l - m}, \frac{ly_2 - my_1}{l - m}\right)$ ஆகும்.
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ (x_3, y_3) ஆகிய புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு
$$= \frac{1}{2}\sum x_1(y_2 - y_3) = \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}.$$

- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ஆகிய மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைய நிபந்தனை

  (i) $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$ (அல்லது)

  (ii) AB-ன் சாய்வு = AC-ன் சாய்வு (அ) BC-ன் சாய்வு.

- ஒரு நேர்க்கோடு மிகை x-அச்சுடன் θ அளவு கோணம் உண்டாக்கினால், அக்கோட்டின் சாய்வு $m = \tan\theta$ ஆகும்.

- (x_1, y_1), (x_2, y_2) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

- $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m = -\dfrac{x\text{-ன் கெழு}}{y\text{-ன் கெழு}} = -\dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$

- கிடைநிலைக் கோட்டின் சாய்வு பூச்சியமாகும். நேர்க்குத்துக் கோட்டின் சாய்வை வரையறுக்க இயலாது.

- இரு கோடுகளின் சாய்வுகள் சமமாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே அவை இணையாகும்.

- நேர்க்குத்தற்ற இரு நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகளின் பெருக்கற் பலன் -1 (அதாவது, $m_1 m_2 = -1$) ஆக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே அவை செங்குத்துக் கோடுகளாகும்.

நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

வ. எண்	நேர்க்கோடு	சமன்பாடு
1.	x-அச்சு	$y = 0$
2.	y-அச்சு	$x = 0$
3.	x-அச்சிற்கு இணை	$y = k$
4.	y-அச்சிற்கு இணை	$x = k$
5.	$ax+by+c=0$ க்கு இணை	$ax + by + k = 0$
6.	$ax+by+c=0$ க்கு செங்குத்து	$bx - ay + k = 0$
	கொடுக்கப்பட்டவை	**சமன்பாடு**
1.	ஆதி வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடு	$y = mx$
2.	சாய்வு m மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு c	$y = mx + c$
3.	சாய்வு m மற்றும் ஒரு புள்ளி (x_1, y_1)	$y - y_1 = m(x - x_1)$
4.	(x_1, y_1), (x_2, y_2) ஆகிய இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடு	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
5.	x-வெட்டுத்துண்டு a மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு b	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

6 வடிவியல்

There is geometry in the humming of the strings, there is music in the spacing of spheres - Pythagoras

- அறிமுகம்
- அடிப்படை விகிதசமத் தேற்றம்
- கோண இருசமவெட்டி தேற்றம்
- வடிவொத்த முக்கோணங்கள்
- தொடுகோடு - நாண் தேற்றம்
- பிதாகரஸ் தேற்றம்

யூக்ளிட்
(Euclid)
(கி.மு 300)
கிரீஸ்

யூக்ளிடின் "Elements" என்னும் நூல், கணித வரலாற்றில் அனைவரிடமும் பெரும்தாக்கத்தை ஏற்படுத்திய ஒரு மிகச் சிறந்தப் படைப்பாகும். இந்நூல் கணிதத்தை குறிப்பாக அதில் ஒரு பிரிவான வடிவியலைக் கற்பிப்பதில் முக்கியப் பாடநூலாக விளங்குகிறது. மீப்பெரு பொது வகுஎண்ணைக் (GCD) கணக்கிட யூக்ளிடின் வழிமுறை ஒரு சிறந்த பயனுள்ள முறையாகும்.

6.1 அறிமுகம்

பல்வேறு வடிவியல் உருவங்களின் பண்புகளை ஆராயும் கணிதத்தின் ஓர் பிரிவே வடிவியல் (Geometry) ஆகும். துல்லியமான அளவுகளின் உதவியின்றி பல்வகையான வடிவியல் வடிவங்களின் பண்புகளையும் சிறப்பியல்புகளையும் எடுகோள்கள் (Axioms) மற்றும் தேற்றங்களுடன் (Theorems) கற்றறிவதே அறிமுறை வடிவியல் (Theoretical Geometry) என்கிறோம். வடிவியல் கற்பதினால், ஒருவருடைய தருக்க அடிப்படையில் சிந்திக்கும் திறன் வளரும்.

கி.மு. 300-ல் வாழ்ந்த யூக்ளிட் (Euclid) வடிவியலின் தந்தை எனக் கருதப்படுகிறார். நிரூபணம் தேவையற்ற வெளிப்படை உண்மைகளான எடுகோள்கள் அல்லது அடிகோள்கள் மற்றும் ஏற்கனவே நிரூபிக்கப்பட்ட முடிவுகள் ஆகியனவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டு தருவிக்கும் முறையில் வடிவியல் முடிவுகளை ஆராய்வதில் புதிய வழியில் சிந்திக்கும் முறையைப் புகுத்தினார்.

கட்டடக்கலை மற்றும் பொறியியல் போன்ற துறைகளில் வடிவியல் முக்கியப் பங்கு வகிக்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக, நம் வாழ்வில் முக்கியமாக விளங்கும் பல பாலங்கள், சர்வசம மற்றும் வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி அமைக்கப்பட்டவை. உறுதியாகவும், அதிகச் சுமை மற்றும் அழுத்தம் ஆகியவற்றைத் தாங்கும் திறன் கொண்டவையாகவும் உள்ள பாலங்களை கட்டுவதற்கு, வடிவொத்த மற்றும் சர்வசம முக்கோணங்களின் பண்புகள் உதவுகின்றன. கட்டடங்களைக் கட்டும்போது வடிவியல் இரு வகைகளில் பயனாகிறது. ஒன்று கட்டடங்களை மேலும் உறுதியாக்குகிறது. மற்றொன்று அதன் அழகினை மேலும் கூட்டுகிறது. வடிவியல் வடிவங்களை நேர்த்தியாக பயன்படுத்தும்போது அவை, கட்டடங்கள் மற்றும் தாஜ்மகால் போன்ற கட்டமைப்புகள் ஆகியன அனைவரும் விரும்பப்படுகின்ற அடையாளச் சின்னங்களாக மாற்றும். கணிதத்தில் பல பிரிவுகளின் விரிவாக்கத்திலும், அவற்றைப் புரிந்து கொள்ளுதலிலும் வடிவியல் நிரூபணங்கள் முக்கியப் பங்கு வகிக்கின்றன.

அடிப்படை விகிதசமத் தேற்றம் புகழ்மிக்க கிரேக்கக் கணித மேதை தேல்ஸ் (Thales) என்பவரால் அளிக்கப்பட்டது. இது அவரின் பெயரால் தேல்ஸ் தேற்றம் என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

இத்தேற்றத்தைக் கீழ்க்கண்ட செயல்பாடு மூலம் புரிந்துக் கொள்ளலாம்.

செய்து பார் $\angle XAY$ என்ற ஏதேனும் ஒரு கோணத்தை வரைக. P_1, P_2, D, P_3 மற்றும் B ஆகிய புள்ளிகளை (5 புள்ளிகள்) AX என்ற கதிர் மீது

$AP_1 = P_1P_2 = P_2D = DP_3 = P_3B = 1$ (அலகு) என்றிருக்குமாறு குறிக்க.

B-ன் வழியாக ஏதாவது ஒரு கோட்டினை கதிர் AY ஐ C-ல் வெட்டுமாறு வரைக. மீண்டும் D-ன் வழியே BC-க்கு இணையாக AC -ஐ E-ல் வெட்டுமாறு ஒரு கோடு வரைக.

இப்பொழுது, $AD = AP_1 + P_1P_2 + P_2D = 3$ அலகுகள்.

மேலும், $DB = DP_3 + P_3B = 2$ அலகுகள்.

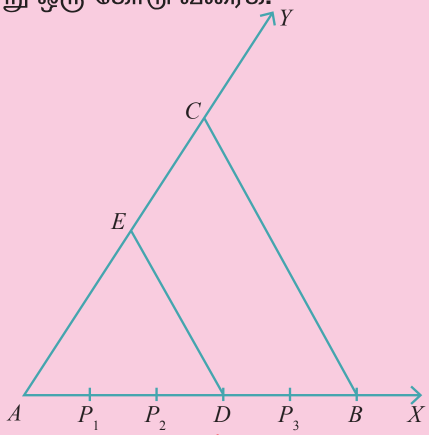
$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$

AE மற்றும் EC-ன் நீளங்களை அளக்கவும்.

$\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$ என அறியலாம்.

இதே போல், ΔABC-ல் $DE \parallel BC$ எனில்,

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ எனவும் அறியலாம்.



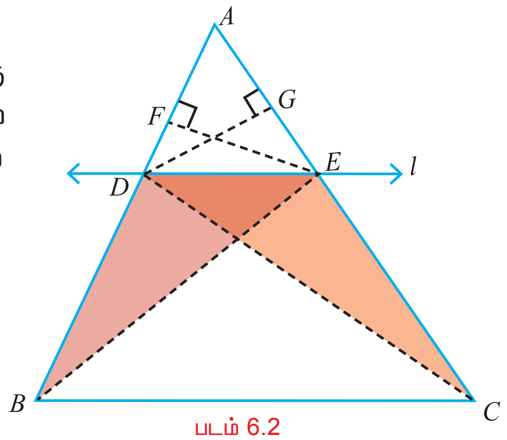
படம் 6.1

இந்த முடிவினை அடிப்படை விகிதசமத் தேற்றம் அல்லது தேல்ஸ் தேற்றமாக நிரூபிக்கலாம். தேற்றம் பின்வருமாறு:

6.2 அடிப்படை விகிதசமம் மற்றும் கோண இருசமவெட்டி தேற்றங்கள் (Basic proportionality and Angle Bisector theorems)

தேற்றம் 6.1 அடிப்படை விகிதசமத் தேற்றம் அல்லது தேல்ஸ் தேற்றம் (Basic Proportionality theorem or Thales Theorem)

ஒரு நேர்க்கோடு ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாகவும் மற்ற இரண்டு பக்கங்களை வெட்டுமாறும் வரையப்பட்டால் அக்கோடு அவ்விருப் பக்கங்களையும் சமவிகிதத்தில் பிரிக்கும்.



படம் 6.2

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : ΔABC-ல் BC-க்கு இணையாக உள்ள l என்ற நேர்க்கோடு ABஐ D-யிலும் ACஐ E-யிலும் வெட்டுகிறது.

நிரூபிக்க : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

அமைப்பு : BE, CD ஐச் சேர்.

$EF \perp AB$ மற்றும் $DG \perp CA$ வரைக.

நிரூபணம் $EF \perp AB$. எனவே முக்கோணங்கள் ADE மற்றும் DBE ஆகியவைகளுக்கு EF குத்துயரமாக அமைகிறது.

ΔADE-ன் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times$ அடிப்பக்கம் $\times$ உயரம் $= \frac{1}{2} AD \times EF$

ΔDBE-ன் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times$ அடிப்பக்கம் $\times$ உயரம் $= \frac{1}{2} DB \times EF$

$$\therefore \quad \frac{\Delta ADE\text{-ன் பரப்பளவு}}{\Delta DBE\text{-ன் பரப்பளவு}} = \frac{\frac{1}{2}AD \times EF}{\frac{1}{2}DB \times EF} = \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

இவ்வாறே,

$$\frac{\Delta ADE\text{-ன் பரப்பளவு}}{\Delta DCE\text{-ன் பரப்பளவு}} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DG}{\frac{1}{2} \times EC \times DG} = \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

ஆனால், ΔDBE, ΔDCE என்பன DE என்ற ஒரே அடிப்பக்கத்தைக் கொண்டும் BC மற்றும் DE ஆகிய இணை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடையிலும் அமைந்துள்ளன.

$$\therefore \quad \Delta DBE\text{-ன் பரப்பளவு} = \Delta DCE\text{-ன் பரப்பளவு} \qquad (3)$$

(1), (2) , (3)-லிருந்து $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ எனப் பெறுகிறோம். ஆகவே, தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

கிளைத்தேற்றம் (Corollary)

ΔABC-ல் BC-ன் இணைகோடு DE ஆனது AB-ஐ D-யிலும் AC-ஐ E-யிலும் வெட்டுகிறது எனில்,

(i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$

நிரூபணம்:

(i) தேல்ஸ் தேற்றத்திலிருந்து

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Longrightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

$$\Longrightarrow 1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$$

$$\Longrightarrow \frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$

ஆகவே, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

உங்களுக்குத் தெரியுமா ?

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ எனில், $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

இது கூட்டல் விகிதசம விதி எனப்படும்.

இங்கு, $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

கூட்டல் விகிதசம விதிப்படி

$$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$

(ii) இவ்வாறே,

$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$ என நிரூபிக்கலாம்.

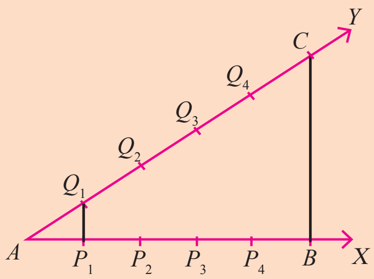
இதன் மறுதலைத் தேற்றமும் உண்மையாகுமா? இதனைச் சோதித்துப் பார்க்க, பின்வரும் செயல்பாட்டினைச் செய்து பார்ப்போம்.

செய்து பார்

AX என்ற கதிரின் மீது $\angle XAY$ வரைக. அக்கதிரின் மேல் P_1, P_2, P_3, P_4 மற்றும் B என்ற புள்ளிகளை $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4B = 1$ அலகு, என்றவாறு குறிக்கவும்.

இதைப் போன்றே, கதிர் AY-ன் மேல் Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 மற்றும் C புள்ளிகளை $AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4C = 2$ அலகுகள், என்றவாறு குறிக்கவும்.

இப்போது P_1Q_1 மற்றும் BC ஆகியவற்றை இணைக்கவும்.



படம் 6.3

இப்போது $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{1}{4}$.

மேலும், $\frac{AQ_1}{Q_1C} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

எனவே, $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{AQ_1}{Q_1C}$.

P_1Q_1 மற்றும் BC என்பன இணைகோடுகள் என்பதனைக் காண்கிறோம்.

அதாவது, $P_1Q_1 \parallel BC$. (1)

இதைப்போன்றே, P_2Q_2, P_3Q_3 P_4Q_4 என்பனவற்றை இணைப்பதின் மூலம்

$\frac{AP_2}{P_2B} = \frac{AQ_2}{Q_2C} = \frac{2}{3}$ மற்றும் $P_2Q_2 \parallel BC$ (2)

$\frac{AP_3}{P_3B} = \frac{AQ_3}{Q_3C} = \frac{3}{2}$ மற்றும் $P_3Q_3 \parallel BC$ (3)

$\frac{AP_4}{P_4B} = \frac{AQ_4}{Q_4C} = \frac{4}{1}$ மற்றும் $P_4Q_4 \parallel BC$ (4)

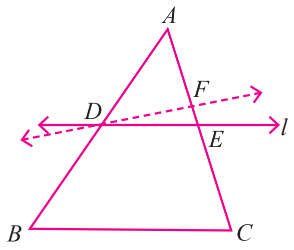
(1), (2), (3), (4)-லிருந்து, ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு நேர்க்கோடு இரு பக்கங்களை ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கும் எனில், அக்கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாக இருக்கும் என அறியலாம்.

இதேப் போன்று, தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மறுதலையைக் கூறி நிரூபிப்போம்.

தேற்றம் 6.2 அடிப்படைச் விகிதசமத் தேற்றத்தின் மறுதலை (தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை)

Converse of Basic Proportionality Theorem (Converse of Thales Theorem)

ஒரு நேர்க்கோடு ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களை ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்குமானால், அக்கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாக இருக்கும்.



படம் 6.4

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: l என்ற கோடு, முக்கோணம் ΔABC-ன் பக்கங்கள் AB, AC ஆகியவற்றை முறையே D, E-ல் $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ என்றிருக்குமாறு வெட்டுகிறது. (1)

நிரூபிக்க: $DE \parallel BC$

அமைப்பு: DE ஆனது BC-க்கு இணையாக இல்லையெனில், $DF \parallel BC$ என்றிருக்குமாறு DFஐ வரைக.

நிரூபணம் $DF \parallel BC$. எனவே, தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \quad (2)$$

(1), (2) ஆகியவைகளிலிருந்து $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EC} \implies \frac{AF+FC}{FC} = \frac{AE+EC}{EC}$

$$\frac{AC}{FC} = \frac{AC}{EC} \quad \therefore \ FC = EC$$

F மற்றும் E என்பன ஒரே புள்ளியாக அமைந்தால் மட்டுமே $FC = EC$ மெய்யாகும்.

எனவே, $DE \parallel BC$

தேற்றம் 6.3 கோண இருசமவெட்டித் தேற்றம் (Angle Bisector Theorem)

ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு கோணத்தின் உட்புற (வெளிப்புற) இருசமவெட்டியானது அக்கோணத்தின் எதிர் பக்கத்தை உட்புறமாக (வெளிப்புறமாக), அக்கோணத்தினை அடக்கிய பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

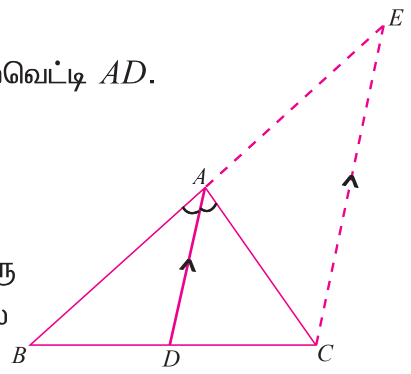
நிலை(*i*) (உட்புற கோண இருசமவெட்டி)

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : $\triangle ABC$-ல் $\angle BAC$-ன் உட்புற இருசமவெட்டி AD.

அது BC-ஐ D-ல் சந்திக்கிறது.

நிரூபிக்க: $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

அமைப்பு : DA-க்கு இணையாகவும் C-யின் வழியாகவும் ஒரு இணைகோடு வரைக.அக்கோடு BA-வின் நீட்சியை புள்ளி E-ல் சந்திக்கட்டும். எனவே, $CE \parallel DA$



படம் 6.5

நிரூபணம் $CE \parallel DA$ மற்றும் AC ஒரு குறுக்குவெட்டி (Transversal).

எனவே, $\angle DAC = \angle ACE$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்) (1)

மற்றும் $\angle BAD = \angle AEC$ (ஒத்த கோணங்கள்) (2)

$\angle A$-ன் உட்புற கோண இருசமவெட்டி AD. ஆதலால்,

$\angle BAD = \angle DAC$ (3)

(1), (2) ,(3)-லிருந்து $\angle ACE = \angle AEC$ எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே, $\triangle ACE$-ல் $AE = AC$ (சம கோணங்களுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்கள் சமம்)

$\triangle BCE$-ல் $CE \parallel DA$. எனவே,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad \text{(தேல்ஸ் தேற்றம்)}$$

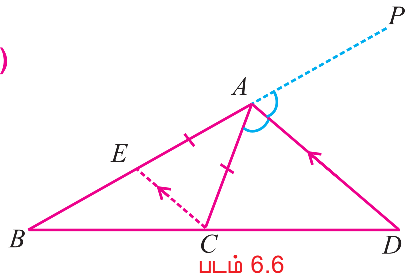
$$\Longrightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (\because AE = AC)$$

ஆகவே, தேற்றம் நிரூபிக்கப் பட்டது.

நிகழ்வு (*ii*) (வெளிப்புற கோண இருசமவெட்டி) (தேர்வுக்கு அன்று)

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: $\triangle ABC$-ல் AD என்பது $\angle BAC$-ன் வெளிப்புற கோண இருசமவெட்டி மற்றும் BC நீட்சியினை D-ல் வெட்டுகிறது.

நிரூபிக்க : $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$



படம் 6.6

அமைப்பு : DA-க்கு இணையாக C-ன் வழியாக ஒரு நேர்க்கோடு வரைக. அக்கோடு BA-வை சந்திக்கும் புள்ளி E என்க. எனவே, $CE \parallel DA$.

நிரூபணம் $CE \parallel DA$ மற்றும் AC ஒரு குறுக்கு வெட்டி,

$\angle ECA = \angle CAD$ (ஒன்று விட்ட கோணங்கள்) (1)

மேலும், $CE \parallel DA$ மற்றும் BP ஒரு குறுக்குவெட்டி என்பதால்,

$$\angle CEA = \angle DAP \quad \text{(ஒத்த கோணங்கள்)} \qquad (2)$$

ஆனால், AD என்பது $\angle CAP$-ன் கோண இருசமவெட்டி என்பதால்,

$$\angle CAD = \angle DAP \qquad (3)$$

(1), (2), (3)-லிருந்து,

$$\angle CEA = \angle ECA$$

எனவே, $\triangle ECA$-ல் $AC = AE$ (சமகோணங்களுக்கு எதிரே அமைந்த பக்கங்கள் சமம்)

$\triangle BDA$-ல் $EC \parallel AD$.

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad \text{(தேல்ஸ் தேற்றம்)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} \quad (\because AE = AC)$$

தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

தேற்றம் 6.4 கோண இருசமவெட்டித் தேற்றத்தின் மறுதலை (Converse of Angle Bisector Theorem)

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு உச்சியின் வழிச் செல்லும் ஒரு நேர்க்கோடு, அதன் எதிர்பக்கத்தினை உட்புறமாக (வெளிப்புறமாக), மற்ற இரு பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்குமானால், அக்கோடு உச்சியில் அமைந்த கோணத்தினை உட்புறமாக (வெளிப்புறமாக) இரு சமபாகங்களாக பிரிக்கும்.

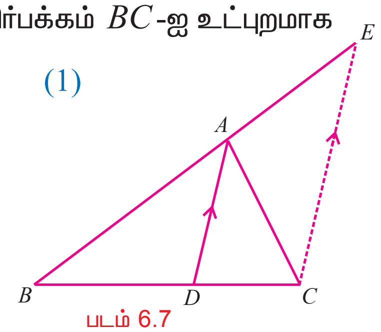
நிலை (*i*) : (உட்புறமாக)

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : $\triangle ABC$-ல், AD என்ற நேர்க்கோடு, எதிர்பக்கம் BC-ஐ உட்புறமாக

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ என்றவாறு பிரிக்கிறது.} \qquad (1)$$

நிரூபிக்க : $\angle BAC$-ன் உட்புற இருசமவெட்டி AD.

அதாவது, $\angle BAD = \angle DAC$ என நிரூபிக்க வேண்டும்



படம் 6.7

அமைப்பு :

C-ன் வழியாக DA-க்கு இணையாக நேர்க்கோடு வரைக. அக்கோடு BA-ன் நீட்சியினை சந்திக்கும் புள்ளி E என்க. ஆகவே, $CE \parallel AD$

நிரூபணம் $CE \parallel AD$ என்பதால், தேல்ஸ் தேற்றப்படி, $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$ (2)

(1), (2)-லிருந்து, $$\frac{AB}{AC} = \frac{BA}{AE}$$

$$\therefore \quad AE = AC$$

இப்போது, $\triangle ACE$-ல் $\angle ACE = \angle AEC$ $(\because AE = AC)$ (3)

இணைகோடுகள் AD மற்றும் CE-ன் குறுக்கு வெட்டி AC.

எனவே, $\angle DAC = \angle ACE$ (ஒன்று விட்டகோணங்கள் சமம்) (4)

மேலும், இணைகோடுகள் AD மற்றும்CE ஆகியவற்றின் குறுக்கு வெட்டி BE.

எனவே, $\angle BAD = \angle AEC$ (ஒத்தகோணங்கள் சமம்) (5)

(3), (4) ,(5)-லிருந்து கிடைப்பது, $\angle BAD = \angle DAC$

$\therefore$ AD என்பது $\angle BAC$-ன் இருசமவெட்டி ஆகும்.

தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

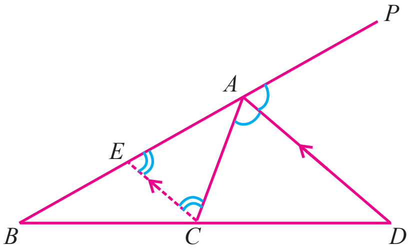
நிலை ***(ii)*** வெளிப்புறமாக (தேர்வுக்கு அன்று)

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : $\triangle ABC$-யில் கோடு AD ஆனது $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (1)

என அமையுமாறு எதிர்பக்கம் BC-ன் நீட்சியினை வெளிப்புறமாக D-ல் பிரிக்கிறது.

நிரூபிக்க : $\angle PAC$-ன் இருசமவெட்டி AD.

அதாவது, $\angle PAD = \angle DAC$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.



படம் 6.8

அமைப்பு : C-ன் வழியாக DA-க்கு இணையாக நேர்க்கோடு வரைக. அக்கோடு BA-வை சந்திக்கும் புள்ளியினை E-எனக் குறிக்கவும். எனவே, $CE \parallel DA$

நிரூபணம் $CE \parallel DA$. எனவே, தேல்ஸ் தேற்றப்படி, $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{EA}$ (2)

(1), (2)-லிருந்து, $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$ $\therefore$ $AE = AC$

$\triangle ACE$-ல் $\angle ACE = \angle AEC$ $(\because AE = AC)$ (3)

இணைகோடுகள் AD மற்றும் CE ஆகியனவற்றின் குறுக்குவெட்டி AC ஆகும்.

எனவே, $\angle ACE = \angle DAC$ (ஒன்று விட்டக் கோணங்கள்) (4)

இணைகோடுகள் AD மற்றும் CE-ன் குறுக்கு வெட்டி BA.

எனவே, $\angle PAD = \angle AEC$ (ஒத்த கோணங்கள்) (5)

(3) , (4), (5)-லிருந்து, $\angle PAD = \angle DAC$

$\therefore$ $\angle PAC$-ன் இருசமவெட்டி AD. ஆகவே, $\angle BAC$-ன் வெளிப்புற இருசமவெட்டி AD ஆகும்.

தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 6.1

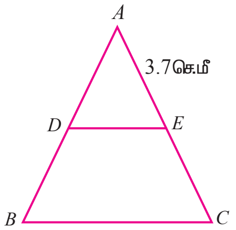
$\triangle ABC$-ல் $DE \parallel BC$ மற்றும் $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{2}{3}$. $AE = 3.7$ செ.மீ எனில், EC-ஐக் காண்க.

தீர்வு $\triangle ABC$-ல், $DE \parallel BC$.

$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (தேல்ஸ் தேற்றம்)

$\Longrightarrow \quad EC = \frac{AE \times DB}{AD}$

இவ்வாறாக, $EC = \frac{3.7 \times 3}{2} = 5.55$ செ.மீ



படம் 6.9

எடுத்துக்காட்டு 6.2

$\triangle PQR$-ன் பக்கங்கள் PQ மற்றும் PR-களின் மீது அமைந்த புள்ளிகள் S மற்றும் T என்க. மேலும், $ST \parallel QR$, $PR = 5.6$ செ.மீ மற்றும் $\frac{PS}{SQ} = \frac{3}{5}$ எனில், PT-ஐக் காண்க.

தீர்வு $\triangle PQR$-ல் $ST \parallel QR$. தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR} \quad (1)$$

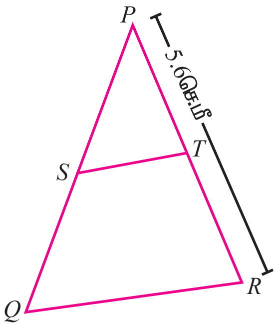
$PT = x$ என்க. $\therefore \quad TR = PR - PT = 5.6 - x$

(1)-லிருந்து $PT = TR\left(\frac{PS}{SQ}\right)$

$$x = (5.6 - x)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$5x = 16.8 - 3x$$

எனவே, $x = \frac{16.8}{8} = 2.1$. ஆகவே, PT = 2.1 செ.மீ



படம் 6.10

எடுத்துக்காட்டு 6.3

$\triangle ABC$-ன் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC-ல் ஆகியவற்றின் மேல் அமைந்த புள்ளிகள் D மற்றும் E என்க. மேலும், $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ மற்றும் $\angle ADE = \angle DEA$ எனில், $\triangle ABC$ ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் என நிறுவுக.

தீர்வு $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆதலால், தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மறுதலையின் படி $DE \parallel BC$.

$\therefore \quad \angle ADE = \angle ABC \quad (1)$

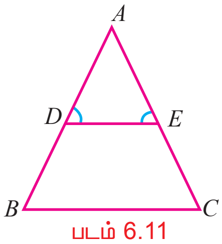
மற்றும் $\angle DEA = \angle BCA \quad (2)$

மேலும், $\angle ADE = \angle DEA$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது) (3)

(1), (2) , (3)-லிருந்து $\angle ABC = \angle BCA$

$\therefore \; AC = AB$ (சம கோணங்களுக்கு எதிரே அமைந்த பக்கங்கள் சமம்)

எனவே $\triangle ABC$ ஒரு இரு சமபக்கமுக்கோணம் ஆகும்.



படம் 6.11

எடுத்துக்காட்டு 6.4

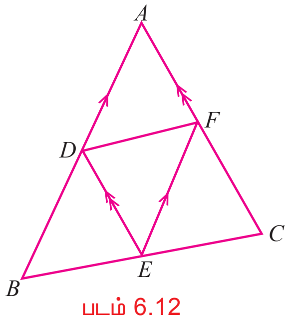
$\triangle ABC$-ன் பக்கங்கள் AB, BC மற்றும் CA ஆகியவற்றில் அமைந்த புள்ளிகள் D, E மற்றும் F என்க. மேலும், $DE \parallel AC$ மற்றும் $FE \parallel AB$ எனில், $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{FC}$ என நிறுவுக.

தீர்வு $\triangle ABC$-ல் $DE \parallel AC$.

$\therefore \quad \frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$ (தேல்ஸ் தேற்றம்) (1)

மேலும், $FE \parallel AB$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore \quad \frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FC}$ (தேல்ஸ் தேற்றம்) (2)



படம் 6.12

(1), (2)-லிருந்து, $\frac{BD}{AD} = \frac{AF}{FC}$

$\Longrightarrow \quad \frac{BD+AD}{AD} = \frac{AF+FC}{FC}$ (கூட்டல் விகிதசம விதி)

எனவே, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{FC}$.

எடுத்துக்காட்டு 6.5

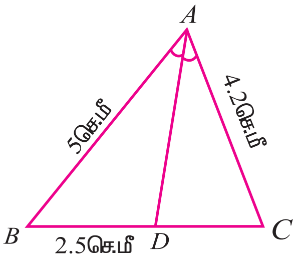
$\triangle ABC$-ல் $\angle A$ என்ற கோணத்தின் உட்புற இருசமவெட்டி AD ஆனது, பக்கம் BCஐ D-ல் சந்திக்கிறது. $BD = 2.5$ செ.மீ, $AB = 5$ செ.மீ மற்றும் $AC = 4.2$ செ.மீ எனில், DC-ஐக் காண்க.

தீர்வு $\triangle ABC$-ல், AD என்பது $\angle A$-ன் உட்புற இருசமவெட்டி.

$\therefore \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (கோண இருசமவெட்டி தேற்றம்)

$\Longrightarrow \quad DC = \frac{BD \times AC}{AB}$

ஆகவே, $DC = \frac{2.5 \times 4.2}{5} = 2.1$ செ.மீ.



படம் 6.13

எடுத்துக்காட்டு 6.6

$\triangle ABC$-ல், $\angle A$-ன் வெளிப்புற இருசமவெட்டி ஆனது BC-ன் நீட்சியினை E-ல் சந்திக்கிறது. $AB = 10$ செ. மீ, $AC = 6$ செ. மீ மற்றும் $BC = 12$ செ. மீ எனில், CE-ஐக் காண்க.

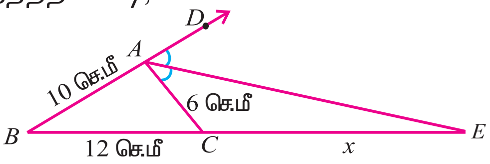
தீர்வு $\triangle ABC$-ல் $\angle A$-ன் வெளிப்புற இருசமவெட்டி AE என்க. மேலும் AE ஆனது BC-ன் நீட்சியினை E-ல் சந்திக்கிறது.

$CE = x$ செ.மீ. என்க. கோண இருசமவெட்டித் தேற்றத்தின் படி,

$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} \Longrightarrow \frac{12+x}{x} = \frac{10}{6}$

$3(12+x) = 5x$. எனவே, $x = 18$.

ஆதலால், $CE = 18$ செ. மீ.



படம் 6.14

எடுத்துக்காட்டு 6.7

$\triangle ABC$-ல் பக்கம் BC-ன் நடுப்புள்ளி D என்க. P மற்றும் Q என்பன AB மற்றும் AC-களின் மேல் அமைந்த புள்ளிகள் ஆகும். மேலும், $\angle BDA$ மற்றும் $\angle ADC$ ஆகிய கோணங்களை முறையே DP மற்றும் DQ என்பன இரு சமபாகங்களாக பிரிக்கும் எனில், $PQ \parallel BC$ என நிறுவுக.

தீர்வு $\triangle ABD$-ல் $\angle BDA$-ன் கோண இருசமவெட்டி DP என்க.

$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = \frac{AD}{BD}$ (கோண இருசமவெட்டித் தேற்றம்) (1)

$\triangle ADC$-ல் $\angle ADC$-ன் கோண இருசமவெட்டி DQ என்க.

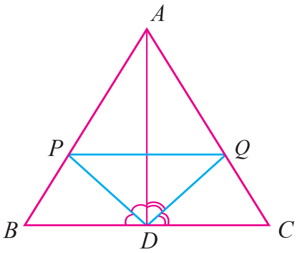
$\therefore \quad \frac{AQ}{QC} = \frac{AD}{DC}$ (கோண இருசமவெட்டித் தேற்றம்) (2)

ஆனால், $BD = DC$ ($\because D$ என்பது BC-ன் நடுப்புள்ளி)

இப்போது, (2) $\implies \frac{AQ}{QC} = \frac{AD}{BD}$ (3)

(1),(3)-லிருந்து, $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

ஆகவே, $PQ \parallel BC$. (தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை)

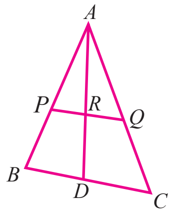


படம் 6.15

பயிற்சி 6.1

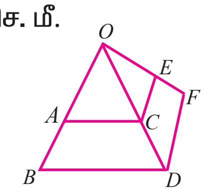
1. D மற்றும் E ஆகிய புள்ளிகள் முறையே ΔABC-ன் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC-களில் $DE \parallel BC$ என்றிருக்குமாறு அமைந்துள்ளன.
   (i) $AD = 6$ செ.மீ, $DB = 9$ செ.மீ மற்றும் $AE = 8$ செ.மீ எனில், AC-ஐ காண்க.
   (ii) $AD = 8$ செ.மீ, $AB = 12$ செ.மீ மற்றும் $AE = 12$ செ.மீ எனில், CE-ஐ காண்க.
   (iii) $AD = 4x–3$, $BD = 3x–1$, $AE = 8x–7$ மற்றும் $EC = 5x–3$ எனில், x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

2. படத்தில் $AP = 3$ செ. மீ, $AR = 4.5$ செ. மீ, $AQ = 6$ செ. மீ, $AB = 5$ செ. மீ மற்றும் $AC = 10$ செ. மீ. எனில், AD-ன் மதிப்பைக் காண்க.



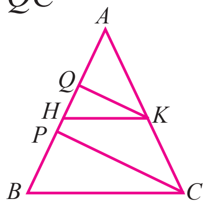
3. E மற்றும் F என்ற புள்ளிகள் முறையே $\triangle PQR$-ன் பக்கங்கள் PQ மற்றும் PR ஆகியவற்றின் மீது அமைந்துள்ளன. பின்வருவனவற்றிற்கு $EF \parallel QR$ என்பதனைச் சரிபார்க்க.
   (i) $PE = 3.9$ செ. மீ., $EQ = 3$ செ.மீ., $PF = 3.6$ செ.மீ மற்றும் $FR = 2.4$ செ. மீ.
   (ii) $PE = 4$ செ. மீ, $QE = 4.5$ செ.மீ., $PF = 8$ செ.மீ மற்றும் $RF = 9$ செ. மீ.

4. படத்தில் $AC \parallel BD$ மற்றும் $CE \parallel DF$.
   $OA = 12$ செ.மீ, $AB = 9$ செ.மீ, $OC = 8$ செ.மீ.
   மற்றும் $EF = 4.5$ செ.மீ எனில், FO-வைக் காண்க.

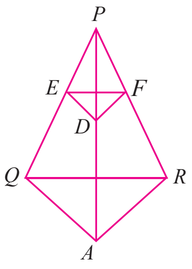


5. $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில், AB-க்கு இணை CD என்க. AB-க்கு இணையாக வரையப்பட்ட ஒரு நேர்க்கோடு AD-ஐ P-யிலும் BC-ஐ Q-யிலும் சந்திக்கிறது எனில், $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$ என நிறுவுக.

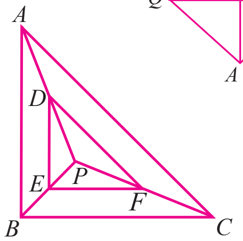
6. படத்தில் $PC \parallel QK$ மற்றும் $BC \parallel HK$. $AQ = 6$ செ.மீ, $QH = 4$ செ.மீ, $HP = 5$ செ.மீ, $KC = 18$ செ.மீ எனில், AK மற்றும் PB-க்களைக் காண்க.



7. படத்தில் $DE \parallel AQ$ மற்றும் $DF \parallel AR$ எனில், $EF \parallel QR$ என நிறுவுக.



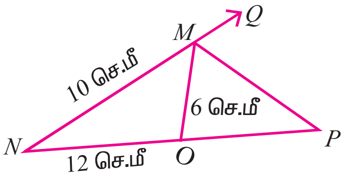
8. படத்தில் $DE \parallel AB$ மற்றும் $DF \parallel AC$ எனில், $EF \parallel BC$ என நிறுவுக.



9. AD என்பது $\triangle ABC$-ல் $\angle A$-ன் உட்புற கோண இருசமவெட்டி. அது BCஐ D-ல் சந்திக்கிறது.
   (i) $BD = 2$ செ.மீ, $AB = 5$ செ.மீ, $DC = 3$ செ.மீ எனில், AC காண்க.
   (ii) $AB = 5.6$ செ.மீ, $AC = 6$ செ.மீ மற்றும் $DC = 3$ செ.மீ எனில், BC காண்க.
   (iii) $AB = x$, $AC = x - 2$, $BD = x + 2$ மற்றும் $DC = x - 1$ எனில், x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

10. பின்வருவனவற்றுள் AD என்பது $\triangle ABC$-ல் $\angle A$-ன் கோண இருசமவெட்டி ஆகுமா எனச் சோதிக்க.
   (i) $AB = 4$ செ. மீ, $AC = 6$ செ. மீ, $BD = 1.6$ செ. மீ, மற்றும் $CD = 2.4$ செ. மீ,
   (ii) $AB = 6$ செ. மீ, $AC = 8$ செ. மீ, $BD = 1.5$ செ. மீ. மற்றும் $CD = 3$ செ. மீ.

11. MP என்பது $\triangle MNO$-ல் $\angle M$-ன் வெளிப்புற இருசமவெட்டி. மேலும், இது NO-ன் நீட்சியினை P-யில் சந்திக்கிறது. $MN = 10$ செ.மீ, $MO = 6$ செ.மீ, $NO = 12$ செ.மீ எனில், OP-ஐ காண்க.



12. $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில் $\angle B$ மற்றும் $\angle D$ ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிகள் AC-ஐ E-ல் வெட்டுகின்றன எனில், $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ என நிறுவுக.

13. ΔABC-ல் $\angle A$-ன் உட்புற இருசமவெட்டி BC-ஐ D-யிலும், $\angle A$-ன் வெளிப்புற இருசமவெட்டி BC-ன் நீட்சியினை E-யிலும் சந்திக்கின்றன எனில், $\frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}$ என நிறுவுக.

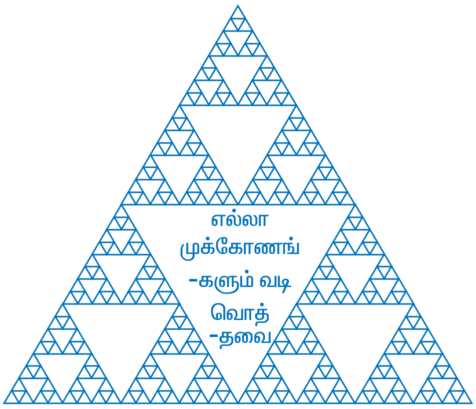
14. $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில் $AB = AD$. AE மற்றும் AF என்பன முறையே $\angle BAC$ மற்றும் $\angle DAC$ ஆகியவற்றின் உட்புற இருசமவெட்டிகள் எனில், $EF \parallel BD$ என நிறுவுக.

6.3 வடிவொத்த முக்கோணங்கள் (Similar Triangles)

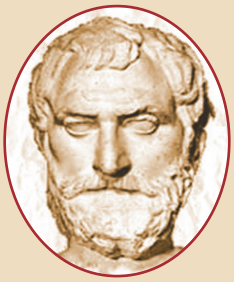
எட்டாம் வகுப்பில் சர்வசம முக்கோணங்களைப் பற்றி விரிவாகக் கற்றோம். இரு வடிவியல் உருவங்கள் ஒரே அளவு மற்றும் ஒத்த வடிவம் கொண்டவையாக இருப்பின் அவை சர்வசமம் (Congruent) என அறிந்தோம். இப்பகுதியில் வடிவத்தில் ஒத்தவையாகவும் ஆனால் அளவுகளில் வேறுபட்டவையாக இருப்பின் அமைந்த வடிவியல் உருவங்களைப் பற்றிக் கற்போம். இத்தகைய வடிவங்களை நாம் வடிவொத்தவை (Similar) என்கிறோம்.

நம்மைச் சுற்றியுள்ள உருவங்களை காணும் போது, ஒரே வடிவம் உள்ள, சம அல்லது மாறுபட்ட அளவுகள் கொண்ட பல பொருட்களைப் பார்க்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு

மரத்திலுள்ள இலைகள், ஒத்த வடிவத்திலும் ஒரே அல்லது வேறுபட்ட அளவுகளைக் கொண்டவையாகவும் உள்ளன. இதைப்போன்றே, ஒரே படச்சுருளைக் கொண்டு எடுக்கப்படும் பல்வேறு அளவுகளிலான மெய்யான நிழற்படங்கள் யாவும் ஒத்த வடிவங்களிலும் ஆனால் வேறுபட்ட அளவுகளிலும் இருக்கும். இவையாவும் **வடிவொத்தப் பொருட்கள்** எனப்படும்.



கிரேக்க நாட்டில் வடிவியலை அறிமுகப் படுத்தியவராக சொல்லப் படும் தேல்ஸ், எகிப்தில் உள்ள பிரமிடுகளின் உயரங்களையும் அவற்றின் நிழல்களையும், வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி கண்டறிந்தவர் எனக் கருதப்படுகிறார். இவ்வாறு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பயன்பாடு உயரங்கள், தூரங்கள் ஆகிய அளவீடுகளைக் கணக்கிட ஏதுவாகின்றன. இவர், இருசமப்பக்க முக்கோணத்தில் சமபக்கங்களுக்கு எதிரே உள்ள கோணங்கள் சமம் எனக் கண்டார். செய்முறை வடிவியலில், வடிவொத்த முக்கோணங்கள், செங்கோண முக்கோணங்கள் ஆகியவற்றின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தினார்.



மிலிடஸின் தேல்ஸ்

(Thales of Miletus)

(624-546 கி.மு.)

கிரீஸ்

தத்துவ அறிஞர், விஞ்ஞானி மற்றும் கணிதவியல் நிபுணர் என அறியப்பட்டவர்களுள், முதன்மை யானவராக திகழ்பவர் தேல்ஸ் ஆவார். காரணங்களைக் கொண்டுத் தருவிக்கும் முறையை முதன் முதலில் வடிவியலில் பயன்படுத்தியவரும் இவரே. மேலும் இவர், வடிவியலில் பல தேற்றங்களைக் கொண்டு பிடித்துள்ளார். கணிதத்தில் பல கணக்குகளைத் தீர்க்க இவர் கையாண்ட முறை அனைவரின் கவனத்தை ஈர்த்தது. கி.மு. 585-ல் சூரிய கிரகணத்தை முன்கூட்டியே தெரிவித்த பெருமையும் இவரைச் சாரும்.

சர்வசம வடிவப் படங்கள், வடிவொத்தவையாக இருக்கும். ஆனால் இதன் மறுதலை மெய்யாக இருக்கத் தேவையில்லை. இந்தப் பகுதியில், நாம் முக்கோணங்களின் வடிவொத்தத் தன்மைகளைப் பற்றி அறிவோம். மேலும், அவைகளைப் பயன்படுத்தி கணக்குகளுக்கு தீர்வு காண்போம். பின்வரும் எளிய செயல்பாடு, வடிவொத்த முக்கோணங்களை மனதளவில் அறிய நமக்கு உதவும்.

செய்து பார்

- மெல்லிய அட்டையில் ஒரு முக்கோண வடிவத்தை வெட்டி எடு.
- தரைக்கு மேல் 1 மீட்டர் உயரத்தில் இந்த அட்டையைச் சூரிய ஒளியில் காட்டவும்.
- தொடர்வரிசையில் முக்கோண வடிவங்களைத் தரையில் காண ஏதுவாக இந்த அட்டையினைத் தரையை நோக்கி நகர்த்து.
- தரையை, அட்டை நெருங்க நெருங்க, பிம்பம் சிறியதாகிக் கொண்டுச் செல்கிறது. தரையை விட்டு மேல்நோக்கி விலக விலக, பிம்பம் பெரியதாகிக் கொண்டே செல்கிறது.
- முக்கோணத்தின் வடிவ அளவு மாறுபட்டாலும், அதன் முனைகளில் அமையும் கோண அளவுகள் எப்போதும் ஒரே அளவில் இருப்பதை பார்க்கலாம்.

வரையறை

இரு முக்கோணங்களில்

(i) ஒத்த கோணங்கள் சமம் (அல்லது)

(ii) ஒத்த பக்கங்களின் நீளங்கள் சம விகிதத்தில் (அல்லது விகிதசமத்தில்) இருக்கும் எனில், அம்முக்கோணங்களை வடிவொத்த முக்கோணங்கள் என்போம்.

அதாவது, ஒரு முக்கோணம் மற்றொன்றின் சீரான விரிவாக்கம் எனில், இவ்விரண்டு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை (similar) ஆகும்.

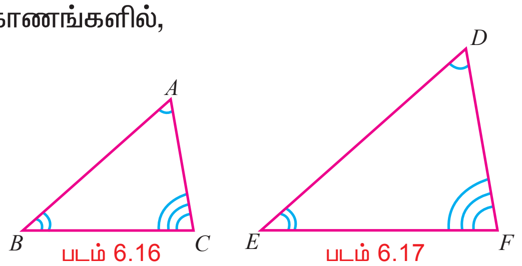
ஆகவே, $\triangle ABC$ மற்றும் $\triangle DEF$ ஆகிய இரண்டு முக்கோணங்களில்,

(i) $\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F$

(அல்லது)

(ii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$ என இருந்தால்,

அவைகள் வடிவொத்த முக்கோணங்களாகும்.



படம் 6.16 படம் 6.17

இங்கு A, B, C ஆகிய உச்சிகள் முறையே D, E மற்றும் F ஆகிய உச்சிகளுக்கு ஒத்தவை யாகும். இவ்வடிவொத்த முக்கோணங்களை குறியீடாக $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ என எழுதுகிறோம். '$\sim$' என்னும் குறியீடு 'வடிவொத்தது' என்பதைக் குறிக்கும்.

குறிப்புரை

$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ஆகியவற்றின் வடிவொத்தத் தன்மையைப் பொருத்தமான ஒத்த உச்சிகளைக் கொண்ட குறியீடாக $\triangle BCA \sim \triangle EFD$ மற்றும் $\Delta CAB \sim \Delta FDE$ எனவும் குறிக்கலாம்.

6.3.1 வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான விதிமுறைகள்

பின்வரும் மூன்று அடிப்படை விதிமுறைகள், முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை என்பதை நிரூபிக்கப் போதுமானவை.

(i) வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான AA-விதிமுறை (Angle-Angle similarity criterion)

ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களுக்குச் சமமானால், அவ்விரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை ஆகும்.

குறிப்பு

ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களுக்குச் சமமானால், அவற்றின் மூன்றாவது கோணங்களும் முறையே சமமாகும். எனவே வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான AA-விதிமுறையை, AAA-விதிமுறை என்றும் குறிக்கலாம்.

(ii) வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான SSS-விதிமுறை (Side-Side-Side similarity criterion)

இரு முக்கோணங்களில், ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமமானால், அவற்றின் ஒத்த கோணங்கள் சமம். எனவே இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை.

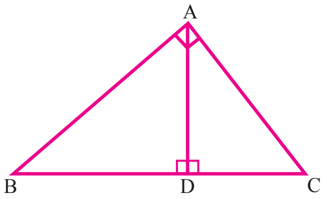
(iii) வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான SAS-விதிமுறை (Side-Angle-Side similarity criterion)

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம் மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணத்திற்குச் சமமாகவும், அவ்விரு முக்கோணங்களில் அக்கோணங்களை உள்ளடக்கிய ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமத்திலும் இருந்தால், அவ்விரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை.

வடிவொத்த முக்கோணங்களின் முடிவுகள் சிலவற்றை நிரூபணமின்றி பட்டியலிடுவோம்.

(i) இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் விகிதத்திற்குச் சமம்.

(ii) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் செங்கோணத்தைக் கொண்ட உச்சியின் வழியே கர்ணத்திற்கு செங்குத்துக்கோடு வரைந்தால், அக்கோட்டின் இரு புறமும் அமையும் இரு முக்கோணங்கள் மற்றும் பெரிய முக்கோணம் ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று வடிவொத்தவையாக அமையும்.



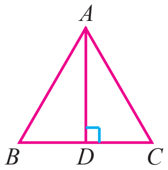
படம் 6.18

இங்கு, (அ) $\Delta\, DBA \sim \Delta\, ABC$ (ஆ) $\Delta\, DAC \sim \Delta\, ABC$

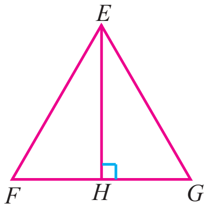
(இ) $\Delta\, DBA \sim \Delta\, DAC$

(iii) இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை எனில், ஒத்தப் பக்கங்களின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த குத்துயரங்களின் விகிதத்திற்கு சமம்.

$\Delta ABC \sim \Delta EFG$ எனில் $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{BC}{FG} = \dfrac{CA}{GE} = \dfrac{AD}{EH}$



படம் 6.19



படம் 6.20

(iv) இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையாக இருப்பின், ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் ஒத்த சுற்றளவுகளின் விகிதத்திற்கும் சமம். அதாவது,

$\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$ எனில், $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD} = \dfrac{AB+BC+CA}{DE+EF+FD}$.

எடுத்துக்காட்டு 6.8

A, B என்பன ΔPQR-ன் பக்கங்கள் PQ, PR-களின் மேல் அமைந்த புள்ளிகள் என்க. மேலும், $AB \parallel QR$, $AB = 3$ செ. மீ, $PB = 2$ செ.மீ மற்றும் $PR = 6$ செ.மீ எனில், QR-ன் நீளத்தினை காண்க.

தீர்வு $AB = 3$ செ.மீ, $PB = 2$, செ.மீ, $PR = 6$ செ.மீ மற்றும் $AB \parallel QR$.

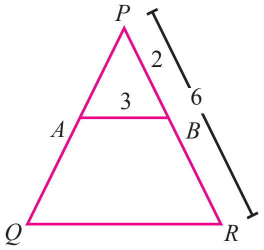
ΔPAB மற்றும் ΔPQR-ல்

$\angle PAB = \angle PQR$ (ஒத்த கோணங்கள்)

$\angle P$ என்பது இரு முக்கோணங்களுக்கும் பொது.

$\therefore \quad \Delta PAB \sim \Delta PQR$ (AA-விதிமுறை)

ஆதலால், ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமம்.



படம் 6.21

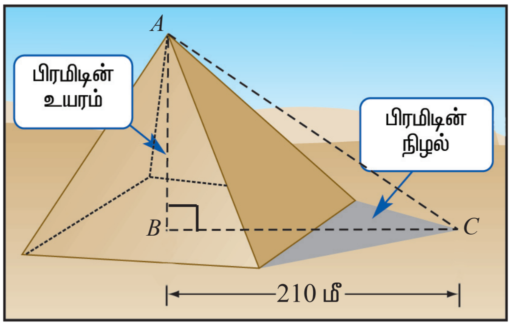
எனவே, $\dfrac{AB}{QR} = \dfrac{PB}{PR}$

$\Longrightarrow \quad QR = \dfrac{AB \times PR}{PB} = \dfrac{3\times 6}{2}$

ஆகவே, $QR = 9$ செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 6.9

1.8 மீ உயரமுள்ள ஒருவர் ஒரு பிரமிடின் (Pyramid) அருகே நின்று கொண்டிருக்கின்றார். ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் அவருடைய நிழலின் நீளம் 2.7மீ மற்றும் பிரமிடின் நிழலின் நீளம் 210 மீ எனில், பிரமிடின் உயரம் காண்க.



படம் 6.22

தீர்வு AB, DE என்பன முறையே பிரமிடு மற்றும் மனிதனின் உயரங்கள் என்க.

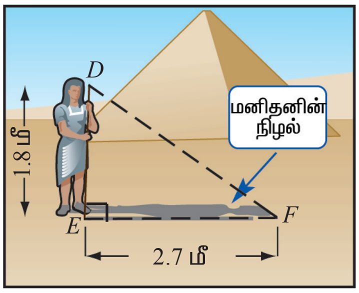
BC, EF என்பன முறையே பிரமிடு மற்றும் மனிதனின் நிழல்களின் நீளங்கள் என்க.

ΔABC மற்றும் ΔDEF -ல்

$$\angle ABC = \angle DEF = 90^{o}$$

$$\angle BCA = \angle EFD$$

(ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் குறிப்பிட்ட ஏற்றக் கோணங்கள் சமம்)



படம் 6.23

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (AA-விதிமுறை)

எனவே, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

$$\Longrightarrow \frac{AB}{1.8} = \frac{210}{2.7} \Longrightarrow AB = \frac{210}{2.7} \times 1.8 = 140.$$

பிரமிடின் உயரம் = 140 மீ.

எடுத்துக்காட்டு 6.10

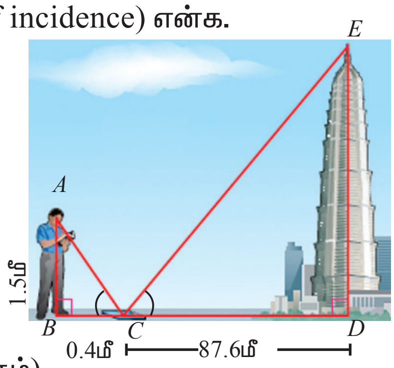
ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியினை, ஒருவர் கோபுரத்திலிருந்து 87.6 மீ தூரத்தில் தரையில் உள்ள ஒரு கண்ணாடியில் பார்க்கிறார். கண்ணாடி மேல் நோக்கியவாறு உள்ளது. அவர் கண்ணாடியிலிருந்து 0.4மீ தூரத்திலும் அவரின் கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டின் மட்டம் தரையிலிருந்து 1.5மீ உயரத்திலும் உள்ளது எனில், கோபுரத்தின் உயரம் காண்க. (மனிதனின் அடி, கண்ணாடி மற்றும் கோபுரத்தின் அடி ஆகியவை ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளன)

தீர்வு AB, ED என்பன முறையே மனிதனின் உயரம், கோபுரத்தின் உயரம் என்க. C என்பது கண்ணாடியில் கோபுரத்தின் உச்சியின் படுபுள்ளி (Point of incidence) என்க.

ΔABC மற்றும் ΔEDC -ல் $\angle ABC = \angle EDC = 90^{o}$,

$$\angle BCA = \angle DCE$$

(ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் குறிப்பிட்ட ஏற்ற கோணங்கள் சமம். அதாவது படுகோணம், எதிரொளிப்பு கோணத்திற்குச் சமம்)



படம் 6.24

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta EDC$ (AA-விதிமுறை)

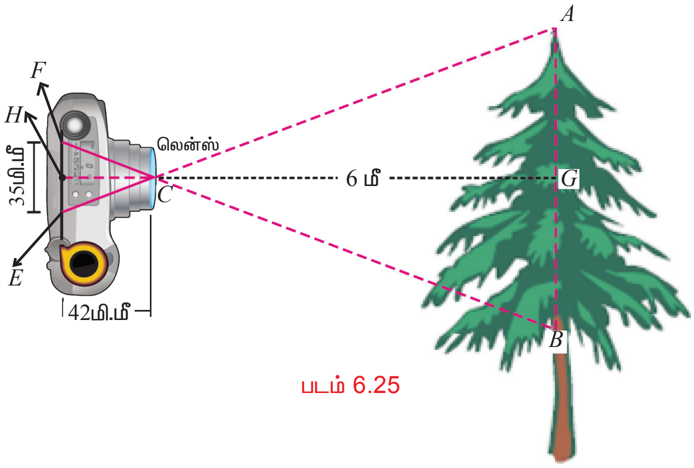
$\therefore \frac{ED}{AB} = \frac{DC}{BC}$ (ஒத்த பக்கங்கள் சமவிகிதத்தில் இருக்கும்)

$$\Longrightarrow ED = \frac{DC}{BC} \times AB = \frac{87.6}{0.4} \times 1.5 = 328.5.$$

கோபுரத்தின் உயரம் = 328.5மீ.

எடுத்துக்காட்டு 6.11

ஒரு நிழற்படக் கருவியிலுள்ள படச் சுருளில் ஒரு மரத்தின் பிம்பத்தின் நீளம் 35 மி.மீ. லென்ஸ்க்கும் படச்சுருளுக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் 42 மி.மீ. மேலும், லென்ஸிலிருந்து மரத்துக்கு உள்ள தூரம் 6மீ எனில், நிழற்படம் எடுக்கப்படும் மரத்தின் பகுதியின் நீளம் காண்க.



படம் 6.25

தீர்வு AB, EF என்பன முறையே நிழல்படம் எடுக்கப்படும் மரத்தின் பகுதியின் நீளம் மற்றும் படச்சுருளில் பிம்பத்தின் நீளம் என்க. C என்னும் புள்ளி லென்ஸைக் குறிக்கட்டும். CG, CH என்பன ΔACB மற்றும் ΔFEC-ன் குத்துயரங்கள் ஆகும்.

AB || FE என்பது தெளிவு.

ΔACB மற்றும் ΔFEC-ல் $\angle BAC = \angle FEC$

$\angle ECF = \angle ACB$ (குத்தெதிர்க்கோணங்கள் சமம்)

$\therefore \Delta ACB \sim \Delta ECF$ (AA-விதிமுறை)

எனவே, $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{CG}{CH}$

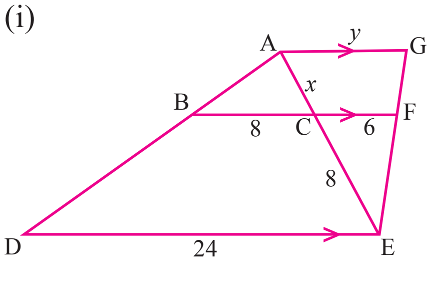
$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{CG}{CH} \times EF = \frac{6 \times 0.035}{0.042} = 5$$

நிழல் படம் எடுக்கப்பட்ட மரத்தின் பகுதியின் நீளம் 5மீ ஆகும்.

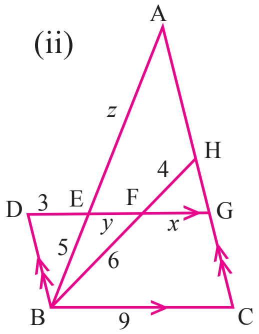
பயிற்சி 6.2

1. பின்வரும் படங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தெரியாதனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. எல்லா நீளங்களும் சென்டி மீட்டரில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. (அளவுகள் அளவுத்திட்டப்படி இல்லை)

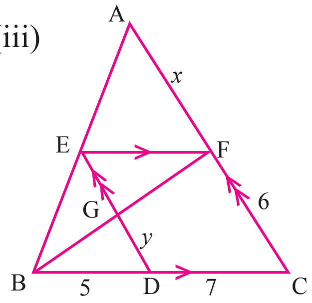
(i)



(ii)



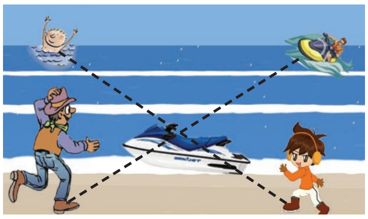
(iii)



2. ஒரு நிழற்படக் கருவியின் படச்சுருளில், 1.8 மீ உயரமுள்ள ஒரு மனிதனின் பிம்பத்தின் நீளம் 1.5 செ.மீ. என்க. கருவியின் லென்ஸிலிருந்து படச்சுருள் 3 செ.மீ தூரத்தில் இருந்தால், அவர் நிழற்படக் கருவியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் இருப்பார்?

3. 120 செ.மீ. உயரமுள்ள ஒரு சிறுமி ஒரு விளக்குக் கம்பத்தின் அடியிலிருந்து விலகி, அதற்கு நேரெதிராக 0.6 மீ./வி வேகத்தில் நடந்துக் கொண்டிருக்கிறாள். விளக்கு, தரை மட்டத்திலிருந்து 3.6 மீ. உயரத்தில் உள்ளது எனில், சிறுமியின் நிழலின் நீளத்தை 4 வினாடிகளுக்கு பிறகு காண்க.

4. ஒரு சிறுமி கடற்கரையில் அவள் தந்தையுடன் இருக்கிறாள். கடலில் நீந்தும் ஒருவன் தொடர்ந்து நீந்த முடியாமல் நீரில் தத்தளித்துக் கொண்டிருப்பதை கண்டாள். அவள் உடனே மேற்கில் 50 மீ தொலைவில் இருக்கும் தன் தந்தையை உதவி செய்யுமாறு கூக்குரலிட்டாள். இவளை விட இவள் தந்தை ஒரு படகுக்கு 10 மீ அருகிலிருந்தார். இவர் அப்படகைப் பயன்படுத்தி மூழ்கிக் கொண்டிருப்பவனை அடைய வேண்டுமெனில், 126 மீ அப்படகில் செல்ல வேண்டும். அதே சமயத்தில் அச்சிறுமி நீர் ஊர்தி ஒன்றில் படகிலிருந்து 98 மீ தூரத்தில் செல்லும் ஒருவனைக் காண்கிறாள். நீர் ஊர்தியில் இருப்பவர் மூழ்கிக் கொண்டிருப்பவருக்கு கிழக்கில் உள்ளார். அவரைக் காப்பாற்ற ஊர்தியில் உள்ளவர் எவ்வளவு தொலைவு செல்ல வேண்டும்? (படத்தைப் பார்க்க) (இவ்வினா மட்டும் தேர்வுக்குரியதன்று)



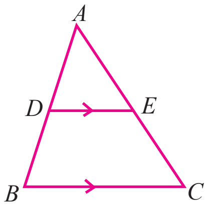
5. ΔABC-ல் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC-யில் முறையே P மற்றும் Q என்ற புள்ளிகள் உள்ளன. $AP = 3$ செ.மீ, $PB = 6$ செ.மீ, $AQ = 5$ செ.மீ மற்றும் $QC = 10$ செ.மீ எனில், $BC = 3\ PQ$ என நிறுவுக.

6. ΔABC-ல், $AB = AC$ மற்றும் $BC = 6$ செ.மீ என்க. மேலும், AC-ல் D என்பது $AD = 5$ செ.மீ மற்றும் $CD = 4$ செ.மீ என்று இருக்குமாறு ஒரு புள்ளி எனில், $\Delta BCD \sim \Delta ACB$ என நிறுவுக. இதன் மூலம் DB-யைக் காண்க.

7. ΔABC-ன் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC-களின் மேல் அமைந்த புள்ளிகள் முறையே D மற்றும் E என்க. மேலும், $DE \parallel BC$, $AB = 3\ AD$ மற்றும் ΔABC-ன் பரப்பளவு 72 செ.மீ^{2} எனில், நாற்கரம் $DBCE$-ன் பரப்பளவைக் காண்க.

8. $\triangle ABC$-ன் பக்க நீளங்கள் 6 செ.மீ, 4 செ.மீ, 9 செ.மீ மற்றும் $\triangle PQR \sim \triangle ABC$. $\triangle PQR$-ன் ஒரு பக்கம் 35 செ.மீ எனில், $\triangle PQR$-ன் சுற்றளவு மிக அதிகமாக எவ்வளவு இருக்கக் கூடும்?

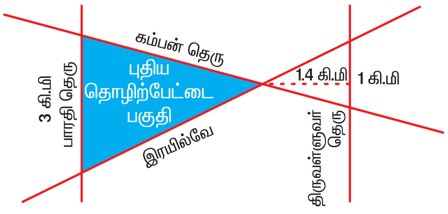
9. படத்தில் $DE \parallel BC$. மேலும், $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{3}{5}$ எனில்,



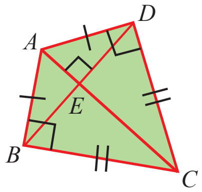
(i) $\dfrac{\Delta ADE \text{ - ன் பரப்பளவு}}{\Delta ABC \text{ - ன் பரப்பளவு}}$,

(ii) $\dfrac{\text{சரிவகம் } BCED \text{ - ன் பரப்பளவு}}{\Delta ABC \text{ - ன் பரப்பளவு}}$ ஆகியனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

10. அரசு, ஒரு மாநகரில் பயன்படுத்தப்படாத நிலப்பகுதி ஒன்றில் புதிய தொழிற்பேட்டையினை நிறுவத் திட்டமிடுகிறது. நிழலிட்டப் பகுதி புதியதாக அமைக்கப்படும் தொழிற்பேட்டை பகுதியின் பரப்பளவைக் குறிக்கிறது. இப்பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.



11. ஒரு சிறுவன் வைரத்தின் குறுக்கு வெட்டுத் தோற்ற வடிவில், படத்தில் காட்டியவாறு ஒரு பட்டம் செய்தான். இங்கு $AE = 16$ செ.மீ, $EC = 81$ செ.மீ. அவன் BD என்ற குறுக்குக் குச்சியினைப் பயன்படுத்த விரும்புகிறான். அக்குச்சியின் நீளம் எவ்வளவு இருக்கவேண்டும்?

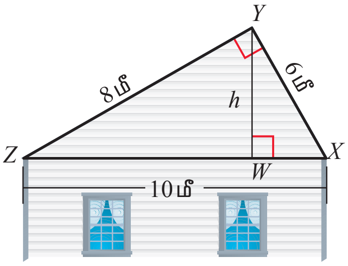


12. ஒரு மாணவன் கொடிக்கம்பத்தின் உயரத்தினைக் கணக்கிட விரும்புகிறான். கொடிக்கம்பத்தின் உச்சியின் எதிரொளிப்பைக் கண்ணாடியில் காணும் வகையில், ஒரு சிறு கண்ணாடியைத் தரையில் வைக்கிறான். அக்கண்ணாடி அவனிடமிருந்து 0.5மீ தொலைவில் உள்ளது. கண்ணாடிக்கும் கொடிகம்பத்திற்கும் இடையே உள்ள தொலைவு 3மீ மற்றும் அவனுடைய கிடைமட்டப் பார்வைக் கோடு தரையிலிருந்து 1.5 மீ உயரத்தில் உள்ளது எனில், கொடிக்கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க. (மாணவன், கண்ணாடி மற்றும் கொடிக் கம்பம் ஆகியன ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளன.)

13. ஒரு மேற்கூரை படத்தில் காட்டியவாறு குறுக்கு வெட்டுத் தோற்றத்தைக் கொண்டுள்ளது. இதில்

(i) வடிவொத்த முக்கோணங்களைத் தெரிந்தெடுக்கவும்.

(ii) கூரையின் உயரம் h-ஐக் காண்க.



தேற்றம் 6.5 பிதாகரஸ் தேற்றம் (பௌதயன் தேற்றம்)

(Pythagoras theorem (Baudhayan theorem))

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : செங்கோண $\triangle ABC$-ல், $\angle A = 90^\circ$.

நிரூபிக்க : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

அமைப்பு : $AD \perp BC$ வரைக.

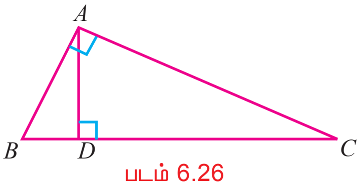
நிரூபணம்

முக்கோணங்கள் ABC மற்றும் DBA-களில், $\angle B$ பொதுவான கோணம்.

மேலும், $\angle BAC = \angle ADB = 90^\circ$.

$\therefore \quad \triangle ABC \sim \triangle DBA$ (AA - விதிமுறை)

எனவே, அவற்றின் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமம்.



படம் 6.26

ஆகவே, $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{BC}{BA}$

$\Longrightarrow \quad AB^2 = DB \times BC$ (1)

இதைப் போன்றே, $\triangle ABC \sim \triangle DAC$.

எனவெ, $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AC}{DC}$

$\Longrightarrow \quad AC^2 = BC \times DC$ (2)

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றைக் கூட்ட,

$AB^2 + AC^2 = BD \times BC + BC \times DC$

$$= BC(BD + DC)$$

$$= BC \times BC = BC^2$$

ஆகவே, $BC^2 = AB^2 + AC^2$. பிதாகரஸ் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

குறிப்புரை

பிதாகரஸ் தேற்றம் இரண்டு அடிப்படைக் கருத்துக்களைக் கொண்டுள்ளது. ஒன்று பரப்பளவுகளைப் பற்றியது. மற்றொன்று நீளங்களைப் பற்றியது. எனவே, இந்த சிறப்புத் தேற்றம் வடிவியலையும், இயற்கணிதத்தையும் பிணைக்கிறது. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் மறுதலையும் மெய்யாகும். இத்தேற்றம் முதன்முதலில் யூக்ளிட் என்பவரால் குறிப்பிடப்பட்டு நிரூபிக்கப்பட்டது.

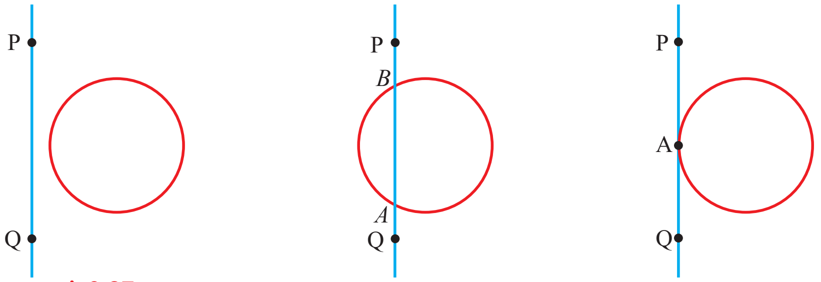
பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் மறுதலையின் கூற்று கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. (நிரூபணம் பயிற்சிக்காக விடப்பட்டுள்ளது)

தேற்றம் 6.6 பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை (Converse of Pythagoras theorem)

ஒரு முக்கோணத்தில், ஒரு பக்கத்தின் வர்க்கம், மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் எனில், முதல் பக்கத்திற்கு எதிரே உள்ள கோணம் செங்கோணம்.

6.4 வட்டங்கள் மற்றும் தொடுகோடுகள் (Circles and Tangents)

வட்டத்துடன் தொடர்புள்ள ஒரு நேர்க்கோடு அவ்வட்டத்தினை ஒரேயொரு புள்ளியில் மட்டும் தொடுமானால், அக்கோடு வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு (Tangent) எனப்படும். வடிவியலில் வட்டத்தின் தொடுகோடுகள், வடிவியல் அமைப்புகள் மற்றும் நிருபணங்களிலும் முக்கிய பங்காற்றுகின்றன. இந்த பாடப்பகுதியல் வட்டங்கள், தொடுகோடுகள் ஆகியவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்ட சில முடிவுகளை விளக்குவோம். அவற்றின் மூலம், தொடுகோடு-நாண் தேற்றம் (Tangent-Chord Theorem) எனப்படும் முக்கியத் தேற்றத்தினை நிரூபிப்போம். ஒரு நேர்க்கோடு மற்றும் ஒரு வட்டம் ஆகியவற்றை ஒரு தளத்தில் எடுத்துக் கொண்டால், அவை மூன்று வகைகளில் அமையும். அவை ஒன்றினை மற்றொன்று வெட்டாமல் போகலாம்; அவை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டலாம். இறுதியாக, ஒன்றை மற்றொன்று ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டும் தொடலாம்.



படம் 6.27 படம் 6.28 படம் 6.29

படம். 6.27-ல், வட்டத்திற்கும் நேர்க்கோடு PQ-விற்கும் பொதுப் புள்ளி இல்லை.

படம். 6.28-ல், நேர்க்கோடு PQ என்பது வட்டத்தினை A, B என்ற இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. இந்நிலையில் PQ ஆனது வட்டத்திற்கு ஒரு வெட்டுக்கோடு (Secant)ஆகும்.

படம். 6.29-ல், நேர்க்கோடு PQ-யும் வட்டமும் ஒரே ஒரு பொதுப் புள்ளியைக் கொண்டுள்ளன. அதாவது, நேர்க்கோடு வட்டத்தினை ஒரே ஒரு புள்ளியில் தொடுகிறது. நேர்க்கோடு PQ ஆனது வட்டத்திற்கு புள்ளி A-ல் தொடுகோடு (Tangent) எனப்படும்.

வரையறை:

ஒரு நேர்க்கோடு வட்டத்தினை ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டும் தொடுமானால் அக்கோடு வட்டத்திற்கு தொடுகோடு எனப்படும். அப்புள்ளி தொடு புள்ளி (Point of Contact) எனப்படும்.

வட்டங்கள் மற்றும் தொடுகோடுகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட தேற்றங்கள் (நிரூபணம் இன்றி)

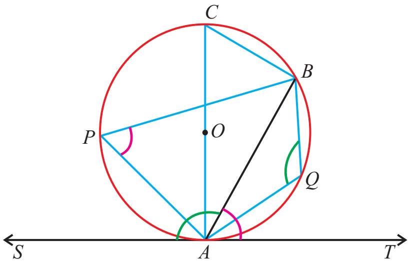
1. வட்டத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்டத் தொடுகோடு, தொடு புள்ளி வழிச் செல்லும் ஆரத்திற்குச் செங்குத்தாகும்.
2. வட்டத்தின் ஒரு புள்ளியில் ஒரே ஒரு தொடுகோடு மட்டுமே வரைய முடியும்.
3. வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து, அவ்வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையமுடியும்.
4. வட்டத்திற்கு வெளியிலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட இரு தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமம்.
5. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுமானால் தொடு புள்ளியானது வட்டங்களின் மையங்களை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டில் அமையும்.
6. இரு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாகத் தொடுமானால், வட்ட மையங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரமானது அவற்றின் ஆரங்களின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும்.
7. இரு வட்டங்கள் உட்புறமாகத் தொடுமானால், வட்ட மையங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரமானது அவற்றின் ஆரங்களின் வித்தியாசத்திற்குச் சமமாகும்.

தேற்றம் 6.7 தொடுகோடு – நாண் தேற்றம் (Tangent-Chord theorem)

வட்டத்தில் தொடுகோட்டின் தொடு புள்ளி வழியே ஒரு நாண் வரையபட்டால், அந்த நாண் தொடுகோட்டுடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் முறையே ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியாக மாற்று வட்டத் துண்டுகளில் அமைந்த கோணங்களுக்குச் சமம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : O-வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் A எனும் புள்ளியில் ST ஒரு தொடுகோடு, AB ஒரு நாண்.

P, Q என்பன AB என்ற நாணின் எதிரெதிர் பக்கங்களில் உள்ள ஏதேனும் இரு புள்ளிகள்.



படம் 6.30

நிரூபிக்க : (i) $\angle BAT = \angle BPA$ (ii) $\angle BAS = \angle AQB$

அமைப்பு : வட்டத்தில் AC என்ற விட்டத்தினை வரைக.

B, C ஆகியவற்றை இணைக்கவும்.

நிரூபணம்

கூற்று	காரணம்
$\angle ABC = 90^\circ$	அரை வட்டத்தின் உள் அமைக் கோணம் 90°
$\angle CAB + \angle BCA = 90^\circ$	செங்கோண ΔABC-ல் முக்கோணத்தில் இரு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல். (1)
$\angle CAT = 90^\circ$	தொடு புள்ளியில் விட்டம் தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்தாகும்.
$\Longrightarrow \angle CAB + \angle BAT = 90^\circ$	(2)
$\angle CAB + \angle BCA = \angle CAB + \angle BAT$	(1) , (2)-லிருந்து

$\Longrightarrow \quad \angle BCA = \angle BAT$ (3)

$\angle BCA = \angle BPA$ ஒரே வட்டத்துண்டிலுள்ள உள் அமைக்கோணங்கள் சமம் (4)

$\angle BAT = \angle BPA.$ (3), (4)-லிருந்து (5)

ஆகவே, (i) நிரூபிக்கப்பட்டது.

மேலும், $\angle BPA + \angle AQB = 180^\circ$ வட்ட நாற்கரத்தின் எதிரெதிர் கோணங்கள்.

$\Longrightarrow \quad \angle BAT + \angle AQB = 180^\circ$ (5)-லிருந்து (6)

மேலும், $\angle BAT + \angle BAS = 180^\circ$ நேர்க்கோட்டில் அமைந்த கோணங்கள். (7)

$\angle BAT + \angle AQB = \angle BAT + \angle BAS$ (6), (7)-லிருந்து

$\angle BAS = \angle AQB.$ எனவே, (ii) நிரூபிக்கப்பட்டது.

ஆகவே, தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

தேற்றம் 6.8 தொடுகோடு – நாண் தேற்றத்தின் மறுதலை (Converse of Tangent-Chord Theorem)

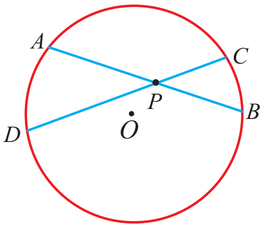
ஒரு வட்டத்தில் ஒரு நாணின் ஒரு முனைப்புள்ளி வழியே வரையப்பட்ட நேர்க்கோடு அந்நாணுடன் உண்டாக்கும் கோணமானது மறு வட்டத் துண்டிலுள்ள கோணத்திற்குச் சமமானால், அந் நேர்க்கோடு வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடாகும்.

வரையறை

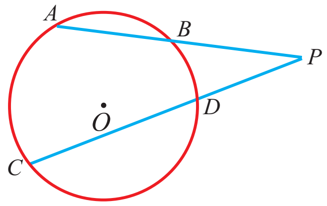
AB என்ற கோட்டுத் துண்டில் P என்பது ஒரு புள்ளி. $PA \times PB$ என்பது PA, PB-ஐ பக்கங்களாகக் கொண்ட செவ்வகத்தின் பரப்பளவைக்குறிக்கிறது. இந்த பெருக்கல்பலன் என்பது AB என்ற கோட்டுத்துண்டின் பகுதிகளாகிய PA மற்றும் PB ஆல் அமைக்கப்பட்டச் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

தேற்றம் 6.9

ஒரு வட்டத்தில் இரு நாண்கள் ஒன்றையொன்று உட்புறமாக (வெளிப்புறமாக) வெட்டிக் கொண்டால் ஒரு நாணின் வெட்டுத் துண்டுகளால் அமைக்கப்படும் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு மற்றொரு நாணின் வெட்டுத் துண்டுகளால் அமைக்கப்படும் செவ்வகத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமம்.



படம் 6.31



படம் 6.32

படம்.6.31-ல், O-வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் AB மற்றும் CD என்ற இரண்டு நாண்கள், ஒன்றையொன்று உட்புறமாக P என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. எனவே, $PA \times PB = PC \times PD$.

படம் 6.32-ல், O-வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் AB மற்றும் CD என்ற இரண்டு நாண்கள், ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாக P என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. எனவே, $PA \times PB = PC \times PD$.

எடுத்துக்காட்டு 6.12

ஒரு வட்டத்தின் புள்ளி A-ல் வரையப்படும் தொடுகோடு PQ என்க. AB என்பது வட்டத்தின் நாண் என்க. மேலும், $\angle BAC = 54^\circ$ மற்றும் $\angle BAQ = 62^\circ$ என்று அமையுமாறு வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளி C எனில், $\angle ABC$-ஐ காண்க.

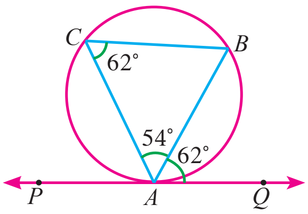
தீர்வு: A-ல் PQ ஒரு தொடுகோடு மற்றும் AB ஒரு நாண்.

எனவே, $\angle BAQ = \angle ACB = 62^\circ$. (தொடுகோடு - நாண் தேற்றம்)

மேலும், $\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$.

(ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல் 180°)

$$\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ACB)$$
$$= 180^\circ - (54^\circ + 62^\circ) = 64^\circ.$$

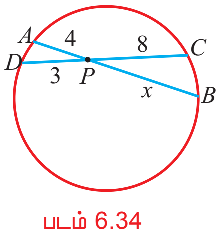


படம் 6.33

எடுத்துக்காட்டு 6.13

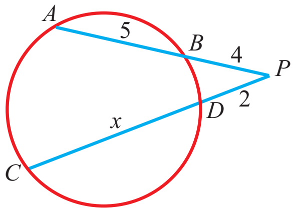
கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு படத்திலும் x-ன் மதிப்பை காண்க.

(i)



படம் 6.34

(ii)



படம் 6.35

தீர்வு

(i) இங்கு $PA \times PB = PC \times PD$

$\Longrightarrow \quad PB = \dfrac{PC.PD}{PA}$

எனவே, $x = \dfrac{8 \times 3}{4} = 6.$

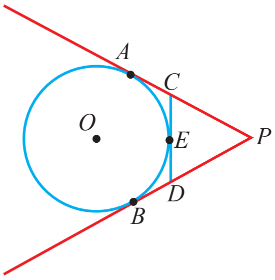
(ii) இங்கு $PA \times PB = PC \times PD$

$\Longrightarrow \quad 9 \times 4 = (2+x)\, 2$

$x + 2 = 18$ எனவே, $x = 16.$

எடுத்துக்காட்டு 6.14

படத்தில் PA, PB என்பன O-வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்திற்கு வெளிப் புள்ளி P-யிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளாகும். CD என்பது வட்டத்திற்கு E என்னும் புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோடு. $AP = 15$ செமீ எனில், ΔPCD -யின் சுற்றளவைக் கண்டுபிடி.



படம் 6.36

தீர்வு வெளியே உள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமம் என்பதனை நாம் அறிவோம்.

$\therefore CA = CE, \quad DB = DE, \quad PA = PB.$

$\therefore \quad \Delta PCD$ -ன் சுற்றளவு $= PC + CD + DP$

$= PC + CE + ED + DP$

$= PC + CA + DB + DP$

$= PA + PB = 2\,PA \qquad (\because PB = PA)$

ஆகவே, ΔPCD -ன் சுற்றளவு $= 2 \times 15 = 30$ செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 6.15

$ABCD$ என்ற நாற்கரம், அதன் எல்லா பக்கங்களும் ஒரு வட்டத்தை தொடுமாறு அமைந்துள்ளது. $AB = 6$ செ.மீ, $BC = 6.5$ செ.மீ மற்றும் $CD = 7$ செ.மீ எனில், AD-ன் நீளத்தைக் காண்க.

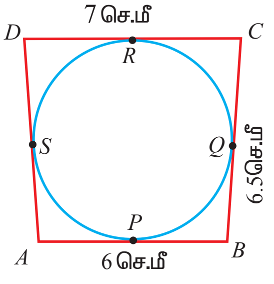
தீர்வு நாற்கரமானது வட்டத்தை தொடும் புள்ளிகள் P, Q, R மற்றும் S என்க.

$\therefore \quad AP = AS \ (1), \quad BP = BQ \ (2), \quad CR = CQ \ (3), \quad DR = DS \ (4).$

(1), (2), (3) மற்றும் (4) ஆகியவற்றைக் கூட்டக்கிடைப்பது,

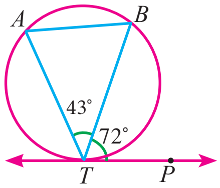
$$AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS$$
$$= AS + DS + BQ + CQ$$
$$\Longrightarrow \quad AB + CD = AD + BC.$$
$$AD = AB + CD - BC = 6 + 7 - 6.5 = 6.5$$

ஆகவே, $AD = 6.5$ செ.மீ.



படம் 6.37

பயிற்சி 6.3



1. படத்தில் TP ஒரு தொடுகோடு. A, B என்பன வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளிகள். $\angle BTP = 72^\circ$ மற்றும் $\angle ATB = 43^\circ$ எனில் $\angle ABT$-ஐக் காண்க.
2. ஒரு வட்டத்தில் AB, CD என்னும் இரு நாண்கள் ஒன்றையொன்று உட்புறமாக P-யில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.
   (i) $CP = 4$ செ.மீ, $AP = 8$ செ.மீ., $PB = 2$ செ.மீ எனில், PD-ஐக் காண்க.
   (ii) $AP = 12$ செ.மீ, $AB = 15$ செ.மீ, $CP = PD$ எனில், CD-ஐக் காண்க.
3. AB மற்றும் CD என்ற இரு நாண்கள் வட்டத்திற்கு வெளியே P எனும் புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.
   (i) $AB = 4$ செ.மீ, $BP = 5$ செ.மீ மற்றும் $PD = 3$ செ.மீ எனில், CD-ஐக் காண்க.
   (ii) $BP = 3$ செ.மீ, $CP = 6$ செ.மீ மற்றும் $CD = 2$ செ.மீ எனில், AB-ஐக் காண்க.
4. ஒரு வட்டம், ΔABC-ல் பக்கம் BC-ஐ P-ல் தொடுகிறது. அவ்வட்டம் AB மற்றும் AC-களின் நீட்சிகளை முறையே Q மற்றும் R-ல் தொடுகிறது எனில், $AQ = AR = \frac{1}{2}(\Delta ABC$-ன் சுற்றளவு$)$ என நிறுவுக.
5. ஒரு இணைகரத்தின் எல்லாப் பக்கங்களும் ஒரு வட்டத்தினை தொடுமானால் அவ்விணைகரம் ஒரு சாய்சதுரமாகும் என நிறுவுக.
6. ஒரு தாமரைப் பூவானது தண்ணீர் மட்டத்திற்கு மேல் 20 செ.மீ உயரத்தில் உள்ளது. தண்டின் மீதிப் பகுதி தண்ணீர் மட்டத்திற்கு கீழே உள்ளது. காற்று வீசும்போது தண்டு தள்ளப்பட்டு, தாமரைப் பூவானது தண்டின் ஆரம்ப நிலையிலிருந்து 40 செ.மீ தூரத்தில் தண்ணீரைத் தொடுகிறது. ஆரம்ப நிலையில் தண்ணீர் மட்டத்திற்குக் கீழே உள்ள தண்டின் நீளம் காண்க?
7. செவ்வகம் $ABCD$-ன் உட்புற புள்ளி O-விலிருந்து செவ்வகத்தின் முனைகள் A, B, C, D இணைக்கப்பட்டுள்ளன எனில், $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$ என நிறுவுக.

பயிற்சி 6.4

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

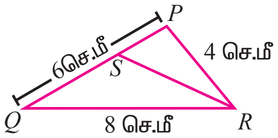
1. $\triangle ABC$-ன் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC ஆகியவற்றை ஒரு நேர்க்கோடு முறையே D மற்றும் E-களில் வெட்டுகிறது. மேலும், அக்கோடு BC-க்கு இணை எனில் $\frac{AE}{AC} =$

   (A) $\frac{AD}{DB}$ (B) $\frac{AD}{AB}$ (C) $\frac{DE}{BC}$ (D) $\frac{AD}{EC}$

2. $\triangle ABC$-ல் AB மற்றும் AC-களிலுள்ள புள்ளிகள் D மற்றும் E என்பன $DE \parallel BC$ என்றவாறு உள்ளன. மேலும், $AD = 3$ செ.மீ, $DB = 2$ செ.மீ மற்றும் $AE = 2.7$ செ.மீ எனில், $AC =$

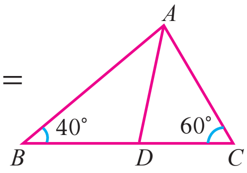
(A) 6.5 செ.மீ (B) 4.5 செ.மீ (C) 3.5 செ.மீ (D) 5.5 செ.மீ

3. $\triangle PQR$-ல் RS என்பது $\angle R$-ன் கோண உட்புற இருசமவெட்டி. $PQ = 6$ செ.மீ, $QR = 8$ செ.மீ, $RP = 4$ செ.மீ எனில், $PS =$



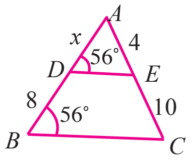
(A) 2 செ.மீ (B) 4 செ.மீ (C) 3 செ.மீ (D) 6 செ.மீ

4. படத்தில் $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$, $\angle B = 40^\circ$ மற்றும் $\angle C = 60^\circ$ எனில், $\angle BAD =$



(A) 30° (B) 50° (C) 80° (D) 40°

5. படத்தில் x-ன் மதிப்பானது

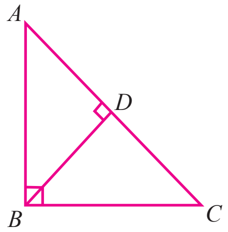


(A) $4 \cdot 2$ அலகுகள் (B) $3 \cdot 2$ அலகுகள்
(C) $0 \cdot 8$ அலகுகள் (D) $0 \cdot 4$ அலகுகள்

6. ΔABC மற்றும் ΔDEF-களில் $\angle B = \angle E$ மற்றும் $\angle C = \angle F$ எனில்,

(A) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{CA}{EF}$ (B) $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AB}{FD}$ (C) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ (D) $\dfrac{CA}{FD} = \dfrac{AB}{EF}$

7. கொடுக்கப்பட்ட படத்திற்குப், பொருந்தாத கூற்றினைக் கண்டறிக.



(A) $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (B) $\Delta ABD \sim \Delta ABC$

(C) $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (D) $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

8. 12 மீ நீளமுள்ள ஒரு நேர்க்குத்தான குச்சி, 8 மீ நீளமுள்ள நிழலைத் தரையில் ஏற்படுத்துகிறது. அதே நேரத்தில் ஒரு கோபுரம் 40 மீ நீளமுள்ள நிழலைத் தரையில் ஏற்படுத்துகிறது எனில், கோபுரத்தின் உயரம்

(A) 40 மீ (B) 50 மீ (C) 75 மீ (D) 60 மீ

9. இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் விகிதம் 2:3 எனில், அவற்றின் பரப்பளவுகளின் விகிதம்

(A) 9 : 4 (B) 4 : 9 (C) 2 : 3 (D) 3 : 2

10. முக்கோணங்கள் ABC மற்றும் DEF வடிவொத்தவை. அவற்றின் பரப்பளவுகள் முறையே 100 செ.மீ ^{2}, 49 செ.மீ ^{2} மற்றும் $BC = 8.2$ செ.மீ எனில், $EF =$

(A) 5.47 செ.மீ (B) 5.74 செ.மீ (C) 6.47 செ.மீ (D) 6.74 செ.மீ

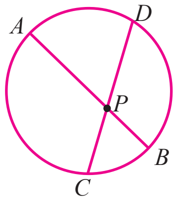
11. இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் சுற்றளவுகள் முறையே 24 செ.மீ, 18 செ.மீ என்க. முதல் முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் 8 செ.மீ எனில், மற்றொரு முக்கோணத்தின் அதற்கு ஒத்த பக்கம்

(A) 4 செ.மீ (B) 3 செ.மீ (C) 9 செ.மீ (D) 6 செ.மீ

12. AB, CD என்பன ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்கள். அவை நீட்டப்படும்போது P-ல் சந்திக்கின்றன மற்றும் $AB = 5$ செ.மீ, $AP = 8$ செ.மீ, $CD = 2$ செ.மீ எனில், $PD =$

(A) 12 செ.மீ (B) 5 செ.மீ (C) 6 செ.மீ (D) 4 செ.மீ

13. படத்தில் நாண்கள் AB மற்றும் CD என்பன P-ல் வெட்டுகின்றன $AB = 16$ செ.மீ, $PD = 8$ செ.மீ, $PC = 6$ மற்றும் AP >PB எனில், AP =

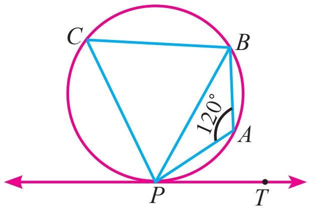


(A) 8 செ.மீ (B) 4 செ.மீ (C) 12 செ.மீ (D) 6 செ.மீ

14. P என்னும் புள்ளி, வட்ட மையம் O-விலிருந்து 26 செ.மீ தொலைவில் உள்ளது. P-யிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட PT என்ற தொடுகோட்டின் நீளம் 10 செ.மீ எனில், $OT =$

(A) 36 செ.மீ (B) 20 செ.மீ (C) 18 செ.மீ (D) 24 செ.மீ

15. படத்தில், $\angle PAB = 120^\circ$ எனில், $\angle BPT =$



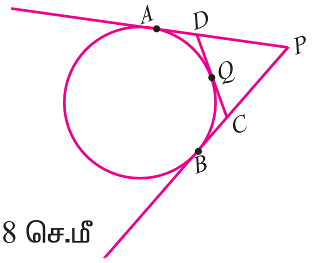
(A) 120° (B) 30°

(C) 40° (D) 60°

16. O-வை மையமாக உடைய வட்டத்திற்கு PA, PB என்பன வெளிப்புள்ளி P-யிலிருந்து வரையப்பட்டத் தொடுகோடுகள். இத்தொடுகோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள கோணம் 40° எனில், $\angle POA =$

(A) 70° (B) 80° (C) 50° (D) 60°

17. படத்தில், PA, PB என்பன வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளி P-யிலிருந்து வரையப்பட்டத் தொடுகோடுகள். மேலும் CD என்பது Q என்ற புள்ளியில் வட்டத்திற்கு தொடுகோடு. $PA = 8$ செ.மீ, $CQ = 3$ செ.மீ எனில், $PC =$



(A) 11 செ.மீ (B) 5 செ.மீ (C) 24 செ.மீ (D) 38 செ.மீ

18. செங்கோண ΔABC-ல் $\angle B = 90^\circ$ மற்றும் $BD \perp AC$. BD = 8 செ.மீ, $AD = 4$ செ.மீ எனில், $CD =$

(A) 24 செ.மீ (B) 16 செ.மீ (C) 32 செ.மீ (D) 8 செ.மீ

19. இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் முறையே 16 செ.மீ ^{2}, 36 செ.மீ ^{2}. முதல் முக்கோணத்தின் குத்துயரம் 3 செ.மீ எனில், மற்றொரு முக்கோணத்தில் அதனை ஒத்த குத்துயரம்

(A) 6.5 செ.மீ (B) 6 செ.மீ (C) 4 செ.மீ (D) 4.5 செ.மீ

20. இரு வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ΔABC மற்றும் ΔDEF ஆகியவற்றின் சுற்றளவுகள் முறையே 36 செ.மீ, 24 செ.மீ. மேலும், $DE = 10$ செ.மீ எனில், $AB =$

(A) 12 செ.மீ (B) 20 செ.மீ (C) 15 செ.மீ (D) 18 செ.மீ

7 முக்கோணவியல்

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry – J.F. Herbart

- அறிமுகம்
- முற்றொருமைகள்
- உயரங்களும் தூரங்களும்

ஹிப்பார்சஸ்
(Hipparchus)
(190 - 120 கி.மு.)
கிரீஸ் (Greece)

இவர் முக்கோணவியலை மேம்படுத்தினார். முக்கோணவியலில் பயன்படுத்தப்படும் அட்டவணைகளை உருவாக்கினார். கோள முக்கோணவியலில் பல கணக்குகளுக்குத் தீர்விளைக் கண்டார். சூரியன் மற்றும் சந்திரன் பற்றிய தமது கோட்பாடுகளினாலும் மற்றும் அவர் கண்டறிந்த முக்கோணவியலினாலும், சூரிய கிரகணத்தை முன் கூட்டியே அறிவதற்கு நம்பகமான முறையை முதன் முதலில் ஹிப்பார்சஸ் உருவாக்கினார்.

வானில் நடக்கும் நிகழ்வுகளை வெறுங்கண்ணால் கூர்ந்து ஆய்வு செய்ய நீண்ட காலமாக பயன்பட்ட பல வானவியல் கருவிகளை புதியதாகக் கண்டுபிடித்தது மட்டுமின்றி, இத்தகைய பல கருவிகளை மேம்படுத்திய பெருமையும் இவரைச் சாரும்.

7.1 அறிமுகம்

வட்டங்களின் விற்களின் அளவுகள் மற்றும் அவ்விற்களை வரைப்படுத்தும் நாண்களின் அளவுகள் ஆகிய வற்றிற்கு இடையே உள்ளத் தொடர்பினை விவரிப்பதற்காக முக்கோணவியல் உருவாக்கப்பட்டது. முக்கோணவியல், 15 ஆம் நூற்றாண்டிற்குப் பிறகு ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் அளவுகளை அதன் பக்கங்களின் நீளங்களுடன் தொடர்புப்படுத்தப் பயன்டுத்தப்பட்டது. கி.மு. 2ஆம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த கிரேக்க நாட்டைச் சேர்ந்த ஹிப்பார்சஸ் (Hipparchus) முக்கோணவியலின் படைப்பாளர் எனக் கூறப்படுகிறது. முக்கோணத்தின் அளவுகள் எனப் பொருள்படும் முக்கோணவியல் (Trigonometry) என்னும் சொல்லுக்குரிய பெருமை பார்த்தோலோமஸ் பிடிஸ்கஸ் (Bartholomaus Pitiscus) (1561-1613) என்பவரைச் சாரும்.

ஒன்பதாம் வகுப்பில், வெவ்வேறு முக்கோணவியல் விகிதங்கள், அவற்றிற்கிடையேயான விகிதத் தொடர்புகள் மற்றும் முக்கோணவியல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி கணக்கு களுக்குத் தீர்வு காணும் முறை ஆகியனவற்றைக் கற்றறிந்தோம்.

முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள் பற்றியும், மலைகள், கட்டடங்கள் போன்றவற்றின் உயரங்களையும், அவைகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரங்களையும் நேரிடையாக அளந்து பாராமல், முக்கோணவியல் விகிதங்களை மட்டும் பயன்படுத்தி அவற்றை கண்டறியும் முறைகளைப் பற்றியும் இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் கற்க உள்ளோம்.

7.2 முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள் (Trigonometric identities)

ஒரு சமன்பாடானது வரையறுக்கப்பட்ட மாறி அல்லது மாறிகளின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் மெய்யானால், அச்சமன்பாடு ஒரு முற்றொருமையாகும் என்பதனை நாம் அறிவோம். எடுத்துக்காட்டாக, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ என்ற சமன்பாடு ஒரு முற்றொருமையாகும். ஏனெனில், அனைத்து மெய்யெண்கள் $a,\ b$ களுக்கும் இச்சமன்பாடு மெய்யாகும்.

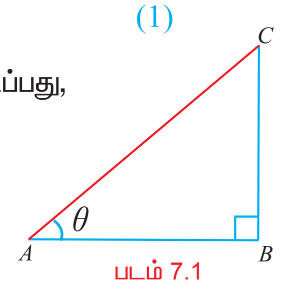
இதே போன்று ஒரு கோணமாறியில், முக்கோண விகிதங்களைக் கொண்டச் சமன்பாடானது, அதிலுள்ள வரையறுக்கப்பட்ட கோணங்களின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் மெய்யானால், அச்சமன்பாடு முக்கோணவியல் முற்றொருமை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக $(\sin\theta + \cos\theta)^2 - (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 4\sin\theta\cos\theta$ என்ற சமன்பாடு θ-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் மெய்யாதலால், இச்சமன்பாடு ஒரு முக்கோணவியல் முற்றொருமையாகும். இருப்பினும் $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1$ என்ற சமன்பாடு முற்றொருமை ஆகாது. ஏனெனில், இச்சமன்பாடு $\theta = 0^\circ$-ற்கு மெய்யாகிறது. ஆனால், $\theta = 45^\circ$ எனில், $(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \neq 1$ என்பதால், சமன்பாடு மெய் ஆகாது.

இந்த அத்தியாயத்தில், அனைத்து முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள் மற்றும் சமன்பாடுகள் ஆகியன மாறிகளின் எந்தெந்த மதிப்புகளுக்கு பொருளுடையதாக அமைகின்றனவோ, அம்மதிப்புகளுக்கு அவை நன்கு வரையறுக்கப்பட்டதாகக் கருதப்படுகின்றன.

பிதாகரஸின் முற்றொருமைகள் (Pythagorean identities) என அழைக்கப்படும் பயனுள்ள மூன்று முற்றொருமைகளைத் தருவித்து, அவற்றைப் பயன்படுத்தி வேறு சில முற்றொருமைகளைப் பெறுவோம்.

செங்கோண $\triangle ABC$ -ல் $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (1)



படம் 7.1

சமன்பாடு (1)-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் AC^2 ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது,

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} \qquad (AC \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$$

எனவே, $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

$\angle A = \theta$ என்க. $0^\circ < \theta < 90^\circ$ என உள்ள θ-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad (2)$$

மேலும், $\cos^2 0^\circ + \sin^2 0^\circ = 1$ மற்றும் $\cos^2 90^\circ + \sin^2 90^\circ = 1$ என்பது தெளிவாகிறது.

எனவே, (2) ஆனது $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ என்ற எல்லா θ மதிப்பிற்கும் மெய்யாகும்.

(1)-ஐ AB^2 ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது,

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \qquad (\because AB \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \implies 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta. \qquad (3)$$

$\theta = 90^\circ$ என்ற மதிப்பிற்கு $\tan\theta$ மற்றும் $\sec\theta$ வரையறுக்கப்படாததால்,

முற்றொருமை (3)ஆனது $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ என்ற θ-வின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் மெய்யாகும்.

மீண்டும் (1)-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் BC^2 ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது,

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \qquad (\because BC \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \implies \cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta. \qquad (4)$$

$\theta = 0^\circ$ என்ற மதிப்பிற்கு $\cot\theta$ மற்றும் $\operatorname{cosec}\theta$ வரையறுக்கப்படாததால்,

முற்றொருமை (4) ஆனது $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ என்ற எல்லா θ-வின் மதிப்புகளுக்கும் மெய்யாகும்.

மேற்கண்ட முற்றொருமைகளுக்குச் சமமான சில முடிவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

	முற்றொருமை	சமமான வடிவங்கள்
(i)	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ (அல்லது) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
(ii)	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ (அல்லது) $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
(iii)	$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$	$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ (அல்லது) $\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$

குறிப்புரை

மேலே உள்ள முற்றொருமைகளை நாம் குறுங்கோணம் θ-வில் நிரூபித்துள்ளோம். ஆனால் இம்முற்றொருமைகள், θ-வின் எம்மதிப்புகளுக்கு முக்கோணவியல் சார்புகள் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதோ அம்மதிப்புகளுக்கு இம்முற்றொருமைகள் மெய்யாகும். இப்பாடநூலில் கோணம் θ-வின் குறுங்கோண மதிப்புக்களை மட்டும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

பொதுவாக, முக்கோணவியல் சார்புகள் உள்ள முற்றொருமைகளை நிரூபிக்க ஒரு பொதுவான வழிமுறை ஏதும் இல்லை. இருப்பினும் கீழே தரப்பட்டுள்ள சில உத்திகள், முக்கோணவியல் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்க பயனுள்ளதாக அமையும்.

(i) கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை, நிரூபிக்கப்பட வேண்டியவை ஆகியவற்றை கவனத்தில் கொண்டு முற்றொருமைகளைக் கவனமாக படிக்கவும்.

(ii) எளிய பகுதியை எடுத்து விரிவாக்குவது அல்லது சுருக்குவதைவிட முற்றொருமையின் சிக்கலான பகுதியை எடுத்துக்கொண்டு சுருக்குவது சுலபமானது.

(iii) சில சமயங்களில் முற்றொருமையின் இரு பக்கங்களிலும் கோவைகள் சிக்கலாக இருப்பின், இரு பகுதிகளையும் தனித்தனியாக எடுத்துச் சுருக்கி, ஒரே கோவையாகத் தனித்தனியாகப் பெற வேண்டும்.

(iv) பின்னங்களை ஒன்றிணைக்கும்போது பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் கூட்டலில் பயன்படும் இயற்கணித உத்திகளைப் பயன்படுத்தவும்.

(v) தேவை எனில், ஒவ்வொரு உறுப்பையும் அதற்குச் சமமான sine, cosine ஆகியனவற்றிக்கு மாற்றி பின் சுருக்குவதற்கு முயற்சி செய்யவும்.

(vi) ஒரு முற்றொருமை ஆனது, $\tan^2\theta, \cot^2\theta, \text{cosec}^2\theta, \sec^2\theta$ ஆகியவைகளுடன் கூடிய உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால் $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ மற்றும் $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ என்பனவற்றைப் பயன்படுத்துவது நன்மை பயக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.1

$\dfrac{\sin\theta}{\text{cosec}\,\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{\sin\theta}{\text{cosec}\,\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin\theta}{\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\right)} + \frac{\cos\theta}{\left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.2

$\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}\times\frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1^2-\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \qquad (\because\ 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta)$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta\ .$$

எடுத்துக்காட்டு 7.3

$[\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) - \sin(90^\circ-\theta)][\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta][\tan\theta + \cot\theta] = 1$

என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு $[\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) - \sin(90^\circ-\theta)][\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta][\tan\theta + \cot\theta]$

$$= (\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) \qquad (\because \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) = \sec\theta,\ \sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta\ )$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right) = 1. \qquad (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

எடுத்துக்காட்டு 7.4

$\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \qquad (\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \qquad (\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b))$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)[1 - (\sec\theta - \tan\theta)]}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)(\tan\theta - \sec\theta + 1)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \tan\theta + \sec\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.5

$\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\tan\theta+\cot\theta$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan\theta}{1-\frac{1}{\tan\theta}}+\frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}=\frac{\tan\theta}{\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta}}+\frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1}{\tan\theta(1-\tan\theta)}=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1}{(-\tan\theta)(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}-\frac{1}{(\tan\theta)(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{1}{(\tan\theta-1)}\left(\tan^2\theta-\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{(\tan\theta-1)}\;\frac{(\tan^3\theta-1)}{\tan\theta}$$

$$=\frac{(\tan\theta-1)(\tan^2\theta+\tan\theta+1^2)}{(\tan\theta-1)\tan\theta}\qquad(\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2))$$

$$=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta+1}{\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta}+\frac{\tan\theta}{\tan\theta}+\frac{1}{\tan\theta}=\tan\theta+1+\cot\theta$$

$$=1+\tan\theta+\cot\theta.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.6

$(\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2=7+\tan^2\theta+\cot^2\theta$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு

$$(\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2$$

$$=\sin^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta+2\sin\theta\operatorname{cosec}\theta+\cos^2\theta+\sec^2\theta+2\cos\theta\sec\theta$$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta+\sec^2\theta+2\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}+2\cos\theta\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=1+(1+\cot^2\theta)+(1+\tan^2\theta)+2+2$$

$$=7+\tan^2\theta+\cot^2\theta.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.7

$(\sin^6\theta + \cos^6\theta) = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு

$$\sin^6\theta + \cos^6\theta$$

$$= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3$$

$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$(\because a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b))$$

$$= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta. \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

எடுத்துக்காட்டு 7.8

$\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$$

$$= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)}\right) \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$= (\tan\theta)\left(\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\right) = \tan\theta.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.9

$\dfrac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$$

$$= \left(\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\right) \times \left(\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta}\right)$$

$$= \frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{\sec^2\theta - \tan^2\theta}$$

$$= \frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{1} \qquad (\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$$

$$= (\sec\theta - \tan\theta)^2 = \sec^2\theta + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta$$

$$= (1 + \tan^2\theta) + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta \qquad (\because \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta)$$

$$= 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.10

$\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \frac{1+\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}} = \frac{(\cos\theta+1)}{\cos\theta}(\cos\theta)$$

$$= 1+\cos\theta$$

$$= (1+\cos\theta)\times\frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.11

$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta) = \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு

முதலில், இடது பக்கத்தில் உள்ளதை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\,\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta\cos\theta \quad (1)$$

அடுத்ததாக, வலது பக்கம் உள்ளதைக் கருதுவோம்.

$$\frac{1}{\tan\theta+\cot\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)}$$

$$= \sin\theta\cos\theta \quad (2)$$

குறிப்பு

$\sin\theta\cos\theta$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta}{1}$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$$

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta) = \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.12

$\tan\theta + \sin\theta = m$, $\tan\theta - \sin\theta = n$ மற்றும் $m \neq n$ எனில், $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$m = \tan\theta + \sin\theta$, $n = \tan\theta - \sin\theta$ என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$$m^2 - n^2 = (\tan\theta + \sin\theta)^2 - (\tan\theta - \sin\theta)^2$$

$$= \tan^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\tan\theta - (\tan^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\tan\theta)$$

$$= 4\sin\theta\tan\theta \qquad (1)$$

மேலும்,

$$4\sqrt{mn} = 4\sqrt{(\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta)}$$

$$= 4\sqrt{\tan^2\theta - \sin^2\theta} = 4\sqrt{\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta\right)}$$

$$= 4\sqrt{\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)}$$

$$= 4\sqrt{\sin^2\theta(\sec^2\theta - 1)}$$

$$= 4\sqrt{\sin^2\theta\tan^2\theta} \quad (\because \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta)$$

$$= 4\sin\theta\tan\theta. \qquad (2)$$

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$.

எடுத்துக்காட்டு 7.13

$\tan^2\alpha = \cos^2\beta - \sin^2\beta$ எனில், $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\beta$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$\cos^2\beta - \sin^2\beta = \tan^2\alpha$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{1} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

> **கூட்டல்–கழித்தல் விகிதசம விதி**
>
> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ எனில், $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

கூட்டல் கழித்தல் விகிதசம விதியைப் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$$\frac{(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta)}{(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - (\cos^2\beta + \sin^2\beta)} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\Longrightarrow \frac{2\cos^2\beta}{-2\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\Longrightarrow -\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

$\Longrightarrow \tan^2\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ என நிறுவப்பட்டது.

குறிப்பு : கூட்டல்–கழித்தல் விகிதசம விதியைப் பயன்படுத்தாமலும் மேலே உள்ள கணக்கிற்கு தீர்வு காணலம்.

பயிற்சி 7.1

1. பின்வருவன ஒவ்வொன்றும் முற்றொருமை ஆகுமா எனக் காண்க.

(i) $\cos^2\theta + \sec^2\theta = 2+\sin\theta$ (ii) $\cot^2\theta + \cos\theta = \sin^2\theta$

2. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிறுவுக.

(i) $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$ (ii) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

(iii) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$ (iv) $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = 1 + \sin\theta$

(v) $\sqrt{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$ (vi) $\dfrac{1+\cos\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)} = \cot\theta$

(vii) $\sec\theta\,(1-\sin\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$ (viii) $\dfrac{\sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta} = 1 - \cos\theta$

3. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிறுவுக.

(i) $\dfrac{\sin(90^\circ-\theta)}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\cos(90^\circ-\theta)} = 2\sec\theta.$

(ii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta.$

(iii) $\dfrac{\sin(90^0-\theta)}{1-\tan\theta} + \dfrac{\cos(90^0-\theta)}{1-\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta.$

(iv) $\dfrac{\tan(90^0-\theta)}{\operatorname{cosec}\theta + 1} + \dfrac{\operatorname{cosec}\theta + 1}{\cot\theta} = 2\sec\theta.$

(v) $\dfrac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta.$

(vi) $(1+\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)(1+\tan\theta + \sec\theta) = 2.$

(vii) $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}.$

(viii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{\sin\theta\sin(90^0-\theta)}{2\sin^2(90^0-\theta)-1}$

(ix) $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}.$

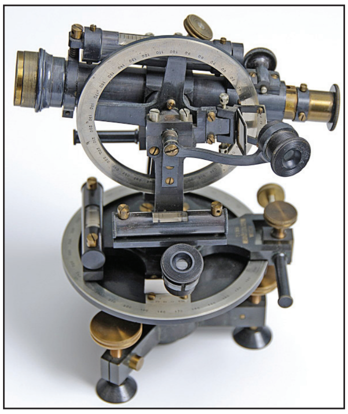
(x) $\dfrac{\cot^2\theta + \sec^2\theta}{\tan^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta} = (\sin\theta\cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta).$

4. $x = a\sec\theta + b\tan\theta$ மற்றும் $y = a\tan\theta + b\sec\theta$ எனில், $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ என நிறுவுக.

5. $\tan\theta = n\tan\alpha$ மற்றும் $\sin\theta = m\sin\alpha$ எனில், $\cos^2\theta = \dfrac{m^2-1}{n^2-1}$, $n \neq \pm 1$, என நிறுவுக.

6. $\sin\theta$, $\cos\theta$ மற்றும் $\tan\theta$ என்பன பெருக்குத் தொடரில் (G.P.) இருப்பின் $\cot^6\theta - \cot^2\theta = 1$ என நிறுவுக.

7.3 உயரங்களும் தூரங்களும் (Heights and Distances)



படம் 7.2

கோள்களுக்குகிடையேயுள்ள தூரம், எவரெஸ்ட் சிகரத்தின் உயரம், மிகத் தொலைவில் உள்ள சூரியன், சந்திரன், ... போன்றவற்றிற்கு இடையேயுள்ள தூரம் ஆகியன எவ்வாறு அளக்கப்படுகின்றன அல்லது கணக்கிடப்படுகின்றன என்பது நமக்கு வியப்பாக உள்ளது. இவற்றை அளவு நாடாவைக் கொண்டு அளவிட முடியுமா?

உண்மையில், அவ்வாறு அளத்தல் என்பது இயலாது. முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் கொண்டு இந்த நீண்ட தூரங்களை கணக்கிட முடியும் என்பது நமக்கு ஆர்வத்தை அளிக்கிறது. மேலும் முக்கோணவியல் விகிதங்கள், தேசப்படங்களை வரையவும் மற்றும் அட்சரேகை, தீர்க்கரேகையைக் கொண்டு ஒரு தீவின் அமைவிடத்தை காணவும் பயன்படுகின்றன.

தியோடலைட் (Theodolite) என்ற கருவி (படம் 7.2) ஒரு பொருளை உற்றுநோக்குபவரின் கிடைநிலை பார்வைக்கோட்டிற்கும், அப்பொருளுக்கும் இடைப்பட்டக் கோணத்தை அளக்கப் பயன்படுகிறது. தியோடலைட் கருவியில், அளவுகள் குறிக்கப் பெற்ற ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ள இரண்டுச் சக்கரங்களும், ஒரு தொலைநோக்கியும் உள்ளன. இச்சக்கரங்கள், கிடைமட்டக்கோணங்கள் மற்றும் நேர்க்குத்துக் கோணங்கள் ஆகியவற்றை அளக்க உதவுகின்றன. தேவையான புள்ளியின் கோணத்தை அளப்பதற்கு, தொலைநோக்கியை அப்புள்ளியை நோக்கியவாறு வைக்கவேண்டும். அக்கோண அளவை தொலைநோக்கியின் அளவுகோலில் காணலாம்.

நம் பள்ளியின் கொடிக்கம்பத்தின் உயரத்தை நேரடியாக அளந்து பார்க்காமல், அதன் உயரத்தைக் காண்போம்.

கொடிக் கம்பத்தின் அடி B-யிலிருந்து 10 மீ தூரத்தில் தரையில் A என்ற புள்ளியில் ஒரு மாணவன் நின்று கொண்டிருக்கிறார் என்க. அவர் கொடிக்கம்பத்தின் உச்சி Dயை 60° கோணத்தில் பார்க்கிறார். அவருடைய கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டின் மட்டம் E ஆனது (Eye level) தரை மட்டத்திலிருந்து 1.2 மீ உயரத்தில் உள்ளது எனக்கொள்வோம். (படம்.7.3ஐ பார்க்க)

செங்கோண ΔDEC-ல் $\angle DEC = 60^\circ$

இப்பொழுது, $\tan 60^\circ = \dfrac{CD}{EC}$

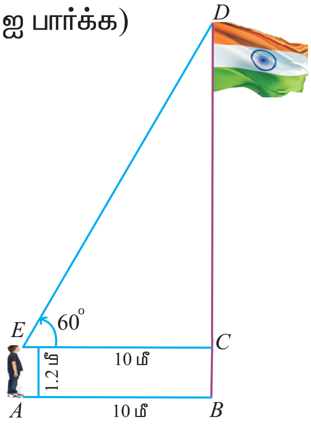
$\Longrightarrow \quad CD = EC \tan 60^\circ$

எனவே, $CD = 10\sqrt{3} = 10 \times 1.732$

$= 17.32$ மீ

கொடிக்கம்பத்தின் உயரம், $BD = BC + CD$

$= 1.2 + 17.32 = 18.52$ மீ



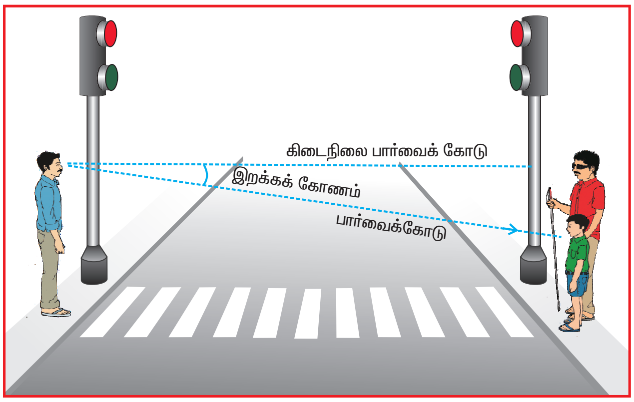
படம் 7.3

இவ்வாறு, நேரடியாக அளந்து பார்க்காமலேயே நம் பள்ளிக் கொடிக்கம்பத்தின் உயரத்தை நம்மால் காண முடிகிறது. எனவே, ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் ஒரு பக்கமும், ஒரு குறுங்கோணமும் தெரிந்தால், முக்கோணவியல் விகிதங்களை பயன்படுத்தி மற்ற பக்க அளவுகளைக் கண்டுபிடிக்க இயலும். உயரங்களையும் மற்றும் தூரங்களையும் காண்பதில் அடிக்கடி நாம் பயன்படுத்தும் சில கலைச் சொற்களை இப்போழுது வரையறுப்போம்.

பார்வைக் கோடு (Line of sight)

நாம் ஒரு பொருளைப் பார்க்கும் போது, நமது கண்ணிலிருந்து அப்பொருளுக்கு உள்ள நேர்க்கோடு பார்வைக்கோடு எனப்படும். இங்கு கணக்கிடும் தூரம் அல்லது சம்மந்தப்பட்ட தூரம் மிக அதிகமாக உள்ளதால், பொருளை ஒரு புள்ளியாகக் கருதுகிறோம்.

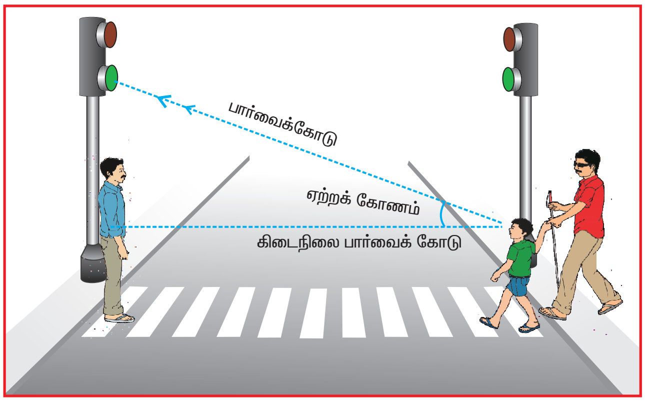
இறக்கக் கோணம் மற்றும் ஏற்றக் கோணம் (Angle of depression and angle of elevation)



படம் 7.4

ஒரு பொருள் கிடைநிலைப் பார்வை கோட்டிற்குக் கீழே இருப்பின், அப்பொருளைப் பார்க்க நாம் நம் தலையை தாழ்த்த வேண்டும். இந்த நிகழ்வின் போது நமது கண்கள் ஒரு கோணத்தில் கீழாக நகர்கின்றன. இவ்வாறு ஏற்படும் கோணம் இறக்கக் கோணம் எனப்படும். அதாவது, கிடைநிலை பார்வைக் கோட்டிற்குக் கீழே பொருள் இருக்கும்போது பார்வைக் கோட்டிற்கும் கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் இறக்கக் கோணம் எனப்படும். (படம் 7.4).

ஒரு பொருள் நம் கிடைநிலை பார்வைக்கோட்டிற்கு மேலே இருந்தால், நாம் தலையை உயர்த்தி அப்பொருளைப் பார்க்க வேண்டியிருக்கும். இந்த நிகழ்வின்போது நம் கண்கள் ஒரு கோணத்தில் மேலாக நகர்கின்றன. இவ்வாறு ஏற்படும் கோணம் ஏற்றக் கோணம் எனப்படும். அதாவது, கிடைநிலை பார்வைக் கோட்டிற்கும் மேலேயுள்ள பார்வைக் கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் ஏற்றக் கோணம் எனப்படும். (படம் 7.5).



படம் 7.5

குறிப்பு

(i) பார்வையாளரின் உயரம் தரப்படாவிடில் பார்வையாளரை ஒரு புள்ளியாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

(ii) பார்வையாளர் ஒரு பொருளைப் பார்க்கும் போது ஏற்படும் ஏற்றக் கோணமானது, அப்பொருளிலிருந்து பார்வையாளரைப் பார்க்கும் போது ஏற்படும் இறக்கக் கோணத்திற்குச் சமம்.

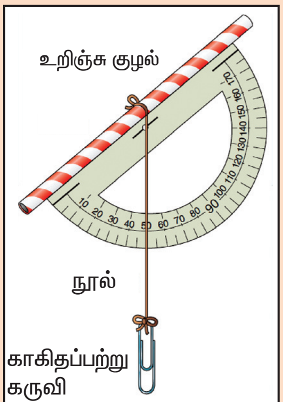
உயரங்கள் மற்றும் தூரங்கள் தொடர்பானக் கணக்குகளுக்குத் தீர்வுக் காண பின்வரும் படிகள் பயன்படும்.

(i) வினாவினைக் கவனமாகப் படித்தபின் அதற்கேற்றவாறு ஒரு எளிய மாதிரி படத்தை வரைக.
(ii) படத்தில் தக்க அடையாளங்கள் கொடுத்து தரப்பட்ட மதிப்புகளைக் குறிக்கவும்.
(iii) கணக்கிட வேண்டிய உயரத்தை h எனக் கொள்க. தூரத்தை x எனக் கொள்க.
(iv) கணக்கிற்குத் தீர்வு காண உதவும் முக்கோணவியல் விகிதத்தை தேர்ந்தெடுக்கவும்.
(v) கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டு, தேவையான மதிப்பினைக் காண்க.

பின்வரும் செயல்பாடு, மற்ற முறைகளை விட பொருளின் உயரத்தை, எளிய முறையில் கண்டறிய உதவும்.

செய்து பார்

- ஒரு உறிஞ்சுக் குழலின் (straw) மையத்தில் ஒரு நூலின் ஒரு முனையைக் கட்டவும். மற்றொரு முனையை காகிதப் பற்றுக் கருவியுடன் (paper clip) கட்டுக.
- இந்த உறிஞ்சுக் குழலின் மையத்தினை ஒரு கோணமானியின் (protractor) அடிப்புறத்தில் இறுக்கமாக ஒட்டவும். நூலானது எந்தவித தடங்கல் இல்லாமல் தொங்கி ஒரு குத்துக்கோட்டை, ஏற்படுத்துதலை உறுதி செய்க.
- நேரடியாக அளக்க இயலாத வெளியேயுள்ள ஒரு உயரமான பொருளை அதாவது, கூடைப்பந்து வளையம், கொடிக்கம்பம் அல்லது பள்ளிக் கட்டடத்தின் உயரம் இவற்றில் ஏதாவது ஒன்றினைத் தேர்வு செய்க.



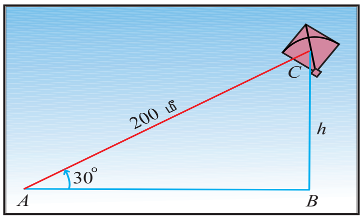
படம் 7.6

- உறிஞ்சுக் குழலின் மூலம் அப்பொருளின் உச்சியைப் பார்க்க. நூலானது கோணமானியின் அளவீடுகளை தொடும் இடத்தில் ஏற்படும் கோணத்தை அளக்கவும். ஏற்றக் கோணம் காண, அக்கோண அளவினை 90°- யிலிருந்து கழிக்கவும். இக்கோணத்தை θ என்க.
- கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டிற்கும், தரைமட்டத்திற்கும் உள்ள தூரத்தை அளந்து அதை x என்க. உன் காலடியிலிருந்து அப்பொருளின் அடிப்பகுதிக்கு உள்ள தொலைவையும் அளந்து அதை y எனக் கொள்ளவும்.
- இவற்றின் அளவுகளை ஒரு படத்தில் குறிக்கவும்.
- பொருளின் உயரம் (h) காண, $h = x + y\tan\theta$ என்ற சமன்பாட்டை பயன்படுத்தவும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.14

200 மீ நீளமுள்ள நூலினால் ஒரு காற்றாடி கட்டப்பட்டு பறந்துக் கொண்டிருக்கிறது. அந்த நூல் தரைமட்டத்துடன் 30^0 கோணத்தை ஏற்படுத்தினால், காற்றாடி தரைமட்டத்திலிருந்து எவ்வளவு உயரத்தில் பறக்கிறது எனக் காண்க. (இங்கு நூல் ஒரு நேர்க்கோட்டில் உள்ளதாகக் கருதுக)

தீர்வு தரைமட்டத்திலிருந்து காற்றாடிக்கு உள்ள தூரம் h என்க.



படம் 7.7

படத்தில் AC என்பது நூலின் நீளம் என்க.

$\angle CAB = 30^\circ$ மற்றும் $AC = 200$ மீ

என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

செங்கோண $\triangle CAB$-ல் $\sin 30^\circ = \frac{h}{200}$

$$\Longrightarrow \quad h = 200\sin 30^\circ$$

$$\therefore \quad h = 200 \times \frac{1}{2} = 100 \text{ மீ}$$

அதாவது தரை மட்டத்திலிருந்து காற்றாடியின் தூரம் 100 மீ.

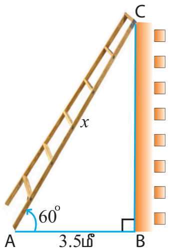
எடுத்துக்காட்டு 7.15

சுவரில் சாய்த்து வைக்கப்பட்ட ஒரு ஏணியானது தரையுடன் 60° கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. ஏணியின் அடி சுவற்றிலிருந்து 3.5 மீ தூரத்தில் உள்ளது எனில், ஏணியின் நீளத்தைக் காண்க.

தீர்வு AC என்பது ஏணியையும், B என்பது சுவற்றின் அடியையும் குறிக்கட்டும்.

ஏணியின் நீளம் $AC = x$ மீ என்க.

$\angle CAB = 60^\circ$ மற்றும் $AB = 3.5$ மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 7.8

செங்கோண $\triangle CAB$ -ல், $\cos 60^\circ = \frac{AB}{AC}$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AB}{\cos 60^\circ}$$

$$\therefore \quad x = 2 \times 3.5 = 7 \text{ மீ}$$

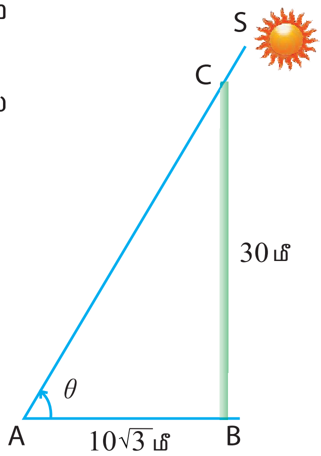
எனவே, ஏணியின் நீளம் 7 மீ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.16

30 மீ நீளமுள்ள ஒரு கம்பத்தின் நிழலின் நீளம் $10\sqrt{3}$ மீ எனில், சூரியனின் ஏற்றக் கோணத்தின் (தரை மட்டத்திலிருந்து ஏற்றக் கோணம்) அளவினைக் காண்க.

தீர்வு S என்பது சூரியனின் நிலை எனவும் BC என்பது கம்பம் எனவும் கொள்க.

$AB = 10\sqrt{3}$ என்பது கம்பத்தின் நிழலின் நீளம் என்க. புள்ளி A-ல் சூரியனின் ஏற்றக்கோணம் θ என்க.



படம் 7.9

$$BC = 30 \text{ மீ}$$

செங்கோண $\triangle$ CAB-ல், $\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$

$$\Longrightarrow \quad \tan\theta = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \theta = 60^\circ$$

தரை மட்டத்திலிருந்து சூரியனின் ஏற்ற கோணம் 60°.

எடுத்துக்காட்டு 7.17

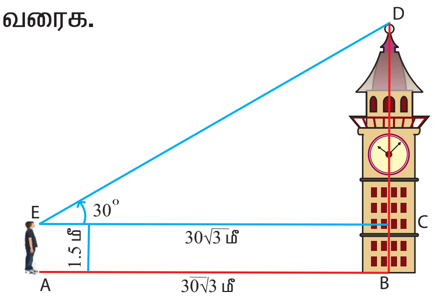
ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து $30\sqrt{3}$ மீ தொலைவில் நிற்கும் ஒரு பார்வையாளர், அக்கோபுரத்தின் உச்சியினை 30° ஏற்றக் கோணத்தில் காண்கிறார். தரைமட்டத்திலிருந்து அவருடைய கிடைநிலைப் பார்வைக்கோட்டிற்கு உள்ள தூரம் 1.5 மீ எனில், கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு BD என்பது கோபுரத்தின் உயரம் என்க. AE என்பது தரைமட்டத்திற்கும் பார்வையாளரின் கிடைநிலைப் பார்வைக்கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள தூரம் என்க.

$AB = EC$ என்றிருக்குமாறு AB-க்கு இணையாக EC-ஐ வரைக.

$AB = EC = 30\sqrt{3}$ மீ மற்றும்

$AE = BC = 1.5$ மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 7.10

செங்கோண $\triangle DEC$-ல்,

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{EC}$$

$$\implies \quad CD = EC \tan 30^\circ = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad CD = 30 \text{மீ}$$

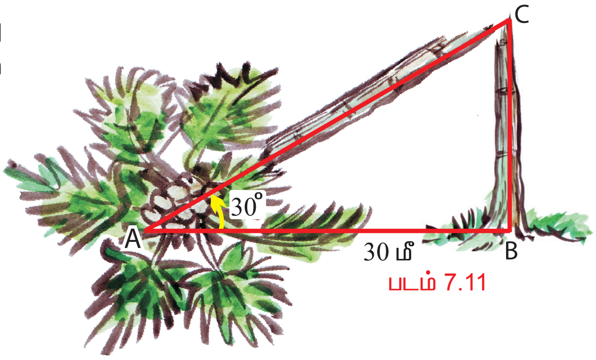
ஆதலால், கோபுரத்தின் உயரம், $BD = BC + CD$

$$= 1.5 + 30 = 31.5 \text{ மீ}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.18

நேர்க்குத்தான ஒரு மரத்தின் மேல்பாகம் காற்றினால் முறிந்து, அம்முறிந்த பகுதி கீழே விழுந்துவிடாமல், மரத்தின் உச்சி தரையுடன் 30° கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. மரத்தின் உச்சி அதன் அடியிலிருந்து 30 மீ தொலைவில் தரையைத் தொடுகிறது எனில், மரத்தின் முழு உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு C என்ற புள்ளியில் மரம் முறிந்துள்ளது எனவும் மரத்தின் உச்சித் தரையைத் தொடும் புள்ளி A எனவும் கொள்க. மரதின் B அடி என்க. $AB = 30$ மீ மற்றும் $\angle CAB = 30^\circ$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 7.11

செங்கோண $\triangle CAB$ -ல்,

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\implies \quad BC = AB \tan 30^\circ$$

$$\therefore \quad BC = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ மீ} \qquad (1)$$

இப்பொழுது, $\cos 30^\circ = \dfrac{AB}{AC}$

$$\implies \quad AC = \frac{AB}{\cos 30^\circ}$$

எனவே, $AC = \dfrac{30 \times 2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \times 2 = 20\sqrt{3}$ மீ. (2)

ஆகவே, மரத்தின் உயரம் $= BC + AC = 10\sqrt{3} + 20\sqrt{3}$

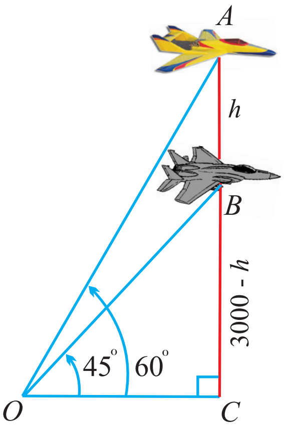
$$= 30\sqrt{3} \text{ மீ.}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.19

ஓர் அதிவேகப் போர் விமானம், தரை மட்டத்திலிருந்து 3000 மீ உயரத்தில், மற்றொரு அதிவேகப் போர் விமானத்தை நேர் மேலாகக் கடக்கிறது. அவ்வாறு கடக்கும் போது தரை மட்டத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து அவற்றின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 60° மற்றும் 45° எனில், அந்த நேரத்தில் இரண்டாவது போர் விமானம் மற்றும் முதல் போர் விமானம் ஆகியவற்றிற்கு இடைப்பட்ட தூரத்தைக் கணக்கிடுக. $(\sqrt{3} = 1.732)$

தீர்வு O என்ற புள்ளியிலிருந் போர் விமானங்களை உற்று நோக்குவதாகக் கொள்வோம்.

குறிப்பிட்ட நேரத்தில் அதிவேகப் போர் விமானங்கள் இரண்டும் ஒன்றிற்கு மேலாக மற்றொன்று நேர்குத்தாக பறக்கும் போது அவற்றின் நிலைகள் A, B என்க.



படம் 7.12

$AC = 3000$ மீ என இருக்குமாறு தரையில் உள்ள புள்ளி C என்க.

தற்போது, $\angle AOC = 60^\circ$ மற்றும் $\angle BOC = 45^\circ$.

அதிவேகப் போர் விமானங்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் h என்க.

செங்கோண $\triangle BOC$ -ல், $\tan 45^\circ = \frac{BC}{OC}$

$$\Longrightarrow \quad OC = BC \qquad (\because \tan 45^\circ = 1)$$

எனவே, $$OC = 3000 - h \qquad (1)$$

செங்கோண $\triangle AOC$, $\tan 60^\circ = \frac{AC}{OC}$

$$\Longrightarrow \quad OC = \frac{AC}{\tan 60^\circ} = \frac{3000}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3000}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1000\sqrt{3} \qquad (2)$$

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து நமக்கு கிடைப்பது,

$$3000 - h = 1000\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \quad h = 3000 - 1000 \times 1.732 = 1268 \text{ மீ}$$

இரண்டு அதிவேகப் போர் விமானங்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் 1268 மீ.

எடுத்துக்காட்டு 7.20

ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து ஒரு குன்றின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 60° என்க. குன்றின் அடியிலிருந்து கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 30° மற்றும் கோபுரத்தின் உயரம் 50 மீ எனில், குன்றின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு AD என்பது கோபுரத்தின் உயரம் மற்றும் BC என்பது குன்றின் உயரம் என்க.

தற்போது, $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$ மற்றும் $AD = 50$ மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

BC = h மீட்டர் என்க.

செங்கோண ΔDAB-ல் $\tan 30^\circ = \frac{AD}{AB}$

$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{AD}{\tan 30^\circ}$$

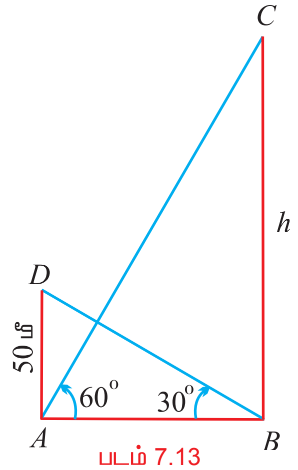
$$\therefore \quad AB = 50\sqrt{3} \text{ மீ} \qquad (1)$$

மேலும், செங்கோண $\triangle CAB$-ல் $\tan 60^\circ = \frac{BC}{AB}$

$$\Longrightarrow \quad BC = AB \tan 60^\circ$$

$$h = BC = (50\sqrt{3})\sqrt{3} = 150 \text{ மீ} \qquad ((1) \text{ -லிருந்து})$$

எனவே, குன்றின் உயரம் 150 மீ.



படம் 7.13

எடுத்துக்காட்டு 7.21

ஒரு செங்குத்தான சுவரும், ஒரு கோபுரமும் ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் உள்ளன. கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து பார்க்கும் போது, சுவற்றின் உச்சி மற்றும் அடி ஆகியவற்றின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 45° மற்றும் 60° ஆகும். கோபுரத்தின் உயரம் 90 மீ எனில், சுவற்றின் உயரத்தைக் காண்க. ($\sqrt{3} = 1.732$)

தீர்வு AE மற்றும் BD என்பன முறையே சுவரையும் கோபுரத்தையும் குறிக்கின்றன.

$AB=EC$ என்றவாறு AB-க்கு இணையாக EC-ஐ வரைக. எனவே, $AE = BC$.

$AB = x$ மீ மற்றும் $AE = h$ மீ என்க.

$BD = 90$ மீ , $\angle DAB = 60^\circ$ மற்றும் $\angle DEC = 45^\circ$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$AE = BC = h$ மீ

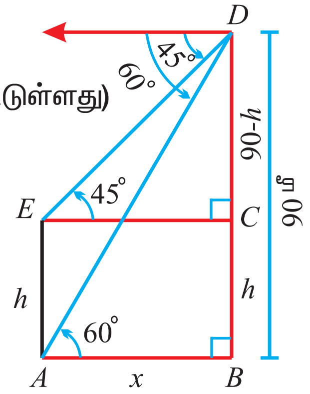
எனவே, $CD = BD - BC = 90 - h$.

செங்கோண $\triangle DAB$-ல், $\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{90}{x}$

$\Longrightarrow \quad x = \frac{90}{\sqrt{3}} = 30\sqrt{3} \qquad (1)$

செங்கோண $\triangle DEC$ -ல், $\tan 45^\circ = \frac{DC}{EC} = \frac{90-h}{x}$

$x = 90 - h \qquad (2)$



படம் 7.14

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றிலிருந்து, $90 - h = 30\sqrt{3}$

ஆகவே, சுவற்றின் உயரம் $h = 90 - 30\sqrt{3} = 38.04$ மீ.

எடுத்துக்காட்டு 7.22

கடற்கரையில் உள்ள செங்குத்தானப் பாறை ஒன்றின் மீது கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தில் நின்றுக்கொண்டிருக்கும் ஒரு சிறுமி, கிழக்குதிசையில் இரு படகுகளைப் பார்க்கிறாள். அப்படகுகளின் இறக்கக்கோணங்கள் முறையே 30°, 60° மற்றும் இரு படகுகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் 300மீ எனில், கடல் மட்டத்திலிருந்து கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியின் தூரத்தைக் காண்க. (படகுகளும், கலங்கரை விளக்கமும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளன)

தீர்வு A மற்றும் D என்பன முறையே பாறையின் அடிப்பாகம் மற்றும் கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சி என்க. B மற்றும் C என்பன இரு படகுகள் என்க.

கடல் மட்டத்திலிருந்து கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சிக்கு உள்ள தூரம் h மீ என்க.

$AB = x$ மீ என்க.

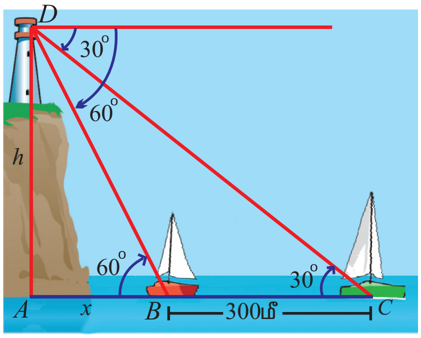
கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை :

$\angle ABD = 60^\circ, \angle ACD = 30^\circ$ மற்றும் $BC = 300$ மீ.

செங்கோண ΔABD-ல், $\tan 60^\circ = \frac{AD}{AB}$

$\Longrightarrow \quad AB = \frac{AD}{\tan 60^\circ}$

எனவே, $x = \frac{h}{\sqrt{3}} \qquad (1)$



படம் 7.15

மேலும், செங்கோண $\triangle ACD$-ல்,

$$\tan 30^\circ = \frac{AD}{AC}$$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AD}{\tan 30^\circ} \Longrightarrow x + 300 = \frac{h}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$x + 300 = h\sqrt{3} \qquad (2)$$

(1)-ஐ (2)-ல் பிரதியிடக் கிடைப்பது $\frac{h}{\sqrt{3}} + 300 = h\sqrt{3}$

$$\Longrightarrow \quad h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}} = 300$$

$\therefore \quad 2h = 300\sqrt{3}$. எனவே, $h = 150\sqrt{3}$.

கடல் மட்டத்திலிருந்து கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சிக்கு உள்ள தூரம் $= 150\sqrt{3}$ மீ.

எடுத்துக்காட்டு 7.23

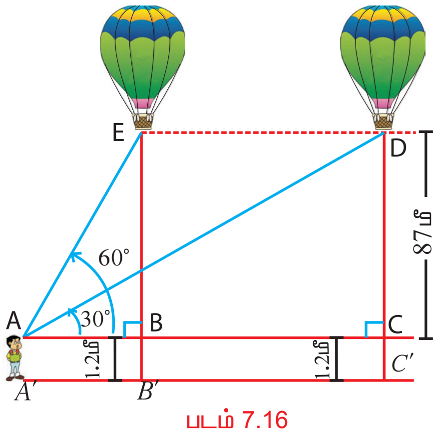
ஒரு சிறுவன், தரையிலிருந்து 88.2 மீ உயரத்தில் கிடைநிலைக் கோட்டில் காற்றில் நகரும் ஒரு பலூனை 60° ஏற்றக் கோணத்தில் பார்க்கிறான். தரைக்கும் அவனது கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள தூரம் 1.2 மீ. சிறிது நேரம் கழித்து, அதே இடத்திலிருந்து அவன் பலூனைப் பார்க்கும் போது ஏற்றக்கோணம் 30° ஆகக் குறைகிறது எனில், இக்கால இடைவெளியில் பலூன் நகர்ந்த தூரத்தைக் காண்க.

தீர்வு புள்ளி A-யிலிருந்து சிறுவன் பலூனைப் பார்ப்பதாகக் கொள்வோம்.

E, D என்பன பலூனானது A-ல் முறையே $60^\circ, 30^\circ$ ஏற்ற கோணத்தை ஏற்படுத்தும் பலூனின் நிலைகள் என்க.

B, C என்பன $BE = CD = 87$ மீ என அமையும் கிடை-நிலைப் பார்வைக் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகள் என்க.

A', B' மற்றும் C' என்பன $A'A = B'B = C'C = 1.2$ மீ என்றவாறு அமையும், தரையில் உள்ள புள்ளிகள் என்க.



படம் 7.16

$$\angle EAB = 60^\circ, \angle DAC = 30^\circ$$

$$C'D = 88.2 \text{ மீ}.$$

எனவே, $BE = CD = 87$ மீ.

மேலும், செங்கோண $\triangle EAB$-ல்,

$$\tan 60^\circ = \frac{BE}{AB}$$

$$AB = \frac{87}{\tan 60^\circ} = \frac{87}{\sqrt{3}} = 29\sqrt{3}$$

செங்கோண $\triangle DAC$-ல் $\tan 30^\circ = \frac{DC}{AC}$

எனவே, $AC = \frac{87}{\tan 30^\circ} = 87\sqrt{3}$.

ஆகவே, பலூன் நகர்ந்த தூரம் $ED = BC = AC - AB$

$= 87\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = 58\sqrt{3}$ மீ

எடுத்துக்காட்டு 7.24

ஒரு கட்டடத்தின் மேல் ஒரு கொடிக் கம்பம் நிற்கிறது. தரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கொடிக்கம்பத்தின் உச்சி மற்றும் அடி ஆகியவற்றின் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே 60° மற்றும் 45° என்க. மேலும் கொடிக் கம்பத்தின் உயரம் 10 மீ எனில், கட்டடத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

$(\sqrt{3} = 1.732)$

தீர்வு

A எனும் புள்ளியிலிருந்து கொடிக்கம்பத்தின் உச்சி மற்றும் அடி ஆகியவற்றின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 60° மற்றும் 45° என்க.

B என்பது கட்டடத்தின் அடி என்க.

BC மற்றும் CD என்பன முறையே கட்டடத்தின் உயரம் மற்றும் கொடிக்கம்பத்தின் உயரத்தைக் குறிக்கின்றன.

கொடுக்கப்பட்டவை: $\angle CAB = 45^\circ$, $\angle DAB = 60^\circ$ மற்றும் $CD = 10$ மீ

தற்போது, $BC = h$ மீ மற்றும் $AB = x$ மீ என்க.

செங்கோண $\triangle CAB$-ல்,

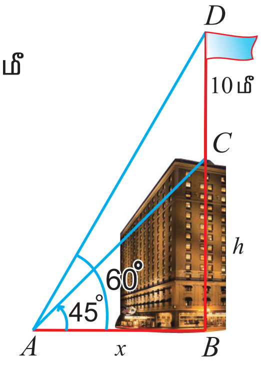
$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB}.$$

எனவே, $AB = BC$ அதாவது, $x = h$ ஆகும். (1)

மேலும், செங்கோண $\triangle DAB$-ல்,

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\Longrightarrow AB = \frac{h+10}{\tan 60^\circ} \Longrightarrow x = \frac{h+10}{\sqrt{3}} \quad (2)$$



படம் 7.17

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து, $h = \frac{h+10}{\sqrt{3}}$

$$\Longrightarrow \sqrt{3}h - h = 10$$

$$\Longrightarrow h = \left(\frac{10}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

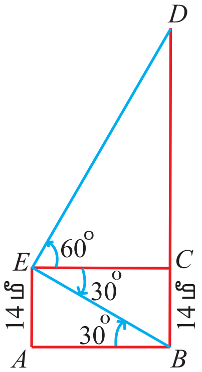
$$= 5(2.732) = 13.66 \text{ மீ}$$

எனவே, கட்டடத்தின் உயரம் 13.66 மீ .

எடுத்துக்காட்டு 7.25

ஒருவர் கடல்மட்டத்திலிருந்து 14 மீ உயரமுள்ள உள்ள ஒரு கப்பலின் மேல் தளத்தில் நின்றுக் கொண்டு செங்குத்தான ஒரு பாறை முகட்டின் உச்சியினை 60° ஏற்றக் கோணத்திலும் அதன் அடியினை 30° இறக்கக் கோணத்திலும் காண்கிறார் எனில், செங்குத்தான பாறையின் உயரம் யாது?

தீர்வு BD என்பது செங்குத்தான பாறையின் உயரம் என்க. A என்பது கப்பலின் அடி என்க. கப்பலின் மேல் தளத்தில் E என்னும் புள்ளியிலிருந்து பாறை பார்க்கப்படுகிறது என்க. $AE = 14$ மீ. AB-க்கு இணையாக $AB = EC$ என்றவாறு EC-ஐ வரைக.



படம் 7.18

கொடுக்கப்பட்டவை: $\angle ABE = 30^\circ, \angle DEC = 60^\circ$ மற்றும் $AE = 14$ மீ.

செங்கோண $\triangle ABE$ -ல், $\tan 30^\circ = \frac{AE}{AB}$

$$\therefore \quad AB = \frac{AE}{\tan 30^\circ} \implies AB = 14\sqrt{3}$$

எனவே, $EC = 14\sqrt{3}$ $\quad (\because AB = EC)$

செங்கோண $\triangle DEC$ -யில், $\tan 60^\circ = \frac{CD}{EC}$

$$\therefore \quad CD = EC \tan 60^\circ \implies CD = (14\sqrt{3})\sqrt{3} = 42 \text{ மீ}$$

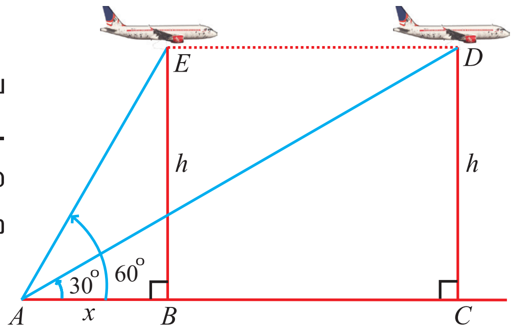
ஆகவே, பாறையின் உயரம் $BD = BC + CD = 14 + 42 = 56$ மீ.

எடுத்துக்காட்டு 7.26

கிடைநிலையில் பறந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு ஆகாய விமானத்தை A என்னும் புள்ளியிலிருந்து பார்க்கும்போது அதன் ஏற்றக் கோணம் 60°. அவ்விமானம் கிடைநிலையில் 15 வினாடிகள் பறந்த பின் அதேப் புள்ளியிலிருந்து அந்த ஆகாய விமானத்தின் ஏற்றக் கோணம் 30° ஆக மாறுகிறது. இவ்விமானம் 200 மீ/வி வேகத்தில் பறந்து கொண்டிருந்தால், விமானம் பறந்து கொண்டிருக்கும் மாறாத கிடைநிலை உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு

A என்னும் புள்ளியிலிருந்து ஆகாய விமானத்தைப் பார்ப்பதாகக் கொள்வோம். அதன் ஆரம்பநிலை E என்க. 15 வினாடிகளுக்குப் பின் ஆகாய விமானத்தின் நிலை D என்க. BE மற்றும் CD என்பன ஆகாய விமானம் பறக்கும் மாறாத உயரம் என்க.



படம் 7.19

$\angle DAC = 30^\circ$ மற்றும் $\angle EAB = 60^\circ$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$BE = CD = h$ மீ என்க.

$AB = x$ மீ என்க.

15 வினாடிகளில் விமானம் சென்ற தூரம்,

$ED = 200 \times 15 = 3000$ மீ $\quad$ (தூரம் = வேகம் $\times$ காலம்)

அதாவது, $BC = 3000$ மீ.

செங்கோண $\triangle DAC$ -ல்,

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{AC}$$

$$\implies \quad CD = AC \tan 30^\circ$$

அதாவது, $h = (x+3000)\frac{1}{\sqrt{3}}$. (1)

செங்கோண $\triangle EAB$ -ல்,

$$\tan 60^\circ = \frac{BE}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad BE = AB\tan 60^\circ \implies h = \sqrt{3}\,x \qquad (2)$$

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $\sqrt{3}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+3000)$

$\Longrightarrow \quad 3x = x + 3000 \quad \Longrightarrow \quad x = 1500$ மீ.

(2)-லிருந்து $h = 1500\sqrt{3}$ மீ.

ஆகாய விமானம் பறக்கும் மாறாத கிடைநிலை உயரம் = $1500\sqrt{3}$ மீ.

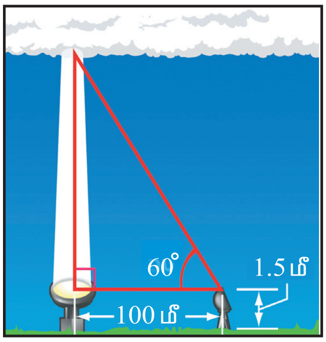
பயிற்சி 7.2

1. ஒரு சுமை ஊர்தியிலிருந்து (truck) சுமையை இறக்க ஏதுவாக 30° ஏற்றக் கோணத்தில் ஒரு சாய்வுத் தளம் (ramp) உள்ளது. சாய்வுத் தளத்தின், உச்சி தரையிலிருந்து 0.9 மீ உயரத்தில் உள்ளது எனில், சாய்வுத் தளத்தின் நீளம் யாது?

2. உயரம் 150 செ.மீ உள்ள ஒரு சிறுமி ஒரு விளக்குக் கம்பத்தின் முன் நின்றவாறு $150\sqrt{3}$ செ.மீ நீளமுள்ள நிழலை ஏற்படுத்துகிறாள் எனில், விளக்குக் கம்பத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணத்தைக் காண்க.

3. A மற்றும் B என்ற பூச்சிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் 2 மீ இருக்கும் வரையில், ஒன்று எழுப்பும் ஒலியை மற்றது கேட்க இயலும். சுவற்றிலிருந்து 1 மீ தூரத்தில் தரையிலுள்ள பூச்சி A ஆனது ஒரு சிலந்தியால் உண்ணப்படும் நிலையில் உள்ள பூச்சி B-யை சுவற்றில் காண்கிறது. A-யிலிருந்து B-க்கு ஏற்றக் கோணம் 30° ஆக இருக்கும்போது A ஆனது B-க்கு எச்சரிக்கை ஒலி விடுத்தால், சிலந்திக்கு இரை கிடைக்குமா அல்லது கிடைக்காதா? (A-யின் எச்சரிக்கை ஒலியை B கேட்கும்போது அது தப்பிவிடும் எனக் கொள்க)

4. இரவு நேரத்தில் ஒருவர் அடர் மேகமூட்டத் தளத்தினைக் (cloud ceiling) காண பிரகாசமான ஒரு விளக்கின் ஒளியினை மேகத்தை நோக்கி செங்குத்தாகச் செலுத்துகிறார். அவ்விளக்கிலிருந்து 100மீ தூரத்தில், தரையிலிருந்து 1.5மீ உயரத்தில் பொருத்தப்பட்ட தியோடலைட் (Theodolite) மூலம் மேகமூட்டத்தைப் பார்க்கும்போது ஏற்றக்கோணம் 60° எனில், அடர் மேகமூட்டத் தளம் எவ்வளவு உயரத்தில் உள்ளது? (படம் 7.20).



படம் 7.20

(குறிப்பு: அடர் மேகமூட்டத் தளம் என்பது மிகக் குறைந்த உயரத்தில் நிலவக்கூடிய அடர் மேகமூட்டமாகும். ஆகாய விமானம் பாதுகாப்பாக மேலே உயரவும், தரை இறங்கவும் போதுமான உயரத்தில் அடர் மேகமூட்டத்தளம் அமைய வேண்டும். இரவில் விளக்கின் ஒளியினைச் செங்குத்தாக மேல் நோக்கிச் செலுத்தி அடர் மேகமூட்டத் தளத்தினை ஒளிரச் செய்து தளத்தின் உயரத்தை காண்கிறார்கள்).

5. 40 செ.மீ நீளமுள்ள ஒரு ஊசலானது (pendulum), ஒரு முழு அலைவின் போது, அதன் உச்சியில் 60° கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. அந்த அலைவில், ஊசல் குண்டின் துவக்க நிலைக்கும், இறுதி நிலைக்கும் இடையே உள்ள மிகக் குறைந்த தூரத்தைக் காண்க.

6. ஒன்றுக்கொன்று நேரெதிராக உள்ள இரு மரங்களின் மீது A, B என்ற இரு காக்கைகள் 15 மீ மற்றும் 10 மீ உயரங்களில் அமர்ந்துக் கொண்டிருந்தன. அவை தரையிலிருக்கும் ஒரு வடையினை முறையே 45° மற்றும் 60° இறக்கக் கோணத்தில் பார்க்கின்றன. அவை ஒரே நேரத்தில் கிளம்பிக் குறைவான நீளமுள்ளப் பாதையில் சமவேகத்தில் பறந்து, அவ்வடையை எடுக்க முயற்சித்தால் எந்த பறவை வெற்றி பெறும்? (இரு மரங்களின் அடி, வடை ஆகியன ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளன)

7. வட்ட வடிவில் உள்ள ஒரு பூங்காவின் மையத்தில் ஒரு விளக்குக் கம்பம் நிற்கிறது. வட்டப் பரிதியில் அமைந்த P, Q என்னும் இரு புள்ளிகள் விளக்குக் கம்பத்தினடியில் 90° கோணத்தை ஏற்படுத்துகின்றன. மேலும், P-யிலிருந்து விளக்குக் கம்பத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 30° ஆகும். $PQ = 30$ மீ எனில், விளக்குக் கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

8. 700 மீ உயரத்தில் பறந்துக் கொண்டிருக்கும் ஒரு ஹெலிகாப்டரிலிருந்து ஒருவர் ஓர் ஆற்றின் இரு கரைகளில் நேரெதிராக உள்ள இரு பொருட்களை 30°, 45° இறக்கக் கோணங்களில் காண்கிறார் எனில், ஆற்றின் அகலத்தைக் காண்க. ($\sqrt{3} = 1.732$)

9. சமதளத்தில் நின்று கொண்டிருக்கும் X என்பவர், அவரிடமிருந்து 100 மீ தூரத்தில் பறந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு பறவையினை 30° ஏற்றக் கோணத்தில் பார்க்கிறார். அதே நேரத்தில், Y என்பவர் 20 மீ உயரமுள்ள ஒரு கட்டடத்தின் உச்சியில் நின்று கொண்டு அதே பறவையை 45° ஏற்றக் கோணத்தில் பார்க்கிறார். இருவரும் நின்று கொண்டு அவர்களுக்கிடையேயுள்ள பறவையை எதிரெதிராகப் பார்க்கின்றனர் எனில், Y-யிலிருந்து பறவை உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

10. வகுப்பறையில் அமர்ந்துக் கொண்டிருக்கும் ஒரு மாணவன் கரும்பலகையில் கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டிலிருந்து 1.5 மீ உயரத்தில் உள்ள ஓவியத்தை 30° ஏற்றக் கோணத்தில் காண்கிறான். ஓவியம் அவனுக்குத் தெளிவாகத் தெரியாததால் நேராகக் கரும்பலகையை நோக்கி நகர்ந்து மீண்டும் அந்த ஓவியத்தை 45° ஏற்றக் கோணத்தில் தெளிவாகக் காண்கிறான் எனில், அவன் நகர்ந்த தூரத்தைக் காண்க.

11. ஒரு சிறுவன் 30 மீ உயரமுள்ள கட்டடத்திற்கு எதிரே குறிப்பிட்ட தூரத்தில் நிற்கிறான். அவனுடையக் கிடைநிலைப் பார்வைக்கோடு தரைமட்டத்திலிருந்து 1.5மீ உயரத்தில் உள்ளது. அவன் கட்டடத்தை நோக்கி நடந்து செல்லும் போது, அக்கட்டடத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 30°-லிருந்து 60° ஆக உயர்கிறது. அவன் கட்டடத்தை நோக்கி நடந்து சென்றத் தூரத்தைக் காண்க.

12. 200 அடி உயரமுள்ள கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியிலிருந்து, அதன் காப்பாளர் ஒரு தோணி மற்றும் ஒரு படகு ஆகியவற்றை பார்க்கிறார். கலங்கரை விளக்கத்தின் அடி, தோணி மற்றும் ஒரு படகு ஆகியன ஒரே திசையில் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றன. தோணி, படகு ஆகியவற்றின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 45° மற்றும் 30° என்க. இவ்விரண்டும் பாதுகாப்பாக இருக்க வேண்டுமெனில், அவைகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் குறைந்தது 300 அடியாக இருக்க வேண்டும். இடைவெளி குறைந்தால் காப்பாளர் எச்சரிக்கை ஒலி எழுப்ப வேண்டும். அவர் எச்சரிக்கை ஒலி எழுப்ப வேண்டுமா?

13. தரையில் நின்றுகொண்டிருக்கும் ஒரு சிறுவன் காற்றில், கிடைநிலைக் கோட்டில் மாறாத உயரத்தில் நகர்ந்துக் கொண்டிருக்கும் ஒரு பலூனைக் காண்கிறான். ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையில் சிறுவன் 60° ஏற்றக் கோணத்தில் பலூனைக் காண்கிறான். 2 நிமிடங்கள் கழிந்த பின்னர் அதே நிலையிலிருந்து சிறுவன் மீண்டும் பலூனைப் பார்க்கும்போது ஏற்றக்கோணம் 30° ஆகக் குறைகிறது. காற்றின் வேகம் $29\sqrt{3}$ மீ/நிமிடம் எனில், தரையிலிருந்து பலூனின் உயரம் காண்க.

14. ஒரு நேரான நெடுஞ்சாலை ஒரு கோபுரத்தை நோக்கிச் செல்கிறது. கோபுரத்தின் உச்சியில் நின்றுக் கொண்டிருக்கும் ஒருவர் சீரான வேகத்தில் வந்துக்கொண்டிருக்கும் ஒரு ஊர்தியை 30° இறக்கக் கோணத்தில் காண்கிறார். 6 நிமிடங்கள் கழிந்த பின்னர் அந்த ஊர்தியின் இறக்கக் கோணம் 60°எனில், கோபுரத்தை அடைய ஊர்தி மேலும் எத்தனை நிமிடங்கள் எடுத்துக் கொள்ளும்?

15. ஒரு செயற்கைக் கோளுக்கு ஒரே திசையில் பூமியில் அமைந்துள்ள இரு கட்டுப்பாட்டு நிலையங்களிலிருந்து அச்செயற்கைக் கோளின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 30° மற்றும் 60° என உள்ளன. அவ்விரு நிலையங்கள், செயற்கைக்கோள் ஆகிய இவை மூன்றும் ஒரே செங்குத்துத் தளத்தில் அமைகின்றன. இரு நிலையங்களுக்கும் இடையே உள்ள தூரம் 4000 கி.மீ எனில், செயற்கைக்கோளுக்கும், பூமிக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தைக் காண்க. ($\sqrt{3} = 1.732$)

16. 60மீ உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்திலிருந்து ஒரு கட்டடத்தின் உச்சி மற்றும் அடி ஆகியவற்றின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 30° மற்றும் 60° எனில், கட்டடத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

17. 40 மீ உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சி மற்றும் அடி ஆகியவற்றிலிருந்து ஒரு கலங்கரை விளக்கின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 30°மற்றும் 60° எனில், கலங்கரை விளக்கின் உயரத்தைக் காண்க. கலங்கரை விளக்கின் உச்சியிலிருந்து கோபுரத்தின் அடிக்கு உள்ள தூரத்தையும் காண்க.

18. ஒரு ஏரியின் மேற்பரப்பில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து காணும்போது, 45 மீ உயரத்தில் பறந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு ஹெலிகாப்டரின் ஏற்றக் கோணம் 30° ஆக உள்ளது. அப்புள்ளியிலிருந்து அதே நேரத்தில் தண்ணீரில் ஹெலிகாப்டரின் நிழலின் இறக்கக் கோணம் 60° எனில், ஹெலிகாப்டருக்கும் ஏரியின் மேற்பரப்பிற்கும் இடைப்பட்டத் தூரத்தைக் காண்க.

பயிற்சி 7.3

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. $(1-\sin^2\theta)\sec^2\theta =$

   (A) 0 (B) 1 (C) $\tan^2\theta$ (D) $\cos^2\theta$

2. $(1+\tan^2\theta)\sin^2\theta =$

   (A) $\sin^2\theta$ (B) $\cos^2\theta$ (C) $\tan^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$

3. $(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta) =$

   (A) $\sin^2\theta$ (B) 0 (C) 1 (D) $\tan^2\theta$

4. $\sin(90^\circ-\theta)\cos\theta+\cos(90^\circ-\theta)\sin\theta =$

   (A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) –1

5. $1 - \dfrac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta} =$

(A) $\cos\theta$ (B) $\tan\theta$

(C) $\cot\theta$ (D) $\operatorname{cosec}\theta$

6. $\cos^4 x - \sin^4 x =$

(A) $2\sin^2 x - 1$ (B) $2\cos^2 x - 1$

(C) $1 + 2\sin^2 x$ (D) $1 - 2\cos^2 x$.

7. $\tan\theta = \dfrac{a}{x}$ எனில், $\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ -ன் மதிப்பு

(A) $\cos\theta$ (B) $\sin\theta$

(C) $\operatorname{cosec}\theta$ (D) $\sec\theta$

8. $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$ எனில், $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ -ன் மதிப்பு

(A) 1 (B) -1 (C) $\tan^2\theta$ (D) $\operatorname{cosec}^2\theta$

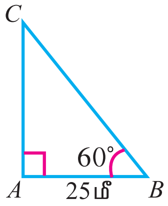
9. $\dfrac{\sec\theta}{\cot\theta + \tan\theta} =$

(A) $\cot\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\sin\theta$ (D) $-\cot\theta$

10. $\dfrac{\sin(90^\circ-\theta)\sin\theta}{\tan\theta} + \dfrac{\cos(90^\circ-\theta)\cos\theta}{\cot\theta} =$

(A) $\tan\theta$ (B) 1 (C) -1 (D) $\sin\theta$

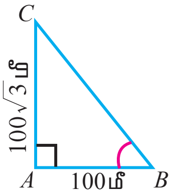
11. படத்தில், $AC =$



(A) 25 மீ (B) $25\sqrt{3}$ மீ

(C) $\dfrac{25}{\sqrt{3}}$ மீ (D) $25\sqrt{2}$ மீ

12. படத்தில் $\angle ABC =$



(A) 45° (B) 30°

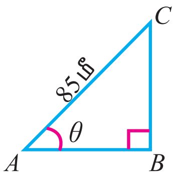
(C) 60° (D) 50°

13. ஒரு கோபுரத்திலிருந்து 28.5 மீ தூரத்தில் நின்று கொண்டிருக்கும் ஒருவர் கோபுரத்தின் உச்சியை 45° ஏற்றக் கோணத்தில் காண்கிறார். அவருடைய கிடைநிலைப் பார்வைக் கோடு தரையிலிருந்து 1.5 மீ உயரத்தில் உள்ளது எனில், கோபுரத்தின் உயரம்

(A) 30மீ (B) 27.5மீ

(C) 28.5மீ (D) 27மீ

14. படத்தில், $\sin\theta = \frac{15}{17}$ எனில், $BC =$



(A) 85 மீ (B) 65 மீ

(C) 95 மீ (D) 75 மீ

15. $(1+\tan^2\theta)(1-\sin\theta)(1+\sin\theta) =$

(A) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ (B) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

(C) $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ (D) 0

16. $(1+\cot^2\theta)(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) =$

(A) $\tan^2\theta - \sec^2\theta$ (B) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

(C) $\sec^2\theta - \tan^2\theta$ (D) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$

17. $(\cos^2\theta - 1)(\cot^2\theta + 1) + 1 =$

(A) 1 (B) –1 (C) 2 (D) 0

18. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta} =$

(A) $\cos^2\theta$ (B) $\tan^2\theta$ (C) $\sin^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$

19. $\sin^2\theta + \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} =$

(A) $\text{cosec}^2\theta + \cot^2\theta$ (B) $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta$

(C) $\cot^2\theta - \text{cosec}^2\theta$ (D) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

20. $9\tan^2\theta - 9\sec^2\theta =$

(A) 1 (B) 0 (C) 9 (D) –9

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

பால் எர்டோஸ் (Paul Erdos) (மார்ச் 26, 1913 – செப்டம்பர் 20, 1996) என்பவர் ஹங்கேரி நாட்டைச் சேர்ந்த கணிதவியல் அறிஞர் ஆவார். கணிதவியல் வரலாற்றில் அதிக எண்ணிக்கையில் ஆய்வுக் கட்டுரைகளை வெளியிட்ட அறிஞர் பெருமக்களில் முதன்மையானவராக இவர் கருதப்படுகிறார். இந்த வகையில் கணித மேதை லியோனார்டு ஆய்லர் (Leanhard Euler) என்பவர் மட்டுமே இவருடன் ஒப்பிடத்தக்கவர். எர்டோஸ் 1475 ஆராய்ச்சிக் கட்டுரைகளையும், லியோனார்டு ஆய்லர் 800 ஆராய்ச்சிக் கட்டுரைகளையும் கணிதத்தில் எழுதியுள்ளனர். எர்டோஸ் தன் வாழ்நாளில் 511 கணிதவியல் அறிஞர்களோடு சேர்ந்து ஆய்வு செய்துள்ளார். மேலும், கணிதத்தில் ஆய்வு செய்வதை ஒரு சமூக சேவையாகக் கருதினார்.

8

அளவியல்

Measure what is measurable, and make measurable what is not so

-Galileo Galilei

- முன்னுரை
- வளைபரப்பு மற்றும் கன அளவு
  - ❖ உருளை
  - ❖ கூம்பு
  - ❖ கோளம்
- இணைந்த கன உருவங்கள் மற்றும் மாறா கனஅளவுகள்

ஆர்க்கிமெடிஸ்
(Archimedes)
(287 கி.மு. - 212 கி.மு.)
கிரீஸ்

பண்டைக்கால கணிதவியல் அறிஞர்களில் புகழ் மிக்க கணித மேதையாக ஆர்க்கிமெடிஸ் கருதப் படுகிறார்.

வடிவியலில் தளவடிவங்கள், அவற்றின் பரப்பு மற்றும் முப்பரிமாண திண்மப் பொருட்களின் புறப்பரப்புகள் மற்றும் கனஅளவுகள் தொடர்பாக அவர் குறிப்பிடத்தக்க வகையில் பங்காற்றியுள்ளார்.

8.1 அறிமுகம்

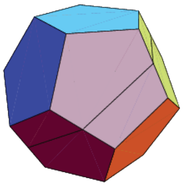
நேர்கோட்டுத் துண்டுகளின் நீளங்கள், தள வடிவங்களின் சுற்றளவுகள் மற்றும் பரப்புகள், திண்மப்பொருட்களின் வளைபரப்புகள் மற்றும் கன அளவுகள் ஆகியனவற்றைப் பற்றி விவரிக்கும் வடிவியலின் ஒரு பகுதியை அளவியல் (Mensuration) என்கிறோம். அன்றாட வாழ்வில் பல நிலைகளிலும் அளவியல் பயன்படுவதால் பொருட்களின் அளவுகளைப் பற்றி கற்பது மிகவும் அவசியமாகிறது. அடிப்படை வடிவியலில் தளம், பன்முகப் புறப்பரப்புகள் மற்றும் திண்ம உருவங்களின் (எ.கா. கோளங்களின்) வளைபரப்புகள் மற்றும் அவைகளின் கன அளவுகள் ஆகியனவற்றை கருத்தில் கொள்கிறோம்.

புறப்பரப்பிற்கும் கனஅளவிற்கும் உள்ள விகிதம் ஆனது நானோ அறிவியலின் (Nano Science) முக்கிய கோட்பாடுகளில் ஒன்றாக கருதப்படுகிறது. ஏனெனில், அவ்விகிதம் நானோ அறிவியலின் அளவு மற்றும் தொழில் நுணுக்கத்தை பயன்படுத்தும் அளவு சார்ந்த பண்புகளை அறிந்து கொள்ள அடிப்படையாய் அமைகிறது.

நாம் இந்த அத்தியாயத்தில் உருளை, கூம்பு, கோளம் மற்றும் இணைந்த கன உருவங்களின் புறப்பரப்புகள் மற்றும் கனஅளவுகள் ஆகியனவற்றை எவ்வாறு காண்பது எனக் கற்க உள்ளோம்.

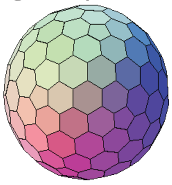
8.2 புறப்பரப்பு அல்லது மேற்பரப்பு (Surface Area)

சிசிலியில் சிராகஸ் நகரத்தைச் சார்ந்த மிகச்சிறந்த கணிதவியல் அறிஞரான ஆர்க்கிமெடிஸ் (Archimedes) என்பவர் உருளை ஒன்றினுள் அனைத்து புறங்களையும் தொடுமாறு மிகச் சரியாக உள்ளடக்கிய கோளத்தின் கனஅளவானது, அந்த சுற்று உருளையின் கனஅளவில் மூன்றில் இரண்டு பங்காக இருக்குமென நிரூபித்தார். இதனை தன்னுடைய மிகச் சிறந்த சாதனை எனக் கருதினார். அவர் நிறைவு செய்யும் முறையை பயன்படுத்தி ஒரு பரவளைய வில்லின் கீழ் அமைந்த பகுதியின் பரப்பைக் கண்டறிந்தார்.



படம் 8.1

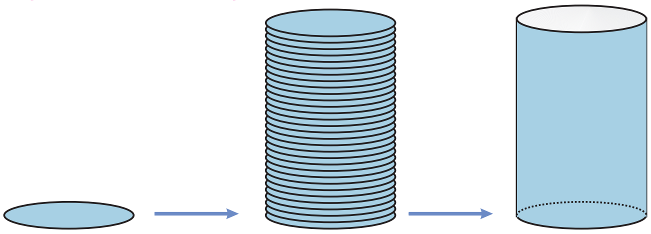
ஒரு திண்ம உருவத்தின் புறப்பரப்பு அல்லது மேற்பரப்பு என்பது அதனுடைய வெளிப்புறப் பரப்பு ஆகும். ஆகவே, ஒரு முப்பரிமாணப் பொருளின் வெளிப்பக்கப் பரப்புகள் சேர்ந்து கிடைப்பது அதன் புறப்பரப்பு ஆகும். சில கன உருவங்களின் புறப்பரப்பினை அருகில் உள்ள படங்கள் 8.1 மற்றும் 8.2 ஆகியன விளக்குகின்றன.



படம் 8.2

8.2.1 நேர் வட்ட உருளை (Right Circular Cylinder)

ஒரே வடிவம் மற்றும் ஒரே அளவைக் கொண்ட வட்டவடிவ தாட்களையோ அல்லது அட்டைகளையோ ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையில் எடுத்துக் கொண்டு செங்குத்தாக ஒன்றின்மீது ஒன்று சரியாக பொருந்தும்படி அடுக்கும் போது கிடைக்கும் கனஉருவம் நேர்வட்ட உருளை எனப்படும். இவற்றை வட்டவடிவ அடிப்பக்கத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறு வைக்கப்பட வேண்டும் என்பதை நினைவில் கொள்க. (பார்க்க படம் 8.3)



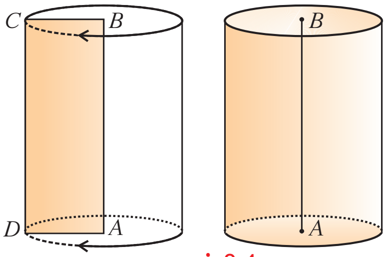
படம் 8.3

வரையறை

ஒரு செவ்வகத்தை அதன் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தை அச்சாகக் கொண்டு ஒரு முழுச்சுற்று சுழற்றும்போது உண்டாகும் திண்ம உருவம் நேர் வட்ட உருளை எனப்படும்.

செய்துபார்

ABCD ஒரு செவ்வகம் என்க. இச் செவ்வகமானது *AB* என்ற பக்கத்தைப் பொருத்து ஒரு முழுச்சுற்று சுழற்றப்படுவதாக கருதுவோம் இச்சுழற்சியானது படத்தில் காட்டியது போன்ற ஓர் நேர்வட்ட உருளையை உருவாக்குகிறது. இங்கு *AB* என்பது உருளையின் அச்சு எனப்படும். *AB*-ன் நீளம் உருளையின் நீளம் (உயரம்) எனவும் $AD(= BC)$-ன் நீளம் உருளையின் ஆரம் எனவும் அழைக்கப்படும்.



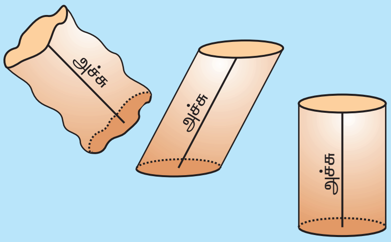
படம் 8.4

குறிப்பு

(i) உருளையின் அடிப்பாகம் வட்டவடிவில் இல்லையெனில், அது சாய்வு உருளை (Oblique cylinder) எனப்படும்.

(ii) உருளையின் அச்சானது அதன் வட்டவடிவ அடிப்பாகத்திற்கு செங்குத்தாக இல்லையெனில், அது வட்ட உருளை (Circular cylinder) எனப்படும்.

(iii) உருளையின் அச்சானது அதன் வட்ட வடிவ அடிப்பாகத்திற்கு செங்குத்தாக இருப்பின் அது நேர்வட்ட உருளை (Right circular cylinder) எனப்படும்.



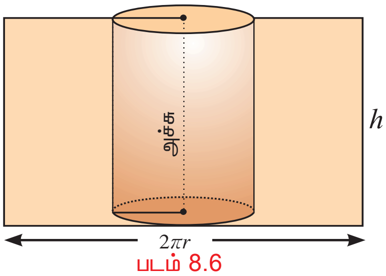
படம் 8.5

(i) நேர்வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு (Curved Surface area of a right circular cylinder)

அருகிலுள்ள படத்தில், நேர்வட்ட உருளையின் அடி மற்றும் உச்சியிலமைந்த ஒரே அளவான வட்டப் பகுதிகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாக உள்ளன. மேலும், உருளையின் நேர்க்குத்து மேற்பரப்பு வளைவாக உள்ளதால், அதன் பரப்பு உருளையின் வளைபரப்பு (lateral surface area or curved surface area (CSA)) அல்லது புறப்பரப்பு எனப்படும்.

உருளையின் வளைபரப்பு = அடிச்சுற்றளவு $\times$ உயரம்

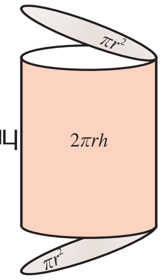
$$\text{CSA} = 2\pi r \times h = 2\pi rh \text{ ச. அலகுகள்.}$$



படம் 8.6

(ii) திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

(Total surface area of a solid right circular cylinder)



படம் 8.7

மொத்தப் புறப்பரப்பு (TSA) = வளைபரப்பு + அடிப்பக்கப் பரப்பு + மேல் பக்கப் பரப்பு

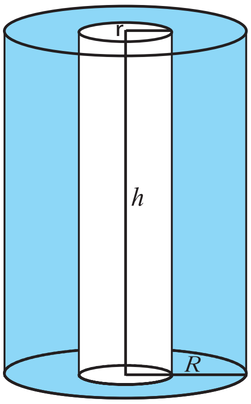
= வளைபரப்பு + 2 (அடிப்பக்கப் பரப்பு)

$= 2\pi rh + 2\times \pi r^2$

ஆகவே, மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2\pi r(h+r)$ ச. அலகுகள்.

(iii) நேர்வட்ட உள்ளீடற்ற உருளை (Right circular hollow cylinder)

இரும்புக் குழாய், இரப்பர்குழாய் போன்ற திண்ம உருவங்கள் உள்ளீடற்ற நேர்வட்ட உருளை வடிவில் உள்ளன. h உயரம் கொண்ட உள்ளீடற்ற உருளையின் வெளி ஆரம் மற்றும் உள் ஆரம் முறையே R மற்றும் r என்க.



படம் 8.8

இதன் வளைபரப்பு = வெளிப்புற வளைபரப்பு + உட்புற வளைபரப்பு

$= 2\pi Rh + 2\pi rh$

ஆகவே, வளைபரப்பு $= 2\pi h(R+r)$ ச.அலகுகள்

மொத்தப் புறப்பரப்பு = வளைபரப்பு $+ 2\times$ அடிப்பக்கப் பரப்பு

$= 2\pi h(R+r) + 2\times[\pi R^2 - \pi r^2]$

$= 2\pi h(R+r) + 2\pi(R+r)(R-r)$

எனவே, உள்ளீடற்ற உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

$= 2\pi(R+r)(R-r+h)$ ச. அலகுகள்

மேலும், உள்ளீடற்ற உருளையின் தடிமன், $w = R - r$ ஆகும்.

குறிப்பு

இப்பாடப்பகுதியில் தேவைப்படும்போது π -ன் தோராய மதிப்பாக $\frac{22}{7}$ எனக் கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.1

ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் (solid right circular cylinder) ஆரம் 7செமீ மற்றும் உயரம் 20 செமீ எனில், அதன் (i) வளைபரப்பு (ii) மொத்தப் புறப்பரப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க).

தீர்வு r மற்றும் h என்பன முறையே நேர்வட்ட திண்ம உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

இங்கு, $r = 7$ செ.மீ , $h = 20$ செ.மீ

தற்போது, வளைபரப்பு $= 2\pi rh$

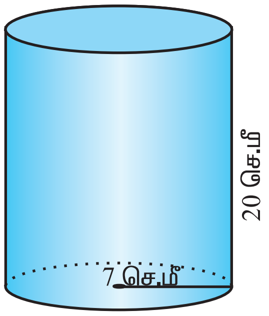
$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times 20$

நேர்வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு = 880 ச.செ.மீ

மேலும், மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2\pi r(h+r)$

$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times[20+7] = 44\times 27$

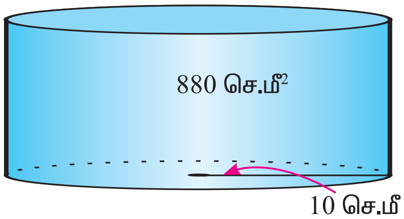
எனவே, மொத்தப் புறப்பரப்பு = 1188 ச. செ.மீ.



படம் 8.9

எடுத்துக்காட்டு 8.2

ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு 880ச.செ.மீ மற்றும் அதன் ஆரம் 10செ.மீ எனில், அவ்வுருளையின் வளைபரப்பைக் காண்க ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க).



படம் 8.10

தீர்வு r மற்றும் h என்பன முறையே திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க. S என்பது திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு என்க.

இங்கு, $r = 10$ செ.மீ. மேலும் $S = 880$ ச. செ.மீ

இப்போது, $S = 880 \implies 2\pi r[h + r] = 880$

$$\implies 2 \times \frac{22}{7} \times 10[h + 10] = 880$$

$$\implies h + 10 = \frac{880 \times 7}{2 \times 22 \times 10}$$

$$\implies h + 10 = 14$$

எனவே, உருளையின் உயரம், $h = 4$ செ.மீ

மேலும் உருளையின் வளைபரப்பு,

$$2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 10 \times 4 = \frac{1760}{7}$$

ஆகவே, உருளையின் வளைபரப்பு $= 251\frac{3}{7}$ ச.செ.மீ.

மாற்று முறை :

வளைபரப்பு

= மொத்தப் புறப்பரப்பு – 2×அடிப்பக்கத்தின் பரப்பு

$= 880 - 2 \times \pi r^2$

$= 880 - 2 \times \frac{22}{7} \times 10^2$

$= \frac{1760}{7}$

$= 251\frac{3}{7}$ ச.செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8.3

ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் ஆரமும் உயரமும் 2 : 5 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அதன் வளைப்பரப்பு $\frac{3960}{7}$ ச.செ.மீ எனில், உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க)

தீர்வு: r மற்றும் h என்பன முறையே ஒரு திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

$$r : h = 2 : 5 \implies \frac{r}{h} = \frac{2}{5}. \text{ எனவே, } r = \frac{2}{5}h.$$

நேர்வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு $= 2\pi rh$

$$\implies 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{2}{5} \times h \times h = \frac{3960}{7}$$

$$\implies h^2 = \frac{3960 \times 7 \times 5}{2 \times 22 \times 2 \times 7} = 225$$

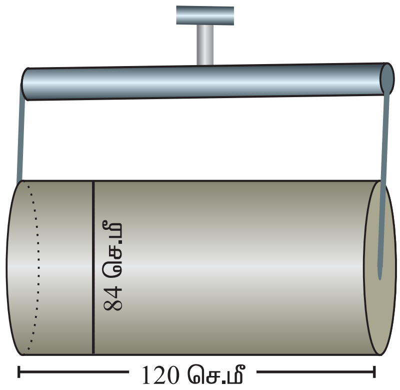
$$h = 15 \implies r = \frac{2}{5}h = 6.$$

ஆகவே, உருளையின் உயரம் 15செ.மீ மற்றும் ஆரம் 6செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8.4

120செ.மீ நீளமும், 84செ.மீ விட்டமும் கொண்ட ஒரு சாலையை சமப்படுத்தும் உருளையைக் (road roller) கொண்டு ஒரு விளையாட்டுத்திடல் சமப்படுத்தப்படுகிறது. விளையாட்டுத் திடலை சமப்படுத்த இவ்வுருளை 500 முழுச் சுற்றுக்கள் சுழல வேண்டும். விளையாட்டுத்திடலை சமப்படுத்த ஒரு ச. மீட்டருக்கு 75 பைசா வீதம், திடலைச் சமப்படுத்த ஆகும் செலவைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க)

தீர்வு: சாலையை சமப்படுத்தும் உருளையின் ஆரம் $r = 42$ செ.மீ மற்றும் நீளம் $h = 120$ செ.மீ.



படம் 8.11

உருளையின் ஒரு முழுச்சுற்றினால் சமப்படுத்தப்படும் திடலின் பரப்பு } = உருளையின் வளைபரப்பு

$= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 42 \times 120$

$= 31680$ செ.மீ ^{2}.

500 முழுச் சுற்றுகளில் சமப்படுத்தப்படும் திடலின் பரப்பு } $= 31680 \times 500$

$= 15840000$ செ. மீ^{2}

$= \frac{15840000}{10000} = 1584$ மீ ^{2} (10,000 செ. மீ^{2} = 1 ச.மீ)

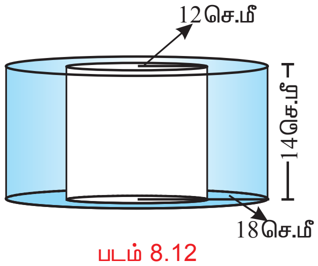
1 ச. மீட்டருக்கு சமப்படுத்த ஆகும் செலவு = ₹ $\frac{75}{100}$

எனவே, விளையாட்டுத்திடலை சமப்படுத்த ஆகும் மொத்தச் செலவு $= \frac{1584 \times 75}{100}$ = ₹ 1188.

எடுத்துக்காட்டு 8.5

ஒரு உள்ளீடற்ற உருளையின் உள் மற்றும் வெளி ஆரங்கள் முறையே 12 செ.மீ. மற்றும் 18செ.மீ. என்க. மேலும் அதன் உயரம் 14செ.மீ எனில் அவ்வுருளையின் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க.)

தீர்வு : r, R மற்றும் h என்பன முறையே உள்ளீடற்ற உருளையின் உள்ஆரம், வெளிஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.



படம் 8.12

ஆகவே, $r = 12$ செ.மீ, $R = 18$ செ.மீ, $h = 14$ செ.மீ,

வளைபரப்பு $= 2\pi h(R+r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times (18+12)$

$= 2640$ ச.செ.மீ

மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2\pi(R+r)(R-r+h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times (18+12)(18-12+14)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30 \times 20 = \frac{26400}{7}$.

ஆகவே, மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 3771\frac{3}{7}$ ச.செ.மீ.

8.2.2 நேர் வட்டக் கூம்பு (Right circular cone)

பனிக்கூழ் (ice cream) நிரம்பிய கூம்பு வடிவ கூடு, கோயில் தேரின் உச்சிப்பகுதி, சர்க்கஸ் கோமாளியின் தொப்பி, மருதாணி வைக்கும் கூம்பு வடிவ கலன் (mehandi container) போன்ற திண்மங்களை அல்லது பொருட்களை நாம் அன்றாட வாழ்வில் பார்க்கிறோம். மேற்கண்ட கனஉருவங்கள் யாவும் அநேகமாக நேர்வட்டக் கூம்பு வடிவில் உள்ளன.

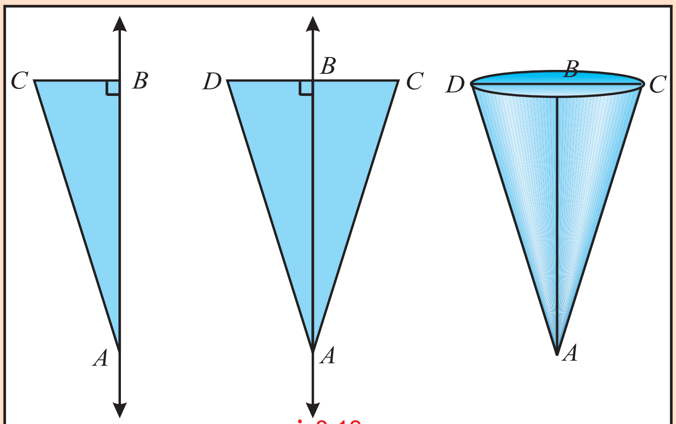
ஒரு திண்மப் பொருளின் அடிப்பாகம் சமதள வட்டப்பகுதியாக இருந்து, அப்பகுதியின் பரப்பு சீராகவும் சாய்வாகவும் குறைந்து கொண்டே வரும்போது இறுதியில் ஒரு புள்ளியில் முடியுமானால், அப்புள்ளி உச்சி எனவும் அத்திண்மப் பொருள் கூம்பு எனவும் அழைக்கப்படும். நேர்வட்டக் கூம்பு எனக் கூறும்போது கூம்பின் அடிப்பகுதி வட்ட வடிவில் உள்ளது எனவும், நேர் என்பது வட்ட வடிவிலான அடிப்பக்கத்தின் மையத்தின் வழியேச் செல்லும் அச்சு, அடிப்பக்கத் தளத்திற்கு செங்குத்தாக உள்ளது எனவும் பொருள்படும். இப்பாடப் பகுதியில், நேர்வட்டக் கூம்பை வரையறுத்து அதன் புறப்பரப்பைக் காண்போம். கீழ்க்காணும் செயல்மூலம் ஒருவர் கூம்பினை நேரடியாக செய்து பார்க்கலாம்.

செய்துபார்

B-ல் செங்கோணமுடைய ஒரு செங்கோண $\triangle ABC$-ஐ தடித்த ஒரு தாளிலிருந்து வெட்டியெடுக்கவும். ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான பக்கங்களில் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தில் கெட்டியான நூலை ஒட்டுக. நூலை கையில் பிடித்துக் கொண்டு நூலை அச்சாகக் கொண்டு முக்கோணத்தை ஏதேனும் ஒரு திசையில் சுழற்றுக.

என்ன நிகழ்கிறது? இம்முக் கோணத்தை சுழற்றுவதால் ஏற்படும் உருவத்தை காண முடிகிறதா? இவ்வாறு சுழற்றும்போது உருவாகும் உருவம் ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பு ஆகும்.

செங்கோண $\triangle ABC$ ஆனது, செங்கோணத்தை உள்ளடக்கிய AB என்ற பக்கத்தை அச்சாகக் கொண்டு 360° சுழலும் போது ஏற்படும் கனஉருவம் நேர் வட்டக் கூம்பு எனப்படும்.



படம் 8.13

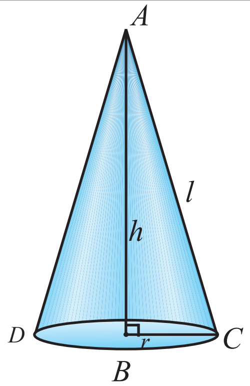
இங்கு AB-ன் நீளத்தை கூம்பின் உயரம் (h) எனவும் BC-ன் நீளத்தை கூம்பின் ஆரம் (r) எனவும் AC-ன் நீளத்தை கூம்பின் சாயுயரம் l எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. படத்திலிருந்து $(BC = BD = r)$ மற்றும் $(AD = AC = l)$ எனவும் அறியலாம்.

செங்கோண $\triangle ABC$-ல்

சாயுயரம், $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ (பிதாகரஸ் தேற்றப்படி)

செங்குத்துயரம், $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

ஆரம், $r = \sqrt{l^2 - h^2}$ எனக் காணலாம்.



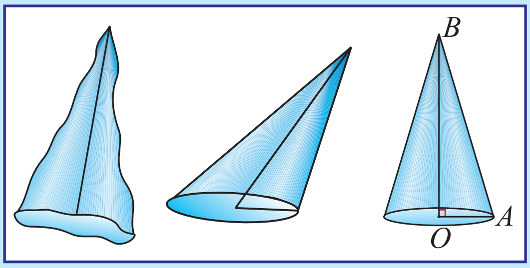
படம் 8.14

குறிப்பு

(i) கூம்பின் அடிப்பாகம் வட்டவடிவில் இல்லை எனில், அது சாய்வுக்கூம்பு (oblique cone) ஆகும்.

(ii) கூம்பின் அச்சானது அதன் வட்ட வடிவ அடிப்பாகத்திற்கு செங்குத்தாக இல்லை எனில், அது வட்டக் கூம்பு (circular cone) எனப்படும்.

(iii) கூம்பின் வட்ட வடிவ அடிப்பாகத்தின் மையத்திற்கு செங்குத்தாக உச்சி அமைந்தால் அது நேர் வட்டக் கூம்பு (right circular cone) எனப்படும்.



படம் 8.15

உள்ளீடற்றக் கூம்பின் வளைபரப்பு (**Curved surface area of a hollow cone**)

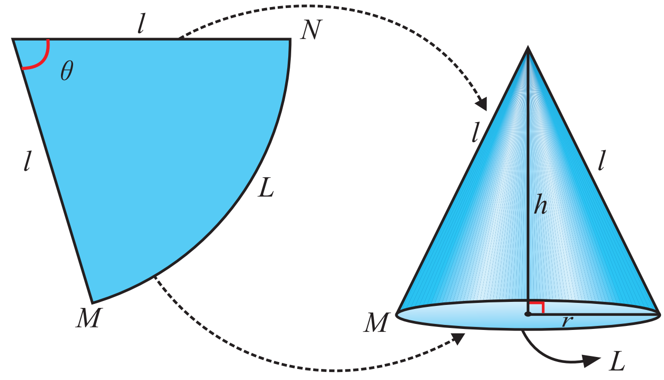
ஒரு வட்டக் கோணப்பகுதியின் ஆரம் l எனவும் அதன் மையக் கோணம் θ எனவும் கொள்க.

L என்பது வில்லின் நீளம் என்க. எனவே,

$$\frac{2\pi l}{L} = \frac{360^\circ}{\theta^\circ} \Longrightarrow L = 2\pi l \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \quad (1)$$

இப்போது, நாம் வட்டக் கோணப்பகுதியின் ஆரங்களை ஒன்றிணைத்து ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பினை பெறுவோம்.

வில்லின் நீளம் $L = 2\pi r$. இங்கு r என்பது கூம்பின் ஆரம்.



படம் 8.16

(1)-லிருந்து நாம் பெறுவது,

$$2\pi r = 2\pi l \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$$

$$\Longrightarrow \quad r = l\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{r}{l} = \left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right) \quad (2)$$

குறிப்புரை

ஒருவட்ட கோணப் பகுதியின் ஆரங்களை ஒன்றிணைத்து கூம்பு உருவாக்கும்போது கீழ்க் காணும் மாற்றங்கள் ஏற்படுகின்றன.

வட்டகோணப்பகுதி		கூம்பு
ஆரம் (l)	→	சாயுயரம் (l)
வில்லின் நீளம் (L)	→	அடிச்சுற்றளவு $2\pi r$
பரப்பு	→	வளைப்பரப்பு πrl

A என்பது வட்டக் கோணப்பகுதியின் பரப்பு எனில்,

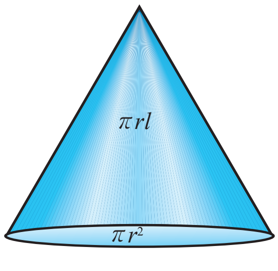
$$\frac{\pi l^2}{A} = \frac{360^\circ}{\theta^\circ} \Longrightarrow A = \pi l^2\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right)$$

கூம்பின் வளைபரப்பு = வட்ட கோணப்பகுதியின் பரப்பு $= A$

எனவே, கூம்பின் வளைபரப்பு $A = \pi l^2\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right) = \pi l^2\left(\frac{r}{l}\right)$. (சமன் (2)-லிருந்து)

ஆகவே, கூம்பின் வளைபரப்பு $= \pi rl$ ச. அலகுகள்.

(ii) திண்ம நேர் வட்டக் கூம்பின் மொத்தப் புறப்பரப்பு
(Total surface area of a solid cone)



படம் 8.17

திண்மக் கூம்பின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = { கூம்பின் வளைபரப்பு + வட்ட அடிப்பகுதியின் பரப்பு

$= \pi rl + \pi r^2$

திண்மக் கூம்பின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= \pi r(l + r)$ ச. அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 8.6

ஒரு திண்ம நேர் வட்டக் கூம்பின் ஆரம் மற்றும் சாயுயரம் முறையே 35 செ.மீ மற்றும் 37செ.மீ. எனில் கூம்பின் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right.$ என்க$\left.\right)$

தீர்வு r மற்றும் l என்பன முறையே நேர் வட்டக் கூம்பின் ஆரம் மற்றும் சாயுயரம் என்க.

எனவே, $r = 35$ செ.மீ, $l = 37$ செ.மீ

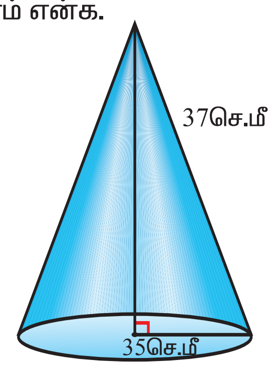
ஆகவே, வளைபரப்பு $= \pi rl = \pi(35)(37)$

$= 4070$ ச.செ.மீ

மேலும், மொத்தப் புறப்பரப்பு $= \pi r[l + r]$

$= \frac{22}{7} \times 35 \times [37 + 35]$

ஆகவே, மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 7920$ ச.செ.மீ



படம் 8.18

எடுத்துக்காட்டு 8.7

O மற்றும் C என்பன முறையே ஒரு நேர்வட்டக்கூம்பின் அடிப்பகுதியின் மையம் மற்றும் உச்சி என்க. B என்பது அடிப்பகுதியின் வட்டச் சுற்று விளிம்பில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. கூம்பின் அடிப்பகுதியின் ஆரம் 6 செ.மீ மற்றும் $\angle OBC = 60^o$ எனில், கூம்பின் உயரம் மற்றும் வளைபரப்பைக் காண்க.

தீர்வு ஆரம் OB = 6 செ.மீ மற்றும் $\angle OBC = 60^o$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

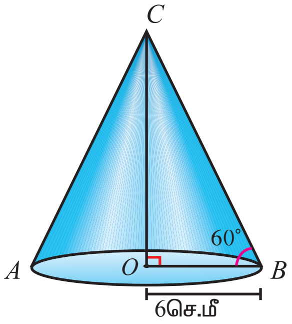
செங்கோண $\triangle OBC$-ல்

$$\cos 60^o = \frac{OB}{BC}$$

$$\Longrightarrow \quad BC = \frac{OB}{\cos 60^\circ}$$

$$\therefore \quad BC = \frac{6}{(\frac{1}{2})} = 12 \text{ செ.மீ}$$

எனவே, கூம்பின் சாயுயரம் $l = 12$ செ.மீ



படம் 8.19

மேலும், செங்கோண $\triangle OBC$-ல்

$$\tan 60^o = \frac{OC}{OB}$$

$$\Longrightarrow \quad OC = OB \tan 60^\circ = 6\sqrt{3}$$

ஆகவே, கூம்பின் உயரம் $OC = 6\sqrt{3}$ செ.மீ

எனவே, கூம்பின் வளைபரப்பு $\pi rl = \pi \times 6 \times 12 = 72\pi$ ச.செ.மீ.

(குறிப்பு $OC = 6\sqrt{3}$ -ஐ $OC^2 = BC^2 - OB^2$ லிருந்தும் பெறலாம்)

எடுத்துக்காட்டு 8.8

21 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்திலிருந்து 120° மையக் கோணம் கொண்ட ஒரு வட்டக் கோணப்பகுதியை வெட்டியெடுத்து, அதன் ஆரங்களை ஒன்றிணைத்து ஒரு கூம்பாக்கினால், கிடைக்கும் கூம்பின் வளைபரப்பைக் காண்க $(\pi = \frac{22}{7})$.

தீர்வு கூம்பின் ஆரம் r என்க

வட்ட கோணப்பகுதியின் கோணம், $\theta = 120^\circ$

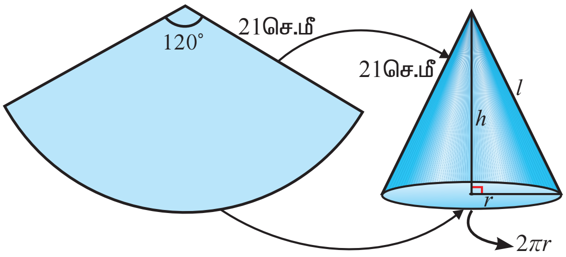
வட்ட கோணப்பகுதியின் ஆரம், $R = 21$ செ.மீ

வட்டக்கோணப்பகுதியின் ஆரங்களை ஒன்றிணைத்து அதனை ஒரு கூம்பாக மாற்றலாம்.

எனவே, கூம்பின் அடிச்சுற்றளவு = வட்டவில்லின் நீளம்

$$\implies \quad 2\pi r = \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times 2\pi R$$

$$\implies \quad r = \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times R$$



படம் 8.20

எனவே, கூம்பின் ஆரம் $r = \frac{120}{360} \times 21 = 7$ செ.மீ

மேலும், கூம்பின் சாயுயரம் = வட்டக் கோணப்பகுதியின் ஆரம்

$$l = R \implies l = 21 \text{ செ.மீ}$$

எனவே, கூம்பின் வளைபரப்பு $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 21 = 462 \text{ ச.செ.மீ.}$$

மாற்று முறை :

கூம்பின் வளைபரப்பு

= வட்டக் கோணப்பகுதியின் பரப்பு

$$= \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times \pi R^2$$

$$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 462 \text{ ச.செ.மீ.}$$

8.2.3 கோளம் (Sphere)

ஒரு வட்ட வடிவத் தகட்டினை அதன் ஏதேனும் ஒரு விட்டத்தை அச்சாகக் கொண்டு சுழற்றும் போது உருவாகும் கன உருவம் **கோளம்** எனப்படும். மேலும், கோளமானது ஒரு முப்பரிமாணப் பொருளாகும். அதற்கு வளைபரப்பு மற்றும் கன அளவு உண்டு.

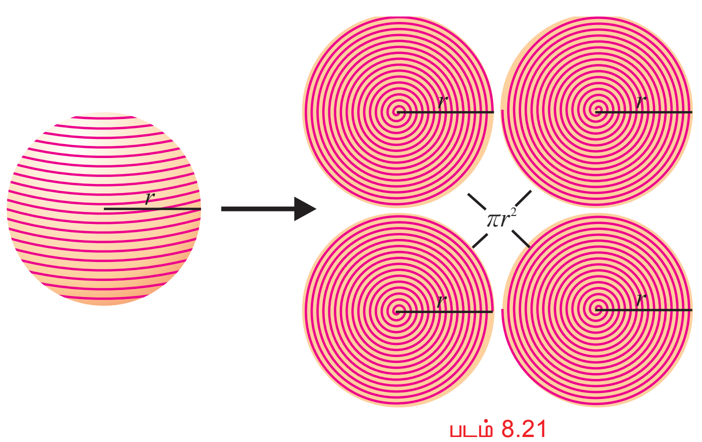
(i) ஒரு திண்மக் கோளத்தின் வளைபரப்பு (Curved surface area of a solid sphere)

செய்துபார்

ஒரு வட்ட வடிவ தகட்டை எடுத்துக் கொண்டு, அதன் ஒரு விட்டத்தின் வழியே ஒரு நூலை ஒட்டுக. பின்பு விட்டத்தை அச்சாகக் கொண்டு தகட்டினை 360° சுழற்றுக. அப்போது தோன்றும் பொருள் பந்து போன்று காணப்படும். இப்புதிய வடிவம் **கோளம்** எனப்படும்.

கீழ்க்காணும் செயலானது ஒரு கோளத்தின் வளைபரப்பு அதன் ஆரத்திற்குச் சமமான ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் பரப்பின் நான்கு மடங்கிற்குச் சமமாகும் என்பதை அறிய உதவும்.

- ஒரு நெகிழிப் (Plastic) பந்தை எடுத்துக் கொள்.
- அதன் உச்சியில் ஒரு ஊசியைப் பொருத்து.
- பந்தின் முழுபுறப் பரப்பையும் ஒரு சீரான நூலால் இடைவெளியின்றி சுற்றுக.
- இந்நூலை வெளியே எடுத்து சுற்றுவதற்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட நூலின் நீளத்தை அளக்க.
- அந்த நூலை நான்கு சமபாகங்களாக பிரிக்க.



படம் 8.21

- படத்தில் காட்டியது போல் நான்கு நூல் துண்டுகளையும் தனித்தனி வட்டவடிவில் வைக்கவும்
- கிடைத்த இவ்வட்டத்தின் ஆரங்களை அளக்க.

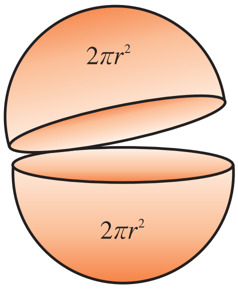
தற்போது, கோளத்தின் ஆரம் = சம வட்டங்களின் ஆரம் .

கோளத்தின் வளைபரப்பு $= 4 \times$ வட்டத்தின் பரப்பு $= 4 \times \pi r^2$

எனவே, கோளத்தின் வளைபரப்பு $= 4\pi r^2$ ச. அலகுகள்.

(ii) திண்ம அரைக்கோளம் (Solid hemisphere)

ஒரு திண்மக் கோளத்தின் மையம் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தளம் அக்கோளத்தை இரு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும். ஒவ்வொரு பகுதியும் ஒரு அரைக்கோளம் எனப்படும்.



படம் 8.22

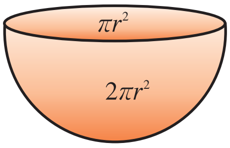
ஆகவே, அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு $= \dfrac{\text{கோளத்தின் வளைபரப்பு}}{2}$

$= \dfrac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2$ ச. அலகுகள்.

அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = அரைக் கோளத்தின் வளைபரப்பு + வட்டப்பகுதி பரப்பு

$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 3\pi r^2$ ச. அலகுகள்.



படம் 8.23

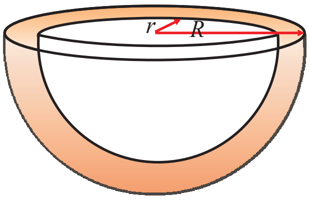
(iii) உள்ளீடற்ற அரைக்கோளம் (Hollow hemisphere)

R மற்றும் r என்பன முறையே உள்ளீடற்ற அரைக் கோளத்தின் வெளி மற்றும் உள் ஆரங்கள் என்க.

உள்ளீடற்ற அரைக் கோளத்தின் வளைபரப்பு

$=$ {உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் வெளிப்புற வளைபரப்பு} + {உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் உட்புற வளைபரப்பு}

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 = 2\pi(R^2 + r^2)$ ச.அலகுகள்.



படம் 8.24

மொத்தப் புறப்பரப்பு = {வெளிப்புற வளைபரப்பு + உட்புற வளைபரப்பு + விளிம்புப் பகுதியின் பரப்பு}

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$

$= 2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R + r)(R - r)$

$= \pi(3R^2 + r^2)$ ச. அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 8.9

7 மீ உள்விட்டமுள்ள ஒரு உள்ளீடற்ற கோளத்தினுள் உட்புறமாக ஒரு சர்க்கஸ் வீரர் மோட்டார் சைக்கிளில் சாகசம் செய்கிறார். அந்த சாகச வீரர் சாகசம் செய்யக் கிடைத்திடும் உள்ளீடற்றக் கோளத்தின் உட் புறப்பரப்பைக் காண்க. (($\pi = \dfrac{22}{7}$ என்க)

தீர்வு உள்ளீடற்ற கோளத்தின் உட்புற விட்டம் $2r = 7$ மீ

மோட்டார் சைக்கிள் வீரர், சாகசம் செய்யக் கிடைத்திடும் பரப்பு

= கோளத்தின் உட்புற வளைபரப்பு

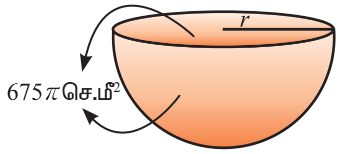
$= 4\pi r^2 = \pi(2r)^2$

$= \dfrac{22}{7} \times 7^2$

ஆகவே, மோட்டார் சைக்கிள் வீரர் சாகசம் செய்திடும் இடத்தின் பரப்பு = 154 ச.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8.10

ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் மொத்த புறப்பரப்பு 675π ச.செ.மீ எனில் அதன் வளைபரப்பைக் காண்க.



படம் 8.25

தீர்வு திண்ம அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

$$3\pi r^2 = 675\pi \text{ ச.செ.மீ}$$

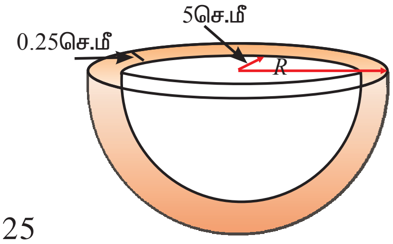
$$\Longrightarrow \quad r^2 = 225$$

திண்ம அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு $= 2\pi r^2 = 2\pi \times 225 = 450\pi$ ச.செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8.11

அரைக்கோள வடிவ கிண்ணத்தின் தடிமன் 0.25 செ.மீ. அதன் உட்புற ஆரம் 5 செ.மீ எனில் அக்கிண்ணத்தின் வெளிப்புற வளைபரப்பைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க)

தீர்வு r, R மற்றும் w என்பன முறையே அரைக்கோள வடிவ கிண்ணத்தின் உள் ஆரம், வெளி ஆரம் மற்றும் தடிமன் என்க.



படம் 8.26

எனவே, $r = 5$ செ.மீ, $w = 0.25$ செ.மீ

$\therefore$ வெளி ஆரம் $R = r + w = 5 + 0.25 = 5.25$ செ.மீ

வெளிப்புற வளைபரப்பு $= 2\pi R^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5.25 \times 5.25$$

ஆகவே, கிண்ணத்தின் வெளிப்புற வளைபரப்பு $= 173.25$ ச.செ.மீ.

பயிற்சி 8.1

1. ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் ஆரம் 14 செ.மீ மற்றும் உயரம் 8 செ.மீ. எனில், அதன் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.
2. ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு 660 ச. செ.மீ. அதன் விட்டம் 14 செ.மீ. எனில், அவ்வுருளையின் உயரத்தையும், வளைபரப்பையும் காண்க.
3. ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு மற்றும் அடிச்சுற்றளவு முறையே 4400 ச.செ.மீ மற்றும் 110 செ.மீ. எனில், அவ்வுருளையின் உயரத்தையும், விட்டத்தையும் காண்க.
4. ஒரு மாளிகையில், ஒவ்வொன்றும் 50 செ.மீ. ஆரமும், 3.5 மீ உயரமும் கொண்ட 12 நேர் வட்ட உருளை வடிவத் தூண்கள் உள்ளன. அத்தூண்களுக்கு வர்ணம் பூச ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ₹ 20 வீதம் என்ன செலவாகும் ?
5. ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு 231 ச. செ.மீ. அதன் வளைபரப்பு மொத்த புறப்பரப்பில் மூன்றில் இரண்டு பங்கு எனில், அதன் ஆரம் மற்றும் உயரத்தைக் காண்க.
6. ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் மொத்த புறப்பரப்பு 1540 செ.மீ ^{2}. அதன் உயரமானது, அடிப்பக்க ஆரத்தைப்போல் நான்கு மடங்கு எனில், உருளையின் உயரத்தைக் காண்க.
7. இரண்டு நேர் வட்ட உருளைகளின் ஆரங்களின் விகிதம் 3 : 2 என்க. மேலும் அவற்றின் உயரங்களின் விகிதம் 5 : 3 எனில், அவற்றின் வளைபரப்புகளின் விகிதத்தைக் காண்க.

8. ஒரு உள்ளீடற்ற உருளையின் வெளிப்புற வளைபரப்பு 540π ச.செ.மீ. அதன் உள்விட்டம் 16 செ.மீ மற்றும் உயரம் 15 செ.மீ. எனில், அதன் மொத்த புறப்பரப்பைக் காண்க.

9. ஒரு உருளை வடிவ இரும்புக்குழாயின் வெளிப்புற விட்டம் 25 செ.மீ, அதன் நீளம் 20 செ.மீ. மற்றும் அதன் தடிமன் 1 செ.மீ எனில், அக்குழாயின் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

10. ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பின் ஆரம் மற்றும் உயரம் முறையே 7 செ.மீ மற்றும் 24 செ.மீ. எனில், அதன் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

11. ஒரு திண்ம நேர் வட்டக் கூம்பின் உச்சிக்கோணம் மற்றும் ஆரம் முறையே 60° மற்றும் 15 செ.மீ எனில், அதன் உயரம் மற்றும் சாயுயரத்தைக் காண்க.

12. ஒரு திண்ம நேர் வட்டக் கூம்பின் அடிச்சுற்றளவு 236 செ.மீ . மற்றும் அதன் சாயுயரம் 12 செ.மீ எனில், அக்கூம்பின் வளைபரப்பைக் காண்க.

13. நேர்வட்ட கூம்பு வடிவில் குவிக்கப்பட்ட நெற்குவியலின் விட்டம் 4.2 மீ மற்றும் அதன் உயரம் 2.8மீ. என்க. இந்நெற்குவியலை மழையிலிருந்து பாதுகாக்க கித்தான் துணியால் மிகச்சரியாக மூடப்படுகிறது எனில், தேவையான கித்தான் துணியின் பரப்பைக் காண்.

14. 180° மையக் கோணமும் 21 செ.மீ. ஆரமும் கொண்ட வட்டகோண வடிவிலான இரும்புத் தகட்டின் ஆரங்களை இணைத்து ஒரு கூம்பு உருவாக்கப்படுகிறது எனில், அக்கூம்பின் ஆரத்தைக் காண்க.

15. ஒரு நேர்வட்ட திண்மக் கூம்பின் ஆரமும் சாயுயரமும் 3 : 5 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அக்கூம்பின் வளைபரப்பு 60π ச.செ.மீ எனில், அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

16. 98.56 ச.செ.மீ புறப்பரப்பு கொண்ட ஒரு திண்மக் கோளத்தின் ஆரத்தைக் காண்க.

17. ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு 2772 ச.செ.மீ எனில், அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

18. இரண்டு திண்ம அரைக்கோளங்களின் ஆரங்கள் 3 : 5 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அக்கோளங்களின் வளைபரப்புகளின் விகிதம் மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்புகளின் விகிதம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

19. ஒரு உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் வெளி ஆரம் மற்றும் உள் ஆரம் முறையே 4.2 செ.மீ மற்றும் 2.1 செ.மீ எனில் அதன் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்த புறப்பரப்பைக் காண்க.

20. அரைக்கோள வடிவ மேற்கூரையின் உட்புற வளைபரப்பிற்கு வர்ணம் பூச வேண்டியுள்ளது. அதன் உட்புற அடிச்சுற்றளவு 17.6 மீ எனில், ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ₹ 5 வீதம், வர்ணம் பூச ஆகும் மொத்த செலவைக் காண்க.

8.3 கன அளவு (Volume)

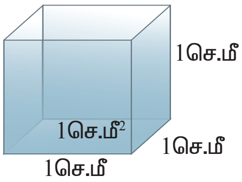
இதுவரை சில திண்மப் பொருட்களின் புறப்பரப்பு தொடர்பான கணக்குகளைக் கண்டோம். இப்போது நாம், சில நன்கறிந்த கன உருவங்களின் கனஅளவுகளை எவ்வாறு கணக்கிடுவது எனக் காண்போம். கனஅளவு என்பது இடத்தை அடைத்துக் கொள்ளும் அளவு ஆகும். ஒரு திண்மப் பொருளின் கனஅளவு என்பது திண்மப் பொருளின் எண்சார்ந்த சிறப்பியல்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு திண்மப்பொருளை ஓரலகு பக்கம் கொண்ட முடிவுறு எண்ணிக்கையில் கனச் சதுரங்களாகப் பிரிக்க முடியுமானால், அக்கனச்சதுரங்களின் எண்ணிக்கையே அப்பொருளின் கனஅளவு ஆகும்.

படம் 8.27-ல் உள்ள கனச்சதுரத்தின் கனஅளவு

$= $ பக்கம் $\times$ பக்கம் $\times$ பக்கம்

$= 1$ செ.மீ $\times 1$ செ.மீ $\times 1$ செ.மீ $= 1$ க. செ.மீ.



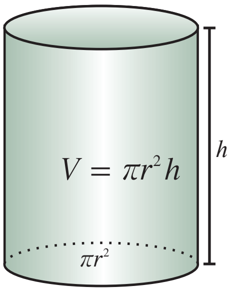
படம் 8.27

ஒரு பொருளின் கனஅளவு 100 க.செ.மீ எனக் கூறுவோமானால், அப்பொருளை முழுவதும் நிரப்ப நமக்கு 1 க.செ.மீ கனஅளவு கொண்ட 100 கனச்சதுரங்கள் தேவை என்பதை உணர்த்துகிறது.

வளைபரப்பைப் போலவே கனஅளவும் ஒரு மிகை மதிப்பாகும். மேலும் திண்மப் பொருட்களின் இடப்பெயர்வினால் அவற்றின் கனஅளவில் மாற்றம் ஏற்படுவதில்லை. சில கன உருவங்களின் கனஅளவுகள் கீழே விவரமாக தரப்பட்டுள்ளன.

8.3.1 நேர்வட்ட உருளையின் கனஅளவு (Volume of a right circular cylinder)

(i) திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் கனஅளவு (Volume of a solid right circular cylinder)



படம் 8.28

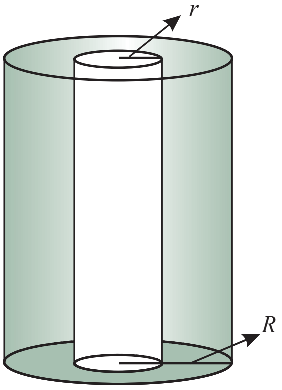
நேர்வட்ட உருளையின் அடிப்பக்கப் பரப்பு மற்றும் உயரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் அவ்வுருளையின் கனஅளவு எனப்படும்.

எனவே, உருளையின் கனஅளவு, $V =$ அடிப்பக்கப்பரப்பு $\times$ உயரம்

$= \pi r^2 \times h$

ஆகவே, நேர்வட்ட உருளையின் கனஅளவு, $V = \pi r^2 h$ க. அலகுகள் ஆகும்.

(ii) உள்ளீடற்ற உருளையின் கனஅளவு (பயன்படுத்தப்பட்ட உலோகத்தின் கனஅளவு) (Volume of a hollow cylinder)



படம் 8.29

R மற்றும் r என்பன முறையே உள்ளீடற்ற உருளையின் வெளி மற்றும் உள் ஆரங்கள் என்க. மேலும் h என்பது உருளையின் உயரம் என்க.

கனஅளவு, V $=$ {வெளிப்பக்க உருளையின் கனஅளவு} $-$ {உள்பக்க உருளையின் கனஅளவு}

$= \pi R^2 h - \pi r^2 h$

ஆகவே, உள்ளீடற்ற உருளையின் கனஅளவு,

$V = \pi h(R^2 - r^2)$ க.அலகுகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.12

ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு 704 ச.செ.மீ மற்றும் அதன் உயரம் 8 செ.மீ எனில், அவ்வுருளையின் கனஅளவை லிட்டரில் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$)

தீர்வு r மற்றும் h என்பன முறையே ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

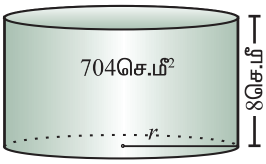
$h = 8$ செ.மீ, வளைபரப்பு $= 704$ ச.செ.மீ

வளைபரப்பு $= 704$

$\Longrightarrow \quad 2\pi rh = 704$

$\Longrightarrow \quad 2 \times \frac{22}{7} \times r \times 8 = 704$

$\therefore \quad r = \frac{704 \times 7}{2 \times 22 \times 8} = 14$ செ.மீ



படம் 8.30

உருளையின் கனஅளவு, $V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 8$$

$$= 4928 \text{ க.செ.மீ}$$

உருளையின் கன அளவு $= 4.928$ லிட்டர். (1000 க.செ.மீ = 1 லிட்டர்)

எடுத்துக்காட்டு 8.13

ஒரு உள்ளீடற்ற இரும்பு குழாயின் நீளம் 28 செ.மீ., அதன் வெளி மற்றும் உள்விட்டங்கள் முறையே 8 செ.மீ மற்றும் 6 செ.மீ. எனில், இரும்புக் குழாயின் கனஅளவைக் காண்க. மேலும் 1 க.செ.மீ இரும்பின் எடை 7 கிராம் எனில், இரும்புக் குழாயின் எடையைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$)

தீர்வு r, R மற்றும் h என்பன முறையே இரும்புக்குழாயின் உள் ஆரம், வெளி ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

$2r = 6$ செ.மீ, $2R = 8$ செ.மீ , $h = 28$ செ.மீ

எனவே, $r = 3$ செ.மீ மற்றும் $R = 4$ செ.மீ

இரும்புக் குழாயின் கனஅளவு, $V = \pi \times h \times (R + r)(R - r)$

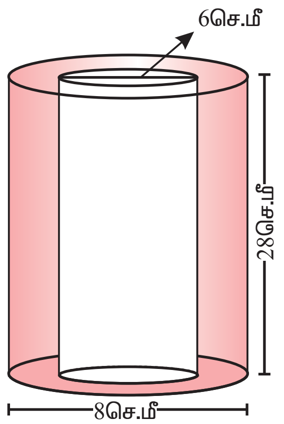
$$= \frac{22}{7} \times 28 \times (4 + 3)(4 - 3)$$

$\therefore$ கனஅளவு, $V = 616$ க.செ.மீ

1 க.செ.மீ இரும்பின் எடை $= 7$ கிராம்

616 க.செ.மீ இரும்புக் குழாயின் எடை $= 7 \times 616$ கிராம்

ஆகவே, இரும்புக் குழாயின் எடை $= 4.312$ கி.கி.



படம் 8.31

எடுத்துக்காட்டு 8.14

ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் அடிப்பக்கப் பரப்பு மற்றும் கனஅளவு முறையே 13.86 ச.செ.மீ மற்றும் 69.3 க.செ.மீ. எனில், அவ்வுருளையின் உயரம் மற்றும் வளைபரப்பைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$)

தீர்வு A மற்றும் V என்பன முறையே நேர்வட்ட உருளையின் அடிப்பக்கப் பரப்பு மற்றும் கனஅளவு என்க.

எனவே, அடிப்பக்கப் பரப்பு $A = \pi r^2 = 13.86$ ச.செ.மீ

மேலும், கனஅளவு, $V = \pi r^2 h = 69.3$ க.செ.மீ

ஆகவே, $\pi r^2 h = 69.3$

$\Longrightarrow$ $13.86 \times h = 69.3$

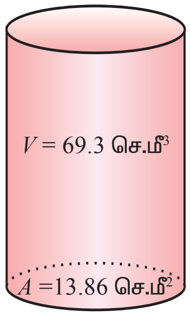
$\therefore$ $h = \frac{69.3}{13.86} = 5$ செ.மீ

மேலும், அடிப்பக்கப் பரப்பு $= \pi r^2 = 13.86$

$$\frac{22}{7} \times r^2 = 13.86$$

$$r^2 = 13.86 \times \frac{7}{22} = 4.41$$

$\therefore$ $r = \sqrt{4.41} = 2.1$ செ.மீ.



படம் 8.32

உருளையின் வளைபரப்பு $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 5$

எனவே, வளைபரப்பு $= 66$ ச.செ.மீ.

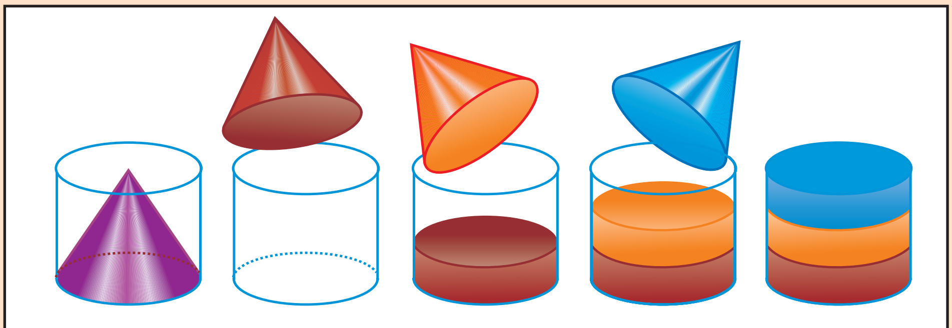
8.3.2 நேர்வட்டக் கூம்பின் கனஅளவு (Volume of a right circular cone)

r மற்றும் h என்பன முறையே நேர்வட்டக் கூம்பின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

கூம்பின் கனஅளவு $V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$ க. அலகுகள். இச்சூத்திரத்தை கீழ்க்காணும் செயல்மூலம் நியாயப்படுத்தலாம்.

செய்துபார்

கீழ்கண்ட படத்தில் காட்டியவாறு சம அளவு ஆரம் மற்றும் உயரம் கொண்ட உள்ளீடற்ற கூம்பு மற்றும் உள்ளீடற்ற உருளையை தயாரிக்கவும். இப்போது நாம் கீழ்கண்ட செயல்மூலம் கூம்பின் கனஅளவினைக் கண்டறியலாம். மணல் அல்லது திரவத்தினால் கூம்பினை நிரப்பு. பிறகு அதனை உருளையினுள் கொட்டுக. இச்சோதனையை தொடர்ந்து செய்யும் போது மூன்றாவது முறையின் இறுதியில் உருளையானது மணல் / திரவத்தால் முழுவதும் நிரம்பும்.



படம் 8.33

இந்த எளிய செயலிலிருந்து r மற்றும் h என்பன முறையே உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் எனில், $3\times$(கூம்பின் கனஅளவு) $=$ உருளையின் கனஅளவு $= \pi r^2 h$ என அறியலாம். எனவே, கூம்பின் கனஅளவு $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$ க. அலகுகள் என அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.15

ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பின் கனஅளவு 4928 க.செ.மீ. மற்றும் அதன் உயரம் 24 செ. மீ எனில், அக்கூம்பின் ஆரத்தைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க)

தீர்வு r, h மற்றும் V என்பன முறையே கூம்பின் ஆரம், உயரம் மற்றும் கனஅளவு என்க.

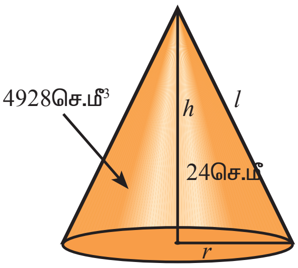
எனவே, $V = 4928$ க.செ.மீ மற்றும் $h = 24$ செ.மீ

ஆகவே, $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 4928$

$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 24 = 4928$

$\Longrightarrow \quad r^2 = \frac{4928 \times 3 \times 7}{22 \times 24} = 196.$

ஆகவே, கூம்பின் ஆரம் $r = \sqrt{196} = 14$ செ.மீ.



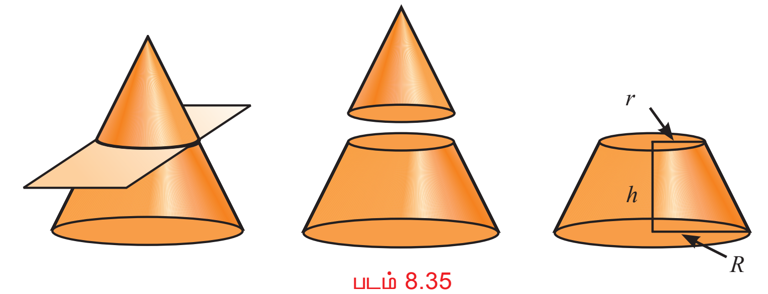
படம் 8.34

8.3.3 ஒரு கூம்பின் இடைக்கண்டத்தின் கனஅளவு (Volume of a frustum of a cone)

நாம் ஏதேனும் ஒரு திண்ம நேர் வட்டக்கூம்பை எடுத்துக் கொண்டு, அதனை ஒரு சிறிய நேர்வட்டக் கூம்பு கிடைக்குமாறு இரு பாகங்களாக வெட்டினால் கிடைக்கும் எஞ்சிய பகுதியை கூம்பின் இடைக்கண்டம் (frustum of a cone) என்போம். இதனை கீழ்கண்ட செயல் மூலம் அறிந்து கொள்ளலாம்.

செய்துபார்

களிமண் அல்லது மெழுகை எடுத்துக்கொண்டு, அதிலிருந்து ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பினை உருவாக்குக. அதன் அடிப்பாகத்திற்கு இணையாக ஒரு கத்தியால் அதனை வெட்டவும். அப்போது கிடைக்கும் சிறிய கூம்பு பாகத்தினை நீக்கு. உன்னிடம் எஞ்சியுள்ள பகுதி எது ? திண்மக் கூம்பின் எஞ்சியுள்ள பகுதி கூம்பின் இடைக் கண்டம் (frustum) எனப்படும். இலத்தீன் மொழியில் frustum என்பதன் பொருள் "வெட்டியெடுக்கப்பட்ட ஒரு துண்டு" எனப் பொருள்படும். frustum என்ற சொல்லின் பன்மை frusta என்பதாகும்.



படம் 8.35

ஆகவே, ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பினை அதன் அடிப்பாகத்திற்கு இணையாக ஒரு தளத்தால் வெட்டும்போது கிடைக்கும் கூம்பின் அடிப்பாகத்தோடு இணைந்த பகுதி கூம்பின் இடைக்கண்டம் எனப்படும். இவ்விடைக்கண்டத்திற்கு இரண்டு வட்டப்பகுதிகள் உண்டு. ஒன்று அடிப்பாகத்திலும் மற்றொன்று மேற்பகுதியிலும் இருக்கும்.

நாம் கூம்பின் இடைக்கண்டத்தின் கன அளவை இப்போது காண்போம்.

ஒரு கூம்பின் இடைக்கண்டத்தின் கனஅளவு என்பது இரண்டு கூம்புகளின் கன அளவுகளின் வேறுபாட்டைத் தவிர வேறொன்றுமல்ல.

ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பின் இடைக் கண்டத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். R என்பது கொடுக்கப்பட்ட கூம்பின் ஆரம் என்க. r மற்றும் x என்பன முறையே இடைக்கண்டத்தை நீக்கிய பிறகு கிடைத்த சிறிய கூம்பின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க. h என்பது இடைக்கண்டத்தின் உயரம் என்க.

தற்போது,

இடைக்கண்டத்தின் கன அளவு, $V = \left.\begin{matrix}\text{கொடுக்கப்பட்ட} \\ \text{கூம்பின் கன அளவு}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{சிறிய கூம்பின்} \\ \text{கனஅளவு}\end{matrix}\right.$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times (x+h) - \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times x$$

$$V = \frac{1}{3}\pi[x(R^2 - r^2) + R^2 h]. \qquad (1)$$

படம் 8.36-லிருந்து $\Delta BFE \sim \Delta DGE$

$$\therefore \quad \frac{BF}{DG} = \frac{FE}{GE}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{R}{r} = \frac{x+h}{x}$$

$$\Longrightarrow \quad Rx - rx = rh$$

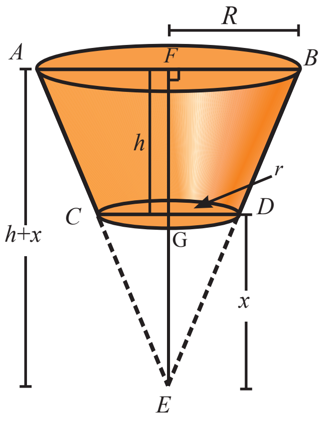
$$\Longrightarrow \quad x(R-r) = rh \qquad (2)$$

இவ்வாறு, நாம் பெறுவது $x = \dfrac{rh}{R-r}$

இப்போது (1)-லிருந்து $\Longrightarrow \quad V = \dfrac{1}{3}\pi[x(R^2 - r^2) + R^2h]$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi[x(R-r)(R+r) + R^2h]$$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi[rh(R+r) + R^2h] \qquad \text{((2)-லிருந்து)}$$



படம் 8.36

இடைக்கண்டத்தின் கனஅளவு, $V = \dfrac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$ க.அலகுகள்.

குறிப்பு

* இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு $= \pi(R+r)l$, இங்கு $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$

* இடைக்கண்டத்தின் மொத்தப் பரப்பு $= \pi l(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2$, இங்கு $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$

* (தேர்வுக்குரியவை அல்ல)

எடுத்துக்காட்டு 8.16

ஒரு இடைக்கண்ட வடிவிலான வாளியின் மேற்புற மற்றும் அடிப்புற ஆரங்கள் முறையே 15செ.மீ மற்றும் 8 செ.மீ. மேலும், ஆழம் 63 செ.மீ எனில், அதன் கொள்ளளவை லிட்டரில் காண்க. $(\pi = \frac{22}{7})$

தீர்வு R மற்றும் r என்பது முறையயே வாளியின் மேற்புற மற்றும் அடிப்புற பகுதிகளின் ஆரங்கள் எனவும் h என்பது அதன் உயரம் (ஆழம்) எனவும் கொள்க.

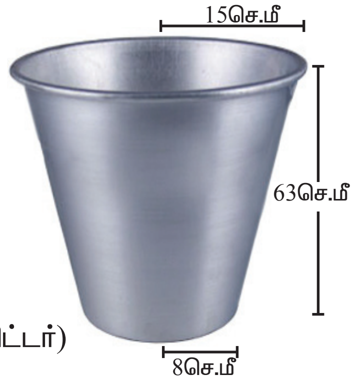
ஆகவே, $R = 15$ செ.மீ, $r = 8$ செ.மீ மற்றும் $h = 63$ செ.மீ.

வாளியின் கனஅளவு $= \dfrac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 63 \times (15^2 + 8^2 + 15 \times 8)$$

$= 26994$ க.செ.மீ

$= \dfrac{26994}{1000}$ லிட்டர் (1000 க.செ.மீ = 1 லிட்டர்)



படம் 8.37

எனவே, வாளியின் கனஅளவு = 26.994 லிட்டர்.

8.3.4 கோளத்தின் கனஅளவு (Volume of a sphere)

(i) ஒரு திண்மக் கோளத்தின் கனஅளவு (Volume of a solid sphere)

கீழ்காணும் எளிய சோதனையின் மூலம் ஒரு கோளத்தின் கனஅளவினை

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ க.அலகுகள் என அறியலாம்.

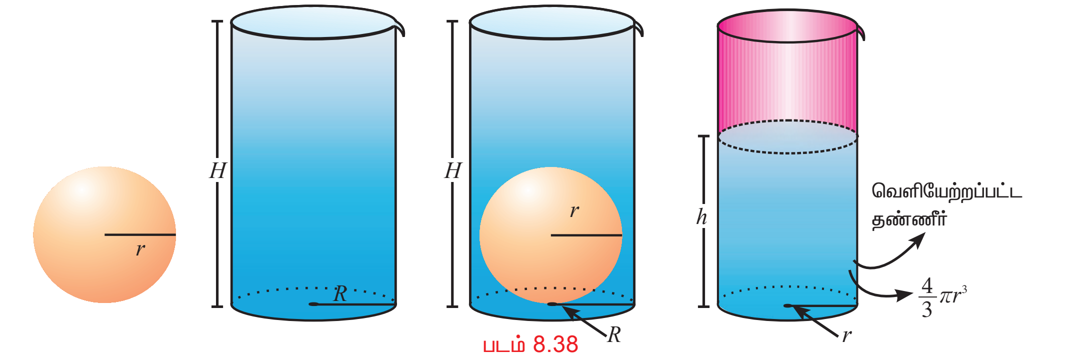
செய்துபார் R அலகு ஆரமும், H அலகு உயரமுள்ள ஒரு உருளை வடிவப் பாத்திரத்தை எடுத்துக் கொள்க. அதனை முழுவதும் தண்ணீரால் நிரப்பு. r அலகு ஆரம் கொண்ட (இங்கு $R > r$) கோளத்தை, உருளைப்பாத்திரத்தில் மூழ்கச் செய்து வெளியேறிய தண்ணீரை r அலகு ஆரமும், H அலகு உயரமும் கொண்ட மற்றொரு உருளை வடிவ பாத்திரத்தில் நிரப்புக. தண்ணீர் மட்டத்தின் உயரமானது அதன் ஆரத்தைப் போன்று $\frac{4}{3}$ மடங்கிற்கு சமமாக இருக்கும் ($h = \frac{4}{3}r$). இப்போது கோளத்தின் கனஅளவு வெளியேற்றப்பட்ட தண்ணீரின் கனஅளவிற்கு சமம் ஆகும்.

வெளியேற்றப்பட்ட தண்ணீரின் கன அளவு V = அடிப்பரப்பு x உயரம்

$$= \pi r^2 \times \frac{4}{3}r \text{ (இங்கு தண்ணீர் மட்டத்தின் உயரம் } h = \frac{4}{3}r\text{)}$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

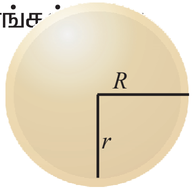
$\therefore$ கோளத்தின் கனஅளவு, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ க. அலகுகள் என அறிந்து கொள்ளலாம்.



படம் 8.38

(ii) உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கனஅளவு (பயன்படுத்தப்பட்ட உலோகத்தின் கனஅளவு) (Volume of a hollow sphere)

r மற்றும் R என்பன முறையே ஒரு உள்ளீடற்ற கோளத்தின் உள் மற்றும் வெளி ஆரங்கள் என்க.



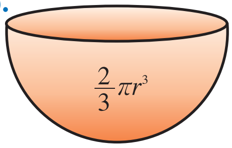
படம் 8.39

உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கனஅளவு = வெளிக்கோளத்தின் கனஅளவு − உள்கோளத்தின் கன அளவு

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$\therefore$ உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$ க.அலகுகள்.

(iii) திண்ம அரைக் கோளத்தின் கனஅளவு (Volume of a solid hemisphere).



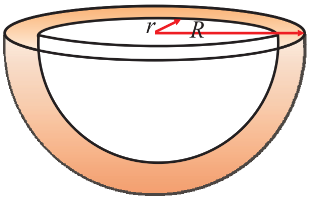
படம் 8.40

திண்ம அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{1}{2} \times$ திண்மக் கோளத்தின் கனஅளவு

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

திண்ம அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{2}{3}\pi r^3$ க.அலகுகள்.

(iv) உள்ளீடற்ற திண்ம அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு (பயன்படுத்தப்பட்ட உலோகத்தின் கனஅளவு) (Volume of a solid hollow hemisphere)



படம் 8.41

உள்ளீடற்ற அரைக் கோளத்தின் கனஅளவு = வெளி அரைக் கோளத்தின் கனஅளவு − உள் அரைக் கோளத்தின் கன அளவு

$$= \frac{2}{3} \times \pi \times R^3 - \frac{2}{3} \times \pi \times r^3$$

உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$ க.அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 8.17

8.4 செ.மீ விட்டம் கொண்ட ஒரு கோளவடிவ திண்ம உலோக எறிகுண்டின் கன அளவைக் காண்க.($\pi = \frac{22}{7}$ என்க)

படம் 8.42

தீர்வு r என்பது திண்ம கோள வடிவ உலோக எறி குண்டின் ஆரம் என்க.

ஆகவே, $2r = 8.4$ செ. $\implies r = 4.2$ செ.மீ

உலோக எறிகுண்டின் கன அளவு $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{42}{10} \times \frac{42}{10} \times \frac{42}{10}$$

எனவே, உலோக எறிகுண்டின் கன அளவு = 310.464 க.செ.மீ.

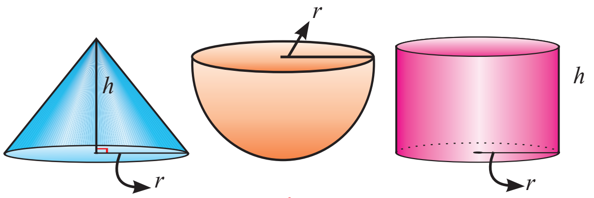
எடுத்துக்காட்டு 8.18

ஒரு கூம்பு, ஒரு அரைக்கோளம், மற்றும் ஒரு உருளை ஆகியன சம அடிப்பரப்பினைக் கொண்டுள்ளன. கூம்பின் உயரம், உருளையின் உயரத்திற்கு சமமாகவும், மேலும் இவ்வுயரம், அவற்றின் ஆரத்திற்கு சமமாகவும் இருந்தால் இம்மூன்றின் கன அளவுகளுக்கிடையே உள்ள விகிதத்தைக் காண்க.

தீர்வு r என்பது கூம்பு, அரைக்கோளம் மற்றும் உருளையின் பொதுவான ஆரம் என்க.

h என்பது கூம்பு மற்றும் உருளையின் உயரம் என்க. எனவே, $r = h$ ஆகும்.

V_1, V_2 மற்றும் V_3 என்பன முறையே கூம்பு, அரைக்கோளம் மற்றும் உருளையின் கனஅளவுகளை குறிக்கட்டும்.



படம் 8.43

இப்போது, $V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^2 h$

$\implies \quad = \frac{1}{3}\pi r^3 : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^3 \qquad (r = h)$

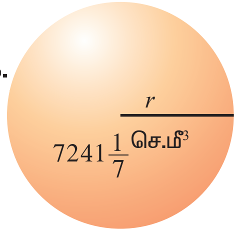
$\implies \quad V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1$

ஆகவே, கனஅளவுகளின் விகிதம் 1 : 2 : 3.

எடுத்துக்காட்டு 8.19

ஒரு திண்மக் கோளத்தின் கனஅளவு $7241\frac{1}{7}$ க.செ.மீ எனில், அதன் ஆரத்தைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க)

தீர்வு r மற்றும் V என்பன முறையே கோளத்தின் ஆரம் மற்றும் கனஅளவு என்க.



படம் 8.44

$V = 7241\frac{1}{7}$ க.செ.மீ

$\implies \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{50688}{7}$

$\implies \quad \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3 = \frac{50688}{7}$

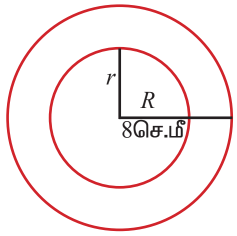
$$r^3 = \frac{50688}{7} \times \frac{3 \times 7}{4 \times 22}$$
$$= 1728 = 4^3 \times 3^3$$

ஆகவே, கோளத்தின் ஆரம், $r = 12$ செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8.20

ஒரு உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கனஅளவு $\frac{11352}{7}$ க.செ.மீ. மற்றும் அதன் வெளி ஆரம் 8 செ.மீ. எனில், அக்கோளத்தின் உள்ஆரத்தைக் காண்க ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க).

தீர்வு R மற்றும் r என்பன முறையே உள்ளீடற்ற கோளத்தின் வெளி மற்றும் உள் ஆரங்கள் என்க. V என்பது அக்கோளத்தின் கனஅளவு என்க.



படம் 8.45

ஆகவே, கனஅளவு $V = \frac{11352}{7}$ க.செ.மீ.

$$\Longrightarrow \quad \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) = \frac{11352}{7}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}(8^3 - r^3) = \frac{11352}{7}$$

$$512 - r^3 = 387 \Longrightarrow r^3 = 125 = 5^3$$

எனவே, உள் ஆரம் $r = 5$ செ.மீ.

பயிற்சி 8.2

1. ஒரு திண்ம உருளையின் ஆரம் 14 செ.மீ. அதன் உயரம் 30 செ.மீ எனில், அவ்வுருளையின் கனஅளவைக் காண்க.
2. ஒரு மருத்துவமனையிலுள்ள நோயாளி ஒருவருக்கு தினமும் 7 செ.மீ விட்டமுள்ள உருளை வடிவ கிண்ணத்தில் வடிச்சாறு (Soup) வழங்கப்படுகிறது. அப்பாத்திரத்தில் 4செ.மீ உயரத்திற்கு வடிச்சாறு ஒரு நோயாளிக்கு வழங்கப்பட்டால், 250 நோயாளிகளுக்கு வழங்கத் தேவையான வடிச்சாறின் கனஅளவினைக் காண்க.
3. ஒரு திண்ம உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரத்தின் கூடுதல் 37 செ.மீ. என்க. மேலும், அதன் மொத்த புறப்பரப்பு 1628 ச.செ.மீ எனில், அவ்வுருளையின் கனஅளவைக் காண்க.
4. 62.37 க.செ.மீ. கனஅளவு கொண்ட ஒரு திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் உயரம் 4.5 செ.மீ எனில், அவ்வுருளையின் ஆரத்தைக் காண்க.
5. இரண்டு நேர் வட்ட உருளைகளின் ஆரங்களின் விகிதம் 2 : 3. மேலும் உயரங்களின் விகிதம் 5 : 3 எனில், அவற்றின் கனஅளவுகளின் விகிதத்தைக் காண்க.
6. ஒரு உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரத்தின் விகிதம் 5 : 7. மேலும் அதன் கனஅளவு 4400 க.செ.மீ எனில், அவ்வுருளையின் ஆரத்தைக் காண்க.
7. 66 செ.மீ $\times$ 12 செ.மீ எனும் அளவுக் கொண்ட ஒரு உலோகத் தகட்டினை 12 செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு உருளையாக மாற்றினால் கிடைக்கும் உருளையின் கனஅளவைக் காண்க.
8. ஒரு பென்சிலானது ஒரு நேர் வட்ட உருளை வடிவில் உள்ளது. பென்சிலின் நீளம் 28 செ.மீ மற்றும் அதன் ஆரம் 3 மி.மீ. பென்சிலினுள் அமைந்த மையின் (கிராஃபைட்)-ன் ஆரம் 1 மி.மீ எனில், பென்சில் தயாரிக்க பயன்படுத்தப்பட்ட மரப்பலகையின் கனஅளவைக் காண்க.

9. ஒரு திண்மக் கூம்பின் ஆரம் மற்றும் சாயுயரம் முறையே 20 செ.மீ மற்றும் 29 செ.மீ. எனில் அத்திண்மக் கூம்பின் கனஅளவைக் காண்க.

10. மரத்தினாலான ஒரு திண்மக் கூம்பின் அடிச்சுற்றளவு 44 செ.மீ. மற்றும் அதன் உயரம் 12 செ.மீ எனில் அத்திண்மக் கூம்பின் கனஅளவைக் காண்க.

11. ஒரு பாத்திரம் இடைக்கண்டம் வடிவில் உள்ளது. அதன் மேற்புற ஆரம் மற்றும் உயரம் முறையே 8 செ.மீ மற்றும் 14 செ.மீ என்க. அப்பாத்திரத்தின் கனஅளவு $\frac{5676}{3}$ க.செ.மீ எனில், அடிப்பக்கத்திலுள்ள வட்டத்தின் ஆரத்தினைக் காண்க.

12. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் இடைக்கண்டத்தின் இருபுறமும் அமைந்த வட்ட விளிம்புகளின் சுற்றளவுகள் முறையே 44 செ.மீ மற்றும் 8.4π செ.மீ என்க. அதன் உயரம் 14 செ.மீ எனில்,அவ்விடைக்கண்டத்தின் கனஅளவைக் காண்க.

13. 5 செ.மீ, 12 செ.மீ. மற்றும் 13 செ.மீ. பக்க அளவுகள் கொண்ட ஒரு செங்கோண $\triangle ABC$ ஆனது 12 செ.மீ. நீளமுள்ள அதன் ஒரு பக்கத்தை அச்சாகக் கொண்டு சுழற்றப்படும்போது உருவாகும் கூம்பின் கனஅளவைக் கண்டுபிடி.

14. ஒரு திண்ம நேர் வட்டக் கூம்பின் ஆரமும் உயரமும் 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் உள்ளது. அதன் கனஅளவு 100.48 க.செ.மீ எனில், அக்கூம்பின் சாயுயரத்தைக் கண்டுபிடி. ($\pi = 3.14$ என்க)

15. ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் கனஅளவு 216π க.செ.மீ மற்றும் அக்கூம்பின் ஆரம் 9 செ.மீ எனில், அதன் உயரத்தைக் காண்க.

16. கோள வடிவிலமைந்த 200 இரும்பு குண்டுகள் (ball bearings) ஒவ்வொன்றும் 0.7 செ.மீ ஆரம் கொண்டது. இரும்பின் அடர்த்தி 7.95 கிராம் /செ.மீ ^{3} எனில் இரும்புக் குண்டுகளின் நிறையைக் காண்க. (நிறை = கனஅளவு × அடர்த்தி)

17. ஒரு உள்ளீடற்ற கோளத்தின் வெளி மற்றும் உள் ஆரங்கள் முறையே 12 செ.மீ மற்றும் 10 செ. மீ எனில், அக்கோளத்தின் கன அளவைக் காண்க.

18. ஓர் அரைக்கோளத்தின் கன அளவு 1152π க.செ. மீ. எனில், அதன் வளைபரப்பு காண்க.

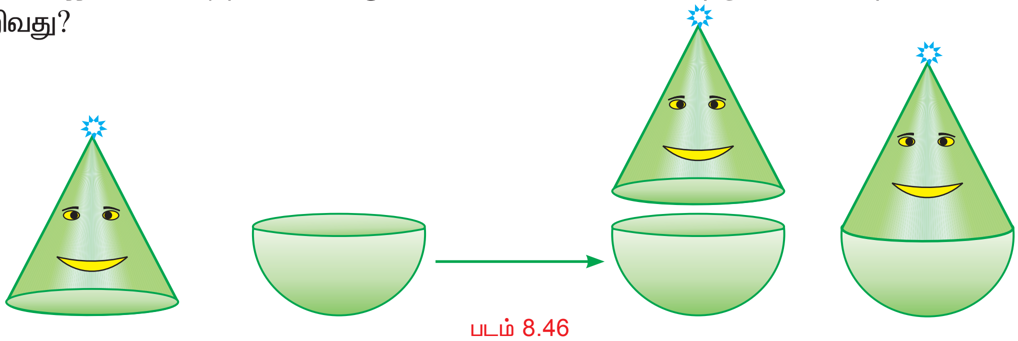
19. 14 செ.மீ பக்க அளவுகள் கொண்ட ஒரு கனச்சதுரத்தில் இருந்து வெட்டியெடுக்கப்படும் மிகப்பெரிய கூம்பின் கனஅளவைக் காண்க.

20. 7 செ.மீ ஆரம் கொண்ட கோள வடிவ பலூனில் காற்று செலுத்தப்படும்போது அதன் ஆரம் 14 செ.மீ ஆக அதிகரித்தால், அவ்விரு நிலைகளில் பலூனின் கனஅளவுகளின் விகிதத்தைக் காண்க.

8.4 இணைந்த கனஉருவங்கள் (Combination of Solids)

நம்முடைய அன்றாட வாழ்வில், இரண்டு அல்லது அதற்குமேல் இணைந்த கன உருவங்களால் ஆன விளையாட்டுப் பொம்மைகள், வாகனங்கள், பாத்திரங்கள், கருவிகள் போன்றவற்றினைக் காண்கிறோம்.

நாம் இவ்விணைந்த கன உருவங்களின் வளைபரப்பு மற்றும் கன அளவினை எவ்வாறு கண்டறிவது?



படம் 8.46

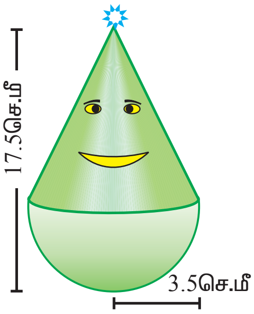
இணைந்த கன உருவத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பானது அவ்விணைந்த உருவத்தில் இணைந்துள்ள கனஉருவங்களின் மொத்தப் புறப்பரப்புகளின் கூடுதலுக்கு சமமாக இருக்க வேண்டியதில்லை. இருந்த போதிலும், படம் 8.46-ல் இணைந்த கன உருவத்தின் மொத்த புறப்பரப்பானது அவ்வுருவத்தில் இணைந்துள்ள கூம்பு மற்றும் அரைக்கோளத்தின் புறப்பரப்புகளின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும். மேலும் அவ்விணைந்த உருவத்தின் கன அளவு ஆனது இணைந்துள்ள அவ்விரண்டு கன உருவங்களின் கன அளவுகளின் கூடுதலுக்குச் சமம் ஆகும். படத்திலிருந்து,

கன உருவத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பளவு = அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு + கூம்பின் வளைபரப்பு

கன உருவத்தின் கன அளவு = அரைக்கோளத்தின் கன அளவு + கூம்பின் கன அளவு

எடுத்துக்காட்டு 8.21

ஒரு திண்ம மரப்பொம்மையானது அரைக்கோளத்தின் மேல் கூம்பு இணைந்த வடிவில் உள்ளது. அரைக்கோளம் மற்றும் கூம்பு ஆகியவற்றின் ஆரம் 3.5செ.மீ. மேலும் பொம்மையின் மொத்த உயரம் 17.5செ.மீ எனில் அப்பொம்மை தயாரிக்கப் பயன்படுத்தப்பட்ட மரத்தின் கன அளவைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$)



படம் 8.47

தீர்வு

அரைக்கோளப் பகுதி :

ஆரம் $r = 3.5$ செ.மீ

கூம்புப் பகுதி :

ஆரம் $r = 3.5$ செ.மீ

உயரம் $h = 17.5 - 3.5 = 14$ செ.மீ

பொம்மை தயாரிக்கப் பயன்படுத்தப்பட்ட மரத்தின் கனஅளவு = அரைக் கோளப்பகுதியின் கனஅளவு + கூம்புப்பகுதியின் கன அளவு

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

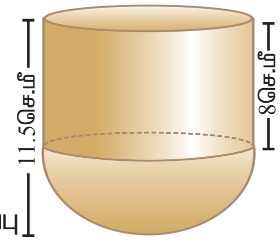
$$= \frac{\pi r^2}{3}(2r + h)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5 \times 3.5}{3} \times (2 \times 3.5 + 14) = 269.5$$

ஆகவே, மரப்பொம்மை தயாரிக்கப் பயன்படுத்தப்பட்ட மரத்தின் கன அளவு = 269.5 க.செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8.22

ஒரு கோப்பையானது அரைக்கோளத்தின் மீது உருளை இணைந்த வடிவில் உள்ளது. உருளைப் பகுதியின் உயரம் 8 செ.மீ மற்றும் கோப்பையின் மொத்த உயரம் 11.5 செ.மீ. எனில் அக்கோப்பையின் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க.)



படம் 8.48

தீர்வு

அரைக்கோளப் பகுதி :

ஆரம், r = மொத்த உயரம் -8 செ.மீ.

$\Longrightarrow \quad r = 11.5 - 8 = 3.5$ செ.மீ

உருளைப் பகுதி :

உயரம், $h = 8$ செ.மீ.

ஆரம், $r = 3.5$ செ.மீ $= \frac{7}{2}$ செ.மீ

கோப்பையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = அரைக்கோளப் பகுதியின் வளைபரப்பு + உருளைப் பகுதியின் வளைபரப்பு

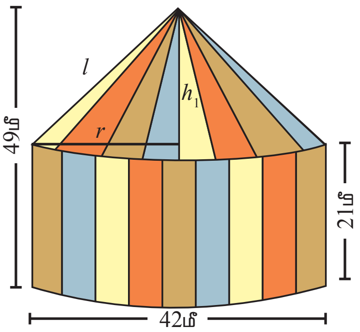
$$= 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2}\left(\frac{7}{2} + 8\right)$$

எனவே, கோப்பையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = 253 ச.செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8.23

ஒரு சர்க்கஸ் கூடாரமானது உருளையின் மீது கூம்பு இணைந்த வடிவில் அமைந்துள்ளது. கூடாரத்தின் மொத்த உயரம் 49 மீ. அதன் அடிப்பாகத்தின் விட்டம் 42 மீ. உருளைப்பாகத்தின் உயரம் 21 மீ. மேலும் 1 ச.மீ கித்தான் துணியின் விலை ₹12.50 எனில், கூடாரம் அமைக்கத் தேவையான கித்தான் துணியின் விலையைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$)



படம் 8.49

தீர்வு

உருளைப் பகுதி	கூம்புப் பகுதி
விட்டம், $2r = 42$ மீ	ஆரம், $r = 21$ மீ
ஆரம், $r = 21$ மீ	உயரம், $h_1 = 49 - 21 = 28$ மீ
உயரம், $h = 21$ மீ	சாயுயரம், $l = \sqrt{h_1^2 + r^2}$

$$= \sqrt{28^2 + 21^2}$$
$$= 7\sqrt{4^2 + 3^2} = 35 \text{ மீ}$$

தேவையான கித்தான் துணியின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = உருளைப் பகுதியின் வளைபரப்பு + கூம்புப் பகுதியின் வளைபரப்பு

$$= 2\pi rh + \pi rl = \pi r(2h + l)$$
$$= \frac{22}{7} \times 21(2 \times 21 + 35) = 5082$$

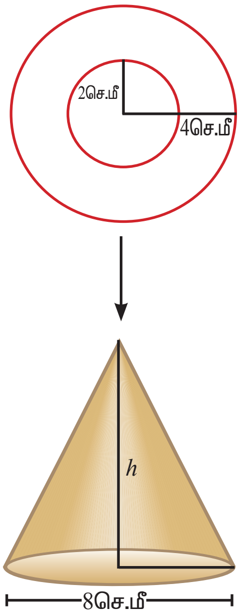
எனவே, கித்தான் துணியின் பரப்பு = 5082 ச.மீ

1 ச.மீ கித்தான் துணியின் விலை = ₹12.50

எனவே, தேவையான கித்தான் துணியின் மொத்த விலை = $5082 \times 12.5 =$ ₹63525.

எடுத்துக்காட்டு 8.24

ஒரு உள்ளீடற்ற கோளத்தின் வெளி மற்றும் உள் விட்டங்கள் முறையே 8 செ.மீ மற்றும் 4 செ.மீ. இக்கோளமானது உருக்கப்பட்டு 8 செ.மீ விட்டமுள்ள நேர் வட்ட திண்மக் கூம்பாக மாற்றப்பட்டால் கூம்பின் உயரத்தைக் காண்க.



படம் 8.50

தீர்வு R மற்றும் r என்பன முறையே உள்ளீடற்ற கோளத்தின் வெளி மற்றும் உள் ஆரம் என்க.

h மற்றும் r_1 என்பன முறையே நேர் வட்டக் கூம்பின் உயரம் மற்றும் ஆரம் என்க.

உள்ளீடற்ற கோளம்

வெளிவிட்டம்	உள்விட்டம்	கூம்பு
$2R = 8$ செ.மீ	$2r = 4$ செ.மீ	$2r_1 = 8$ செ.மீ
$\Longrightarrow R = 4$ செ.மீ	$\Longrightarrow r = 2$ செ.மீ	$\Longrightarrow r_1 = 4$ செ.மீ

உள்ளீடற்ற கோளம் உருக்கப்பட்டு ஒரு திண்மக் கூம்பாக வார்க்கப்பட்டால்

திண்மக் கூம்பின் கன அளவு = உள்ளீடற்றக் கோளத்தின் கன அளவு

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\pi r_1^2 h = \frac{4}{3}\pi[R^3 - r^3]$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times(4^3-2^3)$$

$$\Longrightarrow \quad h = \frac{64-8}{4} = 14$$

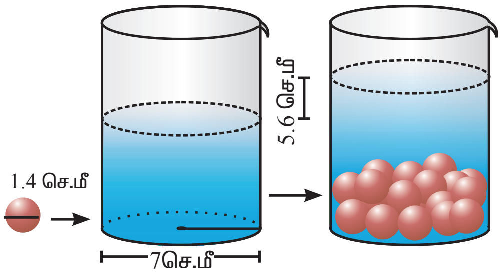
ஆகவே, கூம்பின் உயரம் $h = 14$ செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8.25

7 செ.மீ விட்டமுள்ள உருளை வடிவ முகவையில் சிறிதளவு தண்ணீர் உள்ளது. அதில் ஒவ்வொன்றும் 1.4 செ.மீ விட்டமுள்ள சில கோள வடிவ பளிங்குக் கற்கள் போடப்படுகிறது. உருளையிலுள்ள நீரின் மட்டம் 5.6 செ.மீ உயர எத்தனை பளிங்கு கற்களை முகவையினுள் போடவேண்டும் எனக் காண்க ?

தீர்வு தேவையான பளிங்கு கற்களின் எண்ணிக்கையை n என்க. பளிங்கு கற்கள் மற்றும் உருளை வடிவ முகவையின் ஆரங்கள் முறையே $r_1,\ r_2$ என்க.

பளிங்குக் கற்கள்	உருளை வடிவ முகவை
விட்டம், $2r_1 = 1.4$ செ.மீ	விட்டம், $2r_2 = 7$ செ.மீ
ஆரம், $r_1 = 0.7$ செ.மீ	ஆரம், $r_2 = \frac{7}{2}$ செ.மீ



படம் 8.51

h என்பது கற்களைப் போட்ட பின்னர் தண்ணீர் மட்டத்தின் உயரம் என்க.

$h = 5.6$ செ.மீ

பளிங்குக் கற்களை முகவையில் போட்ட பின்பு

உயர்ந்த தண்ணீர் மட்டத்தின் கனஅளவு $= n$ பளிங்கு கற்களின் கன அளவு

$$\Longrightarrow \quad \pi r_2^2 h = n\times\frac{4}{3}\pi r_1^3$$

$$n = \frac{3r_2^2 h}{4r_1^3}$$

$$n = \frac{3\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times5.6}{4\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}} = 150.$$

எனவே, தேவையான பளிங்குக் கற்களின் எண்ணிக்கை = 150.

எடுத்துக்காட்டு 8.26

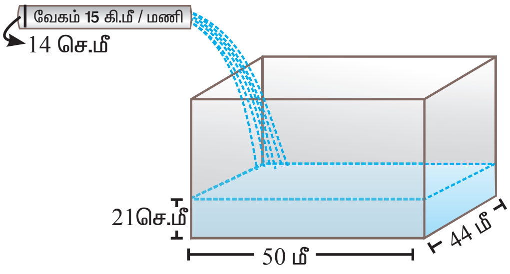
14 செ.மீ விட்டமுள்ள ஒரு உருளை வடிவ குழாய் வழியாக, தண்ணீரை மணிக்கு 15 கி.மீ வேகத்தில் 50 மீ நீளமும் மற்றும் 44 மீ அகலமுள்ள ஒரு செவ்வக வடிவ தொட்டிக்குள் செலுத்தினால், தொட்டியில் 21 செ.மீ உயரத்திற்கு தண்ணீர் நிரம்ப எத்தனை மணி நேரமாகும் ? ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க.)

தீர்வு தண்ணீரின் வேகம் = 15 கி.மீ / மணி

= 15000 மீ / மணி

குழாயின் விட்டம், $2r = 14$ செ.மீ

$$r = \frac{7}{100} \text{ மீ}$$



படம் 8.52

h என்பது தண்ணீர் மட்டத்தின் உயரம் என்க

$$h = 21 \text{ செ.மீ} = \frac{21}{100} \text{ மீ}$$

தற்போது 1 மணி நேரத்தில் குழாய் வழியே வெளியேறிய தண்ணீரின் கன அளவு

$= $ குழாயின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு $\times$ நேரம் $\times$ வேகம்

$= \pi r^2 \times 1 \times 15000$

$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{100} \times \frac{7}{100} \times 15000$ க.செ.மீ

தொட்டியில் பாய்ச்சப்பட்ட தண்ணீரின் கன அளவு

$$lbh = 50 \times 44 \times \frac{21}{100}$$

தொட்டியில் T மணி நேரம் தண்ணீர் பாய்ச்சப்பட்டது எனக் கொள்வோம்

ஆகவே, $\left.\begin{array}{l}T \text{ மணி நேரத்தில் குழாய் வழியே} \\ \text{வெளியேற்றப்பட்ட தண்ணீரின் கன அளவு}\end{array}\right\}$ = தொட்டியில் பாய்ச்சப்பட்ட தண்ணீரின் கனஅளவு

$$\Longrightarrow \quad \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{100}\right)^2 \times T \times 15000 = 50 \times 44 \times \frac{21}{100}$$

ஆகவே $T = 2$ மணி

எனவே, நீர் மட்டம் 21 செ.மீ உயர 2 மணி நேரமாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8.27

55செ.மீ$\times$40செ.மீ$\times$15செ.மீ என்ற அளவுகள் கொண்ட கனச்செவ்வக வடிவ திண்ம இரும்புப் பலகை உருக்கப்பட்டு ஒரு குழாயாக வார்க்கப்படுகிறது. அக்குழாயின் வெளி விட்டம் மற்றும் தடிமன் முறையே 8 செ.மீ மற்றும் 1 செ.மீ எனில், அக்குழாயின் நீளத்தைக் காண்க. $(\pi = \frac{22}{7}$ என்க.)

தீர்வு h_1 என்பது குழாயின் நீளம் என்க.

இரும்புக் குழாயின் வெளி மற்றும் உள் ஆரங்கள் முறையே R மற்றும் r என்க.

இரும்புப்பலகையின் கனஅளவு = $l\,b\,h = 55\times40\times15$ என்க.

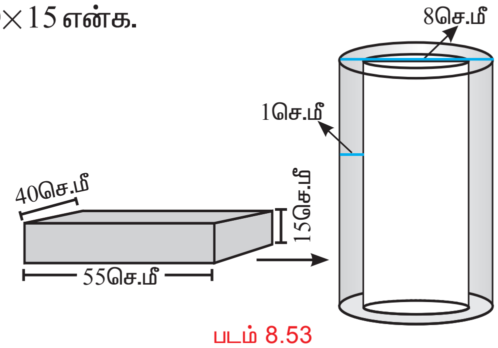
இரும்புக் குழாய் :

வெளி விட்டம், $2R = 8$ செ.மீ

எனவே,வெளி ஆரம், $R = 4$ செ.மீ

தடிமன், $w = 1$ செ.மீ

எனவே, உள் ஆரம் $r = R - w = 4 - 1 = 3$ செ.மீ



படம் 8.53

தற்போது, இரும்புக்குழாயின் கன அளவு = இரும்புப் பலகையின் கன அளவு

$$\Longrightarrow \quad \pi h_1 (R + r)(R - r) = lbh$$

$$\frac{22}{7} \times h_1 (4 + 3)(4 - 3) = 55 \times 40 \times 15$$

ஆகவே, குழாயின் நீளம், $h_1 = 1500$ செ.மீ = 15 மீ.

பயிற்சி 8.3

1. ஒரு விளையாட்டு பம்பரமானது (Top) கூம்பின் மீது அரைக்கோளம் இணைந்த வடிவில் உள்ளது. அரைக்கோளத்தின் விட்டம் 3.6 செ.மீ மற்றும் பம்பரத்தின் மொத்த உயரம் 4.2செ.மீ எனில், அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

2. ஒரு கன உருவம், அரைக்கோளத்தின் மீது உருளை இணைந்த வடிவில் உள்ளது. அக்கனவுருவத்தின் விட்டம் மற்றும் மொத்த உயரம் முறையே 21 செ.மீ மற்றும் 25.5 செ.மீ எனில், அதன் கன அளவைக் காண்க.

3. ஒரு மருந்துக் குப்பியானது ஒரு உருளையின் இருபுறமும் அரைக்கோளங்கள் இணைந்த வடிவில் உள்ளது. மருந்துக் குப்பியின் மொத்த நீளம் 14 மி.மீ மற்றும் விட்டம் 5 மி.மீ எனில் அம்மருந்துக் குப்பியின் புறப்பரப்பைக் காண்க.

4. ஒரு கூடாரமானது உருளையின் மீது கூம்பு இணைந்த வடிவில் உள்ளது. கூடாரத்தின் மொத்த உயரம் 13.5 மீ மற்றும் விட்டம் 28 மீ. மேலும் உருளைப் பாகத்தின் உயரம் 3 மீ எனில், கூடாரத்தின் மொத்த புறப்பரப்பைக் காண்க.

5. களிமண்ணைப் பயன்படுத்தி ஒரு மாணவன் 48 செ.மீ உயரமும் 12 செ.மீ ஆரமும் கொண்ட நேர் வட்டதிண்மக் கூம்பைச் செய்தார். அக்கூம்பை மற்றொரு மாணவர் ஒரு திண்மக் கோளமாக மாற்றினார். அவ்வாறு மாற்றப்பட்ட புதிய கோளத்தின் ஆரத்தைக் காண்க.

6. 24 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு திண்ம உலோக கோளமானது உருக்கப்பட்டு 1.2 மி.மீ ஆரமுள்ள சீரான உருளைக் கம்பியாக மாற்றப்பட்டால், அக்கம்பியின் நீளத்தைக் காண்க.

7. 5 செ.மீ உள்வட்டஆரமும் 24 செ.மீ உயரமும் கொண்ட கூம்பு வடிவ பாத்திரத்தில் முழு அளவில் தண்ணீர் உள்ளது. இத்தண்ணீரானது 10 செ.மீ உள்ஆரமுள்ள உருளை வடிவ காலிப் பாத்திரத்திற்குப் மாற்றப்படும்போது, உருளைப் பாத்திரத்தில் உள்ள நீர் மட்டத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

8. சிறிதளவு தண்ணீர் நிரப்பப்பட்ட 12 செ.மீ விட்டமுள்ள உருளை வடிவப் பாத்திரத்தில் 6 செ.மீ விட்டமுள்ள ஒரு திண்மக் கோளத்தை முழுவதுமாக மூழ்கச் செய்தால், உருளை வடிவப் பாத்திரத்தில் உயர்ந்த நீர் மட்டத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

9. 7 செ.மீ உள் ஆரம் கொண்ட உருளை வடிவ குழாயின் வழியே 5 செ.மீ / வினாடி வேகத்தில் தண்ணீர் பாய்கிறது. அரை மணி நேரத்தில் அக்குழாய் வழியே பாய்ந்த தண்ணீரின் கன அளவைக் (லிட்டரில்) காண்க.

10. 4 மீ விட்டமும் 10 மீ உயரமுள்ள உருளை வடிவத் தொட்டியிலுள்ள தண்ணீரானது 10 செ.மீ விட்டமுள்ள ஒரு உருளை வடிவ குழாய் வழியே மணிக்கு 2.5 கி.மீ வேகத்தில் வெளியேற்றப்படுகிறது. தொட்டியில் பாதியளவு தண்ணீர் வெளியேற்றப்பட ஆகும் நேரத்தைக் காண்க. (ஆரம்ப நிலையில் தொட்டி முழுவதும் தண்ணீர் நிரப்பப்பட்டுள்ளது எனக் கொள்க.)

11. 18 செ.மீ ஆரமுள்ள திண்ம உலோகக் கோளமானது உருக்கப்பட்டு மூன்று சிறிய வெவ்வேறு அளவுள்ள கோளங்களாக வார்க்கப்படுகிறது. அவ்வாறு வார்க்கப்பட்ட இரண்டு திண்மக் கோளங்களின் ஆரங்கள் முறையே 2 செ.மீ மற்றும் 12 செ.மீ எனில் மூன்றாவது கோளத்தின் ஆரத்தைக் காண்க.

12. ஒரு உள்ளீடற்ற உருளை வடிவக் குழாயின் நீளம் 40 செ.மீ. அதன் உள் மற்றும் வெளி ஆரங்கள் முறையே 4 செ.மீ மற்றும் 12 செ.மீ. அவ்வுள்ளீடற்ற உருளைக் குழாய் உருக்கப்பட்டு 20 செ.மீ நீளமுள்ள திண்ம நேர் வட்ட உருளையாக மாற்றும்போது கிடைக்கும் புதிய உருளையின் ஆரத்தைக் காண்க.

13. 8 செ.மீ விட்டமும் 12 செ.மீ உயரமும் கொண்ட ஒரு நேர் வட்ட திண்ம இரும்புக் கூம்பானது உருக்கப்பட்டு 4 மி.மீ ஆரமுள்ள திண்மக் கோள வடிவ குண்டுகளாக வார்க்கப்பட்டால் கிடைக்கும் கோள வடிவ குண்டுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

14. 12செ.மீ விட்டமும் 15செ.மீ உயரமும் கொண்ட நேர்வட்ட உருளை முழுவதும் பனிக்கூழினால் (ice cream) நிரப்பப்பட்டுள்ளது. இப்பனிக்கூழானது 6 செ.மீ விட்டமும், 12 செ.மீ உயரமும் கொண்ட மேற்புறம் அரைக்கோளம் இணைந்த வடிவிலமைந்த கூம்பில் நிரப்பப்படுகிறது. எத்தனை கூம்புகளில் பனிக்கூழினை முழுவதுமாக நிரப்பலாம் எனக் காண்க.

15. 4.4 மீ நீளமும் 2 மீ அகலமும் கொண்ட ஒரு கனச் செவ்வக வடிவத் தொட்டியில் மழைநீர் சேகரிக்கப் படுகிறது. இத்தொட்டியில் 4 செ.மீ உயரத்திற்கு சேகரிக்கப்பட்ட மழை நீரானது 40செ.மீ ஆரமுள்ள உருளை வடிவ காலிப் பாத்திரத்திற்கு மாற்றப்படும்போது அப்பாத்திரத்தில் உள்ள தண்ணீர் மட்டத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

16. மணலால் நிரப்பப்பட்ட ஒரு உருளை வடிவ வாளியின் உயரம் 32 செ.மீ மற்றும் ஆரம் 18 செ.மீ. அம்மணல் முழுவதும் தரையில் ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பு வடிவில் கொட்டப்படுகிறது. அவ்வாறு கொட்டப்பட்ட மணற் கூம்பின் உயரம் 24 செ.மீ எனில், அக்கூம்பின் ஆரம் மற்றும் சாயுயரத்தைக் காண்க.

17. 14 மீ விட்டமும் மற்றும் 20 மீ ஆழமுள்ள ஒரு கிணறு உருளை வடிவில் வெட்டப்படுகிறது. அவ்வாறு வெட்டும்போது தோண்டியெடுக்கப்பட்ட மண் சீராக பரப்பப்பட்டு 20 மீ $\times$ 14 மீ அளவுகளில் அடிப்பக்கமாகக் கொண்ட ஒரு மேடையாக அமைக்கப்பட்டால், அம்மேடையின் உயரம் காண்க.

பயிற்சி 8.4

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. 1செ.மீ ஆரமும் மற்றும் 1செ.மீ உயரமும் கொண்ட ஒரு நேர் வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு
   (A) π செ.மீ^{2} (B) 2π செ.மீ^{2} (C) 3π செ.மீ^{3} (D) 2 செ.மீ^{2}

2. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் ஆரமானது அதன் உயரத்தில் பாதி எனில் அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பு
   (A) $\frac{3}{2}\pi h$ ச.அ (B) $\frac{2}{3}\pi h^2$ ச.அ (C) $\frac{3}{2}\pi h^2$ ச.அ (D) $\frac{2}{3}\pi h$ ச.அ

3. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் அடிப்பக்கப் பரப்பு 80 ச. செ.மீ. அதன் உயரம் 5 செ.மீ எனில், அதன் கன அளவு
   (A) 400 செ.மீ^{3} (B) 16 செ.மீ^{3} (C) 200 செ.மீ^{3} (D) $\frac{400}{3}$ செ.மீ^{3}

4. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் மொத்த புறப்பரப்பு 200 π ச. செ.மீ. மற்றும் அதன் ஆரம் 5 செ.மீ எனில் அதன் உயரம் மற்றும் ஆரத்தின் கூடுதல்
   (A) 20 செ.மீ (B) 25 செ.மீ (C) 30 செ.மீ (D) 15 செ.மீ

5. a அலகுகள் ஆரமும், b அலகுகள் உயரமும் கொண்ட ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு
   (A) $\pi a^2 b$ ச.செ.மீ (B) $2\pi ab$ ச.செ.மீ (C) 2π ச.செ.மீ (D) 2 ச.செ.மீ

6. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பு மற்றும் நேர்வட்ட உருளையின் ஆரமும் உயரமும் முறையே சமம் உருளையின் கன அளவு 120 செ.மீ^{3} எனில், கூம்பின் கன அளவு
   (A) 1200 செ.மீ^{3} (B) 360 செ.மீ^{3} (C) 40 செ.மீ^{3} (D) 90 செ.மீ^{3}

7. நேர் வட்டக் கூம்பின் விட்டம் மற்றும் உயரம் முறையே 12 செ.மீ மற்றும் 8 செ.மீ எனில் அதன் சாயுயரம்

(A) 10 செ.மீ (B) 20 செ.மீ (C) 30 செ.மீ (D) 96 செ.மீ

8. ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் அடிச்சுற்றளவு மற்றும் சாயுயரம் முறையே 120π செ.மீ மற்றும் 10 செ.மீ எனில் அதன் வளைபரப்பு

(A) 1200π செ.மீ^{2} (B) 600π செ.மீ^{2} (C) 300π செ.மீ^{2} (D) 600 செ.மீ^{2}

9. ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் கன அளவு மற்றும் அடிப்பக்கப் பரப்பு முறையே 48π செ.மீ^{3} மற்றும் 12π செ.மீ^{2} எனில், அதன் உயரம்

(A) 6 செ.மீ (B) 8 செ.மீ (C) 10 செ.மீ (D) 12 செ.மீ

10. 5 செ.மீ உயரமும், 48 ச.செ.மீ அடிப்பக்கப் பரப்பும் கொண்ட ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் கன அளவு

(A) 240 செ.மீ^{3} (B) 120 செ.மீ^{3} (C) 80 செ.மீ^{3} (D) 480 செ.மீ^{3}

11. இரண்டு உருளைகளின் உயரங்கள் முறையே 1:2 மற்றும் அவற்றின் ஆரங்கள் முறையே 2:1 ஆகிய விகிதங்களிலிருப்பின், அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம்

(A) 4 : 1 (B) 1 : 4 (C) 2 : 1 (D) 1 : 2

12. 2 செ.மீ ஆரம் உள்ள ஒரு கோளத்தின் வளைபரப்பு

(A) 8π செ.மீ^{2} (B) 16 செ.மீ^{2} (C) 12π செ.மீ^{2} (D) 16π செ.மீ^{2}.

13. ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் விட்டம் 2 செ.மீ எனில் அதன் மொத்த புறப்பரப்பு

(A) 12 செ.மீ^{2} (B) 12π செ.மீ^{2} (C) 4π செ.மீ^{2} (D) 3π செ.மீ^{2}.

14. $\frac{9}{16}\pi$ க.செ.மீ. கன அளவு கொண்ட கோளத்தின் ஆரம்

(A) $\frac{4}{3}$ செ.மீ (B) $\frac{3}{4}$ செ.மீ (C) $\frac{3}{2}$ செ.மீ (D) $\frac{2}{3}$ செ.மீ.

15. இரண்டு கோளங்களின் வளைபரப்புகளின் விகிதம் 9 : 25. அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம்

(A) 81 : 625 (B) 729 : 15625 (C) 27 : 75 (D) 27 : 125.

16. a அலகுகள் ஆரம் கொண்ட திண்ம அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

(A) $2\pi a^2$ ச.அ (B) $3\pi a^2$ ச.அ (C) $3\pi a$ ச.அ (D) $3a^2$ ச.அ.

17. 100π ச.செ.மீ வளைபரப்பு கொண்ட கோளத்தின் ஆரம்

(A) 25 செ.மீ (B) 100 செ.மீ (C) 5 செ.மீ (D) 10 செ.மீ.

18. ஒரு கோளத்தின் வளைபரப்பு 36π ச.செ.மீ எனில், அதன் கன அளவு

(A) 12π செ.மீ^{3} (B) 36π செ.மீ^{3} (C) 72π செ.மீ^{3} (D) 108π செ.மீ^{3}

19. 12π செ.மீ ^{2} மொத்தப்பரப்பு கொண்ட திண்ம அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு

(A) 6π செ.மீ ^{2} (B) 24π செ.மீ ^{2} (C) 36π செ.மீ ^{2} (D) 8π செ.மீ ^{2}.

20. ஒரு கோளத்தின் ஆரமானது மற்றொரு கோளத்தின் ஆரத்தில் பாதி எனில் அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம்

(A) 1 : 8 (B) 2: 1 (C) 1 : 2 (D) 8 : 1

21. ஒரு திண்ம கோளத்தின் வளைபரப்பு 24 செ.மீ.^{2} அந்த கோளத்தை இரண்டு அரைக்கோளங்களாகப் பிரித்தால் கிடைக்கும் அரைக்கோளங்களில் ஒன்றின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

(A) 12 செ.மீ ^{2} (B) 8 செ.மீ ^{2} (C) 16 செ.மீ ^{2} (D) 18 செ.மீ ^{2}

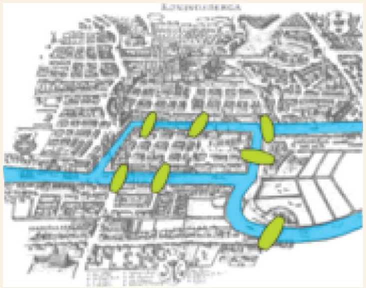
22. இரண்டு கூம்புகள் சம ஆரங்கள் கொண்டுள்ளன. மேலும் அவற்றின் சாயுயரங்களின் விகிதம் 4 : 3 எனில், வளைபரப்புகளின் விகிதம்

(A) 16 : 9 (B) 2 : 3 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

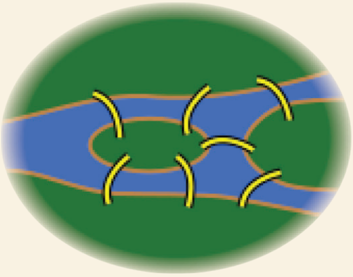
கோனிங்ஸ்பெர்க்கின் ஏழு பாலங்கள் (The Seven Bridges of Königsberg) என்ற புதிர் கணிதத்தில் ஒரு வரலாற்று சிறப்புப்பெற்ற கணக்காகும். புருஷ்யாவிலுள்ள கோனிங்ஸ் பெர்க் (தற்போதைய ருஷ்யாவில் காலிங்கிராடு) (The city of Königsberg in Prussia, now Kaliningrad, Russia) நகரமானது பிரிஜெல் ஆற்றின் (Pregel river) இறுபுறமும் அமைந்திருந்தது. மேலும் இரு பெரும் தீவுகளையும் கொண்டிருந்தது. இந்நகரம், இருபெரும் தீவுகள் மற்றும் அதன் நிலப்பரப்பு ஆகியன ஏழு பாலங்களால் இணைக்கப்பட்டிருந்தது.

ஒரே ஒரு முறை மட்டுமே அப்பாலங்களை கடந்து நகரத்தின் அனைத்துப் பகுதிகளுக்கும் செல்வதற்கான வழிகாணுதலில் ஒரு சிக்கல் எழுந்தது. பாலங்கள் அல்லாது வேறு வழியில் தீவுகளை அடைய முடியாது. ஒவ்வொரு பாலத்தையும் ஒரே ஒரு முறை மட்டுமே முழுவதுமாக பயன்படுத்த வேண்டும் என்ற நிபந்தனையும் விதிக்கப்பட்டிருந்தது. (ஒருவர் பாலத்தினை பாதிதூரம் கடந்து சென்று, பின்னர் திரும்பச் சென்று வேறு வழியில் மீதி பாதி தூரத்தை கடக்க கூடாது).

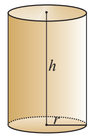
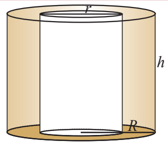
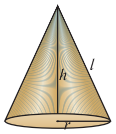
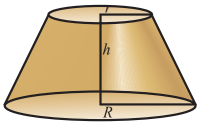
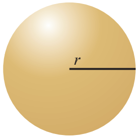
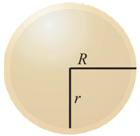
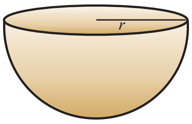
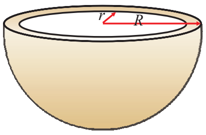
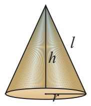
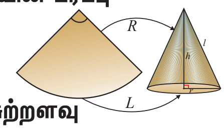
1735-ல் லியோன்னார்டு ஆய்லர் (Leonhard Euler) இவ்வினாவிற்கு தீர்வு இல்லை என நிரூபித்தார். இத் தீர்வில் ஆய்லர் பயன்படுத்திய எதிர்மறையான முடிவுகள் கோல இயலுக்கு (Graph theory) வழிகோலியது. மேலும் அம்முடிவுகள் திணைய இயலுக்கும் (Topology) அடிப்படையாக அமைந்தன.



$\Longleftrightarrow$



நினைவிற்கொள்க

வ.எண்	பெயர்	படம்	வளைபரப்பு (Curved Surface area)	மொத்தப் புறப்பரப்பு (Total surface area)	கனஅளவு (Volume)
1	**நேர்வட்ட திண்ம உருளை** (Right circular cylinder)		$2\pi rh$	$2\pi r(h+r)$	$\pi r^2 h$
2	**நேர்வட்ட உள்ளீடற்ற உருளை** (Right circular hollow cylinder)		$2\pi h(R+r)$	$2\pi(R+r)(R-r+h)$	$\pi R^2 h - \pi r^2 h$ $= \pi h(R^2 - r^2)$ $= \pi h(R+r)(R-r)$
3	**நேர்வட்ட திண்மக் கூம்பு** (Right circular cone)		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
4	**இடைக்கண்டம்** (Frustum of a cone)		- - - - - - - -	- - - - - - - -	$\frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$
5	**திண்மக்கோளம்** (Solid sphere)		$4\pi r^2$	- - -	$\frac{4}{3}\pi r^3$
6	**உள்ளீடற்ற கோளம்** (Hollow sphere)		- - -	- - -	$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$
7	**திண்ம அரைக்கோளம்** (Solid hemisphere)		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$
8	**உள்ளீடற்ற அரைக்கோளம்** (Hollow hemisphere)		$2\pi(R^2 + r^2)$	$2\pi(R^2 + r^2)+\pi(R^2 - r^2)$ $= \pi(3R^2 + r^2)$	பயன்படுத்தப்பட்ட உலோகத்தின் கனஅளவு = $\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$
9	**கூம்பு**  $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ $r = \sqrt{l^2 - h^2}$ **வளைபரப்பு = வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பு** $\pi rl = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$  **வில்லின் நீளம் = கூம்பின் அடிச்சுற்றளவு** $L = 2\pi r$			**10. குழாய் வழியே பாயும் தண்ணீரின் கனஅளவு** **= {குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு × வேகம் × நேரம்}** **11. உருக்கி தயாரிக்கப்படும் புதிய கன உருவங்களின் எண்ணிக்கை** $= \frac{\text{உருக்கப்பட்ட கன உருவத்தின் கனஅளவு}}{\text{உருவாக்கப்பட்ட ஒரு கன உருவத்தின் கனஅளவு}}$		
12	1 மீ ^{3} = 1000 லிட்டர், 1 டெசி மீ ^{3} = 1 லிட்டர், 1000 செ.மீ ^{3} = 1 லிட்டர், 1000 லிட்டர் = 1 கி.லி				

9 செய்முறை வடிவியல்

Give me a place to stand, and I shall move the earth

-Archimedes

- அறிமுகம்
- தொடுகோடுகள்
- முக்கோணங்கள்
- வட்டநாற்கரங்கள்

பிரம்ம குப்தர்

(598-668 கி.பி.)

இந்தியா

பழங்கால இந்தியாவின் மிகச்சிறந்த கணித அறிஞர்

"பிரம்மாஸ்புத்தா சித்தாநந்தா" என்ற நூலை பிரம்ம குப்தர் எழுதினார். வடிவியிலில், வட்ட நாற்கரத்தின் பரப்பு காணும் சூத்திரம் இவரின் மிகச் சிறந்த கண்டுபிடிப்பு ஆகும்.

p, q, r மற்றும் s என்பன வட்டநாற்கரத்தின் பக்கங்கள் எனில், அதன் பரப்பு காணும் சூத்திரத்தை தோராயமாகவும் மற்றும் சரியாகவும் பின்வருமாறு கண்டறிந்தார்.

வட்ட நாற்கரத்தின் பரப்பு

$=\left(\frac{p+r}{2}\right)\left(\frac{q+s}{2}\right)$ (தோராயமாக)

$=\sqrt{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)}$ (சரியாக)

இங்கு, $2t = p+q+r+s$.

9.1 அறிமுகம்

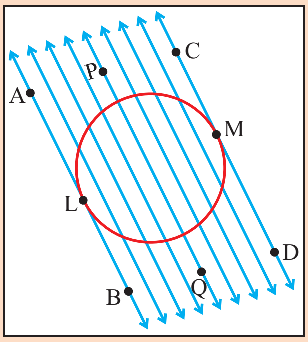
கி.மு.3000 துவக்கத்தில் எகிப்தில், தோன்றிய வடிவியல் நிலங்களை அளவிடப் பயன்படுத்தப்பட்டது. ஆரம்பகால வடிவியல் என்பது அனுபவத்தின் மூலமாக கண்டறியப்பட்ட, நீளம், கோணம், பரப்பு மற்றும் கனம் பற்றிய கோட்பாடுகளைக் கொண்டு வளர்ச்சியடைந்தது. நில அளவை, கட்டுமானம், வானியல் மற்றும் பிற பல்வகைத் தொழில்கள் போன்ற வற்றிலுள்ள நடைமுறைத் தேவைகளை நிறைவு செய்யும் பொருட்டு வடிவியல் கோட்பாடுகள் உருவாயின.

இயற்கணிதம், பகுப்பாய்வு போன்ற பாடப்பிரிவுகளை விட வடிவியலுக்கான முக்கியத்துவத்தைக் குறைக்கும் வகையில் பாடத்திட்டத்தில் மாற்றங்களை கொண்டுவர சிலர் சமீப காலத்தில் பல புதிய முயற்சிகளை மேற்கொண்டுள்ளனர். ஆனால் பல கணிதவியலறிஞர்கள் உறுதியாக இம்மாற்றத்தை எதிர்க்கின்றனர். உண்மையில் வடிவியல் கணிதத்தின் பிற பகுதிகளில் உள்ள பல கணித யுத்திகளை புரிந்து கொள்ள உதவுகிறது. இப்பாடப்பகுதியில் நாம் வட்டத்தின் தொடுகோடுகள், முக்கோணங்கள் மற்றும் வட்டநாற்கரங்களை கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு எவ்வாறு வரைவது எனக் காண்போம்.

நாம் ஒன்பதாம் வகுப்பில் வட்டத்தோடு தொடர்புடைய நாண் (chord), வட்டத்துண்டு (segment), வட்ட கோணப்பகுதி (sector) போன்றவற்றின் பொருளை அறிந்துள்ளோம். கீழ்க்காணும் செயல்கள் மூலம் வெட்டுக்கோடு (Secant), தொடுகோடு (Tangent) ஆகியனவற்றை நினைவு கூறுவோம்.

செய்து பார்

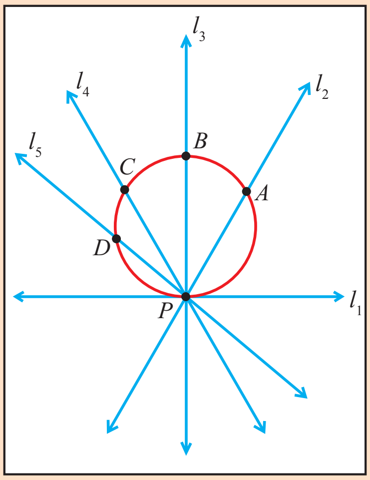
ஒரு காகிதத்தில் ஏதேனும் ஒரு ஆரம் கொண்ட வட்டம் வரைக. அவ்வட்டத்திற்கு PQ என்ற வெட்டுக்கோடு வரைக. PQ-க்கு இணையாகவும் அதன் இரு புறங்களிலும் பல இணை கோடுகளை வரைக. வெட்டுக் கோடுகள், வட்டத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளிகள் ஒன்றையொன்று



நெருங்கி வருவதோடு, ஒரு நிலையில் அவ்விரு புள்ளிகளும் ஒன்றோடொன்று பொருந்துவதைக் காணலாம். PQ-க்கு இணையாக அமைந்த வெட்டுக்கோடுகளில் AB மற்றும் CD ஆகியன வட்டத்தை முறையே L மற்றும் M என்ற புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. இங்கு கோடுகள் AB மற்றும் CD என்பன வட்டத்தின் மேல் முறையே L மற்றும் M-ல் அமைந்த தொடுகோடுகள் எனப்படும். மேலும் AB ஆனது CD-க்கு இணையாக அமைவதையும் நாம் காணலாம்.

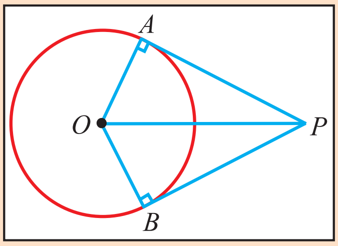
செய்துபார்

ஒரு வட்டம் வரைந்து அவ்வட்டத்தின் மேல் P என்ற புள்ளியை குறிக்கவும். படத்தில் காட்டியது போல் புள்ளி P வழியே பல கோடுகளை வரைக. P வழிச்செல்லும் இக்கோடுகள் வட்டத்தில் இரண்டு புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. நேர்க்கோடுகள் l_2, l_3, l_4 மற்றும் l_5 ஆகியன வட்டத்தை முறையே A, B, C மற்றும் D என்ற மற்றொரு புள்ளியிலும் சந்திக்கின்றன. இக்கோடுகள் (l_2, l_3, l_4 மற்றும் l_5 ஆகியன) வட்டத்திலமைந்த வெட்டுக்கோடுகள் ஆகும். ஆனால் l_1 என்ற கோடு மட்டும் P என்ற ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே வட்டத்தை தொட்டுச் செல்கிறது. இக்கோடு l_1 ஆனது புள்ளி P-யில் அவ்வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடு எனப்படும்.



ஒரு வட்டத்தில், தொடுகோடும், அத்தொடு புள்ளியில் வரையப்பட்ட ஆரமும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என்பதை நாம் அறிவோம்.

AP ஆனது வட்டத்திற்கு வெளியே அமைந்த P என்ற புள்ளியிலிருந்து வட்டத்தின் மேல் அமைந்த A என்ற புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோடு என்போம்.



செங்கோண ΔOPA -ல், $OA \perp AP$

$$OP^2 = OA^2 + AP^2$$ (பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் படி)

$$AP = \sqrt{OP^2 - OA^2}.$$

9.2 ஒரு வட்டத்திற்கு தொடுகோடு வரைதல் (Construction of a tangent to a circle)

நாம் இப்போது கீழ்க்கண்ட முறைகளில் தொடுகோடுகள் வரைதல் பற்றி கற்போம்

(i) மையத்தைப் பயன்படுத்தி வரைதல்

(ii) தொடுகோடு - நாண் தேற்றத்தை (using tangent-chord theorem) பயன்படுத்தி வரைதல்.

9.2.1 வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு வரைதல் (மையத்தைப் பயன்படுத்தல்) (Construction of a tangent to a circle using the centre)

முடிவு

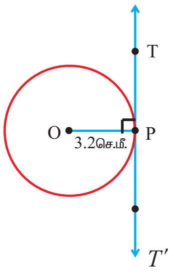
ஒரு வட்டத்தில் தொடுகோடும், அத்தொடுகோடு வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளியின் வழியே செல்லும் ஆரமும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை.

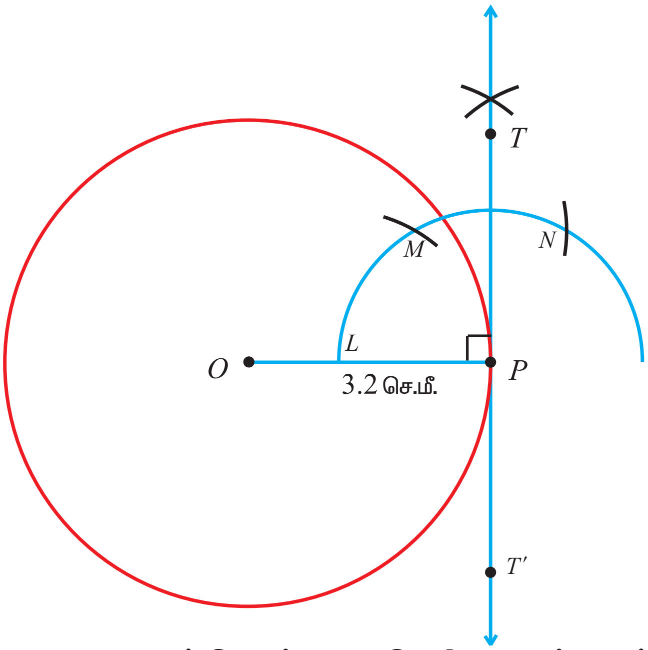
எடுத்துக்காட்டு **9.1**

3.2 செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மேல் P என்ற ஒரு புள்ளியை குறித்து அப்புள்ளி வழியே ஒரு தொடுகோடு வரைக. (மையத்தை பயன்படுத்துக)

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: வட்டத்தின் ஆரம் = 3.2 செ.மீ.

உதவிப்படம்





வரைமுறை:

(i) O-வை மையமாகக் கொண்டு 3.2 செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக.

(ii) வட்டத்தின் மேல் P என்ற புள்ளியைக் குறித்து OP ஐ இணைக்க.

(iii) P-யை மையமாகக் கொண்டு OP-ல் L என்ற இடத்தில் வெட்டும்படி ஒரு வட்டவில் வரைக.

(iv) அவ்வில்லின் மேல் $\widehat{LM} = \widehat{MN} = LP$ என்றவாறு M, N என்ற புள்ளிகளை குறி.

(v) $\angle MPN$-ன் கோண இருசமவெட்டி PT வரைக.

(vi) TP ஐ T' வரை நீட்டி தேவையான தொடுகோடு $T'PT$ வரைக.

குறிப்புரை

P என்ற புள்ளி வழியாக OP-க்குச் செங்குத்தாக நேர்க்கோடு PT வரைந்தும் தொடுகோடு வரையலாம். இங்கு PT என்பது புள்ளி P-யில் அமைந்த தொடுகோடு ஆகும்.

9.2.2 தொடுகோடு–நாண் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி வட்டத்தின் மேல் அமைந்த புள்ளியில் தொடுகோடு வரைதல். (Construction of a tangent to a circle using the tangent-chord theorem)

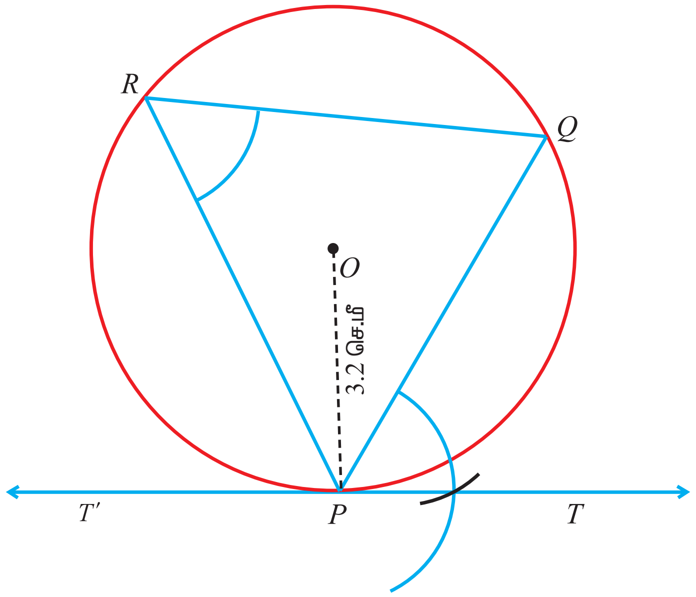
முடிவு — தொடுகோடு – நாண் தேற்றம்.

ஒரு வட்டத்திலுள்ள நாண் மற்றும் அதன் ஒரு முனையில் அமைந்த தொடுகோடு ஆகியவற்றிற்க் இடையேயுள்ள கோணம், நாணின் ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டில் அமையும் கோணத்திற்க்குச் சமம்.

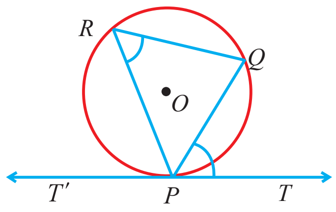
எடுத்துக்காட்டு 9.2

3.2 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மேல் P என்ற புள்ளியைக் குறித்து அப்புள்ளியில் தொடுகோடு–நாண் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி தொடுகோடு வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : வட்டத்தின் ஆரம் = 3.2 செ.மீ.



உதவிப்படம்



வரைமுறை

(i) O-வை மையமாகக்கொண்டு 3.2 செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக.

(ii) வட்டத்தின்மேல் P என்ற புள்ளியைக் குறிக்க.

(iii) புள்ளி Pவழியே ஏதேனும் ஒரு நாண் PQ வரைக.

(iv) P மற்றும் Q-ஐ தவிர்த்து R என்ற புள்ளியை புள்ளிகள் P, Q மற்றும் R என்பன கடிகார முள் நகரும் எதிர்திசையில் அமையுமாறு குறிக்கவும்.

(v) PR மற்றும் QR-ஆகியனவற்றை இணைக்க.

(vi) P -ல் $\angle QPT = \angle PRQ$ வரைக.

(vii) TP ஐ T'வரை நீட்டித் தேவையான தொடுகோடு $T'PT$-யை வரைக.

9.2.3 வட்டத்திற்கு வெளியே அமைந்த புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு தொடுகோட்டு சோடிகள் வரைதல். (Construction of pair of tangents to a circle from an external point)

முடிவுகள்

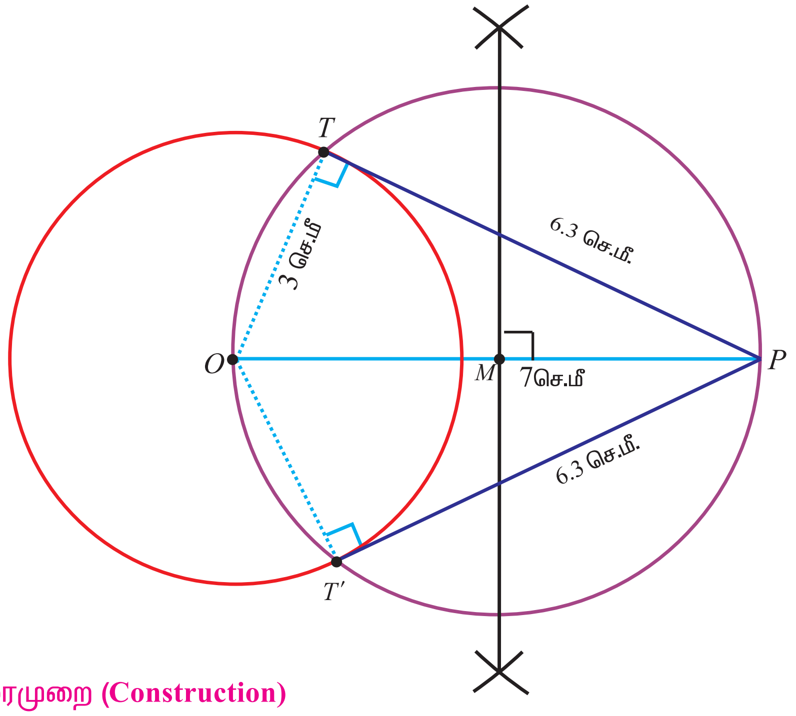
(i) வட்டத்திற்கு வெளியே அமைந்த புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரையலாம்.

(ii) விட்டங்கள், வட்டப்பரிதியில் 90°–யை ஏற்படுத்தும்.

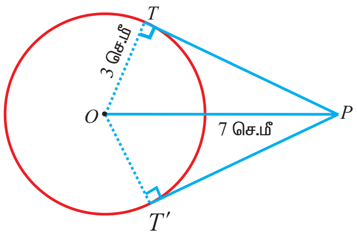
எடுத்துக்காட்டு 9.3

3 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 7 செ.மீ. தொலைவில் ஒரு புள்ளியைக் குறித்து, அப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகள் வரைக. மேலும் தொடுகோடுகளின் நீளத்தை அளந்து எழுதுக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: வட்டத்தின் ஆரம் = 3 செ.மீ., $OP = 7$ செ.மீ.



உதவிப்படம்



வரைமுறை (Construction)

(i) O-வை மையமாகக் கொண்டு 3 செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக.

(ii) வட்டத்திற்கு வெளியே, வட்ட மையம் O-யிலிருந்து 7 செ.மீ. தொலைவில் P என்ற புள்ளியை குறித்து OP-யை இணைக்க.

(iii) OP ன் மையக்குத்துக்கோடு வரைக. அது OP-யை M-ல் வெட்டட்டும்.

(iv) M-யை மையமாகவும், $MO\ (= MP)$வை ஆரமாகவும் கொண்டு மற்றொரு வட்டம் வரைக.

(v) இரண்டு வட்டங்களும் T மற்றும் T' -ல் சந்திக்கும்.

(vi) PT மற்றும் PT' வரைக. இவையே தேவையான தொடுகோடுகள் ஆகும். தொடுகோட்டின் நீளம், $PT = 6.3$ செ.மீ.

சரிபார்த்தல்

செங்கோண ΔOPT -ல்

$$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{7^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40} \qquad \therefore \quad PT = 6.3 \text{ செ.மீ. (தோராயமாக)}$$

பயிற்சி 9.1

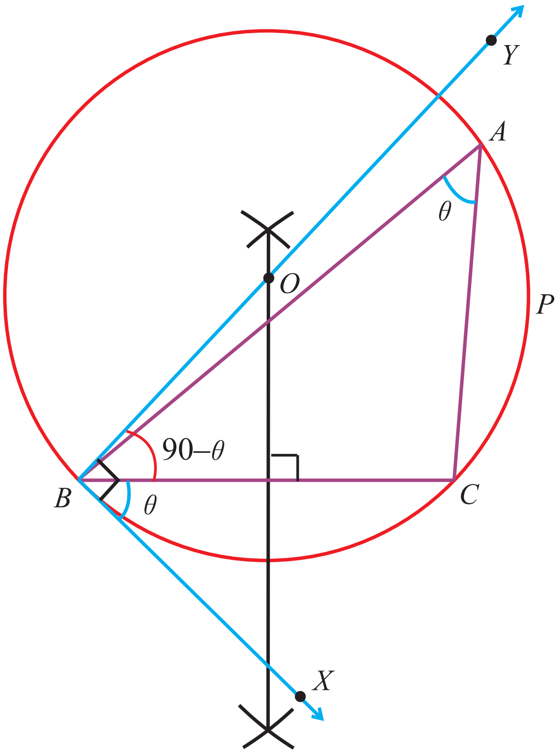
1. 4.2 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து அவ்வட்டத்தின் மேல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்க. வட்டத்தின் மையத்தைப் பயன்படுத்தி அப்புள்ளி வழியே தொடுகோடு வரைக.
2. 4.8 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மேல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைக் குறி. தொடுகோடு - நாண் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி அப்புள்ளி வழியே தொடுகோடு வரைக.
3. 10 செ.மீ விட்டமுள்ள ஒரு வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 13 செ.மீ. தொலைவில் P என்ற புள்ளியைக் குறித்து அப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு PA மற்றும் PB என்ற தொடுகோடுகள் வரைந்து அதன் நீளங்களை கணக்கிடுக.
4. 6 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் மையத்திலிருந்து 10செ.மீ தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியைக் குறிக்க. அப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகள் வரைந்து அதன் நீளங்களை கணக்கிடுக.
5. 3 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 9 செ.மீ தொலைவில் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்க. அப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகள் வரைந்து, அதன் நீளங்களை கணக்கிடுக.

9.3 முக்கோணங்கள் வரைதல் (Construction of triangles)

நாம் ஏற்கனவே பக்க அளவுகளையும், கோணங்களையும் கொண்டு முக்கோணங்கள் வரைய கற்றுள்ளோம். இப்பிரிவில் நாம்

(i) அடிப்பக்கம் (base), உச்சிக்கோணம் (vertical angle) மற்றும் அடிப்பக்கத்திலிருந்து எதிர் உச்சிக்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோடு (altitude).

(ii) அடிப்பக்கம், உச்சிக்கோணம் மற்றும் அடிப்பக்கத்திலிருந்து எதிர் உச்சிக்கு வரையப்பட்ட நடுக்கோடு (median) தரப்பட்டால் எவ்வாறு முக்கோணம் வரைவது எனக் காண்போம்.



கோணம் θ–ஐ உள்ளடக்கிய கோட்டுத் துண்டின் மேல் அமைந்த வட்டப்பகுதியை வரைதல் **(Construction of a segment of a circle on a given line segment containing an angle θ)**

கொடுக்கப்பட்ட கோணத்தை உள்ளடக்கிய கோட்டுத்துண்டின் மீது அமைந்த வட்டப் பகுதியை வரையும் முறையைக் காண்போம்.

வரைமுறை

(i) $\overline{BC}$ என்ற கோட்டுத்துண்டு வரைக.

(ii) புள்ளி B -ல், $\angle CBX = \theta$ வரைக.

(iii) $BY \perp BX$ வரைக.

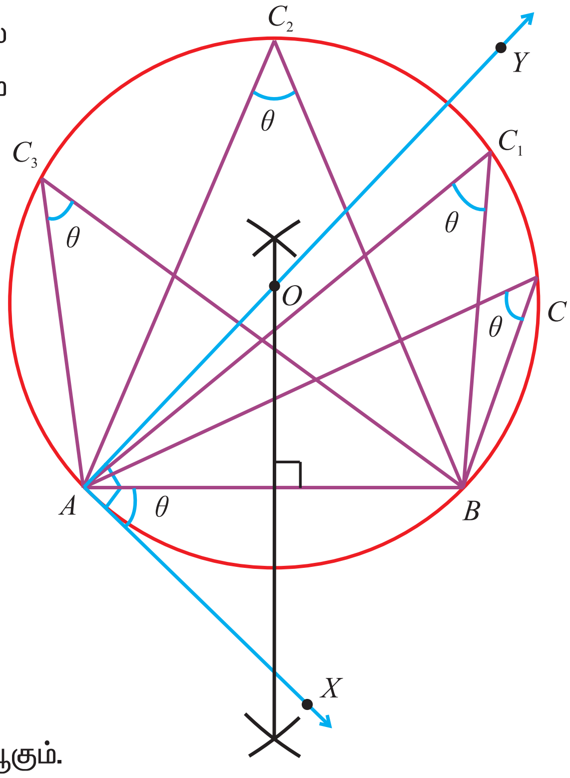
(iv) BC-ன் மையக்குத்துக்கோடு வரைக. அது BY-யை O-ல் சந்திக்கட்டும்.

(v) O-வை மையமாகவும், OB-யை ஆரமாகவும் கொண்டு ஓர் வட்டம் வரைக.

(vi) வட்டத்தின்மேல் A என்ற புள்ளியை குறிக்க. தொடுகோடு – நாண் தேற்றத்தின் படி, பெரிய வில் BAC ஆனது தேவையான உச்சிக்கோணம் θ கொண்ட வட்டப்பகுதி ஆகும்.

அடிப்பக்கம் மற்றும் உச்சிக்கோணம் கொண்டு முக்கோணம் வரைதல். (Construction of a triangle when its base and the vertical angle are given)

அடிப்பக்கமும், உச்சிக்கோணமும் தரப்பட்டால் எவ்வாறு முக்கோணம் வரையலாம் என்பதை பின்வரும் படிநிலைகளில் விவரிக்கலாம்.



வரைமுறை (Construction)

(i) கோட்டுத்துண்டு AB வரைக.

(ii) புள்ளி A-ல், $\angle BAX = \theta$ வரைக.

(iii) $AY \perp AX$ வரைக.

(iv) AB-ன் மையக்குத்துக்கோடு வரைந்து அது AY -யை O-ல் சந்திக்கட்டும்.

(v) O-வை மையமாகவும், OA ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக.

(vi) வட்டத்தின் மாற்று வட்டத்துண்டில் C என்ற புள்ளியை குறித்து AC மற்றும் BC யை இணைக்க.

(vii) $\triangle ABC$ என்பது தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

மேலும், அதே அடிப்பக்க அளவும், உச்சிக்கோணமும் கொண்ட பல முக்கோணங்களில் ஒரு முக்கோணம் $\triangle ABC$ என நாம் அறியலாம்.

இங்கு, $AX \perp AY$. ஆகவே, $\angle XAY = 90^\circ$.

மேலும், $OB = OA$. (வட்டத்தின் ஆரங்கள்).

AX என்பது A என்ற புள்ளியில் அமைந்த தொடுகோடு மற்றும் C என்பது வட்டத்தின் மேல் அமைந்த ஒரு புள்ளி.

எனவே, $\angle BAX = \angle ACB$. (தொடுகோடு – நாண் தேற்றம்).

குறிப்புரை

மேலேயுள்ள படத்தில் வட்டத்தின் மேல் $C_1, C_2, C_3, \ldots$ ஆகிய புள்ளிகளை எடுத்துக் கொண்டால் முக்கோணங்கள் $\Delta ABC_1, \Delta ABC_2, \Delta ABC_3, \cdots$ ஆகியவை ஒரே அடிப்பக்கமும், சமஉச்சிக் கோணமும் கொண்ட முக்கோணங்களாக அமையும்.

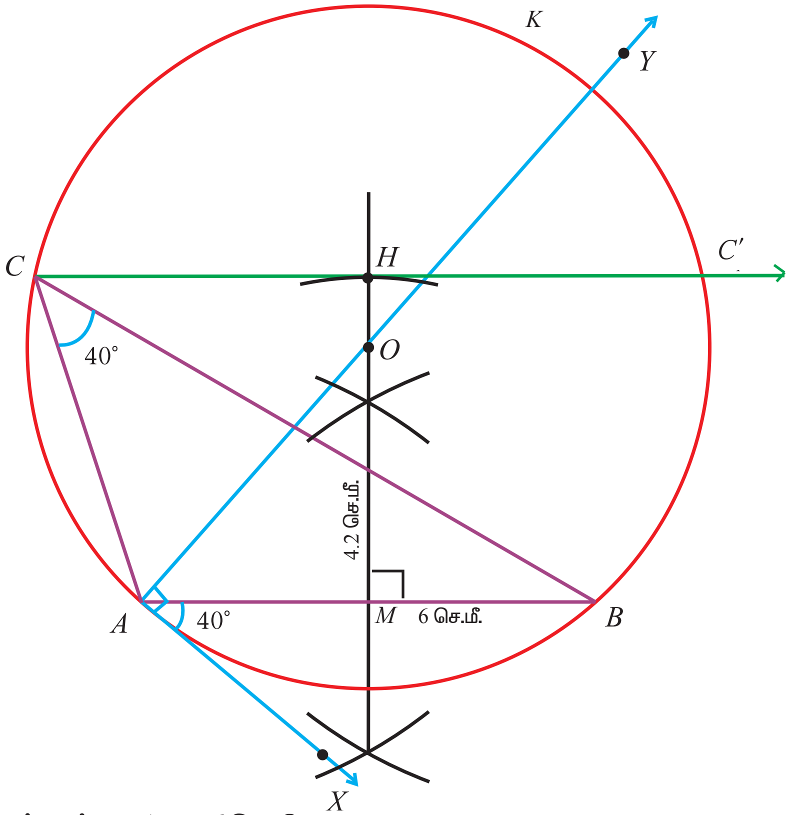
9.3.1 அடிப்பக்கம், உச்சிக்கோணம் மற்றும் உச்சியிலிருந்து அடிப்பக்கத்திற்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோடு தரப்பட்டால் முக்கோணம் வரைதல். (Construction of a triangle when its base, the vertical angle and the altitude from the vertex to the base are given)

எடுத்துக்காட்டு 9.4

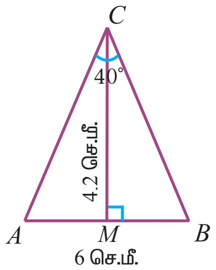
$AB = 6$ செ.மீ. $\angle C = 40^\circ$ மற்றும் உச்சி C-யிலிருந்து AB-க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் 4.2 செ.மீ. கொண்ட ΔABC வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : ΔABC -ல் $AB = 6$ செ.மீ., $\angle C = 40^\circ$,

C-யிலிருந்து AB-க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் = 4.2 செ.மீ.



உதவிப்படம்



வரைமுறை

(i) கோட்டுத்துண்டு $AB = 6$ செ.மீ வரைக.

(ii) $\angle BAX = 40^\circ$ என இருக்கும்படி AX வரைக.

(iii) $AY \perp AX$ வரைக.

(iv) AB-ன் மையக்குத்துக் கோடு வரைக. அது AY மற்றும் AB-ஆகியனவற்றை முறையே O மற்றும் M புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது.

(v) O-யை மையமாகவும், OA-வை ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் வரைக.

(vi) வட்டப் பகுதி AKB என்பது கோணம் 40° கொண்டிருக்கும்.

(vii) மையக்குத்துக்கோடு MO-ல், $MH = 4.2$ செ.மீ இருக்கும் படி H என்ற புள்ளியை குறிக்க.

(viii) AB-க்கு இணையாக CHC' வரைக. அது வட்டத்தை C மற்றும் C'-களில் சந்திக்கும்.

(ix) AC மற்றும் BC இணைக்க இதுவே தேவையான முக்கோணம் ΔABC ஆகும்.

குறிப்புரை

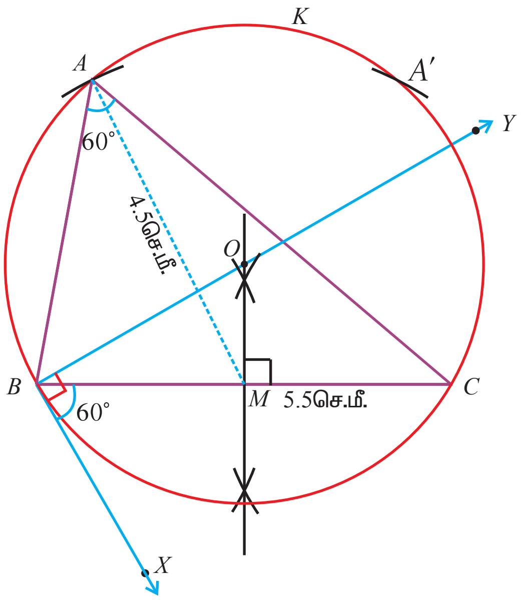
இங்கு, $\Delta ABC'$ என்பது தேவையான மற்றொரு முக்கோணம் ஆகும்.

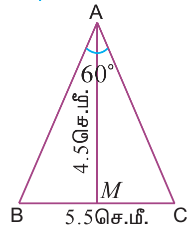
9.3.2 அடிப்பக்கம், உச்சிக்கோணம் மற்றும் அடிப்பக்கத்திற்கு வரையப்பட்ட நடுக்கோடு தரப்பட்டால் முக்கோணம் வரைதல். (Construction of a triangle when its base, the vertical angle and the median from the vertex to the base are given)

எடுத்துக்காட்டு 9.5

அடிப்பக்கம் $BC = 5.5$ செ.மீ., $\angle A = 60^\circ$ மற்றும் உச்சி A-யிலிருந்து வரையப்பட்ட நடுக்கோடு AM-ன் நீளம் $= 4.5$ செ.மீ கொண்ட ΔABC வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : ΔABC-ல், $BC = 5.5$ செ.மீ., $\angle A = 60^\circ$, நடுக்கோடு $AM = 4.5$ செ.மீ.





வரைமுறை

(i) $BC = 5.5$ செ.மீ. அளவுள்ள ஒரு கோட்டுத்துண்டு வரைக.

(ii) புள்ளி B வழியே $\angle CBX = 60^\circ$ என இருக்கும் படி BX வரைக.

(iii) $BY \perp BX$ வரைக.

(iv) BC-ன் மையக்குத்துக்கோடு வரைக. அது BY மற்றும் BC-களை O மற்றும் M -புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது.

(v) O-வை மையமாகவும், OB-யை ஆரமாகவும் கொண்டு வட்டம் வரைக. வட்டத்தில் புள்ளி K-ஐக் குறிக்க.

(vi) பெரிய வில் BKC ஆனது கோணம் 60°-ஐக் கொண்டிருக்கும்.

(vii) M-ஐ மையமாகக் கொண்டு 4.5 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வில் வரைக. அது வட்டத்தை A மற்றும் A' புள்ளிகளில் சந்திக்கும்.

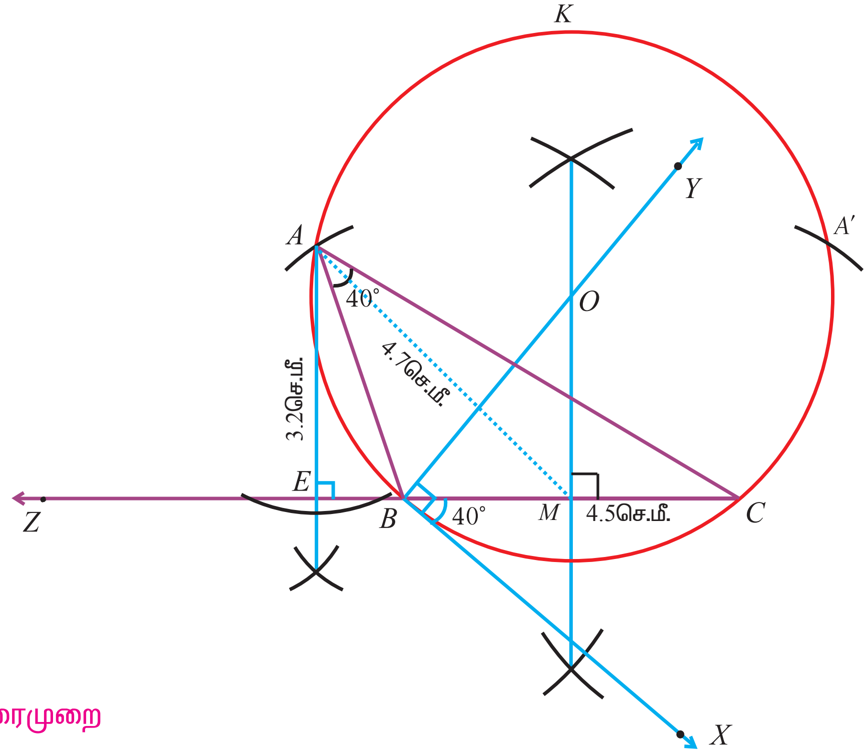
(viii) AB, AC ஆகியனவற்றை இணைக்க.

(ix) $\triangle ABC$ அல்லது $\Delta A'BC$ என்பது தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

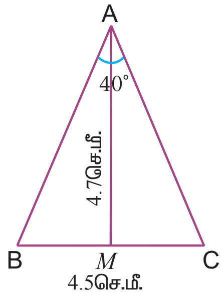
எடுத்துக்காட்டு 9.6

$BC = 4.5$ செ.மீ, $\angle A = 40^\circ$ மற்றும் உச்சி A-யிலிருந்து BC க்கு வரையப்பட்ட நடுக்கோட்டின் நீளம் $AM = 4.7$ செ.மீ. என இருக்கும் படி ΔABC வரைக. மேலும் A-யிலிருந்து BC-க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : ΔABC-ல், $BC = 4.5$ செ.மீ., $\angle A = 40^\circ$ மற்றும் நடுக்கோட்டின் நீளம் $AM = 4.7$ செ.மீ.



உதவிப்படம்



வரைமுறை

(i) $BC = 4.5$ செ.மீ என இருக்கும் படி ஒரு கோட்டுத்துண்டு வரைக.

(ii) $\angle CBX = 40^\circ$ என இருக்கும் படி BX வரைக.

(iii) $BY \perp BX$ வரைக.

(iv) BC-ன் மையக் குத்துக்கோடு வரைக. அது BY மற்றும் BC-களை முறையே O மற்றும் M புள்ளிகளில் சந்திக்கட்டும்.

(v) O-வை மையமாகவும், OB-ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக. அதில் புள்ளி K-ஐக் குறிக்க.

(vi) பெரிய வில் BKC ஆனது, உச்சிக்கோணம் 40°-க் கொண்டிருக்கும்.

(vii) M-ஐ மையமாகக் கொண்டு 4.7செ.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு வில் வரைக. அது வட்டத்தை A மற்றும் A'-களில் சந்திக்கும்.

(viii) AB மற்றும் AC ஆகியனவற்றை இணைக்க. ΔABC அல்லது $\Delta A'BC$ தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

(ix) CB-ஐ CZ வரை நீட்டுக.

(x) $AE \perp CZ$ வரைக.

(xi) குத்துக்கோடு AE-ன் நீளம் 3.2செ.மீ.

பயிற்சி 9.2

1. $AB = 5.2$செ.மீ நீளமுள்ள கோட்டுத்துண்டின் மீது 48° கோணம் ஏற்படுத்தும் வட்டப்பகுதியை அமைக்க.

2. ΔPQR-ல் அடிப்பக்கம் $PQ = 6$செ.மீ., $\angle R = 60^\circ$ மற்றும் உச்சி R-லிருந்து PQ-க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் 4 செ.மீ என இருக்குமாறு ΔPQR வரைக.

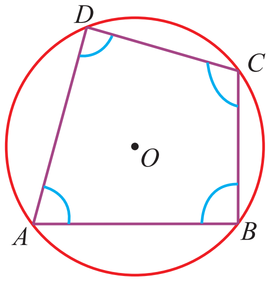
3. $PQ = 4$செ.மீ, $\angle R = 25^\circ$ மற்றும் உச்சி R-லிருந்து PQ -க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் 4.5செ.மீ என்ற அளவுகள் கொண்ட ΔPQR வரைக.

4. ΔABC-ல், $BC = 5$ செ.மீ., $\angle A = 45^\circ$ மற்றும் உச்சி A-லிருந்து BC-க்கு வரையப்பட்ட நடுக்கோட்டின் நீளம் 4 செ.மீ என இருக்கும் படி ΔABC வரைக.

5. $BC = 5$ செ.மீ., $\angle BAC = 40^\circ$ மற்றும் உச்சி A-லிருந்து BC-க்கு வரையப்பட்ட நடுக்கோட்டின் நீளம் 6 செ.மீ. என்ற அளவுகள் கொண்ட ΔABC வரைக. மேலும் உச்சி A-லிருந்து வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் காண்க.

9.4 வட்ட நாற்கரம் வரைதல் (Construction of cyclic quadrilateral)

ஒரு நாற்கரத்தின் நான்கு உச்சிகளும், ஒரு வட்டத்தின் பரிதியில் அமைந்தால் அந்நாற்கரம் வட்ட நாற்கரம் (Cyclic Quadrilateral) எனப்படும். வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர் கோணங்கள் மிகை நிரப்புக் கோணங்களாகும். அதாவது எதிர்கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும். ஆகவே தான், ஒரு வட்ட நாற்கரம் வரைய ஐந்து அளவுகளுக்குப் பதிலாக தகுந்த நான்கு அளவுகளே போதுமானது.



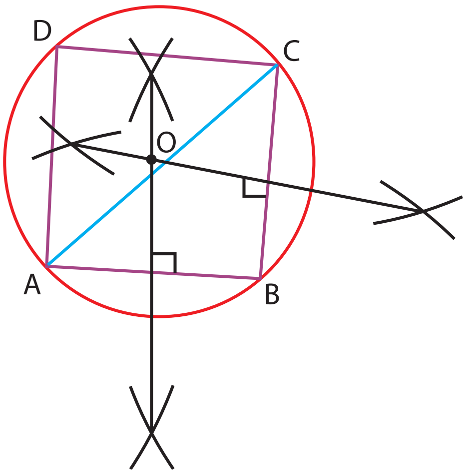
கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு வட்டநாற்கரம் $ABCD$ வரைதலில் உள்ள பல்வேறு படிநிலைகளைப் பற்றிக் காண்போம்.

(i) கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு ஒரு உதவிப்படம் வரைந்து $\triangle ABC$ அல்லது $\triangle ABD$ வரைக.

(ii) பக்கங்கள் AB மற்றும் BC-களுக்கு இரு சமக் கூறிடும் செங்குத்துக்கோடுகள் அதாவது மையக்குத்துக்கோடுகள் (Perpendicular bisectors) வரைக. அவைகள் O-வில் சந்திக்கட்டும்.

(iii) O-யை மையமாகவும், OA $(= OB=OC)$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு $\triangle ABC$-ன் சுற்றுவட்டம் (Circumcircle) வரைக.

(iv) கொடுக்கப்பட்ட அளவினைக் கொண்டு நான்காவது உச்சி D-ஐக் காண்க. AD மற்றும் CD-க்களை இணைக்க.



(v) தற்போது, $ABCD$ என்பது தேவையான வட்ட நாற்கரம் ஆகும்.

கீழே (வரிசைப்படுத்தியுள்ளவாறு) கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு வட்ட நாற்கரம் எவ்வாறு வரைவது எனக் காண்போம்.

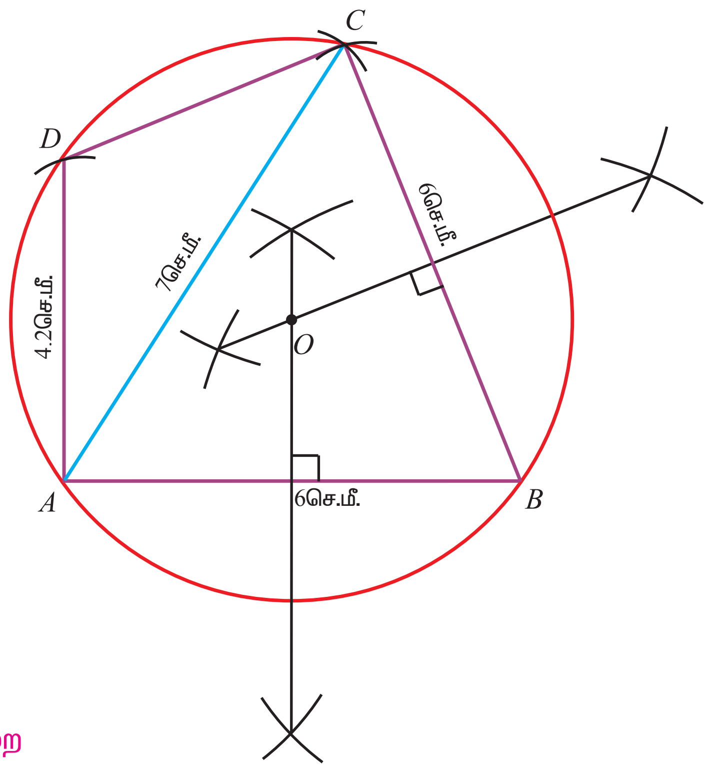
(i) மூன்று பக்கங்கள் மற்றும் ஒரு மூலைவிட்டம். (ii) இரண்டு பக்கங்கள் மற்றும் இரண்டு மூலைவிட்டங்கள். (iii) மூன்று பக்கங்கள் மற்றும் ஒரு கோணம். (iv) இரண்டு பக்கங்கள் மற்றும் இரண்டு கோணங்கள். (v) ஒரு பக்கம் மற்றும் மூன்று கோணங்கள். (vi) இரண்டு பக்கங்கள், ஒரு கோணம் மற்றும் ஒரு இணை கோடு.

வகை I - மூன்று பக்கங்கள் மற்றும் ஒரு மூலைவிட்டம் கொடுக்கப்படும் போது நாற்கரம் வரைதல் (Type I- Three sides and one diagonal of a cyclic quadrilateral are given)

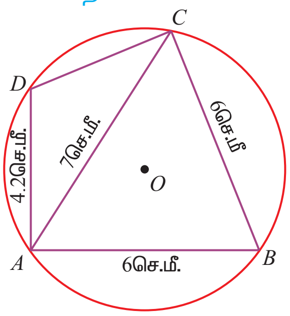
எடுத்துக்காட்டு 9.7

$AB = 6$ செ.மீ., $AC = 7$ செ.மீ., $BC = 6$ செ.மீ. மற்றும் $AD = 4.2$ செ.மீ. அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : வட்ட நாற்கரம் $ABCD$-ல், $AB = 6$ செ.மீ., $AC = 7$செ.மீ., $BC = 6$ செ.மீ. மற்றும் $AD = 4.2$ செ.மீ.



உதவிப் படம்



வரைமுறை

(i) உதவிப்படம் வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்க. $AB = 6$செ.மீ அளவுள்ள ஒரு கோட்டுத்துண்டு வரைக.

(ii) புள்ளிகள் A மற்றும் B-யை மையமாகக் கொண்டு முறையே 7 செ.மீ மற்றும் 6 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டவிற்கள் (arcs) வரைக. அவைகள் அது C என்ற புள்ளியில் சந்திக்கும். AB மற்றும் AC -களை இணைக்க.

(iii) கோட்டுத்துண்டுகள் AB மற்றும் AC-களின் மையக்குத்துக்கோடுகள் வரைந்து அவை சந்திக்கும் புள்ளி O-ஐ காண்க.

(iv) O-ஐ மையமாகவும் மற்றும் $OA\ (= OB = OC)$ -ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ΔABC-ன் சுற்று வட்டம் வரைக.

(v) புள்ளி A-ஐ மையமாகக் கொண்டு 4.2செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டவில் வரைக அது சுற்று வட்டத்தை D-ல் சந்திக்கட்டும்.

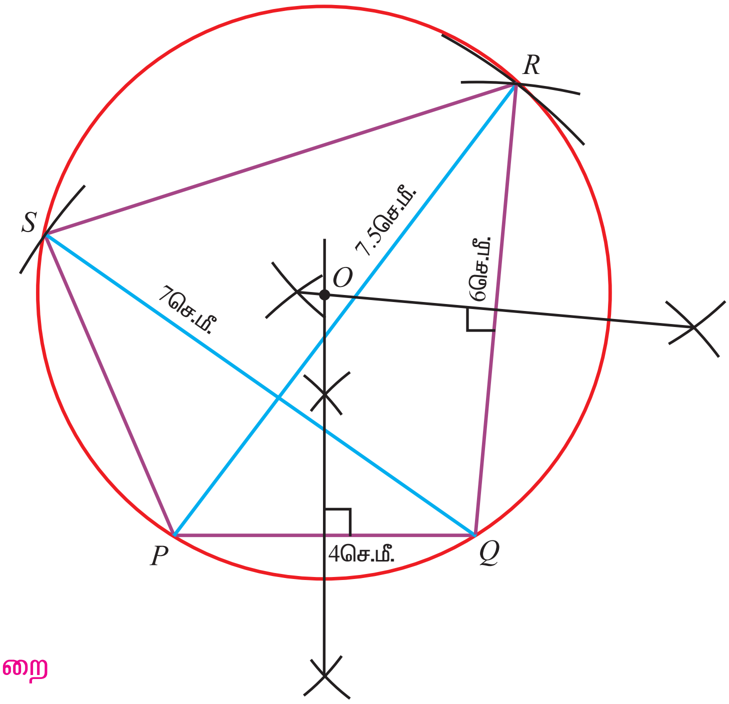
(vi) AD மற்றும் CD ஆகியனவற்றை இணைக்க. இதுவே தேவையான வட்டநாற்கரம் $ABCD$ ஆகும்.

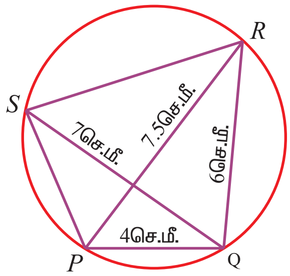
வகை II - இரண்டு பக்கங்கள் மற்றும் இரண்டு மூலைவிட்டங்கள் கொடுக்கப்படும் போது வட்டநாற்கரம் வரைதல் (Type II -Two sides and two diagonals of a cyclic quadrilateral are given)

எடுத்துக்காட்டு 9.8

$PQ = 4$ செ.மீ, $QR = 6$ செ.மீ, $PR = 7.5$ செமீ மற்றும் $QS = 7$ செ.மீ அளவுகள் கொண்ட வட்டநாற்கரம் $PQRS$ வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : வட்டநாற்கரம் $PQRS$-ல், $PQ = 4$ செ.மீ., $QR = 6$ செ.மீ., $PR = 7.5$ செ.மீ. மற்றும் $QS = 7$ செ.மீ.





வரைமுறை

(i) உதவிப்படம் வரைந்து, அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும். கோட்டுத்துண்டு $PQ = 4$ செ.மீ. வரைக.

(ii) புள்ளிகள் P மற்றும் Q-யை மையமாக் கொண்டு முறையே 7.5செ.மீ. மற்றும் 6 செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்ட விற்கள் வரைந்து, அவை சந்திக்கும் புள்ளி R ஐக் காண்க.

(iii) PR மற்றும் QR-களை இணைக்க.

(iv) PQ மற்றும் QR-ன் மையக்குத்துக்கோடுகள் வரைந்து அவை சந்திக்கும் புள்ளி O-வைக் காண்க.

(v) O-வை மையமாகவும் மற்றும் $OP(=OQ=OR)$-யை ஆரமாகவும் கொண்டு ΔPQR-ன் சுற்று வட்டம் வரைக.

(vi) Q-வை மையமாகக் கொண்டு 7 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வில் வரைக. அது சுற்று வட்டத்தை S -ல் சந்திக்கும்.

(vii) PS மற்றும் RS-களை இணைக்க.

(viii) தேவையான வட்டநாற்கரம் $PQRS$ ஆகும்.

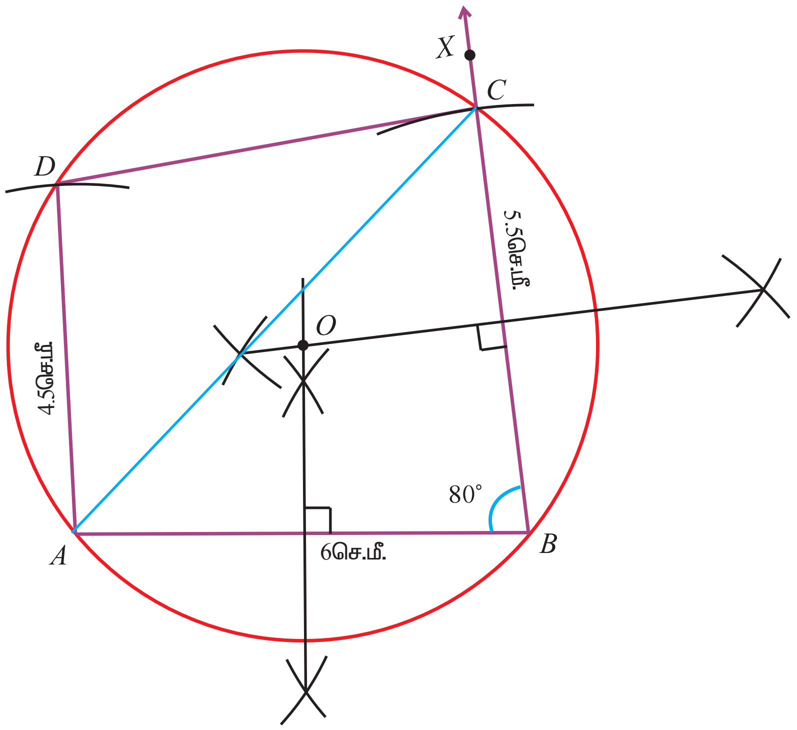
வகை III - மூன்று பக்கங்கள் மற்றும் ஒரு கோணம் கொடுக்கப்படும் போது வட்டநாற்கரம் வரைதல் (Type III Three sides and one angle of a cyclic quadrilateral are given)

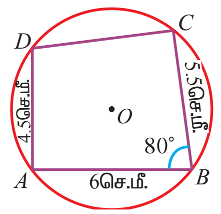
எடுத்துக்காட்டு 9.9

$AB = 6$ செ.மீ., $BC = 5.5$ செ.மீ., $\angle ABC = 80^\circ$ மற்றும் $AD = 4.5$ செ.மீ. அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: வட்ட நாற்கரம் $ABCD$-ல், $AB = 6$ செ.மீ., $BC = 5.5$ செ.மீ.,

$\angle ABC = 80^\circ$ மற்றும் $AD = 4.5$ செ.மீ.





(i) உதவிப்படம் வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்க.
$AB = 6$ செ.மீ நீளமுள்ள ஒரு கோட்டுத்துண்டு வரைக.

(ii) புள்ளி B வழியே $\angle ABX = 80^\circ$ எனும் படி BX வரைக.

(iii) புள்ளி B-யை மையமாகக் கொண்டு 5.5 செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்டவில் வரைக. அது BX-யை சந்திக்கும் புள்ளி C என்க. AC-யை இணைக்க.

(iv) AB மற்றும் BC-க்களின் மையக்குத்துக்கோடுகள் வரைந்து அவை சந்திக்கும் புள்ளி O என்க.

(v) O-வை மையமாகவும் மற்றும் OA $(= OB = OC)$ ஆரமாகவும் கொண்டு ΔABC-ன் சுற்று வட்டம் வரைக.

(vi) புள்ளி A-யை மையமாகக் கொண்டு 4.5 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டவில் வரைக அது சுற்றுவட்டத்தை சந்திக்கும் புள்ளி D என்க.

(vii) AD மற்றும் CD ஆகியனவற்றை இணைக்க.

(viii) தேவையான வட்டநாற்கரம் $ABCD$ ஆகும்.

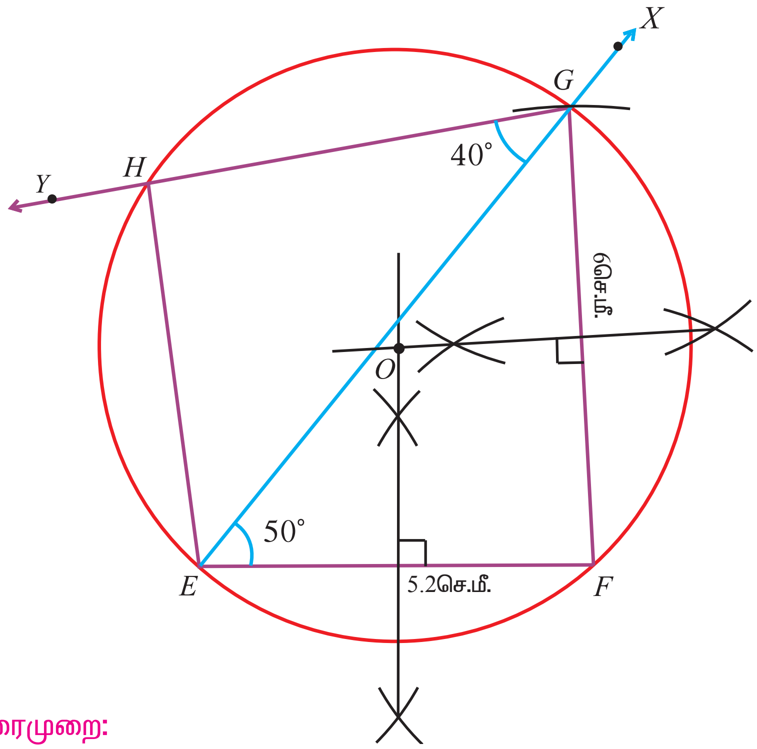
வகை IV - இரண்டு பக்கங்கள் மற்றும் இரண்டு கோணங்கள் கொடுக்கப்படும் போது வட்ட நாற்கரம் வரைதல் **(Type IV -Two sides and two angles of a cyclic quadrilateral are given)**

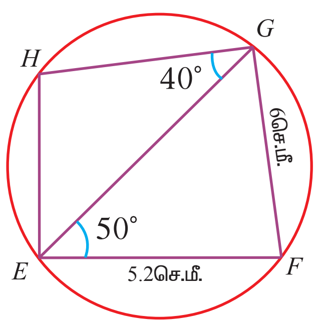
எடுத்துக்காட்டு 9.10

$EF = 5.2$ செ.மீ., $\angle GEF = 50^\circ$, $FG = 6$ செ.மீ. மற்றும் $\angle EGH = 40^\circ$ என்ற அளவுகள் கொண்ட வட்டநாற்கரம் $EFGH$ வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: வட்டநாற்கரம் $EFGH$ -ல், $EF = 5.2$ செ.மீ., $\angle GEF = 50^\circ$

$FG = 6$ செ.மீ. மற்றும் $\angle EGH = 40^\circ$





வரைமுறை:

(i) ஓர் உதவிப்படம் வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளை குறிக்க. $EF = 5.2$ செ.மீ. நீளமுள்ள கோட்டுத்துண்டு வரைக.

(ii) புள்ளி E-ல், $\angle FEX = 50^\circ$ எனும் படி EX வரைக.

(iii) F-யை மையமாகக் கொண்டு 6 செ.மீ ஆரமுள்ள ஓர் வில் வரைந்து அது EX யை சந்திக்கும் புள்ளி G என்க.

(iv) FG-யை இணைக்க.

(v) EF மற்றும் FG-க்களின் மையக்குத்துக் கோடுகள் வரைக. அவைகள் புள்ளி O-ல் சந்திக்கட்டும்.

(vi) O-வை மையமாகவும் மற்றும் $OE\ (= OF = OG)$ -ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ΔEFG -ன் சுற்று வட்டம் வரைக.

(vii) புள்ளி G ல், $\angle EGY = 40^\circ$ எனும்படி GY வரைக.

(viii) GY ஆனது சுற்றுவட்டத்தை வெட்டும் புள்ளி H என்க. EH-ஐ இணைக்க. தற்போது தேவையான வட்டநாற்கரம் $EFGH$ ஆகும்.

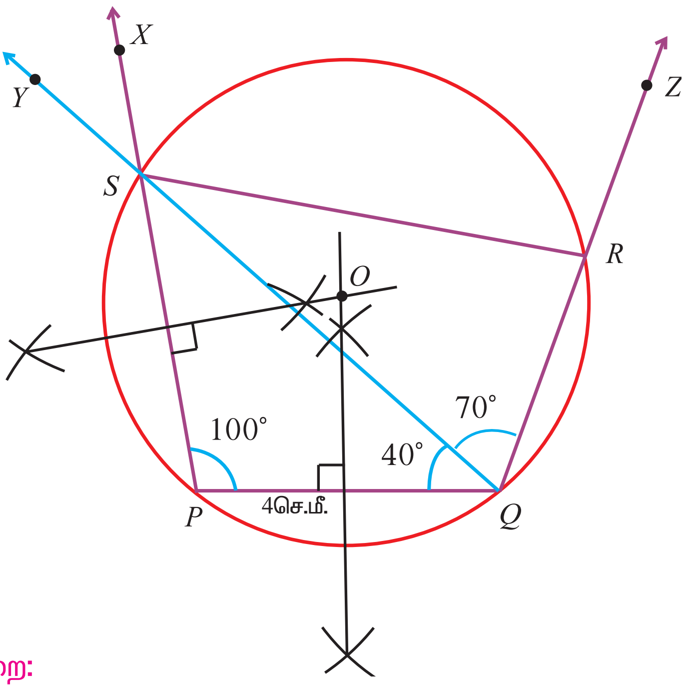
வகை V - ஒரு பக்கம், மற்றும் மூன்று கோணங்கள் கொடுக்கப்படும் போது வட்டநாற்கரம் வரைதல் **(Type V- One side and three angles of a cyclic quadrilateral are given)**

எடுத்துக்காட்டு 9.11

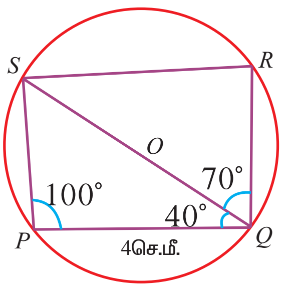
$PQ = 4$ செ.மீ., $\angle P = 100^\circ$, $\angle PQS = 40^\circ$ மற்றும் $\angle SQR = 70^\circ$ எனும்படி வட்டநாற்கரம் $PQRS$ வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: வட்டநாற்கரம் $PQRS$-ல்,

$PQ = 4$ செ.மீ., $\angle P = 100^\circ$, $\angle PQS = 40^\circ$ மற்றும் $\angle SQR = 70^\circ$.



உதவிப்படம்



வரைமுறை:

(i) உதவிப்படம் வரைந்து, அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக்குறிக்க. $PQ = 4$ செ.மீ. அளவுள்ள கோட்டத்துண்டு வரைக.

(ii) புள்ளி P-ல் $\angle QPX = 100^\circ$ எனும் படி PX வரைக.

(iii) புள்ளி Q-ல் $\angle PQY = 40^\circ$ எனும் படி QY வரைக QY ஆனது PX-ஐ S-ல் சந்திக்கட்டும்.

(iv) PQ மற்றும் PS-களின் மையக்குத்துக்கோடுகள் வரைந்து அவை சந்திக்கும் புள்ளி O-யைக் காண்க.

(v) புள்ளி O-வை மையமாகவும் $OP(= OQ = OS)$யை ஆரமாகவும் கொண்டு $\triangle PQS$-ன் சுற்று வட்டம் வரைக.

(vi) புள்ளி Q-ல், $\angle SQZ = 70^\circ$ எனும் படி QZ வரைக. அது வட்டத்தை புள்ளி R-ல் சந்திக்கட்டும்.

(vii) RS-ஐ இணைக்க.

தேவையான வட்ட நாற்கரம் $PQRS$ ஆகும்.

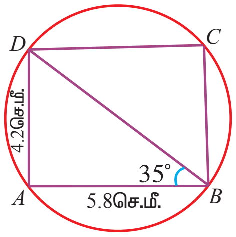
வகை VI - இரண்டு பக்கங்கள், ஒரு கோணம் மற்றும் ஒரு இணைக்கோடு கொடுக்கப்படும் போது வட்டநாற்கரம் வரைதல். (Type VI Two sides , one angle and one parallel line are given)

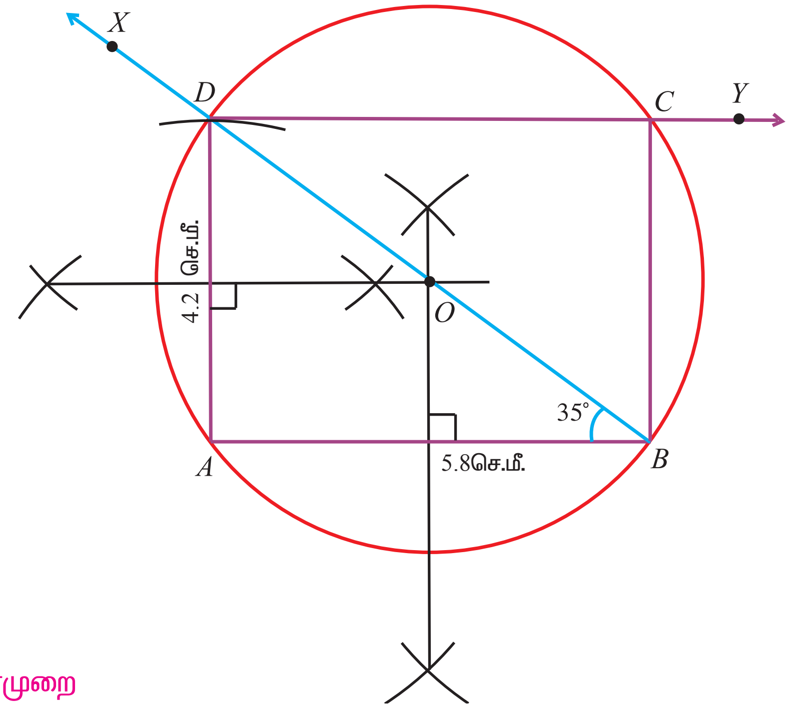
எடுத்துக்காட்டு 9.12

$AB = 5.8$ செ.மீ., $\angle ABD = 35^\circ$, $AD = 4.2$ செ.மீ. மற்றும் $AB \parallel CD$ என்ற அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: வட்ட நாற்கரம் $ABCD$-ல், $AB = 5.8$ செ.மீ., $\angle ABD = 35^\circ$, $AD = 4.2$ செ.மீ. மற்றும் $AB \parallel CD$.

உதவிப்படம்





வரைமுறை

(i) உதவிப்படம் வரைந்து, அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளை குறிக்க.

$AB = 5.8$ செ.மீ. அளவுள்ள ஒரு கோட்டுத்துண்டு வரைக.

(ii) புள்ளி B-ல், $\angle ABX = 35^\circ$ எனும்படி BX வரைக.

(iii) A-யை மையமாகக் கொண்டு 4.2 செ.மீ ஆரமுள்ள ஓர் வட்டவில் வரைக அது BX-யை சந்திக்கும் புள்ளி D என்க.

(iv) AB மற்றும் AD-களின் மையக்குத்துக்கோடுகள் வரைக அவை சந்திக்கும் புள்ளி O-என்க.

(v) O-யை மையமாகவும், $OA\ (= OB = OD)$-ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ΔABD-ன் சுற்று வட்டம் வரைக.

(vi) $DY \parallel AB$ எனும்படி DY வரைக அது வட்டத்தை சந்திக்கும் புள்ளி C என்க. BC-யை இணைக்க.

(vii) தேவையான வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ ஆகும்.

பயிற்சி 9.3

1. $PQ = 6.5$ செ.மீ., $QR = 5.5$ செ.மீ., $PR = 7$ செ.மீ. மற்றும் $PS = 4.5$ செ.மீ. என்ற அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $PQRS$ வரைக.

2. $AB = 6$ செ.மீ., $AD = 4.8$ செ.மீ., $BD = 8$ செ.மீ. மற்றும் $CD = 5.5$ செ.மீ. என்ற அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ வரைக.

3. $PQ = 5.5$ செ.மீ., $QR = 4.5$ செ.மீ., $\angle QPR = 45^\circ$ மற்றும் $PS = 3$ செ.மீ. ஆகிய அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $PQRS$ வரைக.

4. $AB = 7$ செ.மீ., $\angle A = 80^\circ$, $AD = 4.5$ செ.மீ. மற்றும் $BC = 5$ செ.மீ. என்ற அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ வரைக.

5. $KL = 5.5$ செ.மீ., $KM = 5$ செ.மீ., $LM = 4.2$ செ.மீ. மற்றும் $LN = 5.3$ செ.மீ. ஆகிய அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $KLMN$ வரைக.

6. $EF = 7$ செ.மீ., $EH = 4.8$ செ.மீ., $FH = 6.5$ செ.மீ. மற்றும் $EG = 6.6$ செ.மீ. அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $EFGH$ வரைக.

7. $AB = 6$ செ.மீ., $\angle ABC = 70^\circ$, $BC = 5$ செ.மீ. மற்றும் $\angle ACD = 30^\circ$ ஆகிய அளவுகள் கொண்ட வட்டநாற்கரம் $ABCD$ வரைக.

8. $PQ = 5$ செ.மீ., $QR = 4$ செ.மீ., $\angle QPR = 35^\circ$ மற்றும் $\angle PRS = 70^\circ$ ஆகிய அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $PQRS$ வரைக.

9. $AB = 5.5$ செ.மீ., $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$ மற்றும் $\angle ACD = 30^\circ$ ஆகிய அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ வரைக.

10. $AB = 6.5$ செ.மீ., $\angle ABC = 110^\circ$, $BC = 5.5$ செ.மீ. மற்றும் $AB \parallel CD$ என்றவாறு அமையும் வட்டநாற்கரம் $ABCD$ வரைக.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

1901 முதல் ஒவ்வொரு ஆண்டும் இயற்பியல், வேதியியல், உடற்கூறியியல் (மருத்துவம்) இலக்கியம் மற்றும் அமைதி ஆகிய துறைகளில் சிறந்து விளங்குவோர்க்கு பெருமைக்குரிய நோபல் பரிசு (Nobel Prize) வழங்கப்பட்டு வருகிறது. ஸ்வீடன் நாட்டின் ஸ்டாக்ஹோம்மிலுள்ள நோபல் அறக்கட்டளை மூலம் ஆண்டு தோறும் வழங்கப்பட்டு வரும் இவ்வரிய பரிசானது ஒரு சர்வதேச விருதாகும். ஆனால் கணிதத்திற்கு நோபல் பரிசு வழங்கப்படுவதில்லை.

சர்வதேச கணித கூட்டமைப்பால் (International Mathematical Union) நான்கு ஆண்டுகளுக்கு ஒரு முறை நடத்தப் பெறும் சர்வதேச கணித காங்கிரஸ் மாநாட்டில் ஒவ்வொரு முறையும் 40 வயதைக் கடக்காத இரண்டு, மூன்று அல்லது நான்கு கணிதவியல் அறிஞர்களுக்கு வழங்கப்படும் விருது பீல்ட்ஸ் பதக்கம் (Fields Medal) எனப்படும். பீல்ட்ஸ் பதக்கம் கணிதத்திற்கான நோபல் பரிசு என பாராட்டப்படுகிறது.

10

- அறிமுகம்
- இருபடி வளைவரைகளின் வரைபடங்கள்
- சிறப்பு வரைபடங்கள்

ரெனி டெஸ்கார்டிஸ்
(Rene Descartes)
(1596-1650)
பிரான்ஸ்

டெஸ்கார்டிஸ், மருத்துவமனையில் படுக்கையில் இருக்கும்போது ஈ (பூச்சி) ஒன்று அவருடைய அறையின் ஒரு மூலையில் சுற்றிச் சுற்றி பறந்து கொண்டிருப்பதை பார்த்து கார்டிசியன் தளத்தைக் கண்டறிந்தார்.

டெஸ்கார்டிஸ் பகுமுறை வடிவ கணிதத்தை உருவாக்கினார். இதன் மூலம் ஆயத்தொலை அச்சுக்களைப் பயன்படுத்தி வரைபடங்களை வரைவதற்கு வழிவகுத்தார்.

வரைபடங்கள்

I think, therefore I am
- Rene Descartes

10.1 அறிமுகம்

வரைபடங்கள் (Graphs) என்பன தகவல்களைக் காட்டும் படங்களாகும். எடை எவ்வாறு உயரத்துடன் தொடர்புடையதோ, அதே போன்று இரு வேறுபட்ட அளவுகள் எவ்வாறு தொடர்புடையன என்பதை வரைபடங்கள் உணர்த்தும். சில நேரங்களில் இயற்கணிதத்தை கண்முன் கொணர்ந்து புரிந்து கொள்வது கடினமாக இருக்கும். குறியீடுகளால் அமைந்த கணிதக் கோவைகளுக்கும் மற்றும் அவற்றின் வரைபடங்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பைக் கற்றுக் கொள்வது இயற்கணித வடிவமைப்புகளைப் புரிந்து கொள்ள வழிவகை செய்கிறது.

கருத்தில் கொண்டுள்ள, தீர்வு காண வேண்டிய கணித வினாவிற்கு விளக்கமளிக்கும் வகையில் ஓரளவிற்குத் துல்லியமான வரைபடத்தை வரையும் பழக்கத்தை மாணவர்கள் ஏற்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும். ஒரு கணக்கிற்கு வடிவியல் விளக்கம் பெறமட்டுமல்லாது இயற்கணிதத் தீர்வை மிகச்சரியாக உள்ளதா எனச் சோதனை செய்து பார்க்கவும், கவனத்துடன் வரையப்பட்ட வரைபடங்கள் உதவும். வரைபடங்களின் மூலம் பெறப்படும் தீர்வுகள் அனைத்தும் தோராயமான மதிப்புகள் என்பதை நினைவிற்கொள்ள வேண்டும். எந்த அளவிற்கு துல்லியமாக வரைபடங்களை வரைகிறோமோ, அதே அளவிற்கு பெறப்படும் மதிப்புகளும் துல்லியமாக அமையும்.

10.2 இருபடிக் கோவைகளின் வரைபடங்கள் (Quadratic Graphs)

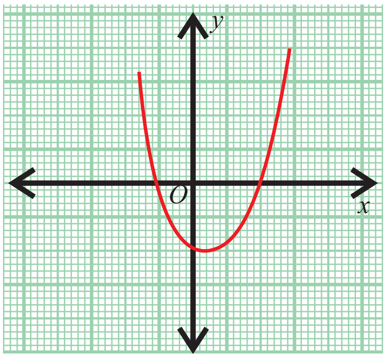
வரையறை

$f: A \to B$ ஒரு சார்பு என்க. இங்கு A மற்றும் B என்பன மெய்யெண்கள் கணம் $\mathbb{R}$-ன் உட்கணங்களாகும். அனைத்து வரிசைச் சோடிகளின் கணமான $\{(x,y)\,|\,x \in A,\, y = f(x)\}$ என்பது f-ன் வரைபடம் என அழைக்கப்படும்.

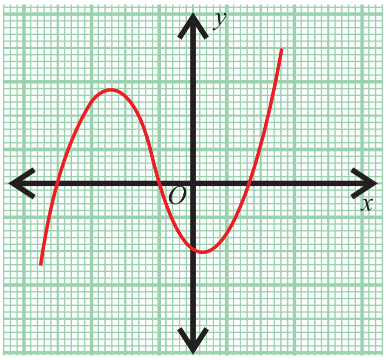
x-ல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையை வரைபட வடிவில் குறிப்பிட இயலும். $y = f(x) = ax + b, a \neq 0$ என்ற ஒருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் வரைபடம் என்பது சாய்வு 'a' உடைய ஒரு நேர்க்கோடாகும் (oblique line).

$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \;\; a \neq 0$ எனும் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரைபடம் என்பது நேர்க்கோடற்ற தொடர்ச்சியான ஒரு வளைவரை ஆகும். இதனை பரவளையம் (Parabola) என்று கூறுவர்.

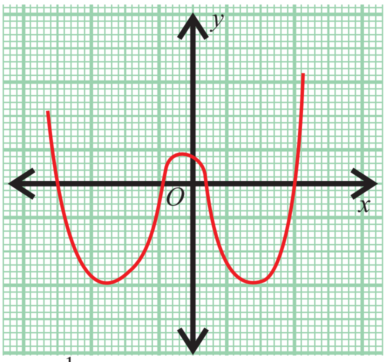
பின்வரும் வரைபடங்கள் வெவ்வேறான பல்லுறுப்புக்கோவைகளைக் காட்டுகின்றன.



$y = (x+1)(x-2)$,
இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவை



$y = (x+4)(x+1)(x-2)$,
முப்படி பல்லுறுப்புக்கோவை



$y = \frac{1}{14}(x+4)(x+1)(x-3)(x-0.5)$
நாற்படி பல்லுறுப்புக்கோவை

9-ஆம் வகுப்பில் ஒருபடி பல்லுறுப்புக்கோவை $y = ax + b, a \neq 0$,-ன் நேர்க்கோட்டு வரைபடங்களை வரைய நாம் கற்றுள்ளோம். இப்போது $y = ax^2 + bx + c$, இங்கு a, b மற்றும் c ஆகியன மெய் மாறிலிகள் மற்றும் $a \neq 0$, என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் வரைபடத்தை எவ்வாறு வரைவது என்பதையும் மற்றும் அதன் பண்புகள் எத்தகையன என்பதையும் அறியவிருக்கிறோம்.

$y = ax^2 + bx + c$-ன் வரைபடம்

$y = ax^2 + bx + c$ என்பதைக் கருதுக. வர்க்கப்படுத்துதல் முறையைப் பயன்படுத்தி இப்பல்லுறப்புக்கோவையை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

ஆகவே, $\frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \geq 0$. (ஒரு கோவையின் வர்க்கம் எப்போதுமே மிகை)

வளைவரையின் (பரவளையத்தின்) உச்சி $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ஆகும்.

$a > 0$ எனில், வளைவரை **மேல்நோக்கித் திறப்பு உடையது.** $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ என்ற நேர்க்கோட்டின் மீதும் மற்றும் அதற்கு மேலேயும் வளைவரை அமையும். மேலும் வளைவரையானது $x = -\frac{b}{2a}$ என்ற நேர்க்கோட்டைப் பொறுத்துச் சமச்சீராக இருக்கும்.

$a < 0$ எனில், வளைவரை **கீழ்நோக்கித் திறப்பு உடையது.** $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ என்ற கோட்டின் மீதும் அதற்கு கீழும் வளைவரை அமையும். மேலும் $x = -\frac{b}{2a}$ என்ற நேர்க்கோட்டைப் பொருத்து சமச்சீராக இருக்கும்.

இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகளும் அவற்றின் வரைபடங்களின் தன்மையும் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வரிசை எண்	பல்லுறுப்புக்கோவை ($y = ax^2 + bx + c$)	உச்சிப் புள்ளி	a-ன் குறி	வளைவரையின் தன்மை
1	$y = 2x^2$ $a = 2,\ b = 0,\ c = 0$	(0, 0)	மிகை	(i) மேல்நோக்கித் திறப்பு உடையது. (ii) $y = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் மீதும் அதற்கு மேலேயும் அமையும் (iii) y-அச்சிற்கு, அதாவது x=0-க்கு சமச்சீராக வளைவரை அமையும்.
2	$y = -3x^2$ $a = -3,\ b = 0,\ c = 0$	(0, 0)	குறை	(i) கீழ்நோக்கித் திறப்பு உடையது. (ii) y=0 என்ற நேர் கோட்டின் மீதும் மற்றும் அதற்குக் கீழேயும் அமையும். (iii) y-அச்சிற்கு, அதாவது $x = 0$-க்கு சமச்சீராக வளைவரை அமையும்.
3	$y = x^2 - 2x - 3$ $a = 1, b = -2, c = -3$	(1, –4)	மிகை	(i) மேல்நோக்கித் திறப்பு உடையது (ii) $y = -4$ என்ற நேர்க்கோட்டின் மீதும் அதற்கு மேலேயும் அமையும். (iii) $x = 1$-க்கு சமச்சீராக அமையும்.

$y = ax^2 + bx + c$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் வரைபடத்தை வரைவதற்கான வழிமுறைகள் (Procedures to draw the quadratic graph of $y = ax^2 + bx + c$)

(i) $y = ax^2 + bx + c$-ஐப் பயன்படுத்தி x-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளையும் அதற்குரிய y-ன் மதிப்புகளையும் அட்டவணைப் படுத்துக.

(ii) பொருத்தமான அளவுத்திட்டத்தைத் தேர்ந்தெடுக்க.

x-அச்சின் அளவுத்திட்டமும் y-அச்சின் அளவுத்திட்டமும் ஒரே அளவாக இருக்க வேண்டியதில்லை. வரையவேண்டிய வரைபடம் முடிந்த அளவிற்கு பெரிய அளவில் இருக்குமாறு அளவுத் திட்டம் தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும். வரைபடத்தின் அளவு எந்த அளவிற்குப் பெரியதாக இருக்கின்றதோ, அதற்கேற்ப பெறப்படும் முடிவுகளும் துல்லியமாக அமையும்

(iii) வரைபடத்தாளில் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். $y = ax^2 + bx + c$-ன் வரைபடத்தில் நேர்க்கோட்டுத் துண்டுகள் இல்லை என்பதால், அவற்றை ஒரு நேர்க்கோடற்ற இழைவான வளைவரையால் (Smooth Curve) இணைக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.1

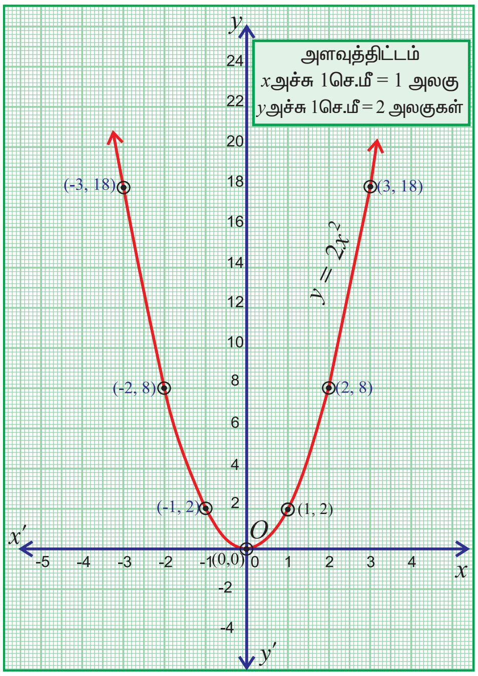
$y = 2x^2$-க்கு வரைபடம் வரைக.

தீர்வு

x-க்கு -3-லிருந்து 3 வரையுள்ள முழுக்களின் மதிப்புகளைக் கொடுத்து அவற்றிற்கு ஏற்ற y-ன் மதிப்புகளைக் கண்டு, கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்துக.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

$(-3, 18)$, $(-2, 8)$, $(-1, 2)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2,8)$ மற்றும் $(3, 18)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும். அப்புள்ளிகளை ஒரு நேர்க்கோடற்ற இழைவான வளைவரையால் (smooth curve) இணைக்கவும். இவ்வளை வரையானது $y = 2x^2$-ன் வரைபடமாகும்.



படம் 10.1

குறிப்புரை

(i) இந்த வளைவரையானது y-அச்சைப் பொருத்து சமச்சீராக இருக்கும். அதாவது, y-அச்சின் இடப்பக்கம் அமைந்துள்ள வரைபடத்தின் பகுதியானது y-அச்சின் வலப்பக்கத்தில் உள்ள பகுதியின் கண்ணாடி பிம்பமாகும்.

(ii) y-ன் மதிப்புகள் குறை எண்களாக இல்லை. எனவே, வரைபடம் x-அச்சுக்குக் கீழ் அமையாது.

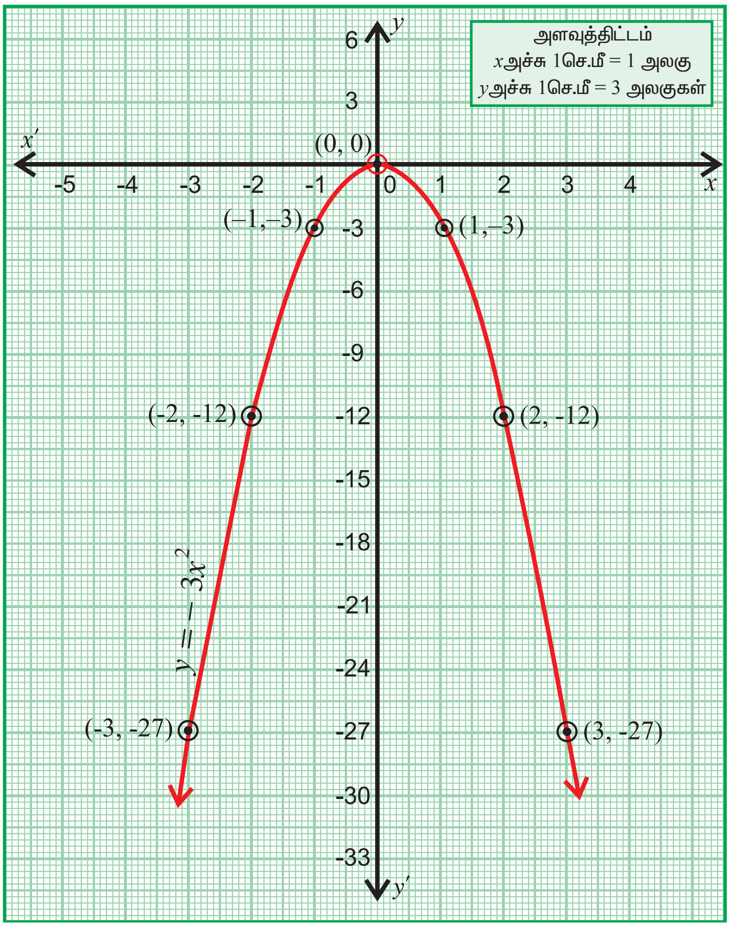
எடுத்துக்காட்டு 10.2

$y = -3x^2$ இன் வரைபடம் வரைக.

தீர்வு

x-க்கு -3 லிருந்து 3 வரையுள்ள முழுக்களின் மதிப்புகளைக் கொடுத்து அவற்றிற்கு ஏற்ற y இன் மதிப்புகளைக் கண்டு, கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்துக.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = -3x^2$	-27	-12	-3	0	-3	-12	-27



படம் 10.2

(–3, –27), (–2, –12), (–1, –3), (0, 0), (1,–3), (2, –12) மற்றும் (3, –27) ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும்.

அப்புள்ளிகளை ஒரு நேர்க்கோடற்ற இழைவான வளைவரையால் (smooth curve) இணைக்கவும். இவ்வாறு பெறப்படும் வளைவரை $y = -3x^2$ இன் வரைபடமாகும். இவ்வரைபடம் பரவளையம் (parabola) எனப்படும்.

குறிப்புரை

(i) y-ன் மதிப்புகள் அனைத்துமே மிகையற்ற மதிப்புகளாக உள்ளதால் $y = -3x^2$ இன் வரைபடம் x-அச்சுக்கு மேல் அமையாது.

(ii) வரைபடம் y-அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீரானது.

10.2.1 $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டை வரைபடம் மூலம் தீர்த்தல்.

(To solve the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ graphically)

முதலில் இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவை $y = ax^2 + bx + c$-ன் வரைபடத்தை வரைக. வளைவரையானது x-அச்சினை வெட்டினால், வளைவரை மற்றும் x-அச்சு ஆகியன வெட்டும் புள்ளிகளின் x-ஆயத்தொலைவுகளின் மதிப்புகளே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.3

வரைபடம் மூலம் தீர்க்க: $x^2 - 2x - 3 = 0$

தீர்வு

முதலில் $y = x^2 - 2x - 3$-இன் வரைபடத்தை வரைவோம்.

x-க்கு -3 லிருந்து 4 வரையுள்ள முழுக்களின் மதிப்புகளைக் கொடுத்து அதற்குரிய y-ன் மதிப்புகளைக் கண்டு கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்துக.

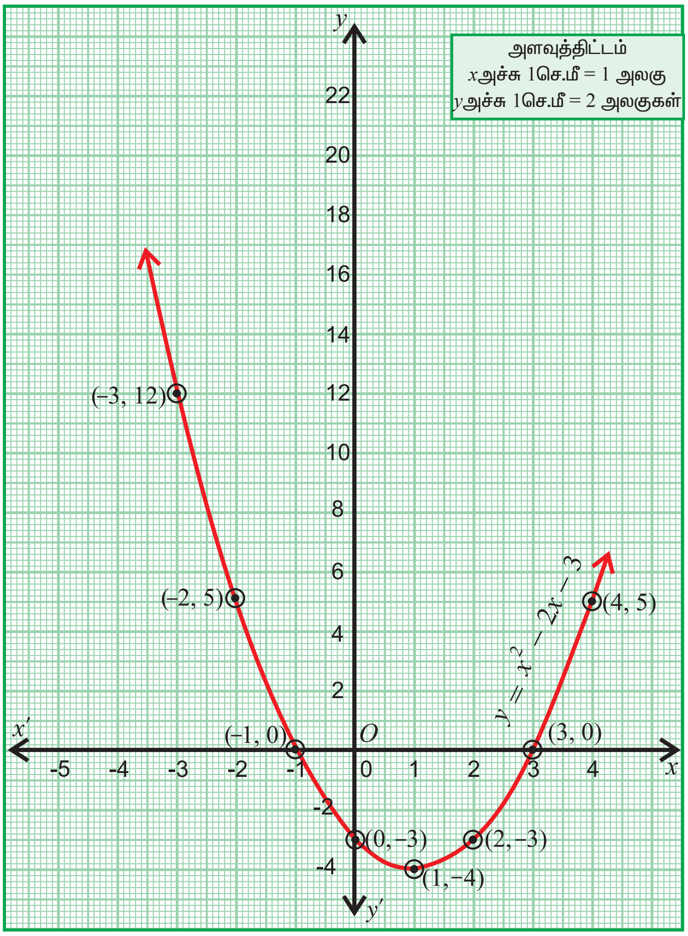
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	9	4	1	0	1	4	9	16
$-2x$	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
y	12	5	0	-3	-4	-3	0	5

$(-3, 12)$, $(-2, 5)$, $(-1, 0)$, $(0, -3)$, $(1, -4)$, $(2, -3)$, $(3, 0)$, $(4, 5)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத் தாளில் குறிக்கவும். இப்புள்ளிகளை நேர்க்கோடற்ற இழைவான வளைவரையால் (smooth curve) இணைக்கவும்.

இவ்வளைவரை x அச்சை $(-1, 0)$ மற்றும் $(3, 0)$ ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

இப்புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைவுகள் -1 மற்றும் 3.

ஆகவே, தீர்வு கணம் $\{-1, 3\}$.



படம் 10.3

குறிப்புரை

(i) x-அச்சில், எப்போதும் $y = 0$ ஆகும்.

(ii) y-ன் மதிப்புகள் மிகை மற்றும் குறை எண்களாக இருப்பதால் வளைவரையானது x-அச்சுக்கு மேலும் கீழும் அமையும்.

(iii) $x = 1$ என்ற கோட்டைப் பொருத்து வரைபடம் சமச்சீரானது.

இது y-அச்சைப் பொருத்து சமச்சீரானது அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 10.4

வரைபடம் மூலம் தீர்க்க: $2x^2 + x - 6 = 0$

தீர்வு

முதலில், x-க்கு -3-லிருந்து 3 வரையுள்ள முழுக்களின் மதிப்புகளைக் கொடுத்து அவற்றிற்கு ஏற்ற $y = 2x^2 + x - 6$ இன் மதிப்புகளைக் கண்டு, கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்துக.

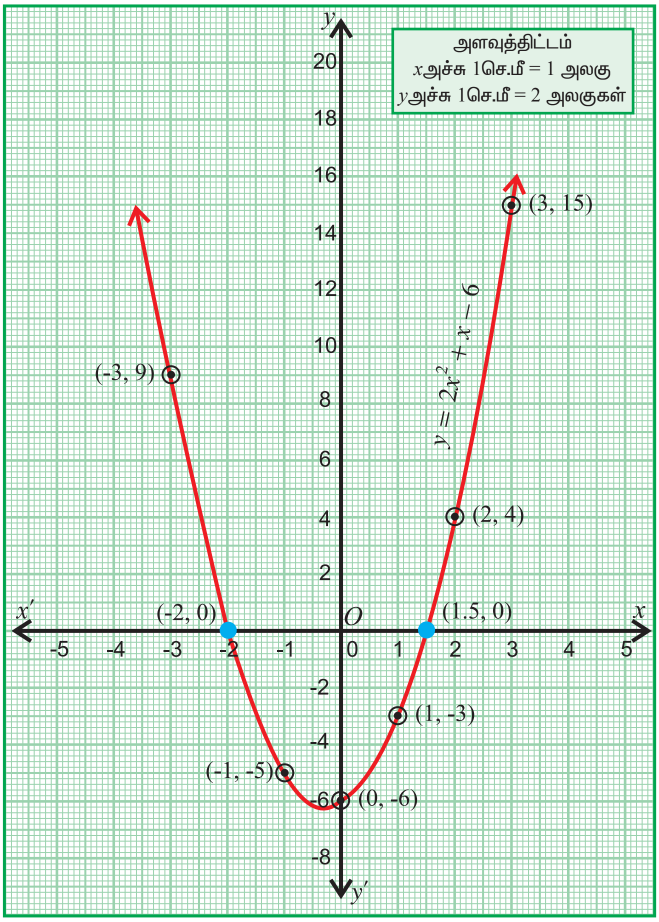
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6
y	9	0	-5	-6	-3	4	15

$(-3, 9)$, $(-2, 0)$, $(-1, -5)$, $(0, -6)$, $(1, -3)$, $(2, 4)$ மற்றும் $(3, 15)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத் தாளில் குறிக்கவும். இப்புள்ளிகளை நேர்க்கோடற்ற இழைவான வளைவரையால் (smooth curve) இணைக்கவும். இவ்வாறு பெறப்பட்ட வளைவரை $y = 2x^2 + x - 6$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் வரைபடமாகும்.

வளைவரை x- அச்சை $(-2 , 0)$ மற்றும் $(1.5, 0)$ ஆகியப் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

இப்புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைவுகள் -2 மற்றும் 1.5 ஆகும்.

ஆகவே, தீர்வு கணம் $\{-2 , 1.5 \}$.



படம் 10.4

குறிப்புரை

$2x^2 + x - 6 = 0$-ஐ வரைபடம் மூலம் தீர்க்க பின்வரும் முறையையும் பின்பற்றலாம்.

(i) $y = 2x^2$-ன் வரைபடம் வரைக.

(ii) $y = 6 - x$-ன் வரைபடம் வரைக.

(iii) இவ்விரு வரைபடங்கள் வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகளின் மதிப்புகளே $2x^2 + x - 6 = 0$-ன் தீர்வுகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.5

$y = 2x^2$-ன் வரைபடத்தை வரைந்து அதிலிருந்து $2x^2 + x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு

முதலில் $y = 2x^2$-ன் வரைபடத்தை வரைவோம். $y = 2x^2$ க்கு பின்வரும் அட்டவணையை அமைக்கவும்.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

(–3, 18), (–2, 8), (–1,2), (0, 0), (1, 2), (2, 8) மற்றும் (3, 18) ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும்.

இப்புள்ளிகளை நேர்க்கோடற்ற இழைவான வளைவரையால் (smooth curve) இணைக்கவும்.

$2x^2 + x - 6 = 0$-ன் மூலங்களைக் காண $y = 2x^2$ மற்றும் $2x^2 + x - 6 = 0$ ஆகிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

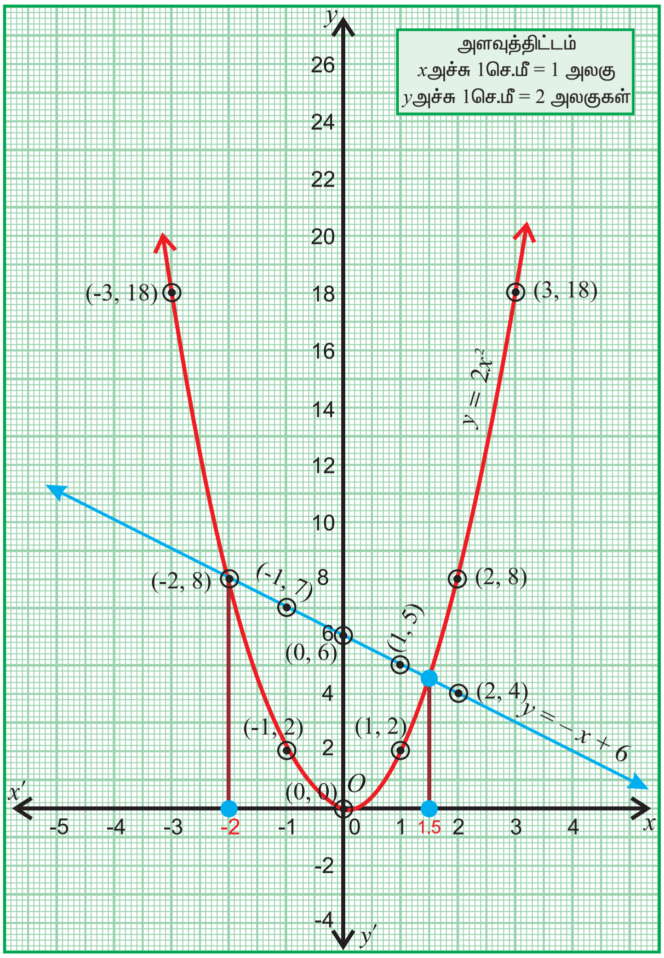
இப்போது, $2x^2 + x - 6 = 0$.

$\implies \quad y = 2x^2$. ஆகவே $y + x - 6 = 0$

$\implies \quad y = -x + 6$

எனவே, $2x^2 + x - 6 = 0$-ன் மூலங்கள் $y = 2x^2$ மற்றும் $y = -x + 6$ ஆகியன வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளின் x-ன் ஆயத்தொலைவுகளாகும்.

இப்போது, $y = -x + 6$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குரிய அட்டவணையை அமைப்போம்.



படம் 10.5

x	–1	0	1	2
$y = -x + 6$	7	6	5	4

மேலேயுள்ள புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறித்து அவற்றை ஒரு நேர்க்கோட்டால் இணைக்கவும்.

நேர்க்கோடு மற்றும் பரவளையம் ஆகியனவற்றின் வெட்டும் புள்ளிகள் (–2, 8) மற்றும் (1.5, 4.5) ஆகும். இப்புள்ளிகளின் x-ஆயத்தொலைவுகள் –2 மற்றும் 1.5 ஆகும்.

எனவே, சமன்பாடு $2x^2 + x - 6 = 0$-ன் தீர்வு கணம் $\{-2, 1.5\}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.6

$y = x^2 + 3x + 2$ -இன் வரைபடம் வரைக. அதைப் பயன்படுத்தி $x^2 + 2x + 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு

முதலில், $y = x^2 + 3x + 2$ -க்கான அட்டவணையைப் பின்வருமாறு தயார்செய்வோம்.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9
$3x$	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9
2	2	2	2	2	2	2	2	2
y	6	2	0	0	2	6	12	20

$(-4, 6), (-3, 2), (-2, 0), (-1, 0), (0, 2), (1, 6), (2, 12)$ மற்றும் $(3, 20)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும். இப்புள்ளிகளை நேர்க் கோடற்ற இழைவான வளைவரையால் (smooth curve) இணைக்கவும். கிடைக்கப் பெற்ற வளைவரையானது,

$y = x^2 + 3x + 2$ -ன் வரைபடமாகும்.

இப்போது, $x^2 + 2x + 4 = 0$

$\Longrightarrow \quad x^2 + 3x + 2 - x + 2 = 0$

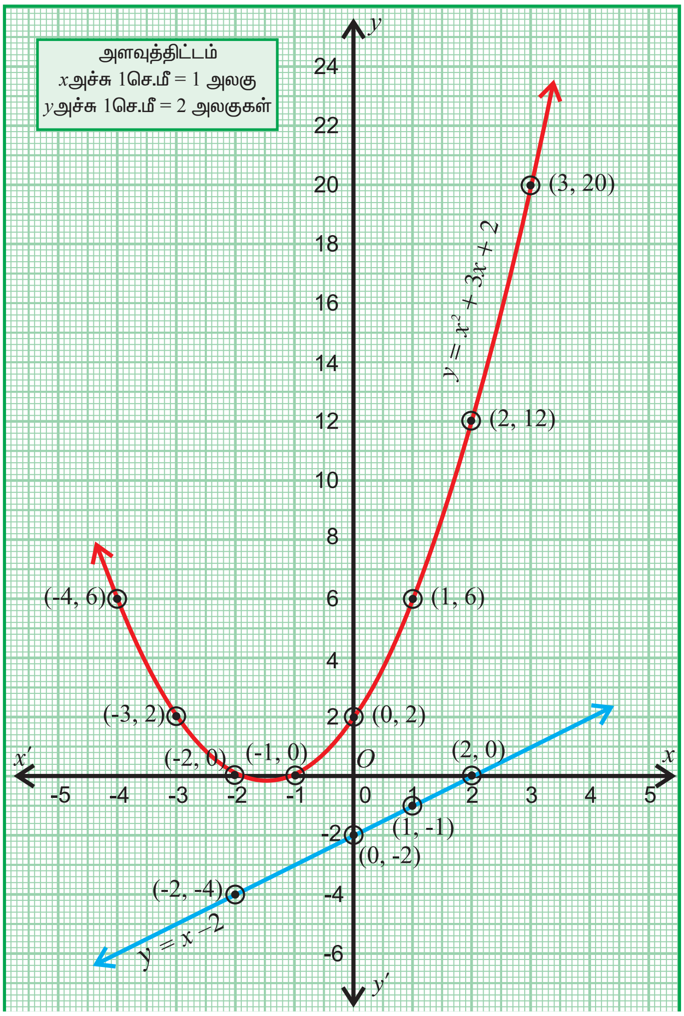
$\Longrightarrow \quad y = x - 2 \qquad \because y = x^2 + 3x + 2$

எனவே, $x^2 + 2x + 4 = 0$ -ன் மூலங்கள், $y = x - 2$ மற்றும் $y = x^2 + 3x + 2$ ஆகியன வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளால் கிடைக்கப் பெறுகின்றன.

இப்போது நேர்க்கோடு $y = x - 2$ -ன் வரைபடத்தை வரைவோம்.

இதற்கு $y = x - 2$ -க்கான அட்டவணையை பின்வருமாறு அமைப்போம்.

x	-2	0	1	2
$y = x - 2$	-4	-2	-1	0



படம் 10.6

ஆனால், நேர்க்கோடு $y = x - 2$ ஆனது வளைவரை $y = x^2 + 3x + 2$ -ஐ வெட்டவில்லை.

எனவே, $x^2 + 2x + 4 = 0$-க்கு மெய்மூலங்கள் ஏதும் இல்லை.

பயிற்சி 10.1

1. பின்வரும் சார்புகளின் வரைபடம் வரைக.
   (i) $y = 3x^2$
   (ii) $y = -4x^2$
   (iii) $y = (x + 2)(x + 4)$
   (iv) $y = 2x^2 - x + 3$
2. வரைபடம் மூலம் பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.
   (i) $x^2 - 4 = 0$
   (ii) $x^2 - 3x - 10 = 0$
   (iii) $(x - 5)(x - 1) = 0$
   (iv) $(2x + 1)(x - 3) = 0$
3. $y = x^2$-ன் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 - 4x - 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.
4. $y = x^2 + 2x - 3$-ன் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 - x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.
5. $y = 2x^2 + x - 6$-ன் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $2x^2 + x - 10 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.
6. $y = x^2 - x - 8$-ன் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 - 2x - 15 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.
7. $y = x^2 + x - 12$-ன் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 + 2x + 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

10.3 சில சிறப்புவகை வரைபடங்கள் (Some Special Graphs)

இப்பாடப்பகுதியில் பல்லுறுப்புக்கோவையின் மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு

(i) நேர் மாறுபாடு (Direct variation) மற்றும்

(ii) எதிர் மாறுபாடு (Indirect variation) என்றவாறு அமையும்போது, பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரைபடத்தை எவ்வாறு வரைவது என அறிந்து கொள்வோம்.

y ஆனது x-க்கு நேர்விகிதத்தில் இருப்பின், ஏதேனும் ஒரு மிகை எண் k-க்கு $y = kx$ என நாம் பெறுகிறோம். இந்த நிலையில் மாறிகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர் மாறுபாட்டில் (Direct variation) இருப்பதாகக் கருதப்படும். மேலும் அதன் வரைபடம் ஒரு நேர்க்கோடாகும் (Straight line)

y-ஆனது x-க்கு தலைகீழ் விகிதத்திலிருப்பின், ஏதேனும் ஒரு மிகை k-க்கு $y = \frac{k}{x}$ என நாம் பெறுகிறோம். இங்கு மாறிகள் ஒன்றுக்கொன்று எதிர் மாறுபாட்டிலிருப்பதால் (Indirect variation) அதன் வரைபடம் ஒரு சீரான நேர்க்கோடற்ற வளைவரைவாக அமையும். இது செவ்வக அதிபரவளையம் (Rectangular Hyperbola) என அறியப்படும். (செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு, $xy = k,\ k > 0$ என்றவாறு இருக்கும்).

எடுத்துக்காட்டு 10.7

கீழ்க்காணும் அட்டவணைக்குத் தகுந்த வரைபடம் வரைந்து மாறிகளின் மாறுபாட்டுத் தன்மையைக் காண். அம்மாறுபாட்டின் மாறிலியையும் (constant of proportionality) காண்க.

x	2	3	5	8	10
y	8	12	20	32	40

மேலும் $x = 4$ எனில் y-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் x-ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும் போது y-ன் மதிப்பும் நேர்விகிதத்தில் அதிகரிக்கின்றது.

ஆகவே, மாறுபாடு ஒரு நேர்மாறுபாடு (Direct variation) ஆகும்.

எனவே, $y \propto x$ என எழுதலாம்.

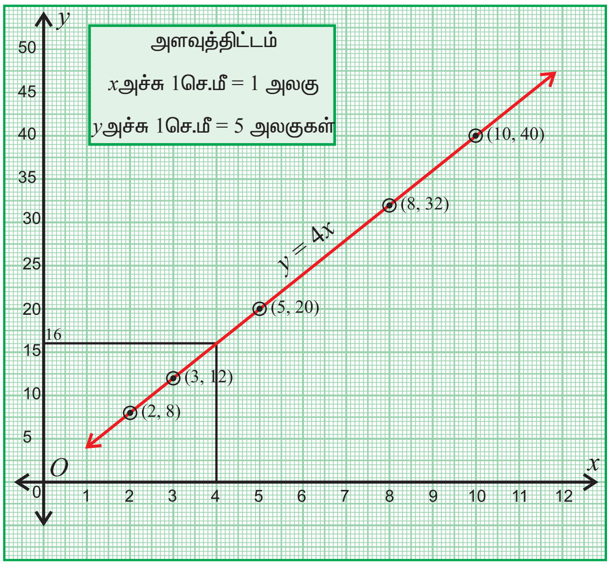
அதாவது, $y = kx$, $k > 0$ ஒரு மாறிலி ஆகும்.

$\Longrightarrow \quad \frac{y}{x} = k$ இதில் k என்பது விகிதசம மாறிலி.

$$k = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \cdots = \frac{40}{10}. = 4$$

$\therefore\ k = 4.$

இப்போது, $y = 4x$ என்ற உறவு ஒரு நேர்க்கோட்டை அமைக்கும்.



படம் 10.7

(2, 8), (3, 12), (5, 20), (8, 32) மற்றும் (10, 40) ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத் தாளில் குறிக்கவும். இப்புள்ளிகளை ஒரு நேர்க்கோட்டால் இணைக்கவும். இவ்வாறு பெறப்பட்ட நேர்க்கோடு $y = 4x$-ன் வரைபடமாகும்.

மேலும், $x = 4$ எனில், $y = 16$ என வரைபடம் $y = 4x$ -ன் வாயிலாக அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 10.8

ஒரு மிதிவண்டி ஓட்டுபவர் A என்ற இடத்திலிருந்து B என்ற இடத்திற்கு ஒரு சீரான வேகத்தில் ஒரே வழியில் வெவ்வேறு நாட்களில் பயணம் செய்கிறார். அவர் பயணம் செய்த வேகம், அத்தூரத்தினைக் கடக்க எடுத்துக் கொண்ட நேரம் ஆகியனவற்றைப் பற்றிய விவரங்கள் (வேக–கால) பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வேகம் (கி.மீ. / மணி) x	2	4	6	10	12
நேரம் (மணியில்) y	60	30	20	12	10

வேக - கால வரைபடம் வரைந்து அதிலிருந்து

(i) அவர் மணிக்கு 5 கி.மீ வேகத்தில் சென்றால் தூரத்தைக் கடக்க ஆகும் பயண நேரம்

(ii) அவர் இக்குறிப்பிட்ட தூரத்தை 40 மணிநேரத்தில் கடக்க எந்த வேகத்தில் பயணிக்க வேண்டும்

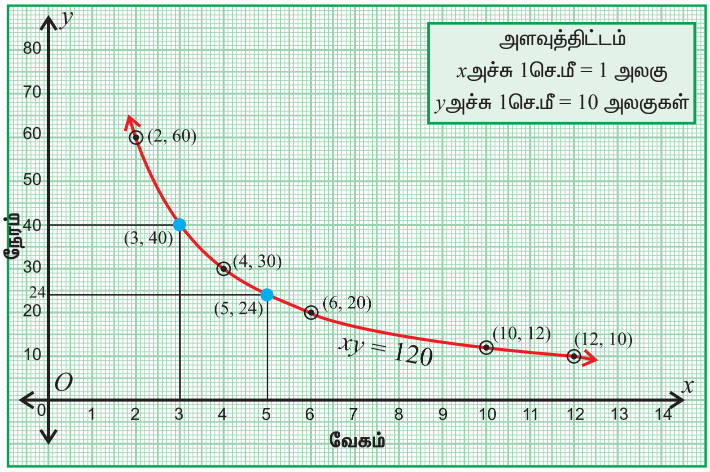
ஆகியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

அட்டவணையிலிருந்து x-ன் மதிப்பு அதிகமாகும்போது y-ன் மதிப்பு எதிர்விகிதத்தில் குறைகிறது என அறிகிறோம். இந்த வகையான மாறுபாடு எதிர் மாறுபாடு ஆகும். எனவே $xy = k$ ஆகும்.

இங்கு $xy = 120$

ஆகவே, $y = \dfrac{120}{x}$



படம் 10.8

(2 , 60), (4 , 30), (6 , 20), (10 , 12) மற்றும் (12, 10) ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும். இப்புள்ளிகளை நேர்க்கோடற்ற இழைவான வளைவரையால் இணைக்கவும்.

வரைபடத்திலிருந்து ,

(i) மணிக்கு 5 கி.மீ வேகத்தில் சென்றால் பயண நேரம் 24 மணி ஆகும்.

(ii) குறிப்பிட்ட தூரத்தை 40 மணி நேரத்தில் கடக்க, அவருடைய வேகம் 3 கி.மீ / மணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.9

ஒரு வங்கி, மூத்தக்குடிமகனின் வைப்புத் தொகைக்கு 10% தனிவட்டி தருகிறது. வைப்புத் தொகைக்கும் அதற்கு ஓர் ஆண்டுக்குக் கிடைக்கும் வட்டிக்கும் இடையேயான தொடர்பினைக் காட்ட ஒரு வரைபடம் வரைக. அதன் மூலம்,

(i) ₹ 650 வைப்புத் தொகைக்குக் கிடைக்கும் வட்டி மற்றும்

(ii) ₹ 45 வட்டியாகக் கிடைக்க வங்கியில் செலுத்தப்பட வேண்டிய வைப்புத் தொகை

ஆகியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

நாம் கீழ்வரும் அட்டவணையை தயாரிப்போம்

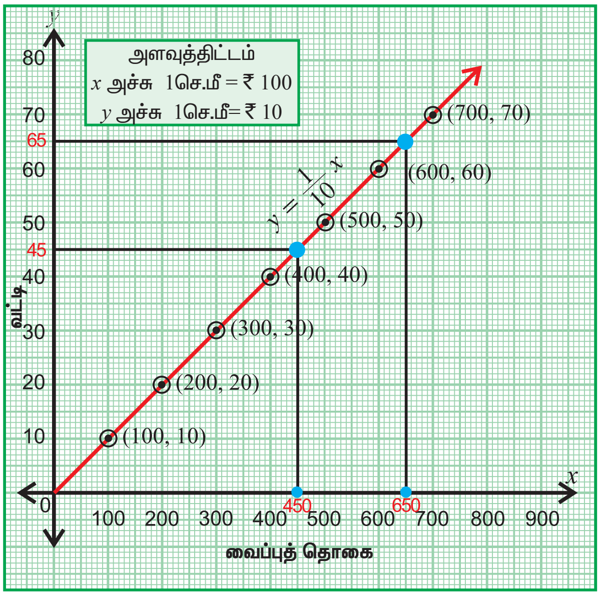
வைப்புத் தொகை ₹ x	100	200	300	400	500	600	700
தனிவட்டி ₹ y	10	20	30	40	50	60	70

மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து, எளிதாக $y = \frac{1}{10}x$ என அறியலாம். மேலும் $y = \frac{1}{10}x$-ன் வரைபடம் ஒரு நேர்க்கோடு ஆகும். எனவே அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து வரைபடம் வரையலாம்.

இந்த வரைபடத்தில் இருந்து

(i) ₹650 வைப்புத் தொகைக்கு உரிய வட்டித் தொகை ₹65 எனவும்,

(ii) ₹45 வட்டியாகக் கிடைக்க தேவையான வைப்புத் தொகை ₹ 450 எனவும் அறியலாம்.



படம் 10.9

பயிற்சி 10.2

1. ஒரு பேருந்து மணிக்கு 40கி.மீ. வேகத்தில் செல்கிறது. இதற்குரிய தூர–கால தொடர்பிற்கான வரைபடம் வரைக. இதைப் பயன்படுத்தி 3 மணிநேரத்தில் இப்பேருந்து பயணித்தத் தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

2. வாங்கப்பட்ட நோட்டுப் புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் அதற்கான விலை விவரம் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

நோட்டுப்புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை x	2	4	6	8	10	12
விலை ₹ y	30	60	90	120	150	180

இதற்கான வரைபடம் வரைந்து அதன் மூலம்

(i) ஏழு நோட்டுப் புத்தகங்களின் விலையைக் காண்க.

(ii) ₹ 165-க்கு வாங்கப்படும் நோட்டுப் புத்தகங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

3.

x	1	3	5	7	8
y	2	6	10	14	16

மேற்கண்ட அட்டவணையில் உள்ள விவரத்திற்கு வரைபடம் வரைந்து, அதன் மூலம்

(i) $x = 4$ எனில் y-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $y = 12$ எனில் x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

4. ஒரு லிட்டர் பாலின் விலை ₹ 15 என்க. பாலின் அளவுக்கும் விலைக்கும் உள்ளத் தொடர்பினைக் காட்டும் வரைபடம் வரைக. அதனைப் பயன்படுத்தி,

(i) விகிதசம மாறிலியைக் காண்க.

(ii) 3 லிட்டர் பாலின் விலையைக் காண்க.

5. $xy = 20$, $x, y > 0$ என்பதன் வரைபடம் வரைக. அதனைப் பயன்படுத்தி $x = 5$ எனில், y-ன் மதிப்பையும், $y = 10$ எனில், x-ன் மதிப்பையும் காண்க.

6.

வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை x	3	4	6	8	9	16
நாட்களின் எண்ணிக்கை y	96	72	48	36	32	18

அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரத்திற்கான வரைபடம் வரைக. அதன் மூலம் 12 வேலையாட்கள் அவ்வேலையை முழுவதுமாக செய்து முடிக்க ஆகும் நாட்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

குறிப்பிடத்தக்க மேற்கோள்கள்

1. கணிதத்தில் வினாவை எழுப்பும் ஆற்றலை, அவ்வினாவிற்கு தீர்வு காண்பதைவிட உயர்வாகக் கருதப்படவேண்டும். - ஜார்ஜ் கேண்டர். (Georg Cantor)

2. கணிதத்தின் விதிகள் யாவும் மாற்ற முடியாதவை மற்றும் மறுப்பதற்கு அப்பாற்பட்டவைகளாகும். ஆனால் மற்ற அறிவியலிலுள்ள விதிகள் அனைத்தும் ஓரளவிற்கு விவாதத்திற்கு உட்பட்டவைகள் என்பதோடு, புதிய கண்டுபிடிப்புகளால் அவைகள் மாற்றப்படக்கூடிய வாய்ப்புகள் உள்ளன என்பதால்தான், கணிதவியலானது மற்ற அறிவியல்களைவிட மகத்தான முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகத் திகழ்கிறது.

- ஆல்பர்ட் ஐன்ஸ்டீன் (Albert Einstein)

11

புள்ளியியல்

It is easy to lie with statistics. It is hard to tell the truth without it
-Andrejs Dunkels

- அறிமுகம்
- பரவுதலின் அளவைகள்
  - வீச்சு
  - விலக்கவர்க்கச் சராசரி
  - திட்ட விலக்கம்
- மாறுபாட்டுக் கெழு

கார்ல் பியர்சன்
(Karl Pearson)
(1857-1936)
இங்கிலாந்து

கார்ல் பியர்சன் என்னும் ஆங்கில புள்ளியியல் வல்லுநர் நவீன புள்ளியியல் துறையை நிறுவியவர்களில் முன்னோடி ஆவார். இவர் புள்ளியியல் கணிதத் துறையை நிறுவினார். இயற்பியல் கருதுகோளான திருப்புத்திறன் என்ற கருத்தை புள்ளியியலில் அறிமுகப்படுத்தினார். அறிவியலின் இலக்கணம் (Grammar of science) என்ற அவருடைய நூலின் பல முக்கிய கருத்துக்கள் ஐன்ஸ்டீன் மற்றும் பிற அறிவியல் வல்லுநர்களின் பிற்காலத்திய அறிவியல் கொள்கை களின் அங்கமாக அமைந்தன.

11.1 அறிமுகம்

கிராக்ஸ்டன் (Croxton) மற்றும் கௌடன் (Cowden) ஆகியோரின் கூற்றுக்கு இணங்க, புள்ளியியல் (Statistics) என்பது புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்தல், அளித்தல், ஆய்வு செய்தல், எண் விவரங்களிலிருந்து கருத்துக்களை பல வகைகளில் தருவித்தல் என வரையறுக்கப்படுகிறது. R.A. பிஷர் (R.A. Fisher) என்பவர் புள்ளியியல் என்னும் அறிவியலை கணிதத்தின் ஒரு பிரிவு எனவும், அது கூர்ந்தாய்வு விவரங்களுக்கு செயல்பாட்டு கணிதம் எனவும் போற்றுகிறார்.

ஹோரேஸ் செக்ரிஸ்ட் (Horace Secrist) என்பவர் புள்ளியியலை பின்வருமாறு வரையறை செய்கிறார். புள்ளியியல் என்பது பல்வேறு காரணங்களினால் குறிப்பிட்ட அளவு பாதிக்கப் படுபவைகளின் விவரங்களின் சேர்க்கையாகும். இவ்விவரங்கள் எண்களால் குறிக்கப்பட்டு, வரிசைப்படுத்தப்பட்டு அல்லது ஏற்புடைய அளவில் துல்லியமாக அளவிடப்பட்டு, முன்பாகவே தீர்மானிக்கப்பட்ட நோக்கத்திற்காக அவைகளை முறையாக சேகரிப்பதும் அவைகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளை வெளிப்படுத்துவதும் புள்ளியியலாகும்.

J.F. பாரன் (J.F. Baron) என்பவர் "Statistics" (புள்ளியியல்) என்னும் சொல்லைத் தன்னுடைய "Elements of Universal Erudiation" என்னும் நூலில் முதன்முறையாகப் பயன்படுத்தினார். நவீன காலத்தில் புள்ளியியல் என்பது வெறும் விவரங்களின் சேகரிப்பு மற்றும் அவ்விவரங்களை படவிளக்கங்களிலும். அட்டவணைகளிலும் அளிப்பது மட்டும் அல்ல. கூர்ந்தாய்வு செய்த விவரங்களில் இருந்து அனுமானித்தல் மற்றும் நிச்சயமற்ற சூழலில் முழுப் பிரச்சினைக்கும் முடிவு மேற்கொள்ளல் போன்ற அறிவியல் கருத்துக்கள் நிறைந்தப் பிரிவாக இது கருதப்படுகிறது.

நாம் ஏற்கனவே மையப்போக்கு அளவைகளான, கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு ஆகியனப் பற்றி கற்றுள்ளோம். அவை நமக்கு பரவலின் மையப் பகுதியில் உள்ள விவரங்களின் அடர்த்தியைப் பற்றிய ஒரு கருத்தை தருகின்றன.

மையப் போக்களவைகள் பற்றிய அறிதல்களினால் விவரங்களின் பரவலைப் பற்றிய முழுக் கருத்துக்களையும் தெரிந்து கொள்ள இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக (i) 82, 74, 89, 95 மற்றும் (ii) 120, 62, 28, 130 ஆகிய இரண்டு வெவ்வேறு

தொடர்களுக்கும் ஒரே கூட்டுச் சராசரி 85 ஆகும். முதல் தொடரில் உள்ள எண்கள், சராசரி 85-க்கு நெருக்கமாக உள்ளன. ஆனால், இரண்டாவது தொடரில் உள்ள எண்கள், சராசரி 85-லிருந்து பரவலாக விரவியுள்ளது. எனவே மையப்போக்கு அளவைகள், விவரங்களைப் பற்றிய தவறான முடிவுகளுக்கு வழி வகுக்கலாம். கூட்டுச் சராசரியை ஒட்டி, விவரங்கள் எவ்வாறு பரவியுள்ளன என்பதை அறிய உதவும் வகையில் விவரங்களுக்கான ஒரு அளவீடு தேவைப்படுகிறது.

11.2 பரவுதல் அளவைகள் (Measures of dispersion)

பரவலின் (distribution) புள்ளி விவரங்கள் எந்த அளவிற்குப் பரவியிருக்கிறது என்பதை பரவுதல் அளவைகள் விளக்குகிறது. வீச்சு (Range R), கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation Q.D), சராசரி விலக்கம் (Mean Deviation M.D), திட்ட விலக்கம் (Standard Deviation S.D) ஆகியன பரவுதலின் அளவைகளாகும். இங்கு, நாம் சிலவற்றை விளக்கமாகக் கற்கலாம்.

11.2.1 வீச்சு (Range)

வீச்சு என்பது பரவுதல் அளவைகளில் எளிதான ஒரு அளவை ஆகும். ஒரு எண் தொகுப்பில் உள்ள எண்களில் மிக உயர்ந்த மற்றும் மிகக் குறைந்த மதிப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் வீச்சு ஆகும்.

$\therefore$ வீச்சு $=$ மீப்பெரு மதிப்பு $-$ மீச்சிறு மதிப்பு $= L - S$.

மேலும், எண் தொகுப்பின் வீச்சுக் கெழு $= \dfrac{L-S}{L+S}$.

எடுத்துக்காட்டு 11.1

43, 24, 38, 56, 22, 39, 45 ஆகிய புள்ளி விவரங்களின் வீச்சு மற்றும் வீச்சுக்கெழு காண்க.

தீர்வு புள்ளி விவரங்களை ஏறுவரிசையில் 22, 24, 38, 39, 43, 45, 56 என அமைக்கவும்.

மீப்பெரு மதிப்பு $L = 56$ மற்றும் மீச்சிறு மதிப்பு $S = 22$.

எனவே, வீச்சு $= L - S$

$= 56 - 22 = 34$

ஆகவே, வீச்சுக் கெழு $= \dfrac{L-S}{L+S}$

$= \dfrac{56-22}{56+22} = \dfrac{34}{78} = 0.436$

எடுத்துக்காட்டு 11.2

ஒரு வகுப்பிலுள்ள 13 மாணவர்களின் எடை (கி.கி) பின்வருமாறு.

42.5, 47.5, 48.6, 50.5, 49, 46.2, 49.8, 45.8, 43.2, 48, 44.7, 46.9, 42.4

இவற்றின் வீச்சு மற்றும் வீச்சுக் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு புள்ளி விவரங்களை ஏறுவரிசையில் பின்வருமாறு எழுதலாம்,

42.4, 42.5, 43.2, 44.7, 45.8, 46.2, 46.9, 47.5, 48, 48.6, 49, 49.8, 50.5

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரத்தின் மீப்பெரு மதிப்பு $L = 50.5$ மற்றும் மீச்சிறு மதிப்பு $S = 42.4$

ஆகவே, வீச்சு $= L - S$

$= 50.5 - 42.4 = 8.1$

மேலும், வீச்சுக் கெழு $= \dfrac{L-S}{L+S} = \dfrac{50.5-42.4}{50.5+42.4} = \dfrac{8.1}{92.9}$

ஆகவே, வீச்சுக் கெழு $= 0.087$

எடுத்துக்காட்டு 11.3

ஒரு புள்ளி விவரத் தொகுப்பின் மீப்பெரு மதிப்பு 7.44 மற்றும் அதன் வீச்சு 2.26 எனில், அத்தொகுப்பின் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு வீச்சு = மீப்பெரு மதிப்பு − மீச்சிறு மதிப்பு

$\Longrightarrow$ 7.44 − மீச்சிறு மதிப்பு = 2.26

$\therefore$ மீச்சிறு மதிப்பு = 7.44 − 2.26 = 5.18.

11.2.2 திட்ட விலக்கம் (Standard deviation)

பரவுதலின் அளவைக்காண சிறந்த வழி, புள்ளி விவரங்களின் தொகுப்பிலுள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும், அதன் கூட்டுச் சராசரிக்கும் உள்ள வித்தியாசங்களை வர்க்கப்படுத்தி, அந்த வர்க்கங்களுக்கு சராசரி காண்பதாகும். இவ்வாறு பெறப்படும் பரவுதலின் அளவை விலக்க வர்க்க சராசரி அல்லது பரவற்படி (Variance) எனப்படும். விலக்க வர்க்க சராசரியின் மிகை வர்க்கமூலம் திட்டவிலக்கம் (Standard Deviation) எனப்படும். விலக்க வர்க்க சராசரி எப்பொழுதும் மிகை முழு எண்ணாக இருக்கும்.

காஸ் (Gauss) என்பவர் பயன்படுத்திய 'சராசரி பிழை' (mean error) என்ற வார்த்தைக்குப் பதிலாக, 1894-ல் கார்ல் பியர்சன் (Karl Pearson) என்பவர் திட்ட விலக்கம் என்ற வார்த்தையை முதன் முதலில் பயன்படுத்தினார்.

புள்ளி விவரங்கள் எந்த அலகில் குறிப்பிடப்படுகிறதோ, அதே அலகில் திட்ட விலக்கமும் குறிப்பிடப்படும். திட்ட விலக்கம் புள்ளி விவர மதிப்புகள் சராசரியிலிருந்து எவ்வளவு விலகியிருக்கிறது என்பதைக் காட்டும். குறைவான மதிப்புள்ள திட்டவிலக்கம், புள்ளிவிவர மதிப்புகள் கூட்டுச் சராசரிக்கு அண்மையில் பரவியுள்ளதையும், உயர்ந்த மதிப்புள்ள திட்டவிலக்கம், புள்ளிவிவர மதிப்புகள் அதிக வீச்சில் பரவியுள்ளன என்பதையும் காட்டுகின்றன.

$\overline{x}$ மற்றும் σ என்ற குறியீடுகளை முறையே பரவுதலின் கூட்டுச் சராசரி (A.M) மற்றும் திட்ட விலக்கத்தைக் (S.D) குறிப்பிடப் பயன்படுத்துகிறோம். புள்ளி விவரங்களின் இயல்பின் அடிப்படையில் அவற்றை ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்கு வரிசையில் அமைத்தபின் பல்வேறு முறைகளில் கீழ்க்காணும் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி, நாம் திட்ட விலக்கம் σ-வை கணக்கிடுவோம். (சூத்திரங்களுக்கு நிரூபணம் தேவையில்லை)

புள்ளி விவரம்	நேரடி முறை (Direct method)	கூட்டுச் சராசரி முறை	ஊகச் சராசரி முறை (Assumed mean method)	படிவிலக்க முறை (Step deviation method)
தொகுக்கப் படாதவை (ungrouped)	$\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}-\left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$ இங்கு, $d = x-\overline{x}$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}-\left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$ இங்கு, $d = x-A$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}-\left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}\times c$ இங்கு, $d=\frac{x-A}{c}$
தொகுக்கப் பட்டவை (grouped)		$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}-\left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}-\left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}\times c$

குறிப்பு :

n உறுப்புக்களைக் (எண்கள்) கொண்ட தொகுப்பிற்கு பின்வருவன மெய்யாகும்

$\sum(x-\overline{x})=0$, $\sum x = n\overline{x}$ மற்றும் $\sum \overline{x} = n\overline{x}$.

(i) நேரடி முறை (Direct method)

உறுப்புகளின் வர்க்கங்கள் எளிதில் பெறப்படும் பொழுது இம்முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

இம்முறையில் திட்டவிலக்கம் காண உதவும் சூத்திரம் , $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

எடுத்துக்காட்டு 11.4

ஒரு மாதத்தில் 8 மாணவர்கள் படித்த புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறு.

2, 5, 8, 11, 14, 6, 12, 10. இப்புள்ளி விவரத்தின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

x	x^2
2	4
5	25
6	36
8	64
10	100
11	121
12	144
14	196
$\sum x = 68$	$\sum x^2 = 690$

இங்கு, $n = 8$

திட்டவிலக்கம், $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{690}{8} - \left(\frac{68}{8}\right)^2}$

$= \sqrt{86.25 - (8.5)^2}$

$= \sqrt{86.25 - 72.25}$

$= \sqrt{14} \simeq 3.74.$

(ii) கூட்டுச் சராசரி முறை (Actual mean method)

கூட்டுச் சராசரி பின்னமாக இல்லாவிடில், அதாவது முழு எண்ணாக இருக்கும்போது இம்முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

இம்முறையில் திட்ட விலக்கம் காண உதவும் சூத்திரம்,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \overline{x})^2}{n}} \text{ அல்லது } \sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}. \quad \text{இங்கு } d = x - \overline{x}.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.5

ஒரு வகுப்பிற்கு நடத்தப்பட்ட பொது அறிவுத்தேர்வில் மொத்த மதிப்பெண்கள் 40-க்கு, 6 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 20, 14, 16, 30, 21 மற்றும் 25. இப்புள்ளி விவரத்தின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு இப்போது, கூட்டுச்சராசரி A. M. $= \frac{\sum x}{n} = \frac{20 + 14 + 16 + 30 + 21 + 25}{6}$

$\Longrightarrow \quad \overline{x} = \frac{126}{6} = 21.$

கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணையை அமைக்கவும்.

x	$d = x - \overline{x}$	d^2
14	−7	49
16	−5	25
20	−1	1
21	0	0
25	4	16
30	9	81
$\sum x = 126$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 172$

ஆகவே, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{172}{6}}$

$= \sqrt{28.67}$

எனவே, $\sigma \simeq 5.36.$

(iii) ஊகச் சராசரி முறை (Assumed mean method)

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்தின் கூட்டுச்சராசரி முழு எண்ணாக இல்லையெனில், ஊகச் சராசரி முறையில் திட்டவிலக்கம் காணலாம். கூடுமான வரையில் $x–A$ என்பது மிகச் சிறிய முழு எண்களாக அமையுமாறு பொருத்தமான எண் A-யினைத் தெரிவு செய்கிறோம். இவ்வாறு தெரிவு செய்யப்படும் எண் A-ஐ ஊகச் சராசரி என்போம். இது கூட்டுச் சராசரிக்கு மிக நெருக்கமாக அமையும்.

தற்போது, $d = x - A$-வைப் பயன்படுத்தி விலகல்களைக் காண்போம்.

ஆகவே, திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$.

குறிப்பு :

ஊகச் சராசரி முறையும் படிவிலக்க முறையும், திட்ட விலக்கம் காணும் நேரடி முறையின் எளிமையாக்கப்பட்ட மாற்று முறைகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.6

62, 58, 53, 50, 63, 52, 55 ஆகிய எண்களுக்கு திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு ஊகச் சராசரி A=55 என எடுத்துக் கொண்டு கீழ்க்காணும் அட்டவணையை அமைக்கவும்.

x	$d = x - A$ $= x - 55$	d^2
50	-5	25
52	-3	9
53	-2	4
55	0	0
58	3	9
62	7	49
63	8	64
	$\sum d = 8$	$\sum d^2 = 160$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{160}{7} - \left(\frac{8}{7}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{160}{7} - \frac{64}{49}}$$
$$= \sqrt{\frac{1056}{49}}$$
$$= \frac{32.49}{7}$$

$\therefore$ திட்ட விலக்கம் $\sigma \simeq 4.64$

(iv) படி விலக்க முறை (Step deviation method)

புள்ளி விவர எண்கள் மிகப் பெரியனவாகவும் மற்றும் ஒரு பொதுக் காரணியைக் கொண்டும் இருப்பின், திட்ட விலக்கம் காண, படி விலக்க முறையைப் பயன்படுத்துகிறோம். ஊகச் சராசரி A-ஐ முதலில் தேர்ந்தெடுத்து, பிறகு $d = \frac{x-A}{c}$ ஐக் கணக்கிட்டு விலக்கத்தை காண்கிறோம். இங்கு c என்பது $x–A$-ன் மதிப்புகளுக்கு ஒரு பொதுக் காரணியைக் குறிக்கும்.

இம்முறையில் திட்ட விலக்கம் காண பயன்படுத்தும் சூத்திரம் $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c.$

எடுத்துக்காட்டு 11.7

10 மாணவர்கள் கணிதத் தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு,
80, 70, 40, 50, 90, 60, 100, 60, 30, 80. இம்மதிப்புகளுக்கு திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களின் பொதுக் காரணி c = 10 ஆகும். ஊகச் சராசரி $A = 70$ என எடுத்துக் கொள்க. இங்கு புள்ளி விவர மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை, $n = 10$.

மேலும், $c = 10,\ d = \frac{x-A}{10}$ எனக் கொண்டு கீழ்க்காணும் அட்டவணையை அமைக்கவும்.

x	$d = \frac{x-70}{10}$	d^2
30	-4	16
40	-3	9
50	-2	4
60	-1	1
60	-1	1
70	0	0
80	1	1
80	1	1
90	2	4
100	3	9
	$\sum d = -4$	$\sum d^2 = 46$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{46}{10} - \left(\frac{-4}{10}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{46}{10} - \frac{16}{100}} \times 10 = \sqrt{\frac{460-16}{100}} \times 10 = \sqrt{444} = 2\sqrt{111}$$

$\therefore$ திட்ட விலக்கம், $\sigma \simeq 21.07$.

மேலே குறிப்பிட்டுள்ள நான்கு முறைகளான நேரடிமுறை, கூட்டுச் சராசரி முறை, ஊகச் சராசரி முறை, படி விலக்க முறை ஆகியவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றைப் பயன்படுத்தி, விவரங்களின் தொகுப்பிற்கு திட்ட விலக்கத்தை எளிதில் காணமுடியும்.

ஒரே புள்ளி விவரத் தொகுப்பிற்கு வெவ்வேறு முறைகளில் திட்ட விலக்க மதிப்புகள் காணப்பட்டாலும் அவைகள் எதிர்பார்த்தவாறு வெவ்வேறாக இருக்காது. ஆகவே, σ மதிப்பினைக் காண மாணவர்கள் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைப் பொருத்து, பொருத்தமான ஏதேனும் ஒரு முறையைப் பின்பற்றலாம்.

முடிவுகள்

(i) ஒரு பரவுதலின் ஒவ்வொரு மதிப்புடனும் ஒரே எண்ணைக் கூட்டினாலோ அல்லது கழித்தாலோ அதன் திட்ட விலக்கம் மாறாமல் இருக்கும்.

(ii) புள்ளி விவரத்தின் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் k, என்ற பூச்சியமற்ற மாறிலியால் பெருக்கினாலோ அல்லது வகுத்தாலோ கிடைக்கும் புதிய மதிப்புகளுக்கான திட்டவிலக்கம் அதன் முதல் திட்ட விலக்கத்தை முறையே, k ஆல் பெருக்க அல்லது வகுக்கக் கிடைக்கும் எண்ணாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.8

3, 5, 6, 7 ஆகிய புள்ளி விவரத்திற்குத் திட்ட விலக்கம் காண்க. ஒவ்வொரு மதிப்புடனும் 4 ஐக் கூட்ட கிடைக்கும் புதிய மதிப்புகளுக்கான திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரம்

$x = 3, 5, 6, 7$

இங்கு, $A = 6$ என்க.

x	$d = x - 6$	d^2
3	-3	9
5	-1	1
6	0	0
7	1	1
	$\sum d = -3$	$\sum d^2 = 11$

திட்டவிலக்கம், $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{11}{4} - \left(\frac{-3}{4}\right)^2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{35}}{4}$

ஒவ்வொரு மதிப்புடனும் 4 ஐக் கூட்ட, $x = 7, 9, 10, 11$ ஆகிய புதிய மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம்.

இங்கு, $A = 10$ என்க.

x	$d = x - 10$	d^2
7	-3	9
9	-1	1
10	0	0
11	1	1
	$\sum d = -3$	$\sum d^2 = 11$

திட்ட விலக்கம், $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{11}{4} - \left(\frac{-3}{4}\right)^2}$

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{35}}{4}$

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டில் ஒவ்வொரு மதிப்புடனும் 4ஐக் கூட்ட, கிடைக்கும் புதிய திட்ட விலக்கம் மாறாமல் இருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 11.9

40, 42, 48 எனும் இப்புள்ளி விவரத்திற்குத் திட்ட விலக்கம் காண்க. ஒவ்வொரு மதிப்பும் 3 ஆல் பெருக்கப்படும்போது கிடைக்கும் புதிய மதிப்புகளுக்கான திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்கள் 40, 42, 48-ன் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்போம்.

ஊகச் சராசரி $A = 44$ என்க.

x	$d = x - 44$	d^2
40	-4	16
42	-2	4
48	4	16
	$\sum d = -2$	$\sum d^2 = 36$

திட்ட விலக்கம், $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{36}{3} - \left(\frac{-2}{3}\right)^2}$

$\sigma = \frac{\sqrt{104}}{3}$

ஒவ்வொரு மதிப்பையும் 3ஆல் பெருக்க கிடைக்கும் புதிய மதிப்புகள் 120,126,144.

ஊகச் சராசரி $A = 132$ என்க.

புதிய புள்ளி விவரத்தின் திட்ட விலக்கம் σ_1 என்க.

x	$d = x - 132$	d^2
120	-12	144
126	-6	36
144	12	144
	$\sum d = -6$	$\sum d^2 = 324$

திட்ட விலக்கம், $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{324}{3} - \left(\frac{-6}{3}\right)^2}$

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{312}{3}} = \sqrt{104}$

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டில், ஒவ்வொரு மதிப்பையும் 3-ஆல் பெருக்கும் போது, கிடைக்கும் புள்ளி விவரத்தின் புதிய திட்ட விலக்கம், முதல் திட்ட விலக்கத்தை 3 ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் எண்ணாக இருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 11.10

முதல் n இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு முதல் n இயல் எண்கள் $1,2,3,\cdots,n$.

இவற்றின் கூட்டுச் சராசரி, $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n}$

$$= \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

முதல் n இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்,

$$\sum x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

திட்ட விலக்கம், $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{(2n+1)}{3} - \frac{(n+1)}{2}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{2(2n+1)-3(n+1)}{6}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{4n+2-3n-3}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{6}\right)} = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

முதல் n இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கம், $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$.

குறிப்புரை:

பின்வரும் முடிவுகளை அறிந்துக் கொள்க.

பொது வித்தியாசம் d கொண்ட ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் எந்த ஒரு தொடர்ச்சியான n உறுப்புக்களின் திட்ட விலக்கம், $\sigma = d\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$. எனவே,

(i) $i, i+1, i+2, \cdots, i+n$-ன் திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$, $i \in \mathbb{N}$

(ii) தொடர்ச்சியான n இரட்டைப்படை முழுக்களின் திட்ட விலக்கம் $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$, $n \in \mathbb{N}$

(iii) தொடர்ச்சியான n ஒற்றைப்படை முழுக்களின் திட்ட விலக்கம் $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$, $n \in \mathbb{N}$

எடுத்துக்காட்டு 11.11

முதல் 10 இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு முதல் n இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{\dfrac{n^2-1}{12}}$

ஆகவே, முதல் 10 இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கம்

$$= \sqrt{\frac{10^2-1}{12}} = \sqrt{\frac{100-1}{12}} \simeq 2.87.$$

தொகுக்கப்பட்டப் புள்ளி விவரங்களின் திட்ட விலக்கம் (Standard Deviation of grouped data)

(i) கூட்டுச் சராசரி முறை (Actual mean method)

தனித்த புள்ளி விவரங்களில் ஒவ்வொரு மதிப்பினையும், அதன் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள் எடுத்து, திட்ட விலக்கம் காண பயன்படும் சூத்திரம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$$ ஆகும். இங்கு, $d = x - \overline{x}$.

எடுத்துக்காட்டு 11.12

ஒரு கணித வினாடி வினாப் போட்டியில் 48 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

மதிப்பெண்கள் x	6	7	8	9	10	11	12
நிகழ்வெண்கள் f	3	6	9	13	8	5	4

இவ்விவரத்திற்கான திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு கீழ்க்கண்ட அட்டவணையை அமைக்க.

x	f	fx	$d = x-\overline{x}$ $= x-9$	fd	fd^2
6	3	18	-3	-9	27
7	6	42	-2	-12	24
8	9	72	-1	-9	9
9	13	117	0	0	0
10	8	80	1	8	8
11	5	55	2	10	20
12	4	48	3	12	36
	$\sum f=48$	$\sum fx=432$	$\sum d=0$	$\sum fd=0$	$\sum fd^2=124$

கூட்டு சராசரி, $\bar{x} = \dfrac{\sum fx}{\sum f} = \dfrac{432}{48} = 9.$

திட்ட விலக்கம், $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f}}$

$$= \sqrt{\frac{124}{48}} = \sqrt{2.58} \simeq 1.61$$

(ii) ஊகச் சராசரி முறை (Assumed mean method)

ஊகச் சராசரியிலிருந்து புள்ளி விவர மதிப்புகளின் விலக்கங்களைக் கணக்கிடும் பொழுது, திட்ட விலக்கம் காணப் பயன்படும் சூத்திரம்,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd}{\Sigma f}\right)^2}. \quad \text{இங்கு } d = x - A.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.13

பின்வரும் புள்ளி விவரத்திற்கான திட்ட விலக்கம் காண்க.

x	70	74	78	82	86	90
f	1	3	5	7	8	12

தீர்வு ஊகச் சராசரி $A = 82$ என்க.

x	f	$d = x - 82$	fd	fd^2
70	1	–12	–12	144
74	3	–8	–24	192
78	5	–4	–20	80
82	7	0	0	0
86	8	4	32	128
90	12	8	96	768
	$\sum f = 36$		$\sum fd = 72$	$\sum fd^2 = 1312$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1312}{36} - \left(\frac{72}{36}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{328}{9} - 2^2}$

$= \sqrt{\frac{328 - 36}{9}}$

$= \sqrt{\frac{292}{9}} = \sqrt{32.44}$

$\therefore \quad \sigma \simeq 5.7$.

எடுத்துக்காட்டு 11.14

பின்வரும் பரவலின் விலக்க வர்க்க சராசரியைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	3.5-4.5	4.5-5.5	5.5-6.5	6.5-7.5	7.5-8.5
நிகழ்வெண்கள்	9	14	22	11	17

தீர்வு ஊகச் சராசரி $A = 6$ என்க.

பிரிவு இடைவெளி	x மைய மதிப்பு	f	$d = x - 6$	fd	fd^2
3.5-4.5	4	9	−2	−18	36
4.5-5.5	5	14	−1	−14	14
5.5-6.5	6	22	0	0	0
6.5-7.5	7	11	1	11	11
7.5-8.5	8	17	2	34	68
		$\sum f = 73$		$\sum fd = 13$	$\sum fd^2 = 129$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி, $\sigma^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fd}{\sum f}\right)^2$

$$= \frac{129}{73} - \left(\frac{13}{73}\right)^2 = \frac{129}{73} - \frac{169}{5329}$$

$$= \frac{9417 - 169}{5329} = \frac{9248}{5329}$$

ஆகவே, விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma^2 \simeq 1.74$.

(iii) படி விலக்க முறை (Step deviation method)

எடுத்துக்காட்டு 11.15

உலகக் கால்பந்து போட்டிகளில் 71 முன்னணி வீரர்கள் அடித்த கோல்களின் எண்ணிக்கையின் விவரங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விவரத்தின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
நிகழ்வெண்கள்	8	12	17	14	9	7	4

தீர்வு $A = 35$ என்க.

நான்காவது நிரலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள $x–A$-ன் மதிப்புகளின் பொதுக்காரணி $c = 10$.

பிரிவு இடைவெளி	x மைய மதிப்பு	f	$x–A$	$d = \frac{x-A}{c}$	fd	fd^2
0–10	5	8	−30	−3	−24	72
10–20	15	12	−20	−2	−24	48
20–30	25	17	−10	−1	−17	17
30–40	35	14	0	0	0	0
40–50	45	9	10	1	9	9
50–60	55	7	20	2	14	28
60–70	65	4	30	3	12	36
		$\sum f = 71$			$\sum fd = -30$	$\sum fd^2 = 210$

திட்ட விலக்கம், $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \times c$

$= \sqrt{\frac{210}{71} - \left(\frac{-30}{71}\right)^2} \times 10$

$= \sqrt{\frac{210}{71} - \frac{900}{5041}} \times 10$

$= \sqrt{\frac{14910 - 900}{5041}} \times 10$

$= \sqrt{\frac{14010}{5041}} \times 10 = \sqrt{2.7792} \times 10$

திட்ட விலக்கம், $\sigma \simeq 16.67.$

எடுத்துக்காட்டு 11.16

40 கம்பித் துண்டுகளின் நீளங்கள் (செ.மீ-க்கு திருத்தமாக) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விவரத்திற்கான விலக்க வர்க்கச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

நீளம் (செ.மீ)	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70
கம்பித் துண்டுகளின் எண்ணிக்கை	2	3	8	12	9	5	1

தீர்வு ஊகச் சராசரி $A = 35.5$ என்க.

நீளம்	மைய மதிப்பு x	துண்டுகளின் எண்ணிக்கை (f)	$d = x - A$	fd	fd^2
1-10	5.5	2	-30	-60	1800
11-20	15.5	3	-20	-60	1200
21-30	25.5	8	-10	-80	800
31-40	35.5	12	0	0	0
41-50	45.5	9	10	90	900
51-60	55.5	5	20	100	2000
61-70	65.5	1	30	30	900
		$\sum f = 40$		$\sum fd = 20$	$\sum fd^2 = 7600$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி, $\sigma^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2 = \frac{7600}{40} - \left(\frac{20}{40}\right)^2$

$= 190 - \frac{1}{4} = \frac{760 - 1}{4} = \frac{759}{4}$

$\therefore \quad \sigma^2 = 189.75.$

11.2.3 மாறுபாட்டுக் கெழு (Coefficient of Variation)

மாறுபாட்டுக் கெழு கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

மாறுபாட்டுக் கெழு $C.V = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$. இங்கு σ, $\overline{x}$ என்பவைகள் முறையே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களின் திட்ட விலக்கம் மற்றும் கூட்டுச் சராசரி ஆகும். மாறுபாட்டுக் கெழுவை சார்பு திட்ட விலக்கம் (relative standard deviation) எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்புரை:

(i) இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட புள்ளி விவரத் தொகுப்புகளின் சீர்மைத் தன்மையை அல்லது நிலைப்புத் தன்மையை (consistency) ஒப்பிட, மாறுபாட்டுக் கெழு பயன்படுகிறது.

(ii) ஒரு புள்ளி விவரத்தின் மாறுபாட்டுக் கெழு அதிகமாக இருந்தால், அந்தப் புள்ளி விவரம் குறைந்த சீர்மைத் தன்மை அல்லது குறைந்த நிலைப்புத் தன்மை கொண்டுள்ளது.

(iii) மாறுபாட்டுக் கெழு குறைவாக இருந்தால், அந்தப் புள்ளி விவரம் அதிக சீர்மைத் தன்மை அல்லது அதிக நிலைப்புத் தன்மை கொண்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 11.17

18, 20, 15, 12, 25 என்ற விவரங்களுக்கு மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுவோம்.

கூட்டு சராசரி $\overline{x} = \dfrac{12+15+18+20+25}{5}$

$= \dfrac{90}{5} = 18.$

x	$d = x - 18$	d^2
12	-6	36
15	-3	9
18	0	0
20	2	4
25	7	49
	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 98$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{98}{5}}$$

$$= \sqrt{19.6} \simeq 4.427.$$

மாறுபாட்டுக் கெழு C.V $= \dfrac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$

$$= \frac{4.427}{18} \times 100 = \frac{442.7}{18}.$$

$\therefore$ மாறுபாட்டுக் கெழு C.V = 24.6

எடுத்துக்காட்டு 11.18

5 கிரிக்கெட் விளையாட்டுப் போட்டிகளில் இரண்டு மட்டை வீரர்கள் எடுத்த ஓட்டங்கள் (runs) பின்வருமாறு. அவர்களில் ஓட்டங்கள் எடுப்பதில் யார் அதிக சீர்மைத் தன்மை உடையவர்?

மட்டை வீரர் A	38	47	34	18	33
மட்டை வீரர் B	37	35	41	27	35

தீர்வு

மட்டை வீரர் A

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
18	– 16	256
33	– 1	1
34	0	0
38	4	16
47	13	169
170	0	442

$$\bar{x} = \frac{170}{5} = 34$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{442}{5}} = \sqrt{88.4}$$

$$\simeq 9.4$$

மாறுபாட்டுக் கெழு, $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{9.4}{34} \times 100$$

$$= \frac{940}{34}$$

$$= 27.65$$

∴ மட்டை வீரர் A எடுத்த ஓட்டங்களுக்கான மாறுபாட்டுக் கெழு = 27.65 (1)

மட்டை வீரர் B

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
27	– 8	64
35	0	0
35	0	0
37	2	4
41	6	36
175	0	104

$$\bar{x} = \frac{175}{5} = 35$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{104}{5}} = \sqrt{20.8}$$

$$\simeq 4.6$$

மாறுபாட்டுக் கெழு, $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{4.6}{35} \times 100$$

$$= \frac{460}{35} = \frac{92}{7} = 13.14$$

∴ மட்டை வீரர் B எடுத்த ஓட்டங்களுக்கான மாறுபாட்டுக் கெழு = 13.14 (2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து B- யின் மாறுபாட்டுக் கெழு, A-ன் மாறுபாட்டுக்கெழுவை விடக்குறைவு. எனவே, B என்ற மட்டை வீரர், A என்ற மட்டை வீரரை விட ஓட்டங்கள் எடுப்பதில் அதிக சீர்மைத் தன்மையைக் கொண்டுள்ளார்.

எடுத்துக்காட்டு 11.19

ஒரு புள்ளி விவரத்தில் 30 மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் முறையே 18 மற்றும் 3 ஆகும். அவற்றின் கூட்டுத் தொகையையும், மேலும் அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையையும் காண்க.

தீர்வு 30 மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி, $\bar{x} = 18$

எனவே, 30 மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகை, $\sum x = 30 \times 18 = 540$ $\left(\bar{x} = \frac{\sum x}{n}\right)$

திட்ட விலக்கம், $\sigma = 3$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{30} - 18^2 = 9$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{30} - 324 = 9$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 9720 = 270 \quad \Longrightarrow \quad \sum x^2 = 9990$$

$\therefore \quad \sum x = 540$ மற்றும் $\sum x^2 = 9990.$

எடுத்துக்காட்டு 11.20

ஒரு புள்ளி விவரத்தில், 20 மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் முறையே 40 மற்றும் 15 என கணக்கிடப்பட்டன. அவைகளைச் சரிபார்க்கும்போது 43 என்ற மதிப்பு தவறுதலாக 53 என எழுதப்பட்டது தெரிய வந்தது. அவ்விவரத்தின் சரியான கூட்டுச் சராசரி மற்றும் சரியான திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு சரியான கூட்டுச் சராசரியை முதலில் காண்போம்

20 புள்ளி விவரங்களின் சராசரி, $\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = 40$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x}{20} = 40$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x = 20 \times 40 = 800$$

திருத்தப்பட்ட $\sum x = \sum x$ + சரியான மதிப்பு – தவறான மதிப்பு

திருத்தப்பட்ட $\sum x = 800 + 43 - 53 = 790.$

$\therefore$ திருத்தப்பட்ட சராசரி $= \frac{790}{20} = 39.5$ (1)

விலக்க வர்க்கச் சராசரி, $\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = 225$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{20} - 40^2 = 225$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 32000 = 225 \times 20 = 4500.$$

$$\therefore \quad \sum x^2 = 32000 + 4500 = 36500$$

திருத்தப்பட்ட $\sum x^2 = \sum x^2$ + (சரியான மதிப்பு)^2 – (தவறான மதிப்பு)^2

திருத்தப்பட்ட $\sum x^2 = 36500 + 43^2 - 53^2 = 36500 + 1849 - 2809$

$= 36500 - 960 = 35540.$

எனவே, திருத்தப்பட்ட $\sigma^2 = \frac{\text{திருத்தப்பட்ட} \sum x^2}{n}$ – (திருத்தப்பட்ட சராசரி)^2

$= \frac{35540}{20} - (39.5)^2$

$= 1777 - 1560.25 = 216.75.$

திருத்தப்பட்ட $\sigma = \sqrt{216.75} \simeq 14.72.$

$\therefore$ திருத்தப்பட்ட சராசரி $= 39.5$ மற்றும் திருத்தப்பட்ட திட்ட விலக்கம் $\simeq 14.72$

எடுத்துக்காட்டு 11.21

ஒரு புள்ளி விவரத் தொகுப்பில் $\sum x=35$, $n=5$, $\sum(x-9)^2 = 82$ எனில், $\sum x^2$ மற்றும் $\sum(x-\overline{x})^2$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு $\sum x = 35$ மற்றும் $n = 5$ என தரப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{35}{5} = 7.$$

$\sum x^2$ -ஐக் கணக்கிடுவோம்.

$$\sum(x-9)^2 = 82$$

$$\Longrightarrow \sum(x^2 - 18x + 81) = 82$$

$$\Longrightarrow \sum x^2 - \left(18\sum x\right) + \left(81\sum 1\right) = 82$$

$$\Longrightarrow \sum x^2 - 630 + 405 = 82 \qquad \because \sum x = 35 \text{ மற்றும் } \sum 1 = 5$$

$$\Longrightarrow \sum x^2 = 307.$$

$\sum(x-\overline{x})^2$ -ஐக் கணக்கிட,

$$\sum(x-9)^2 = 82$$

$$\Longrightarrow \sum(x-7-2)^2 = 82 \qquad \text{இங்கு } \overline{x} = 7. \text{ எனவே, } x-9 = (x-7)-2$$

$$\Longrightarrow \sum[(x-7)-2]^2 = 82$$

$$\Longrightarrow \sum(x-7)^2 - 2\sum[(x-7)\times 2] + \sum 4 = 82$$

$$\Longrightarrow \sum(x-\overline{x})^2 - 4\sum(x-\overline{x}) + 4\sum 1 = 82$$

$$\Longrightarrow \sum(x-\overline{x})^2 - 4(0) + (4\times 5) = 82 \qquad \because \sum 1 = 5 \text{ மற்றும் } \sum(x-\overline{x}) = 0$$

$$\Longrightarrow \sum(x-\overline{x})^2 = 62$$

$$\therefore \quad \sum x^2 = 307 \text{ மற்றும் } \sum(x-\overline{x})^2 = 62.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.22

இரு விவரத் தொடர்களின் மாறுபாட்டுக் கெழுக்கள் 58 மற்றும் 69 என்க. மேலும், அவற்றின் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 21.2 மற்றும் 15.6 எனில், அவற்றின் கூட்டுச் சராசரிகளைக் காண்க.

தீர்வு மாறுபாட்டுக் கெழு, $C.V = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$ என அறிவோம்.

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100.$$

முதல் தொடரின் கூட்டுச் சராசரி, $\overline{x}_1 = \frac{\sigma}{C.V} \times 100.$

$$= \frac{21.2}{58} \times 100 \qquad \because \quad C.V = 58 \text{ மற்றும் } \sigma = 21.2$$

$$= \frac{2120}{58} = 36.6$$

இரண்டாவது தொடரின் கூட்டுச் சராசரி $\overline{x_2} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100$

$= \frac{15.6}{69} \times 100$ $\because$ C.V = 69 மற்றும் σ = 15.6

$= \frac{1560}{69}$

$= 22.6.$

முதலாவது தொடரின் கூட்டுச் சராசரி = 36.6 , இரண்டாவது தொடரின் கூட்டுச் சராசரி = 22.6.

பயிற்சி 11.1

1. பின்வரும் மதிப்புகளுக்கு வீச்சு மற்றும் வீச்சுக் கெழு காண்க.

   (i) 59, 46, 30, 23, 27, 40, 52, 35, 29.

   (ii) 41.2, 33.7, 29.1, 34.5, 25.7, 24.8, 56.5, 12.5.

2. ஒரு புள்ளி விவரத்தின் மீச்சிறு மதிப்பு 12. அதன் வீச்சு 59 எனில் அப்புள்ளி விவரத்தின் மீப்பெரு மதிப்பைக் காண்க.

3. 50 அளவுகளில் மிகப்பெரிய மதிப்பு 3.84கி.கி. அதன் வீச்சு 0.46 கி.கி எனில், அவைகளின் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

4. கண்டறிந்த புள்ளி விவரத் தொகுப்பிலுள்ள 20 மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கம் $\sqrt{5}$ என்க. புள்ளி விவரத்தின் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் 2 ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் புதிய புள்ளி விவரங்களின் திட்ட விலக்கம் மற்றும் விலக்க வர்க்கச் சராசரி காண்க.

5. முதல் 13 இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

6. கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரங்களின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

   (i) 10, 20, 15, 8, 3, 4. (ii) 38, 40, 34 ,31, 28, 26, 34.

7. கீழ்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரத்தின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

x	3	8	13	18	23
f	7	10	15	10	8

8. ஒரு பள்ளியிலுள்ள 200 மாணவர்கள் ஒரு புத்தகக் கண்காட்சியில் வாங்கிய புத்தகங்களின் எண்ணிக்கையைப் பற்றிய விவரம் கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	35	64	68	18	15

   இப்புள்ளி விவரத்தின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

9. பின்வரும் புள்ளி விவரத்தின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

x	2	4	6	8	10	12	14	16
f	4	4	5	15	8	5	4	5

10. ஒரு பாதசாரி குறுக்குப் பாதையை கடக்கச் சிலர் (pedestrian crossing) எடுத்துக் கொண்ட நேர விவரம் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

நேரம் (விநாடியில்)	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
நபர்களின் எண்ணிக்கை	4	8	15	12	11

இப்புள்ளி விவரத்திற்கு விலக்க வர்க்கச் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

11. வீட்டு உரிமையாளர்கள் 45 பேர் அவர்களுடைய தெருவின் 'பசுமைச் சூழல்' திட்டத்திற்காக நிதி அளித்தனர். வசூலிக்கப்பட்ட நிதித் தொகை விவரம் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தொகை (₹)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
வீட்டு உரிமையாளர்களின் எண்ணிக்கை	2	7	12	19	5

இவ்விவரத்திற்கு விலக்க வர்க்கச் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

12. கீழ்க்காணும் பரவலின் (distribution) விலக்க வர்க்கச் சராசரி காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
நிகழ்வெண்கள்	15	25	28	12	12	8

13. ஒரு புள்ளி விவரத் தொகுப்பிலுள்ள 100 மதிப்புகளின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் முறையே 48 மற்றும் 10 ஆகும். அனைத்து மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகை மற்றும் அவைகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை ஆகியவற்றைக் காண்க.

14. 20 மதிப்புகளின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் முறையே 10 மற்றும் 2 என கணக்கிடப்பட்டன. பின்பு சரிபார்க்கும் போது 12 என்ற மதிப்பானது தவறுதலாக 8 என்று எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது தெரிய வந்தது. சரியான சராசரி மற்றும் சரியான திட்ட விலக்கம் ஆகியனவற்றைக் காண்க.

15. $n = 10$, $\overline{x} = 12$ மற்றும் $\sum x^2 = 1530$ எனில், மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

16. பின்வரும் மதிப்புகளின் மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக : 20, 18, 32, 24, 26.

17. ஒரு புள்ளி விவரத்தின் மாறுபாட்டுக் கெழு 57 மற்றும் திட்ட விலக்கம் 6.84 எனில், அதன் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

18. ஒரு குழுவில் 100 பேர் உள்ளனர், அவர்களின் உயரங்களின் கூட்டுச் சராசரி 163.8செ.மீ மற்றும் மாறுபாட்டுக் கெழு 3.2 எனில், அவர்களுடைய உயரங்களின் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

19. $\sum x = 99$, $n = 9$ மற்றும் $\sum (x-10)^2 = 79$ எனில், $\sum x^2$ மற்றும் $\sum (x-\overline{x})^2$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

20. ஒரு வகுப்பிலுள்ள A, B என்ற இரு மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு:

A	58	51	60	65	66
B	56	87	88	46	43

இவர்களில் யார் மிகுந்த சீர்மைத் தன்மையை கொண்டுள்ளார்?

பயிற்சி 11.2

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 , 29 என்ற முதல் 10 பகா எண்களின் வீச்சு

   (A) 28 (B) 26 (C) 29 (D) 27

2. தொகுப்பிலுள்ள விவரங்களில் மிகச் சிறிய மதிப்பு 14.1 மற்றும் அவ்விவரத்தின் வீச்சு 28.4 எனில், தொகுப்பின் மிகப் பெரிய மதிப்பு

   (A) 42.5 (B) 43.5 (C) 42.4 (D) 42.1

3. தொகுப்பிலுள்ள விவரங்களில் மிகப்பெரிய மதிப்பு 72 மற்றும் மிகச்சிறிய மதிப்பு 28 எனில், அத்தொகுப்பின் வீச்சுக் கெழு

   (A) 44 (B) 0.72 (C) 0.44 (D) 0.28

4 11 மதிப்புகளின் $\Sigma x = 132$ எனில், அவற்றின் கூட்டுச் சராசரி

   (A) 11 (B) 12 (C) 14 (D) 13

5. n உறுப்புகள் கொண்ட எந்த ஒரு எண்களின் தொகுப்பிற்கும் $\Sigma(x - \overline{x}) =$

   (A) Σx (B) $\overline{x}$ (C) $n\overline{x}$ (D) 0

6. n உறுப்புகள் கொண்ட எந்த ஒரு எண்களின் தொகுப்பிற்கும் $(\Sigma x) - \overline{x} =$

   (A) $n\overline{x}$ (B) $(n-2)\overline{x}$ (C) $(n-1)\overline{x}$ (D) 0

7. x, y, z- ன் திட்ட விலக்கம் t எனில், $x+5,\ y+5,\ z+5$-ன் திட்ட விலக்கம்

   (A) $\frac{t}{3}$ (B) $t+5$ (C) t (D) $x\,y\,z$

8. ஒரு புள்ளி விவரத்தின் திட்டவிலக்கம் 1.6 எனில், அதன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி (பரவற்படி)

   (A) 0.4 (B) 2.56 (C) 1.96 (D) 0.04

9. ஒரு புள்ளி விவரத்தின் விலக்க வர்க்க சராசரி 12.25 எனில், அதன் திட்ட விலக்கம்

   (A) 3.5 (B) 3 (C) 2.5 (D) 3.25

10. முதல் 11 இயல் எண்களின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி

   (A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $5\sqrt{2}$ (D) 10

11. 10, 10, 10, 10, 10-ன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி

   (A) 10 (B) $\sqrt{10}$ (C) 5 (D) 0

12. 14, 18, 22, 26, 30-ன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி 32 எனில், 28, 36, 44, 52, 60-ன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி

   (A) 64 (B) 128 (C) $32\sqrt{2}$ (D) 32

13. விவரங்களின் தொகுப்பு ஒன்றின் திட்டவிலக்கம் $2\sqrt{2}$. அதிலுள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பும் 3 ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் புதிய விவரத் தொகுப்பின் திட்டவிலக்கம்

(A) $\sqrt{12}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) $6\sqrt{2}$ (D) $9\sqrt{2}$

14. $\sum(x-\overline{x})^2 = 48$, $\overline{x} = 20$ மற்றும் $n = 12$ எனில், மாறுபாட்டுக் கெழு

(A) 25 (B) 20 (C) 30 (D) 10

15. சில விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் முறையே 48, 12 எனில், மாறுபாட்டுக்கெழு

(A) 42 (B) 25 (C) 28 (D) 48

நினைவில் கொள்க

- (i) வீச்சு $= L - S$. அதாவது, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்தின் மிகப்பெரிய மதிப்பிற்கும் மிகச்சிறிய மதிப்பிற்கும் உள்ள வித்தியாசம் வீச்சு ஆகும்.

  (ii) வீச்சுக்கெழு $= \dfrac{L-S}{L+S}$.

- தொகுக்கப்படாத விவரங்களின் திட்டவிலக்கம் (σ)

  (i) $\sqrt{\dfrac{\sum x^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x}{n}\right)^2}$

  (ii) $\sqrt{\dfrac{\sum d^2}{n}}$

  ($d = x - \overline{x}$ மற்றும் $\overline{x}$ = கூட்டுசராசரி)

  (iii) $\sqrt{\dfrac{\sum d^2}{n} - \left(\dfrac{\sum d}{n}\right)^2}$

  ($d = x - A$ மற்றும் A ஊகச் சராசரி)

  (iv) $\sqrt{\dfrac{\sum d^2}{n} - \left(\dfrac{\sum d}{n}\right)^2} \times c$

  $\left(d = \dfrac{x-A}{c}\right)$

- தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களின் திட்டவிலக்கம் (σ)

  (i) $\sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f}}$

  $d = x - \overline{x}$ மற்றும் $\overline{x}$ = கூட்டுசராசரி.

  (ii) $\sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$

  $d = x - A$, A = ஊகச் சராசரி

  (iii) $\sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \times c$. இங்கு $d = \dfrac{x-A}{c}$

- கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணுடனும் (மதிப்பு) ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைக் கூட்டினாலோ அல்லது கழித்தாலோ கிடைக்கும் புதிய விவரத்தின் திட்டவிலக்கம் மாறாது.

- கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திலுள்ள ஒவ்வொரு எண்ணையும் (மதிப்பு) ஒரு மாறிலி k ஆல் பெருக்க அல்லது வகுக்கக் கிடைக்கும் புதிய மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கமானது, பழைய திட்டவிலக்கத்தை மாறிலி k ஆல் பெருக்க அல்லது வகுக்கக் கிடைக்கும் எண்ணாக இருக்கும்.

- முதல் n இயல் எண்களின் திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{12}}$.

- திட்டவிலக்கத்தின் வர்க்கமானது, விலக்க வர்க்கச் சராசரி அல்லது பரவற்படி எனப்படும்.

- மாறுபாட்டுக் கெழு, $C.V = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$. இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட விவரங்களின் சீர்மைத் தன்மையை ஒப்பிட மாறுபாட்டுக்கெழு பயன்படுகிறது.

12

நிகழ்தகவு

It is remarkable that a science which began with the consideration of games of chance should have become the most important object of human knowledge

-P.D. Laplace.

- அறிமுகம்
- நிகழ்தகவின் தொன்மை வரையறை
- நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றம்

பியாரி டி. லாப்லாஸ்
(Pierre de Laplace)
(1749-1827)
பிரான்ஸ்

லாப்லாஸ் என்பார் எப்போதும் தலைசிறந்த அறிவியலாளர்களுள் ஒருவராக கருதப்படுகிறார், இவர் பிரான்சு நாட்டின் நியூட்டன் எனப் பெருமையாக அழைக்கப்படுகிறார்.

1812–ல் புள்ளியியலில் பல அடிப்படை முடிவுகளை உருவாக்கினார். இவர் விதிவரு முறையில் காரணத்தைக் கண்டறியும் கணிதத் தத்துவத்தினை நிகழ்தகவின் அடிப்படையில் கூறினார். நிகழ்தகவின் கொள்கைகளை முதன்முதலில் அறிமுகப்படுத்தியவரும் இவரே ஆவார். இவரின் கணிதக் கொள்கைகளில் ஒன்று "நிகழ்தகவு என்பது சோதனையில் சாதகமான நிகழ்கவுகளுக்கும் மொத்த நடக்க இயலும் நிகழ்கவுகளுக்கும் உள்ள விகிதம்" என்பதாகும்.

12.1 அறிமுகம்

அன்றாட வாழ்க்கையில் நாம் பார்க்கும் நிகழ்வுகள் மற்றும் மேற்கொள்ளும் பெரும்பான்மையான செயல்கள் வாய்ப்புகளுக்கு உட்பட்டவை. பூகம்பம், புயல், ஆழிப்பேரலை, மின்னல் மற்றும் தொற்றுநோய் பரவுதல் போன்ற நிகழ்வுகள் ஏற்படுவதை முன்னரே ஊகிக்க இயலாது. எதிர்பாராமல் ஏற்படும் இந்நிகழ்வுகள் மனித குலத்திற்கு பேரிழப்பினை ஏற்படுத்துகின்றன. ஏற்கனவே நடந்த நிகழ்வுகளின் விவரங்கள் அடிப்படையில், இதுபோன்ற நிகழ்ச்சிகள் எதிர்காலத்தில் ஏற்படுமென துல்லியமாக முன்னரே ஊகிக்க இயலுமானால், தேவையான முன்தடுப்பு நடவடிக்கைகளாலும் சேதத்தைக் கட்டுப்படுத்தும் செயல்களாலும் மனித இனம் ஆபத்துகளிலிருந்து காப்பற்றப்படும். இவ்வாறு முன்கூட்டியே, நிகழ்வுகளை ஊகிக்க இயலுவதற்கு நிகழ்தகவியல் (Probability theory) கற்பது மிகவும் அவசியமாகிறது.

1654 ஆம் ஆண்டு செவாலியே டி–மியர் (Chevalier de Mere) என்பவரால் எழுப்பப்பட்ட ஒரு சூதாட்டக் கணக்கினால் புகழ்பெற்ற பிரெஞ்சு கணிதவியலறிஞர்கள் பிளாசி பாஸ்கல் (Blasie Pascal) மற்றும் பியரி டி-பெர்மாட் (Pierre de Fermat) ஆகியோருக்கிடையே கடிதப் பரிமாற்றம் நடைபெற்றது. இந்நிகழ்ச்சி நிகழ்தகவுக் கருத்தியலை கணிதத்தின் வாயிலாக உருவாக்கியது. கிறிஸ்டியன் ஹக்கின்ஸ் (Christian Huggens) (1629-1695), பெர்னோலி (Bernoulli) (1654-1705), டி மோய்வர் (De-Moivre) (1667-1754), பியரி டி லாப்லாஸ் (Pierre de Laplace) (1749-1827), காஸ் (Gauss) (1777-1855), பாய்சான் (Poisson) (1781-1845), செபிசேவ் (Chebyshev) (1821-1894) மற்றும் மார்கோவ் (Markov) (1856-1922) போன்ற கணிதவியலறிஞர்கள் நிகழ்தகவுக் கருத்தியலின் வளர்ச்சிக்கு பெரும் பங்களித்தனர். 1933-ல் ருஷ்ய கணிதவியலறிஞர் எ.கோல்மோகோரோவ் (A.Kolmogorov) என்பார் எடுகோள் அணுகுமுறையில் (Axiomatic approach) நவீன நிகழ்தகவுக் கருத்தியலுக்கு அடிகோலினார்.

நிகழ்ச்சிகள் நடப்பதையும், நடக்காமலிருப்பதையும் பொருத்தே நிகழ்தகவுகள் இருக்கும். நிகழ்தகவியலின் கருத்துக் கூறுகளான வாய்ப்புச் சோதனை (ராண்டம் சோதனை) (random experiment), முயற்சி (trial), கூறு வெளி (sample space) மற்றும் பல்வேறு வகையான நிகழ்ச்சிகள் (events) பற்றிய வரையறைகளை நாம் கற்போம்.

கணிதவியலறிஞர்கள் சோதனை (experiment) மற்றும் சோதனையின் முடிவுகளை (outcomes) பரந்த அளவில் பயன்படுத்துகின்றனர். கூர்ந்து கவனிக்கப்படும் அல்லது அளவீடு செய்யும் எந்த ஒரு செயலும் சோதனை எனப்படும். குறிப்பிட்ட நாளில் நூலகத்திற்கு வருகை புரிந்தோரின் எண்ணிக்கையை பதிவு செய்தல், ஒரு நாணயத்தை சுண்டுதல், பல நிறங்களில் பந்துகள் கொண்ட பையிலிருந்து ஒரு பந்தினை எடுத்தல் மற்றும் ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் ஒரு நாளில் நிகழும் விபத்துகளின் எண்ணிக்கையை பதிவு செய்தல் ஆகியன சோதனைக்கான சில உதாரணங்களாகும்.

ஒரு சோதனையை நிகழ்த்துவதற்கு முன்பாகவே முடிவினைக் கூற இயலாத சோதனை வாய்ப்புச் சோதனை என்பதாகும். இருப்பினும் ஒரு சோதனையின் முடிவில் நிகழ வாய்ப்புள்ள அனைத்து முடிவுகளையும் நாம் பட்டியலிடலாம்.

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் நிகழ வாய்ப்புள்ள அனைத்து நிகழ்வுகளின் கணமே அச்சோதனையின் கூறுவெளி எனப்படும். இது S என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. ஒரு சோதனையை ஒவ்வொரு முறையும் செய்வது ஒரு முயற்சி (trial) எனப்படும்.

கூறுவெளி S -ன் எந்த ஒரு உட்கணமும் சோதனையின் ஒரு நிகழ்ச்சி (event) எனப்படும்.

A என்பது S-ன் உட்கணம் என்க. ஒரு சோதனை நடத்தப்படும் போது கிடைத்த முடிவானது A-யில் உள்ளது எனில், A என்ற நிகழ்ச்சி நடந்துள்ளது என்று கூறலாம்.

சில எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் சமவாய்ப்புச் சோதனை, கூறுவெளி மற்றும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகியவற்றை விளக்குவோம்.

சமவாய்ப்புச் சோதனை	கூறுவெளி	சில நிகழ்ச்சிகள்
ஒரு சீரான நாணயத்தை ஒருமுறை சுண்டுதல்.	$S=\{H,T\}$	$\{H\}$ அதாவது, தலை விழுவது ஒரு நிகழ்ச்சி. $\{T\}$ அதாவது, பூ விழுவது மற்றொரு நிகழ்ச்சி.
ஒரு சீரான நாணயத்தை இரு முறை சுண்டுதல்.	$S=\{HH,HT,TH,TT\}$	$\{HT,HH\}$ மற்றும் $\{TT\}$ ஆகியன சில நிகழ்ச்சிகள்.
சீரான பகடையை ஒருமுறை உருட்டுதல்.	$S=\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{1,3,5\},\{2,4,6\},\{3\}$ மற்றும் $\{6\}$ ஆகியன சில நிகழ்ச்சிகள்.

சம வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் (Equally likely events)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளில் ஒவ்வொன்றும் நிகழ்வதற்கான வாய்ப்புகள் சமமாக இருக்குமானால், அந்நிகழ்ச்சிகள் சம வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும். ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது தலை விழுதலும், பூ விழுதலும் சம வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (Mutually exclusive events)

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளில் எந்த ஒரு நிகழ்ச்சியும், மற்ற நிகழ்ச்சிகளை நிகழவிடாமல் நடந்தால், அந்நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும். அதாவது இத்தகைய நிகழ்ச்சிகள் ஒரே நேரத்தில் நிகழாது. A மற்றும் B என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில், $A \cap B = \phi$.

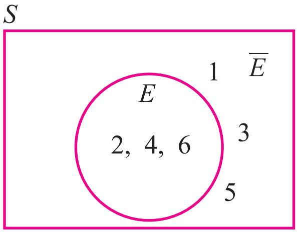
படம் 12.1

ஒரு சீரான நாணயத்தைச் சுண்டும் போது தலை விழுதல் ஆனது பூ விழுதலை நிகழவிடாது. அதேபோல் ஒரு சீரான பகடையை உருட்டினால், கிடைக்க வாய்ப்புள்ள ஆறு விளைவுகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும். ஏனெனில், பகடையை உருட்டும் போது ஒரே நேரத்தில் பகடையின் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட முகங்கள் விளைவுகளாக அமையாது.

நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் (Complementry events)

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் ஏதாவது ஒரு நிகழ்ச்சியை E எனக் கொள்க. S என்பது அதன் கூறுவெளி என்க. S -லிருந்து ஆனால் E -ல் இல்லாத மற்ற விளைவுகளை E -ன் நிரப்பு நிகழ்ச்சி என்கிறோம். இது $\overline{E}$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. எனவே $\overline{E} = S - E$. மேலும் E மற்றும் $\overline{E}$ ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

ஒரு பகடை உருட்டுதலில், 2-ன் மடங்கு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி $E = \{2, 4, 6\}$ என குறித்தால் E-ன் நிரப்பு நிகழ்ச்சி $\overline{E} = \{1, 3, 5\}$ ஆகும்.



படம் 12.2

நிறைவு செய் நிகழ்ச்சிகள் (Exhaustive events)

நிகழ்ச்சிகள் $E_1, E_2, \cdots, E_n$ என்பனவற்றின் சேர்ப்புக் கணம் சம வாய்ப்புச் சோதனையின் கூறுவெளி ஆக இருப்பின், $E_1, E_2, \cdots, E_n$ ஆகியன நிறைவு செய் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

உறுதி நிகழ்ச்சி (Sure event)

ஒரு பகடையை உருட்டும் போது 1, 2, 3, 4, 5 மற்றும் 6 எண்களில் ஏதேனும் ஓர் எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி உறுதியாக நிகழும். எனவே இது ஒரு உறுதி நிகழ்ச்சி ஆகும்.

சமவாய்ப்புச் சோதனையின் கூறுவெளி ஓர் உறுதி நிகழ்ச்சியாகும். ஏனெனில், அதன் ஏதாவது ஒரு உறுப்பு, உறுதியாகச் சோதனையில் ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் நிகழும்.

இயலா நிகழ்ச்சி (Impossible event)

ஒருபோதும் நடைபெற முடியாத நிகழ்ச்சி இயலா நிகழ்ச்சி எனப்படும். இது ϕ எனக் குறிக்கப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பகடையை ஒரு முறை உருட்டும் போது எண் 7 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி ஒரு இயலா நிகழ்ச்சி ஆகும்.

சாதகமான விளைவுகள் (Favourable outcomes)

தேவையான ஒரு நிகழ்ச்சிக்குத் தொடர்பான விளைவுகள், அந்நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான விளைவுகள் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பகடையை ஒரு முறை உருட்டும்போது ஒற்றைப்படை எண் கிடைக்கப் பெறுவதை நிகழ்ச்சி E என்க. விளைவுகள் 1, 3 மற்றும் 5 என்பன E-ன் சாதகமான விளைவுகள் ஆகும்.

குறிப்பு

இப்பாடப்பிரிவில் சமவாய்ப்பு விளைவுகள் மற்றும் முடிவுறு கூறுவெளி கொண்ட சமவாய்ப்புச் சோதனைகளை மட்டும் எடுத்துக்கொள்கிறோம். மேலும், இப்பகுதியில் சோதனைக்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட நாணயங்கள் மற்றும் பகடைகள் ஒரே சீரானவை எனக்கொள்வோம்.

12.2 நிகழ்தகவிற்கான தொன்மை வரையறை (Classical definition of probability)

ஒரு கூறுவெளியில் n விளைவுகளில், m விளைவுகள் A என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமாக இருப்பின், $n(S) = n$, $n(A) = m$ எனக் குறிப்பிடுவோம். நிகழ்ச்சி A-ன் நிகழ்தகவு $P(A)$ ஆனது m-க்கும் n-க்கும் உள்ள விகிதமாக வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது,

$$P(A) = \frac{A \text{ க்குச் சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{சோதனையின் விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n}$$ ஆகும்.

குறிப்பு

(i) மேற்கண்ட நிகழ்தகவிற்கான தொன்மை வரையறையானது, முடிவுறா விளைவுகள் கொண்ட சோதனையிலும், சமவாய்ப்பு அல்லாத சோதனையிலும் ஏற்புடையதாக இருக்காது .

(ii) A என்ற ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவு 0-க்கும் 1-க்கும் இடையிலோ அல்லது 0 ஆகவோ அல்லது 1 ஆகவோ அமையும்.
அதாவது, $0 \le P(A) \le 1$.

(iii) உறுதியான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு ஒன்று ஆகும். அதாவது $P(S) = 1$.

(iv) நடக்க இயலா நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு பூச்சியம் ஆகும். அதாவது $P(\phi) = 0$.

(v) A என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A \text{ அல்ல}) = P(\overline{A}) \text{ அல்லது } P(A') = \frac{n-m}{n} = \frac{n}{n} - \frac{m}{n}$$

$$\Longrightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A).$$

(vi) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

எடுத்துக்காட்டு 12.1

ஒரு சீரான பகடை ஒரு முறை உருட்டப்படுகிறது. பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) எண் 4 கிடைத்தல் (ii) ஒரு இரட்டைப்படை எண் கிடைத்தல்

(iii) 6-ன் பகா காரணிகள் கிடைத்தல்

(iv) 4-ஐ விடப் பெரிய எண் கிடைத்தல்

தீர்வு சீரான ஒரு பகடை உருட்டுதலின் கூறுவெளி $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. எனவே $n(S) = 6$

(i) எண் 4 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை A என்க.

$A = \{4\}$ $\therefore n(A) = 1$.

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$.

படம் 12.3

(ii) ஒரு இரட்டைப்படை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை B என்க.

$B = \{2, 4, 6\}$ $\therefore n(B) = 3$.

எனவே, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(iii) 6-ன் பகாக்காரணிகள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை C என்க.

$C = \{2, 3\}$ $\therefore n(C) = 2$.

எனவே, $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

(iv) 4 -ஐ விடப் பெரிய எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை D என்க.

$D = \{5, 6\}$. ஆகவே, $n(D) = 2$.

எனவே, $P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

எடுத்துக்காட்டு 12.2

ஒரு சீரான நாணயம் இரண்டு முறை சுண்டப்படுகிறது. கீழ்க்காணும் நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

(i) இரு தலைகள் கிடைத்தல் (ii) குறைந்தது ஒரு தலை கிடைத்தல்

(iii) ஒரு பூ மட்டும் கிடைத்தல்.

தீர்வு ஒரு நாணயத்தை இரண்டு முறைகள் சுண்டுவதில் கிடைக்கும் கூறுவெளி

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$.

$\therefore$ $n(S) = 4$.

(i) இரு தலைகள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை A என்க. $A = \{ HH \}$.

$n(A) = 1$.

ஆகவே, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$.

(ii) குறைந்தது ஒரு தலை கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை B என்க.

எனவே, $B = \{ HH, HT, TH \}$. ஆகவே, $n(B) = 3$.

ஆகவே, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{4}$.

(iii) ஒரு பூ மட்டும் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை C என்க. எனவே, $C = \{ HT, TH \}$

$n(C) = 2$.

ஆகவே, $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

எடுத்துக்காட்டு 12.3

முதல் இருபது இயல் எண்களிலிருந்து ஒரு முழு எண் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அந்த எண் ஒரு பகா எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு கூறுவெளி, $S = \{1, 2, 3, \cdots, 20\}$.

$\therefore \quad n(S) = 20.$

தேர்ந்தெடுக்கப்படும் எண் பகா எண்ணாக இருக்கும் நிகழ்ச்சியை A என்க

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}.$$

$$n(A) = 8.$$

எனவே, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}.$

எடுத்துக்காட்டு 12.4

35 பொருட்கள் அடங்கிய தொகுப்பு ஒன்றில் 7 பொருட்கள் குறைபாடுடையன. அத்தொகுப்பிலிருந்து ஒரு பொருள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் போது அது குறைபாடற்ற பொருளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு மொத்தப் பொருட்களின் எண்ணிக்கை $n(S) = 35.$

குறைபாடுடைய பொருட்களின் எண்ணிக்கை $= 7.$

குறைபாடற்ற பொருளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சியை A என்க.

குறைபாடற்ற பொருட்களின் எண்ணிக்கை $n(A) = 35 - 7 = 28.$

எனவே, குறைபாடற்ற பொருளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{35} = \frac{4}{5}.$$

எடுத்துக்காட்டு 12.5

இரு சீரான பகடைகள் ஒரு முறை உருட்டப்படுகின்றன. கீழ்க்காணும் நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

(i) முக எண்களின் கூடுதல் 8 ஆக இருத்தல் (ii) முக எண்கள் ஒரே எண்களாக (doublet) இருத்தல் (iii) முக எண்களின் கூடுதல் 8-ஐ விட அதிகமாக இருத்தல்

தீர்வு இரு பகடைகளை உருட்டும் போது கிடைக்கும் கூறுவெளி

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$$

படம் 12.4

$$\therefore \; n(S) = 6 \times 6 = 36$$

(i) முக எண்களின் கூடுதல் 8 ஆக இருக்கும் நிகழ்ச்சியை A என்க.

$$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}.$$

ஆகவே, $n(A) = 5.$

எனவே, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{5}{36}.$

(ii) இரு பகடைகளிலும் ஒரே எண் (இரட்டைகள்) கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை B என்க

$$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}.$$

எனவே, $n(B) = 6.$

ஆகவே, $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}.$

(iii) C என்பது முக எண்களின் கூடுதல் 8-ஐ விட அதிகமாகக் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$$C = \{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

எனவே, $n(C) = 10.$

ஆகவே, $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}.$

எடுத்துக்காட்டு 12.6

நன்கு கலைத்து வைக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகளைக் கொண்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து சமவாய்ப்புச் சோதனை முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அந்தச் சீட்டு பின்வருவனவாக இருக்க நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) இராசா (ii) கருப்பு இராசா

(iii) ஸ்பேடு (iv) டயமண்ட் 10

52 சீட்டுகளின் விவரம்.

Spade ♠	Hearts ♥	Clavor ♣	Diamond ♦
A	A	A	A
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
J	J	J	J
Q	Q	Q	Q
K	K	K	K
13	13	13	13

தீர்வு மொத்த சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை $n(S) = 52.$

(i) A என்பது எடுக்கப்பட்ட சீட்டு இராசாவாக (King) இருக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$\therefore n(A) = 4.$

$\therefore P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}.$

(ii) B என்பது எடுக்கப்பட்ட சீட்டு கருப்பு இராசாவாக (Black King) இருக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$n(B) = 2.$

$\therefore P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{2}{52} = \dfrac{1}{26}.$

(iii) C என்பது எடுக்கப்பட்ட சீட்டு ஸ்பேடு (Spade) சீட்டாக இருக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$n(C) = 13.$

$\therefore P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}.$

(iv) D என்பது டயமண்ட் 10 (Diamond - 10) என்ற சீட்டு எடுக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$n(D) = 1.$

$P(D) = \dfrac{n(D)}{n(S)} = \dfrac{1}{52}.$

எடுத்துக்காட்டு 12.7

ஒரு வகுப்பில் உள்ள 35 மாணவர்களில் 20 பேர் ஆண்கள் மற்றும் 15 பேர் பெண்கள். சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு மாணவர் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார் எனில், பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. (i) தேர்ந்தெடுக்கப்படுபவர் மாணவனாக இருத்தல் (ii) தேர்ந்தெடுக்கப்படுபவர் மாணவியாக இருத்தல்.

தீர்வு S என்பது இச்சோதனையில் கூறுவெளி எனக் கொள்க.

$\therefore$ மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $n(S) = 35$

இச்சோதனையில் மாணவன் மற்றும் மாணவி ஆகியோரைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சிகளை முறையே B மற்றும் G எனக் கொள்க.

ஆகவே, $n(S) = 35,\ n(B) = 20$ மற்றும் $n(G) = 15$.

(i) மாணவனைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{20}{35}$

எனவே, $P(B) = \frac{4}{7}$.

(ii) மாணவியைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{15}{35}$

ஆகவே, $P(G) = \frac{3}{7}$.

எடுத்துக்காட்டு 12.8

ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் மழை வருவதற்கான நிகழ்தகவு 0.76. அக்குறிப்பிட்ட நாளில் மழை வராமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு குறிப்பிட்ட நாளில் மழை வரும் என்ற நிகழ்ச்சியை A எனவும் அந்நாளில் மழை வராமல் இருக்கும் நிகழ்ச்சியை $\overline{A}$ எனவும் கொள்க.

$$P(A) = 0.76$$

$$P(\overline{A}) = 1 - 0.76 \quad \because P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$$= 0.24$$

$\therefore$ குறிப்பிட்ட நாளில் மழை வராமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.24 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 12.9

ஒரு பையில் 5 சிவப்பு மற்றும் சில நீல நிறப் பந்துகள் உள்ளன. அப்பையிலிருந்து ஒரு நீல நிறப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு, ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவின் மூன்று மடங்கு எனில், அப்பையிலுள்ள நீல நிறப் பந்துகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு பையிலுள்ள நீல நிறப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை x எனக் கொள்க.

எனவே, மொத்தப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை, $n(S) = 5 + x$.

B என்பது ஒரு நீல நிறப் பந்தை எடுக்கும் நிகழ்ச்சி மற்றும் R என்பது ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்தை எடுக்கும் நிகழ்ச்சி எனக் கொள்க.

$P(B) = 3P(R)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\implies \quad \frac{n(B)}{n(S)} = 3\frac{n(R)}{n(S)}$$

$$\implies \quad \frac{x}{5+x} = 3\left(\frac{5}{5+x}\right)$$

$$\implies \quad x = 15$$

ஆகவே, நீல நிறப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை $= 15$.

எடுத்துக்காட்டு 12.10

பின்வருவனவற்றிற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

(i) சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நெட்டாண்டில் (leap year) 53 வெள்ளிக்கிழமைகள் இருத்தல்.

(ii) சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நெட்டாண்டில் 52 வெள்ளிக்கிழமைகள் மட்டுமே இருத்தல்.

(iii) சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சாதாரண வருடத்தில் (Non-leap year) 53 வெள்ளிக்கிழமைகள் இருத்தல்.

தீர்வு

(i) ஒரு நெட்டாண்டில் உள்ள நாட்களின் எண்ணிக்கை = 366. அதாவது 52 வாரங்கள் மற்றும் 2 நாட்கள்.

52 வாரங்களில் 52 வெள்ளிக் கிழமைகள் உள்ளன. மீதமுள்ள இரண்டு நாட்கள் கீழ்க்காணும் ஏழு வாய்ப்புகளில் ஏதேனும் ஒன்றாக இருக்கும்.

(ஞாயிறு, திங்கள்), (திங்கள், செவ்வாய்), (செவ்வாய், புதன்), (புதன், வியாழன்), (வியாழன், வெள்ளி), (வெள்ளி, சனி) மற்றும் (சனி, ஞாயிறு).

ஒரு நெட்டாண்டில் 53 வெள்ளிக்கிழமைகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவும் மேலேயுள்ள 7 வாய்ப்புகளில் ஒரு வெள்ளிக்கிழமை வருவதற்கான நிகழ்தகவும் ஒன்றே ஆகும். ஆகவே பின்வருமாறு கூறுவெளியை எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

$$S = \left\{ \begin{matrix} (\text{ஞாயிறு}, \text{திங்கள்}), (\text{திங்கள்}, \text{செவ்வாய்}), (\text{செவ்வாய்}, \text{புதன்}), \\ (\text{புதன்}, \text{வியாழன்}), (\text{வியாழன்}, \text{வெள்ளி}), (\text{வெள்ளி}, \text{சனி}), (\text{சனி}, \text{ஞாயிறு}) \end{matrix} \right\}.$$

ஆகவே, $n(S) = 7$.

மேலேயுள்ள 7 வாய்ப்புகளில், ஒரு வெள்ளிக்கிழமை வருவதற்கான நிகழ்ச்சியை A என்க.

$A = \{(\text{வியாழன்}, \text{வெள்ளி}), (\text{வெள்ளி}, \text{சனி})\}$ எனவே, $n(A) = 2$.

எனவே, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{2}{7}$.

ஆகவே, லீப் வருடத்தில் 53 வெள்ளிக்கிழமைகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\dfrac{2}{7}$.

(ii) ஒரு நெட்டாண்டில் 52 வெள்ளிக்கிழமைகள் மட்டுமே வருவதாக இருப்பின், 52 வாரங்கள் போக மீதமுள்ள இரு நாட்களில் வெள்ளிக்கிழமை உறுதியாக வராது.

B என்பது, மீதமுள்ள இரு நாட்களில் வெள்ளிக்கிழமை இல்லாமலிருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி எனக் கொள்க.

எனவே, B = {(ஞாயிறு, திங்கள்), (திங்கள், செவ்வாய்), (செவ்வாய், புதன்), (புதன், வியாழன்), (சனி, ஞாயிறு)}.

ஆகவே, $n(B) = 5$.

எனவே, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{7}$.

இங்கு A மற்றும் B என்பன நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

(iii) சாதாரண வருடத்தின் மொத்த நாட்களின் எண்ணிக்கை = 365.

அதாவது சாதாரண வருடத்தில் 52 வாரங்கள் மற்றும் ஒரு நாள் இருக்கும்.

52 வாரங்களில் 52 வெள்ளிக்கிழமைகள் இருக்கும். மீதமுள்ள ஒரு நாள் பின்வரும் ஏழு வாய்ப்புகளில் ஒன்றாக அமையும்.

ஞாயிறு, திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி மற்றும் சனி.

எனவே, ஒரு சாதாரண ஆண்டில் 53 வெள்ளிக் கிழமைகள் இருக்க, மேலேயுள்ள ஏழு வாய்ப்புகளில் ஒரு வெள்ளிக்கிழமை இருக்க வேண்டும்.
எனவே, கூறுவெளியை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

S = {ஞாயிறு, திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி, சனி}.

$\therefore \; n(S) = 7$.

ஏழு வாய்ப்புகளில், வெள்ளிக்கிழமை வரும் நிகழ்ச்சியை C எனக் கொள்க.

C = {வெள்ளி} $\Longrightarrow n(C) = 1$.

$$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{7}.$$

எனவே, ஒரு சாதாரண ஆண்டில் 53 வெள்ளிக் கிழமைகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{7}$.

எடுத்துக்காட்டு 12.11

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் ஒரு நிகழ்ச்சி A என்க. அந்நிகழ்ச்சியின் நிரப்பு நிகழ்ச்சி $\overline{A}$ என்க. $P(A):P(\overline{A}) = 7:12$ எனில், $P(A)$ ஐக் காண்க.

தீர்வு $P(A):P(\overline{A}) = 7:12$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$P(A) = 7k$ மற்றும் $P(\overline{A}) = 12k$ எனக் கொள்க.
இங்கு $k > 0$

நாம் $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ என அறிவோம்.

$7k + 12k = 1 \Longrightarrow 19k = 1$.

$k = \frac{1}{19}$.

$\therefore \; P(A) = 7k = \frac{7}{19}$.

மாற்றுமுறை

$$\frac{P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{7}{12}$$

$12P(A) = 7 \times P(\overline{A})$

$= 7\,[1 - P(A)]$

$19P(A) = 7$

எனவே, $P(A) = \frac{7}{19}$.

பயிற்சி 12.1

1. ஒரு பையில் உள்ள 1 முதல் 100 வரை எண்களால் குறிக்கப்பட்ட 100 சீட்டுகளிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அவ்வாறு எடுக்கப்படும் சீட்டின் எண் 10 ஆல் வகுபடும் எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

2. ஒரு சீரான பகடை இரண்டு முறை உருட்டப்படுகிறது. முக எண்களின் கூடுதல் 9 கிடைக்கப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க?

3. இரு பகடைகள் ஒரு சேர உருட்டப்படுகின்றன. முக எண்களைக் கொண்டு அமைக்கப்படும் ஈரிலக்க எண் 3 ஆல் வகுபடும் எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

4. 12 நல்ல முட்டைகளுடன் 3 அழுகிய முட்டைகள் கலந்துள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு முட்டை, அழுகியதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

5. இரு நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் சுண்டும்போது, அதிகபட்சமாக ஒரு தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

6. நன்கு கலைத்து அடுக்கிய 52 சீட்டுகளைக் கொண்ட கட்டிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. பின்வருவனவற்றிற்கு நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.
(i) எடுத்த சீட்டு டயமண்ட் ஆக இருக்க (ii) எடுத்த சீட்டு டயமண்ட் இல்லாமல் இருக்க (iii) எடுத்த சீட்டு ஏஸ் சீட்டாக இல்லாமல் இருக்க.

7. மூன்று நாணயங்கள் ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளுக்கு நிகழ்தகவினைக் காண்க.
(i) குறைந்தது ஒரு தலை கிடைப்பது (ii) இரு பூக்கள் மட்டும் கிடைப்பது (iii) குறைந்தது இரு தலைகள் கிடைப்பது.

8. ஒரு பையில் 1 முதல் 6 வரை எண்கள் குறிக்கப்பட்ட 6 வெள்ளை நிறப் பந்துகளும் மற்றும் 7 முதல் 10 வரை எண்கள் குறிக்கப்பட்ட 4 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும் உள்ளன. சம வாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது எனில், பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளுக்கு நிகழ்தகவினைக் காண்க.
(i) எடுக்கப்பட்ட பந்து ஒரு இரட்டை எண் கொண்ட பந்தாக இருத்தல்
(ii) எடுக்கப்பட்ட பந்து ஒரு வெள்ளை நிறப் பந்தாக இருத்தல்.

9. 1 முதல் 100 வரையிலான முழு எண்களிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு எண் (i) ஒரு முழு வர்க்கமாக (perfect square) இருக்க (ii) முழு கனமாக இல்லாமல் (not a cube) இருக்க ஆகியனவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

10. அர்ஜெண்டினா, பங்களாதேஷ், சீனா, அங்கோலா, ருஷ்யா மற்றும் அல்ஜீரியா ஆகிய நாடுகளின் பெயர்களைக் கொண்ட பட்டியலிருந்து ஒரு சுற்றுலாப்பயணி சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு நாட்டின் பெயரைத் தேர்ந்தெடுக்கிறார். “அ” என்ற எழுத்தில் ஆரம்பமாகும் நாட்டின் பெயரை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

11. ஒரு பெட்டியில் 4 பச்சை, 5 நீலம் மற்றும் 3 சிவப்பு நிறப் பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்தைத் தேர்ந்தெடுக்க அது
(i) சிவப்பு நிறப் பந்தாக இருக்க (ii) பச்சை நிறப் பந்தாக இல்லாமலிருக்க ஆகியனவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

12. 20 சீட்டுகளில் 1 முதல் 20 வரையுள்ள முழு எண்கள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகின்றது. அவ்வாறு எடுக்கப்பட்ட சீட்டிலுள்ள எண்

(i) 4-ன் மடங்காக இருக்க (ii) 6-ன் மடங்காக இல்லாமல் இருக்க

ஆகிய நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

13. 3, 5, 7 ஆகிய எண்களை இலக்கங்களாகக் கொண்டு ஒரு இரண்டிலக்க எண் அமைக்கப்படுகின்றது. அவ்வெண் 57 ஐ விடப் பெரியதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க. (அவ்வெண்ணில் ஒரே இலக்கத்தை மீண்டும் பயன்படுத்தக் கூடாது).

14. மூன்று பகடைகள் ஒரே நேரத்தில் உருட்டப்படும்போது, மூன்று பகடைகளிலும் ஒரே எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவினைக் காண்க.

15. இரு பகடைகள் ஒரே நேரத்தில் உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் முக எண்களின் பெருக்கற்பலன் ஒரு பகா எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

16. ஒரு முகவையில் நீலம், பச்சை மற்றும் வெள்ளை நிறங்களிலான 54 பளிங்குக்கற்கள் உள்ளன. ஒரு பளிங்குக் கல்லை எடுக்கும்போது, நீல நிறப் பளிங்குக்கல் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$ மற்றும் பச்சை நிறப் பளிங்குக்கல் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{4}{9}$ எனில், அம்முகவையில் உள்ள வெள்ளை நிறப் பளிங்குக் கற்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க

17. ஒரு பையில் உள்ள 100 சட்டைகளில், 88 சட்டைகள் நல்ல நிலையிலும், 8 சட்டைகள் சிறிய குறைபாட்டுடனும் மற்றும் 4 சட்டைகள் பெரிய குறைபாட்டுடனும் உள்ளன. A என்ற வணிகர் நல்ல நிலையில் உள்ள சட்டைகளை மட்டுமே ஏற்கிறார். ஆனால் B என்ற வணிகர் அதிக குறைபாடு உடைய சட்டைகளை மட்டும் ஏற்க மறுக்கிறார். சமவாய்ப்பு முறையில் ஏதேனும் ஓர் சட்டையை தேர்ந்தெடுக்க அது (i) A-க்கு ஏற்புடையதாக அமைய (ii) B-க்கு ஏற்புடையதாக அமைய ஆகியனவற்றிற்கு நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

18. ஒரு பையில் உள்ள 12 பந்துகளில் x பந்துகள் வெள்ளை நிறமுடையவை. (i) சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்து தேர்ந்தெடுக்க, அது வெள்ளை நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க. (ii) 6 புதிய வெள்ளை நிறப் பந்துகளை அப்பையில் வைத்தபின்னர், ஒரு வெள்ளை நிறப் பந்தைத் தேர்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு ஆனது (i)-ல் பெறப்பட்ட நிகழ்தகவினைப் போல இருமடங்கு எனில், x-ன் மதிப்பினைக் காண்க.

19. பிக்கி உண்டியலில் (Piggy bank) 100 ஐம்பது பைசா நாணங்களும் 50 ஒரு ரூபாய் நாணயங்களும் 20 இரண்டு ரூபாய் நாணயங்களும் மற்றும் 10 ஐந்து ரூபாய் நாணயங்களும் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு நாணயம் தேர்ந்தெடுக்கும் போது (i) ஐம்பது பைசா நாணயமாக இருக்க (ii) ஐந்து ரூபாய் நாணயமாக இல்லாமல் இருக்க ஆகியனவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

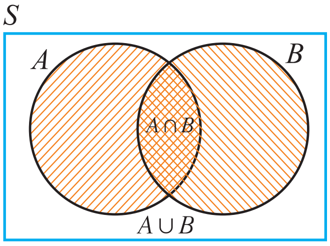
12.3 நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றம் (Addition theorem on probability)

S என்ற முடிவுறு வெற்றற்றக் கணத்தின் உட்கணங்கள் A மற்றும் B எனில்,

$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$ மற்றும் $n(S) \neq 0$.

இருபுறமும் $n(S)$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{n(A\cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A\cap B)}{n(S)} \qquad (1)$$



படம் 12.5

உட்கணங்கள் A மற்றும் B ஆகியனவற்றை ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் A மற்றும் B என்ற நிகழ்ச்சிகளாகக் கருதினால், (1) ஆனது $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ எனக் கிடைக்கும்.

இம்முடிவே நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றமாகும்.

குறிப்பு

(i) $A\cup B$ என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெற வேண்டுமெனில் A என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறலாம் அல்லது B என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறலாம் அல்லது இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே நேரத்தில் நடைபெறலாம். $A\cap B$ என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெற வேண்டுமெனில் A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே நேரத்தில் நடைபெறவேண்டும்.

(ii) A-யும் B-யும் ஒன்றையொன்றும் விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில், $A\cap B = \emptyset$ ஆகும். எனவே, $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$. ஏனெனில், $P(A\cap B) = 0$.

(iii) $A\cap \overline{B}$ என்ற நிகழ்ச்சியை, ஒரு கணமாக கருதும்போது $A\cap \overline{B}$ மற்றும் $A\setminus B$ என்பன சம கணங்களாகும்.

முடிவுகள் (நிரூபணம் இல்லாமல்)

(i) A, B மற்றும் C என்பன கூறுவெளி S -ஐச் சார்ந்த ஏதேனும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(B\cap C) - P(A\cap C) + P(A\cap B\cap C).$$

(ii) A_1, A_2 மற்றும் A_3 ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

$P(A_1\cup A_2\cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$.

(iii) $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

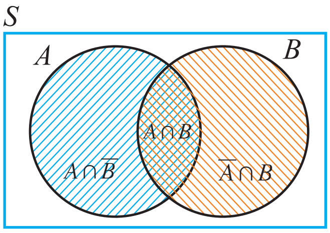
$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n)$.

(iv) $P(A\cap \overline{B}) = P(A) - P(A\cap B)$,

$P(\overline{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$

இங்கு, $A\cap \overline{B}$ என்பது A-வும் B இல்லாமலும் எனப் பொருள்படும்

இதே போல், $\overline{A}\cap B$ என்பது B-யும் A இல்லாமலும் எனப் பொருள்படும்.



படம் 12.6

எடுத்துக்காட்டு 12.12

மூன்று நாணயங்கள் ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி, சரியாக இரு பூக்கள் அல்லது குறைந்தபட்சம் ஒரு தலையாவது கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு கூறுவெளி $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$.

ஆகவே, $n(S) = 8$.

சரியாக இரு பூக்கள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை A என்க

எனவே, $A = \{HTT, TTH, THT\}$ மற்றும் $n(A) = 3$.

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}.$$

குறைந்தது ஒரு தலையாவது கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை B என்க

எனவே, $B = \{HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}$ மற்றும் $n(B) = 7$.

$$\therefore \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{8}.$$

A மற்றும் B ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள். ஏனெனில்

$A \cap B = A$. எனவே, $P(A \cap B) = P(A) = \frac{3}{8}$.

$\therefore P(A$ அல்லது $B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ஆகவே $P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$.

குறிப்பு

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் நாம் நிகழ்தகவின் கூட்டல் விதியை பயன்படுத்தியுள்ளோம். இருப்பினும் $A \cup B = B$ என்பதால் $P(A \cup B) = P(B) = \frac{7}{8}$ என எளிதில் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 12.13

ஒரு பகடை இருமுறை உருட்டப்படுகிறது. குறைந்தது ஒரு உருட்டலிலாவது எண் 5 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க. (கூட்டல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துக)

தீர்வு ஒரு பகடை இருமுறை உருட்டப்படும்பொழுது கிடைக்கும் கூறுவெளி S-ன் எண்ணிக்கை $n(S) = 36$ ஆகும்.

முதல் உருட்டலில் எண் 5 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை A என்க.

$\therefore \quad A = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\}$.

ஆகவே, $n(A) = 6$, $P(A) = \frac{6}{36}$.

இரண்டாம் உருட்டலில் எண் 5 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை B என்க.

$\therefore \quad B = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5)\}$.

ஆகவே, $n(B) = 6$ மற்றும் $P(B) = \frac{6}{36}$.

மேலும், $A \cap B = \{5,5\}$

ஆகவே, A மற்றும் B ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்காத நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

$\therefore \quad n(A \cap B) = 1$ மற்றும் $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

$\therefore$ நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றத்தின்படி,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
$$= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

எடுத்துக்காட்டு 12.14

ஒரு மாணவிக்கு மருத்துவக் கல்லூரியில் சேர்க்கை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.16 என்க. பொறியியல் கல்லூரியில் சேர்க்கை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.24 மற்றும் இரு கல்லூரிகளிலும் சேர்க்கை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.11 எனில்,

(i) மருத்துவம் மற்றும் பொறியியல் கல்லூரிகளில் ஏதேனும் ஒரு கல்லூரியில் சேர்க்கை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

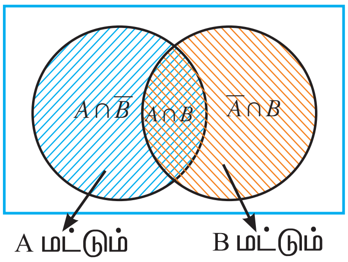
(ii) மருத்துவக் கல்லூரியில் மட்டுமோ அல்லது பொறியியல் கல்லூரியில் மட்டுமோ சேர்க்கை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு மருத்துவ கல்லூரியில் சேர்க்கை கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி A என்க. பொறியியல் கல்லூரியில் சேர்க்கை கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி B என்க.

(i) $P(A) = 0.16, \quad P(B) = 0.24$ மற்றும் $P(A \cap B) = 0.11$

$P($ ஏதாவது ஒரு கல்லூரியில் சேர்க்கை கிடைப்பது$)$

$$= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.16 + 0.24 - 0.11 = 0.29 \text{ ஆகும்.}$$



படம் 12.7

(ii) $P($ஏதாவது ஒரு கல்லூரியில் மட்டும் சேர்க்கை கிடைப்பது$)$

$$= P\ (A \text{ மட்டும் அல்லது } B \text{ மட்டும்})$$
$$= P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$$
$$= [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)]$$
$$= (0.16 - 0.11) + (0.24 - 0.11) = 0.18 \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 12.15

"ENTERTAINMENT" என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துகளிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு எழுத்தைத் தேர்வு செய்ய, அவ்வெழுத்து ஆங்கில உயிரெழுத்தாகவோ அல்லது எழுத்து T ஆகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க. (எழுத்துகள் திரும்பத் திரும்ப வரலாம்).

தீர்வு ENTERTAINMENT என்ற சொல்லில் 13 எழுத்துக்கள் உள்ளன.

$\therefore \quad n(S) = 13.$

ஓர் உயிரெழுத்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சியை A என்க.

$\therefore \quad n(A) = 5.$

ஆகவே, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{13}.$

T என்ற எழுத்தைத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சியை B என்க.

$\therefore \quad n(B) = 3$

ஆகவே, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{13}.$

எனவே, $P(A$ அல்லது $B) = P(A) + P(B)$ ($\because$ A-யும் B-யும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்)

$$= \frac{5}{13} + \frac{3}{13} = \frac{8}{13}.$$

எடுத்துக்காட்டு 12.16

A, B மற்றும் C என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் மற்றும் நிறைவுசெய் நிகழ்ச்சிகள் என்க. மேலும், $P(B) = \frac{3}{2}P(A)$ மற்றும் $P(C) = \frac{1}{2}P(B)$ எனில், $P(A)$-ஐ காண்க.

தீர்வு $P(A) = p$ என்க. ஆகவே, $P(B) = \frac{3}{2}P(A) = \frac{3}{2}p.$

மேலும், $P(C) = \frac{1}{2}P(B) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}p\right) = \frac{3}{4}p.$

A, B மற்றும் C ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் மற்றும் நிறைவு செய் நிகழ்ச்சிகள் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$\therefore \quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ மற்றும் $S = A \cup B \cup C.$

தற்போது, $P(S) = 1. \implies P(A) + P(B) + P(C) = 1$

$$\implies p + \frac{3}{2}p + \frac{3}{4}p = 1$$

$$\implies 4p + 6p + 3p = 4 \implies p = \frac{4}{13}$$

$\therefore \quad P(A) = \frac{4}{13}.$

எடுத்துக்காட்டு 12.17

52 சீட்டுகளைக் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படும் போது, அச்சீட்டு ஒரு இராசா (King) அல்லது ஒரு ஹார்ட் (Heart) அல்லது ஒரு சிவப்பு நிறச் சீட்டாகக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு A, B மற்றும் C என்பன முறையே ஒரு இராசா, ஒரு ஹார்ட் மேலும் ஒரு சிவப்பு நிறச் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

எனவே, $n(S) = 52, \quad n(A) = 4, \quad n(B) = 13$ மற்றும் $n(C) = 26.$

$n(A \cap B) = 1, \quad n(B \cap C) = 13, \quad n(C \cap A) = 2$ மற்றும் $n(A \cap B \cap C) = 1.$

$\therefore \quad P(A) = \frac{4}{52}, \quad P(B) = \frac{13}{52}$ மற்றும் $P(C) = \frac{26}{52}.$ மேலும்,

$P(A\cap B)=\dfrac{1}{52},\quad P(B\cap C)=\dfrac{13}{52},\quad P(C\cap A)=\dfrac{2}{52}$ மற்றும் $P(A\cap B\cap C)=\dfrac{1}{52}$.

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$$

$$=\frac{4}{52}+\frac{13}{52}+\frac{26}{52}-\frac{1}{52}-\frac{13}{52}-\frac{2}{52}+\frac{1}{52}=\frac{44-16}{52}$$

$$=\frac{7}{13}.$$

எடுத்துக்காட்டு 12.18

ஒரு பையில் 10 வெள்ளை, 5 கருப்பு, 3 பச்சை மற்றும் 2 சிவப்பு நிறப் பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு பந்து, வெள்ளை அல்லது கருப்பு அல்லது பச்சை நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு S-ஐக் கூறுவெளி என்க.

$\therefore\quad n(S)=20.$

W, B மற்றும் G ஆகியன முறையே ஒரு வெள்ளை, ஒரு கருப்பு மற்றும் ஒரு பச்சை நிறப் பந்தைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்க.

ஒரு வெள்ளை நிறப் பந்தை எடுக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(W)=\dfrac{n(W)}{n(S)}=\dfrac{10}{20}$.

ஒரு கருப்பு நிறப் பந்தை எடுக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{5}{20}$.

ஒரு பச்சை நிறப் பந்தை எடுக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(G)=\dfrac{n(G)}{n(S)}=\dfrac{3}{20}$.

$\therefore$ ஒரு பந்தை தேர்ந்தெடுக்க அது வெள்ளை அல்லது கருப்பு அல்லது பச்சையாக இருக்க நிகழ்தகவு $P(W\cup B\cup G)=P(W)+P(B)+P(G)$ ($\because$ W, B மற்றும் G ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.)

$$=\frac{10}{20}+\frac{5}{20}+\frac{3}{20}=\frac{9}{10}.$$

(குறிப்பு : $P(W\cup B\cup G)=P(R')=1-P(R)=1-\dfrac{2}{20}=\dfrac{9}{10}$ எனவும் விடையை பெறலாம்)

பயிற்சி 12.2

1. A மற்றும் B என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள். மேலும் $P(A)=\dfrac{3}{5}$ மற்றும் $P(B)=\dfrac{1}{5}$ எனில், $P(A\cup B)$ -ஐக் காண்க .

2. A மற்றும் B என்ற இரண்டு நிகழ்ச்சிகளில் $P(A)=\dfrac{1}{4}, P(B)=\dfrac{2}{5}$ மற்றும் $P(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$ எனில், $P(A\cap B)$ -ஐக் காண்க.

3. A மற்றும் B என்ற இரண்டு நிகழ்ச்சிகளில் $P(A)=\dfrac{1}{2}, P(B)=\dfrac{7}{10}$ மற்றும் $P(A\cup B)=1$ எனில், (i) $P(A\cap B)$ (ii) $P(A'\cup B')$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. ஒரு பகடை இருமுறை உருட்டப்படுகிறது. முதலாவதாக உருட்டப்படும்போது ஒரு இரட்டைப்படை எண் கிடைத்தல் அல்லது அவ்விரு உருட்டலில் முக எண்களின் கூடுதல் 8 ஆக இருத்தல் எனும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவினைக் காண்க.

5. 1 முதல் 50 வரையிலான முழுக்களிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஓர் எண் தேர்ந்தெடுக்கப்படும்போது அவ்வெண் 4 அல்லது 6 ஆல் வகுபடுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

6. ஒரு பையில் 50 மரை ஆணிகளும் (bolts), 150 திருகு மரைகளும் (nuts) உள்ளன. அவற்றுள் பாதி மரை ஆணிகளும், பாதி திருகு மரைகளும் துருப்பிடித்தவை. சமவாய்ப்பு முறையில் ஏதேனும் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது அது துருப்பிடித்ததாக அல்லது ஒரு மரை ஆணியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

7. இரு பகடைகள் ஒரே நேரத்தில் சேர உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் முக எண்களின் கூடுதல் 3 ஆல் மற்றும் 4 ஆல் வகுபடாமலிருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

8. ஒரு கூடையில் 20 ஆப்பிள்களும் 10 ஆரஞ்சுப் பழங்களும் உள்ளன. அவற்றுள் 5 ஆப்பிள்கள் மற்றும் 3 ஆரஞ்சுகள் அழுகியவை. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒருவர் ஒரு பழத்தை எடுத்தால், அது ஆப்பிளாகவோ அல்லது நல்ல பழமாகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

9. ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களில் 40% பேர் கணித வினாடி வினா நிகழ்ச்சியிலும், 30% பேர் அறிவியல் வினாடி வினா நிகழ்ச்சியிலும், 10% பேர் அவ்விரண்டு வினாடி வினா நிகழ்ச்சிகளிலும் கலந்து கொண்டனர். அவ்வகுப்பிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு மாணவன் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால், அவர் கணித வினாடி வினா நிகழ்ச்சியிலோ அல்லது அறிவியல் வினாடி வினா நிகழ்ச்சியிலோ அல்லது இரு நிகழ்ச்சிகளிலுமோ கலந்து கொண்டதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

10. நன்கு கலைத்து அடுக்கி வைக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகளைக் கொண்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அந்தச் சீட்டு ஸ்பேடாகவோ (Spade) அல்லது இராசாவாகவோ (King) இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

11. ஒரு பையில் 10 வெள்ளை, 6 சிவப்பு மற்றும் 10 கருப்பு நிறப் பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்தினை எடுக்கும்போது அது வெள்ளை அல்லது சிவப்பு நிறப் பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

12. 2, 5, 9 என்ற எண்களைக் கொண்டு, ஓர் இரண்டிலக்க எண் அமைக்கப்படுகிறது. அந்த எண் 2 அல்லது 5 ஆல் வகுபடுமாறு அமைய நிகழ்தகவு காண்க.
(அமைக்கப்படும் எண்ணில் ஒரே இலக்கம் மீண்டும் வரலாம்)

13. "ACCOMMODATION" என்ற சொல்லின் ஒவ்வொரு எழுத்தும் தனித்தனியே சிறிய காகிதங்களில் எழுதப்பட்டு, அந்த 13 சிறிய காகிதங்களும் ஒரு முகவையில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் முகவையிலிருந்து ஒரு காகிதத்தைத் தேர்வு செய்யும் போது, அதில் இடம் பெறும் எழுத்து

(i) 'A' அல்லது 'O' ஆகவோ

(ii) 'M' அல்லது 'C' ஆகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

14. ஒரு புதிய மகிழ்வுந்து (car) அதனுடைய வடிவமைப்பிற்காக விருது பெறும் நிகழ்தகவு 0.25 என்க. சிறந்த முறையில் எரிபொருள் பயன்பாட்டிற்கான விருது பெறும் நிகழ்தகவு 0.35 மற்றும் இரு விருதுகளும் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.15 எனில், அம்மகிழ்வுந்து

(i) குறைந்தது ஏதாவது ஒரு விருது பெறுதல்

(ii)ஒரே ஒரு விருது மட்டும் பெறுதல் ஆகியநிகழ்ச்சிகளுக்கானநிகழ்தகவுகளைக்காண்க

15. A, B, C ஆகியோர் ஒரு வினாவிற்குத் தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{7}$ என்க. A மற்றும் B இருவரும் சேர்ந்து தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{8}{15}$. B மற்றும் C இருவரும் சேர்ந்து தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{7}$. A மற்றும் C இருவரும் சேர்ந்து தீர்வு காண நிகழ்தகவு $\frac{12}{35}$, மூவரும் சேர்ந்து தீர்வு காண நிகழ்தகவு $\frac{8}{35}$ எனில், யாரேனும் ஒருவர் அவ்வினாவின் தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

பயிற்சி 12.3

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. ϕ என்பது ஒரு இயலா நிகழ்ச்சி எனில், $P(\phi) =$

   (A) 1 (B) $\frac{1}{4}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

2. S என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையின் கூறுவெளி எனில், $P(S) =$

   (A) 0 (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

3. A என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு p எனில், பின்வருவனவற்றில் p எதை நிறைவு செய்யும்

   (A) $0 < p < 1$ (B) $0 \leq p \leq 1$ (C) $0 \leq p < 1$ (D) $0 < p \leq 1$

4. A மற்றும் B என்பன ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகள். மேலும் S என்பது சமவாய்ப்புச் சோதனையின் கூறுவெளி எனில், $P(\overline{A} \cap B) =$

   (A) $P(B) - P(A \cap B)$ (B) $P(A \cap B) - P(B)$
   (C) $P(S)$ (D) $P[(A \cup B)']$

5. ஒரு மாணவன் கணிதத்தில் 100 மதிப்பெண் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{4}{5}$. அவர் 100 மதிப்பெண் பெறாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

   (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

6. A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளில் $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.05$ மற்றும் $P(A \cap B) = 0.14$ எனில், $P(A \cup B) =$

   (A) 0.61 (B) 0.16 (C) 0.14 (D) 0.6

7. 20 பொருட்களில் 6 பொருட்கள் குறைபாடுடையவை. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பொருள் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அது குறையற்றதாகக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

   (A) $\frac{7}{10}$ (B) 0 (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{2}{3}$

8. A மற்றும் B என்பன இரண்டு ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்க. அந்நிகழ்ச்சியின் கூறுவெளி S, $P(A) = \frac{1}{3}P(B)$ மற்றும் $S = A \cup B$ எனில், $P(A) =$

   (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{8}$

9. A, B மற்றும் C என்பனஒன்றையொன்று விலக்கும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள் என்க. அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{5}{12}$ எனில், $P(A \cup B \cup C) =$

   (A) $\frac{19}{12}$ (B) $\frac{11}{12}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) 1

10. $P(A) = 0.25, P(B) = 0.50, P(A \cap B) = 0.14$ எனில், $P(A$ யும் அல்ல மற்றும் B யும் அல்ல) =

(A) 0.39 (B) 0.25 (C) 0.11 (D) 0.24

11. ஒரு பையில் 5 கருப்பு, 4 வெள்ளை மற்றும் 3 சிவப்பு நிறப் பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில்தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு பந்து சிவப்பு நிறமாக இல்லாமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு.

(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{4}{12}$ (C) $\frac{3}{12}$ (D) $\frac{3}{4}$

12. ஒரே நேரத்தில் இரு பகடைகள் உருட்டப்படுகின்றன. பகடையின் இரண்டு முகங்களிலும் ஒரே எண்ணாக இருக்க நிகழ்தகவு

(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{2}{3}$

13. ஒரு சீரான பகடை ஒரு முறை உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் எண் பகா எண் அல்லது பகு எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$

14. ஒரு நாணயத்தை மூன்று முறை சுண்டும் சோதனையில் 3 தலைகள் அல்லது 3 பூக்கள் கிடைக்க நிகழ்தகவு

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$

15. 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கும் போது அது ஒரு ஏஸ் (ace)ஆக இல்லாமலும் மற்றும் ஒரு இராசாவாக (king) இல்லாமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு.

(A) $\frac{2}{13}$ (B) $\frac{11}{13}$ (C) $\frac{4}{13}$ (D) $\frac{8}{13}$

16. ஒரு நெட்டாண்டில் (Leap year) 53 வெள்ளிக்கிழமைகள் அல்லது 53 சனிக்கிழமைகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவு

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{3}{7}$

17. ஒரு சாதரண வருடமானது 53 ஞாயிற்றுக்கிழமைகள் மற்றும் 53 திங்கட்கிழமைகள் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு.

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) 0

18. 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கும்போது, அது ஹார்ட் அரசியாக (Heart queen) இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு.

(A) $\frac{1}{52}$ (B) $\frac{16}{52}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{1}{26}$

19. ஒரு உறுதி நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு

(A) 1 (B) 0 (C) 100 (D) 0.1

20. ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் முடிவானது வெற்றியாகவோ அல்லது தோல்வியாகவோ இருக்கும். அச்சோதனையில் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு தோல்விக்கான நிகழ்தகவினைப் போல் இரு மடங்கு எனில், வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) 0

விடைகள்

1. கணங்களும் சார்புகளும்

பயிற்சி 1.1

2. (i) A (ii) ϕ **3.** (i) {b, c} (ii) ϕ (iii) $\{a, e, f, s\}$

4. (i) {2, 4, 6, 7, 8, 9} (ii) {4, 6} (iii) {4, 6, 7, 8, 9}

10. {–5, –3, –2}, {–5, –3}, சேர்ப்புப் பண்பு உடையது அல்ல

பயிற்சி 1.2

2. (i)-லிருந்து (iv) வரை உள்ள வினாக்களுக்கு பல விடைகள் உண்டு அவற்றில் ஒரு விடை :
(i) $A' \cup (A \cap B)$ அல்லது $(A \backslash B)'$ (ii) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ (iii) $A \backslash (B \cup C)$ (iv) $(A \cap B) \backslash C$

5. (i) {12} (ii) {4, 8, 12, 20, 24, 28}

பயிற்சி 1.3

1. 300 **2.** 430 **3.** 35 **5.** 100 **6.** 10 % **7.** (i) 10 (ii) 25 (iii) 15

8. (i) 450 (ii) 3550 (iii) 1850 **9.** 15

பயிற்சி 1.4

1. (i) சார்பல்ல (ii) சார்பு **2.** மதிப்பகம் $=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; வீச்சகம் $=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

3. (i) ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பும் அல்ல மற்றும் மேல் சார்பும் அல்ல
(ii) மாறிலிச் சார்பு (iii) ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பு

4. (i) சார்பல்ல (ii) ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு
(iii) சார்பல்ல (iv) இருபுறச் சார்பு அல்லது ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பு

5. $a=-2,\ b=-5,\ c=8,\ d=-1$ **6.** வீச்சகம் $\left\{-\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}\right\}$; A யிலிருந்து A-க்கு f ஒரு சார்பல்ல

7. ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பு **8.** (i) 12 மற்றும் 14 (ii) 13 மற்றும் 15 **9.** $a = 9,\ b = 15$

10. (i) $f = \{(5, -7), (6, -9), (7, -11), (8, -13)\}$
(ii) துணை மதிப்பகம் $= \{-11, 4, 7, -10, -7, -9, -13\}$
(iii) வீச்சகம் $= \{-7, -9, -11, -13\}$ (iv) ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு

11. (i) சார்பு (ii) சார்பு (iii) சார்பல்ல (iv) சார்பல்ல (v) சார்பு

12.

x	–1	–3	–5	–4
$f(x)$	2	1	6	3

13. $\{(6,1), (9,2), (15,4), (18,5), (21,6)\}$;

x	6	9	15	18	21
$f(x)$	1	2	4	5	6

14. $\{(4,3), (6,4), (8,5), (10,6)\}$;

x	4	6	8	10
$f(x)$	3	4	5	6

15. (i) 16 (ii) –32 (iii) 5 (iv) $\frac{2}{3}$ **16.** (i) 23 (ii) 34 (iii) 2

பயிற்சி 1.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	**C**	**C**	**A**	**A**	**B**	**A**	**B**	**B**	**B**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	**B**	**C**	**D**	**A**	**D**	**D**	**B**	**A**	**C**

2. மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசைகளும் தொடர்களும்

பயிற்சி 2.1

1. (i) $-\frac{1}{3}, 0, 1$ (ii) $-27, 81, -243$ (iii) $-\frac{3}{4}, 2, -\frac{15}{4}$

2. (i) $\frac{9}{17}, \frac{11}{21}$ (ii) $-1536, 18432$ (iii) 36, 78 (iv) $-21, 57$

3. 378, $\frac{25}{313}$ 4. 195, 256 5. 2, 5, 15, 35, 75 6. 1, 1, 1, 2, 3, 5

பயிற்சி 2.2

1. கூட்டுத் தொடர் 6, 11, 16, $\cdots$; பொது உறுப்பு $5n+1$ 2. பொது வித்தியாசம் -5, $t_{15} = 55$

3. $t_{29} = 3$ 4. $t_{12} = 23\sqrt{2}$ 5. $t_{17} = 84$ 6. (i) 27 உறுப்புகள் (ii) 34 உறுப்புகள்

8. $t_{27} = 109$ 9. $n = 10$ 10. 7 11. முதல் வருடம் : 100, $t_{15} = 2200$

12. 2560 13. 10, 2, –6 அல்லது –6, 2, 10 14. 2, 6, 10 அல்லது 10, 6, 2 16. A.P., ₹95,000

பயிற்சி 2.3

1. (i) பெருக்குத்தொடர், $r = 2$ (ii) பெருக்குத்தொடர், $r = 5$

(iii) பெருக்குத்தொடர், $r = \frac{2}{3}$ (iv) பெருக்குத்தொடர், $r = \frac{1}{12}$

(v) பெருக்குத்தொடர், $r = \frac{1}{2}$ (vi) பெருக்குத்தொடர் அல்ல

2. -2^7 3. 2, 6, 18 , $\cdots$ 4. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$ 5. (i) $n = 8$ (ii) $n = 11$ 6. $n = 5$ 7. $r = 5$

8. $r = \frac{5}{2}$ அல்லது $\frac{2}{5}$; உறுப்புகள் $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$ அல்லது $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$. 9. 18, 6, 2 அல்லது 2, 6, 18

10. 4, 2, 1 அல்லது 1, 2, 4 11. $1, 3, 9, \cdots$ அல்லது $9, 3, 1, \cdots$

12. $₹1000\left(\frac{105}{100}\right)^{12}$ 13. $₹\ 50,000\left(\frac{85}{100}\right)^{15}$

பயிற்சி 2.4

1. (i) 2850 (ii) 7875 2. 1020 3. (i) 260 (ii) –75 4. (i) 1890 (ii) 50

5. -820 6. $\frac{39}{11} + \frac{40}{11} + \frac{41}{11} + \cdots$ 7. 8 உறுப்புகள் அல்லது 23 உறுப்புகள்

8. 55350 9. 740 10. 7227 11. 36 12. 12000 13. 15 நாட்கள்

14. A.P., ₹37,200 16. 156 முறைகள் 20. 1225 செங்கற்கள்

பயிற்சி 2.5

1. $s_{20} = \frac{15}{4}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right]$ 2. $s_{27} = \frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{27}\right]$ 3. (i) 765 (ii) $\frac{5}{2}(3^{12}-1)$

4. (i) $\frac{1-(0.1)^{10}}{0.9}$ (ii) $\frac{10}{81}(10^{20}-1)-\frac{20}{9}$ 5. (i) $n=6$ (ii) $n=6$ 6. $\frac{75}{4}\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{23}\right]$

7. $3+6+12+\cdots$ 8. (i) $\frac{70}{81}[10^n-1]-\frac{7n}{9}$ (ii) $n-\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]$

9. $s_{15} = \frac{5(4^{15}-1)}{3}$ 10. இரண்டாவது வாய்ப்பு; மாம்பழங்களின் எண்ணிக்கை 1023. 11. $r=2$

பயிற்சி 2.6

1. (i) 1035 (ii) 4285 (iii) 2550 (iv) 17395 (v) 10650 (vi) 382500
2. (i) $k=12$ (ii) $k=9$ 3. 29241 4. 91 5. 3818 ச.செ.மீ 6. 201825 க.செ.மீ

பயிற்சி 2.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	**D**	**C**	**D**	**D**	**A**	**B**	**B**	**B**	**B**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	**A**	**B**	**D**	**A**	**B**	**B**	**A**	**C**	**A**

3. இயற்கணிதம்

பயிற்சி 3.1

1. $\left(4,\frac{3}{2}\right)$ 2. $(1,5)$ 3. $(3,2)$ 4. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ 5. $(1,5)$

6. $\left(\frac{11}{23},\frac{22}{31}\right)$ 7. $(2,4)$ 8. $(2,1)$ 9. $\left(5,\frac{1}{7}\right)$ 10. $(6,-4)$

பயிற்சி 3.2

1. (i) $(4,3)$ (ii) $(0.4, 0.3)$ (iii) $(2,3)$ (iv) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

2. (i) 23 , 7 (ii) ₹18,000 , ₹14,000 (iii) 42 (iv) ₹800 (v) 253 ச.செ.மீ (vi) 720 கி.மீ

பயிற்சி 3.3

1. (i) $4,-2$ (ii) $\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{2},-\frac{1}{3}$ (iv) $0,-2$

   (v) $\sqrt{15},\ -\sqrt{15}$ (vi) $\frac{2}{3},1$ (vii) $\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$ (viii) $-13,11$

2. (i) x^2-3x+1 (ii) x^2-2x+4 (iii) x^2+4 (iv) $x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{5}$

   (v) $x^2-\frac{x}{3}+1$ (vi) $x^2-\frac{x}{2}-4$ (vii) $x^2-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}$ (viii) $x^2-\sqrt{3}x+2$

பயிற்சி 3.4

1. (i) $x^2+2x-1,\ 4$ (ii) $3x^2-11x+40,\ -125$

   (iii) $x^2+2x-2,\ 2$ (iv) $x^2-\frac{5}{3}x+\frac{5}{9},\ -\frac{50}{9}$

   (v) $2x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{8}x+\frac{51}{32},\ -\frac{211}{32}$ (vi) $x^3-3x^2-8x+\frac{55}{2},\ -\frac{41}{2}$

2. $a=-6,\ b=11,$ மீதி 5 3. $p=-2,\ q=0,$ மீதி -10

பயிற்சி 3.5

1. (i) $(x-1)(x+2)(x-3)$ (ii) $(x-1)(2x+3)(2x-1)$ (iii) $(x-1)(x-12)(x-10)$
(iv) $(x-1)(4x^2-x+6)$ (v) $(x-1)(x-2)(x+3)$ (vi) $(x+1)(x+2)(x+10)$
(vii) $(x-2)(x-3)(2x+1)$ (viii) $(x-1)(x^2+x-4)$ (ix) $(x-1)(x+1)(x-10)$
(x) $(x-1)(x+6)(2x+1)$ (xi) $(x-2)(x^2+3x+7)$ (xii) $(x+2)(x-3)(x-4)$

பயிற்சி 3.6

1. (i) $7x^2yz^3$ (ii) x^2y (iii) $5c^3$ (iv) $7xyz^2$

2. (i) $c-d$ (ii) $x-3a$ (iii) $m+3$ (iv) $x+11$ (v) $x+2y$ (vi) $2x+1$
(vii) $x-2$ (viii) $(x-1)(x^2+1)$ (ix) $4x^2(2x+1)$ (x) $(a-1)^3(a+3)^2$

3. (i) x^2-4x+3 (ii) $x+1$ (iii) $2(x^2+1)$ (iv) x^2+4

பயிற்சி 3.7

1. x^3y^2z **2.** $12x^3y^3z$ **3.** $a^2b^2c^2$ **4.** $264a^4b^4c^4$ **5.** a^{m+3}

6. $xy(x+y)$ **7.** $6(a-1)^2(a+1)$ **8.** $10xy(x+3y)(x-3y)(x^2-3xy+9y^2)$

9. $(x+4)^2(x-3)^3(x-1)$ **10.** $420x^3(3x+y)^2(x-2y)(3x+1)$

பயிற்சி 3.8

1. (i) $(x-3)(x-2)(x+6)$ (ii) $(x^2+2x+3)(x^4+2x^2+x+2)$
(iii) $(2x^2+x-5)(x^3+8x^2+4x-21)$ (iv) $(x^3-5x-8)(2x^3-3x^2-9x+5)$

2. (i) $(x+1)(x+2)^2$ (ii) $(3x-7)^3(4x+5)$ (iii) $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$
(iv) $x(x+2)(5x+1)$ (v) $(x-2)(x-1)$ (vi) $2(x+1)(x+2)$

பயிற்சி 3.9

1. (i) $\frac{2x+3}{x-4}$ (ii) $\frac{1}{x^2-1}$ (iii) $(x-1)$ (iv) $\frac{x^2+3x+9}{x+3}$
(v) x^2-x+1 (vi) $\frac{x+2}{x^2+2x+4}$ (vii) $\frac{x-1}{x+1}$ (viii) $(x+3)$
(ix) $\frac{(x-1)}{(x+1)}$ (x) 1 (xi) $\frac{(x+1)}{(2x-1)}$ (xii) $(x-2)$

பயிற்சி 3.10

1. (i) $3x$ (ii) $\frac{x+9}{x-2}$ (iii) $\frac{1}{x+4}$ (iv) $\frac{1}{x-1}$ (v) $\frac{2x+1}{x+2}$ (vi) 1

2. (i) $\frac{x-1}{x}$ (ii) $\frac{x-6}{x-7}$ (iii) $\frac{x+1}{x-5}$ (iv) $\frac{x-5}{x-11}$ (v) 1 (vi) $\frac{3x+1}{4(3x+4)}$ (vii) $\frac{x-1}{x+1}$

பயிற்சி 3.11

1. (i) x^2+2x+4 (ii) $\frac{2}{x+1}$ (iii) $\frac{2(x+4)}{x+3}$ (iv) $\frac{2}{x-5}$

(v) $\frac{x+1}{x-2}$ (vi) $\frac{4}{x+4}$ (vii) $\frac{2}{x+1}$ (viii) 0

2. $\frac{2x^3+2x^2+5}{x^2+2}$ 3. $\frac{5x^2-7x+6}{2x-1}$ 4. 1

பயிற்சி 3.12

1. (i) $14|a^3b^4c^5|$ (ii) $17|(a-b)^2(b-c)^3|$ (iii) $|x-11|$

(iv) $|x+y|$ (v) $\frac{11}{9}\left|\frac{x^2}{y}\right|$ (vi) $\frac{8}{5}\left|\frac{(a+b)^2(x-y)^4(b-c)^3}{(x+y)^2(a-b)^3(b+c)^5}\right|$

2. (i) $|4x-3|$ (ii) $|(x+5)(x-5)(x+3)|$ (iii) $|2x-3y-5z|$

(iv) $\left|x^2+\frac{1}{x^2}\right|$ (v) $|(2x+3)(3x-2)(2x+1)|$ (vi) $|(2x-1)(x-2)(3x+1)|$

பயிற்சி 3.13

1. (i) $|x^2-2x+3|$ (ii) $|2x^2+2x+1|$ (iii) $|3x^2-x+1|$ (iv) $|4x^2-3x+2|$

2. (i) $a=-42, b=49$ (ii) $a=12, b=9$ (iii) $a=49, b=-70$ (iv) $a=9,\ b=-12$

பயிற்சி 3.14

1. $\{-6,3\}$ 2. $\left\{-\frac{4}{3},3\right\}$ 3. $\left\{-\sqrt{5},\frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$ 4. $\left\{-\frac{3}{2},5\right\}$ 5. $\left\{-\frac{4}{3},2\right\}$

6. $\left\{5,\frac{1}{5}\right\}$ 7. $\left\{-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right\}$ 8. $\left\{\frac{1}{b^2},\frac{1}{a^2}\right\}$ 9. $\left\{-\frac{5}{2},3\right\}$ 10. $\left\{7,\frac{8}{3}\right\}$

பயிற்சி 3.15

1. (i) $\{-7,1\}$ (ii) $\left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$ (iii) $\left\{-3,\frac{1}{2}\right\}$

(iv) $\left\{\frac{a-b}{2},-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}$ (v) $\{\sqrt{3},1\}$ (vi) $\{-1,3\}$

2. (i) $\{4,3\}$ (ii) $\left\{\frac{2}{5},\frac{1}{3}\right\}$ (iii) $\left\{\frac{1}{2},2\right\}$ (iv) $\left\{-\frac{2b}{3a},\frac{b}{a}\right\}$

(v) $\left\{\frac{1}{a},a\right\}$ (vi) $\left\{\frac{a+b}{6},\frac{a-b}{6}\right\}$ (vii) $\left\{\frac{(9+\sqrt{769})}{8},\frac{(9-\sqrt{769})}{8}\right\}$ (viii) $\left\{-1,\frac{b^2}{a^2}\right\}$

பயிற்சி 3.16

1. 8 அல்லது $\frac{1}{8}$ 2. 9 மற்றும் 6 3. 20 மீ, 5 மீ அல்லது 10 மீ, 10 மீ 4. $\frac{3}{2}$ மீ

5. 45 கி.மீ / மணி 6. 5 கி.மீ / மணி 7. தந்தையின் வயது = 49, மகனின் வயது = 7

8. 24 செ.மீ 9. 12 நாட்கள்

10. முதல் தொடர்வண்டியின் வேகம் = 20கி.மீ / மணி ;
இரண்டாவது தொடர்வண்டியின் வேகம் = 15கி.மீ / மணி

பயிற்சி 3.17

1. (i) மெய்யெண்கள் (ii) மெய்யெண்கள் அல்ல (iii) மெய்யெண்கள் மற்றும் சம மூலங்கள் (iv) மெய்யெண்கள் மற்றும் சம மூலங்கள் (v) மெய்யெண்கள் அல்ல (vi) மெய்யெண்கள்
2. (i) $\frac{25}{2}$ (ii) ± 3 (iii) -5 அல்லது 1 (iv) 0 அல்லது 3

பயிற்சி 3.18

1. (i) 6,5 (ii) $-\frac{r}{k}, p$ (iii) $\frac{5}{3}, 0$ (iv) $0, -\frac{25}{8}$
2. (i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (ii) $x^2 - 6x + 2 = 0$ (iii) $4x^2 - 16x + 9 = 0$
3. (i) $\frac{13}{6}$ (ii) $\pm\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{35}{18}$ **4.** $\frac{4}{3}$ **5.** $4x^2 - 29x + 25 = 0$
6. $x^2 + 3x + 2 = 0$ **7.** $x^2 - 11x + 1 = 0$
8. (i) $x^2 - 6x + 3 = 0$ (ii) $27x^2 - 18x + 1 = 0$ (iii) $3x^2 - 18x + 25 = 0$
9. $x^2 + 3x - 4 = 0$ **10.** $k = -18$ **11.** $a = \pm 24$ **12.** $p = \pm 3\sqrt{5}$

பயிற்சி 3.19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	A	A	C	D	B	C	C	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	A	A	A	D	D	D	B	C
21	22	23	24	25					
D	A	C	C	A					

4. அணிகள்

பயிற்சி 4.1

1. $\begin{pmatrix} 400 & 500 \\ 200 & 250 \\ 300 & 400 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 400 & 200 & 300 \\ 500 & 250 & 400 \end{pmatrix}$, 3×2, 2×3 **2.** $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 13 \end{pmatrix}$
3. (i) 2×3 (ii) 3×1 (iii) 3×3 (iv) 1×3 (v) 4×2
4. 1×8, 8×1, 2×4, 4×2
5. $1\times 30, 30\times 1, 2\times 15, 15\times 2, 3\times 10, 10\times 3, 5\times 6, 6\times 5$.
6. (i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ **7.** (i) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$
8. (i) 3×4 (ii) 4, 0 (iii) 2 ஆவது நிரை மற்றும் 3 ஆவது நிரல் **9.** $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

பயிற்சி 4.2

1. $x = 2,\ y = -4,\ z = -1$ **2.** $x = 4,\ y = -3$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 16 & -6 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 33 & -45 \end{pmatrix}$ **6.** $a = 3,\ b = -4$

7. $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{11}{5} & 3 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{pmatrix}$ **8.** $x = -3, -3,\ y = -1, 4$

11.

	TV	DVD	Video	CD
கடை I	55	27	20	16
கடை II	72	30	25	27
கடை III	47	33	18	22

12.

	சிறுவர்	வயதுவந்தோர்
பிற்பகல் 2 மணிக்கு முன்பு	5	5
பிற்பகல் 2 மணிக்கு பின்பு	10	10

பயிற்சி 4.3

1. (i) 4×2 (ii) வரையறுக்கப்படவில்லை (iii) 3×5 (iv) 2×2

2. (i) (6) (ii) $\begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 22 & 12 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} -40 & 64 \\ 22 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 12 & -42 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1750 \\ 1600 \\ 1650 \end{pmatrix}$ முதல் நாள், இரண்டாம் நாள், மூன்றாம் நாள் , (5000) **4.** $x = 3,\ y = 0$ **5.** $x = 2,\ y = -5$

7. $AB = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 12 & 0 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 17 & 6 \end{pmatrix},\ AB \neq BA$ **11.** $x = -3, 5$

பயிற்சி 4.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	**D**	**A**	**D**	**B**	**D**	**B**	**C**	**C**	**A**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	**D**	**D**	**B**	**C**	**B**	**A**	**C**	**B**	**D**

5. ஆயத்தொலைவு வடிவியல்

பயிற்சி 5.1

1. (i) $(-2, 1)$ (ii) $(0, 2)$ **2.** (i) $(5, -2)$ (ii) $(2, -1)$ **3.** $(-12, 8)$

4. $(2, -2)$ **6.** $(-24, -2)$ **7.** $(-2, 3)$ **8.** $(-6, -3)$ **9.** $(-1, 0), (-4, 2)$

10. $\left(-3, \frac{3}{2}\right), (-2, 3), \left(-1, \frac{9}{2}\right)$ **11.** 4 : 7 உட்புறமாக

12. 5:2 உட்புறமாக, $\left(0, \frac{17}{7}\right)$ **13.** $\frac{\sqrt{130}}{2}, \sqrt{13}, \frac{\sqrt{130}}{2}$

பயிற்சி 5.2

1. (i) 3 ச.அலகுகள் (ii) 32 ச.அலகுகள் (iii) 19 ச.அலகுகள்

2. (i) $a = -3$ (ii) $a = \frac{13}{2}$ (iii) $a = 1, 3$

3. (i) ஒரு கோடமைவன (ii) ஒரு கோடமைவன அல்ல (iii) ஒரு கோடமைவன

4. (i) $k = 1$ (ii) $k = 2$ (iii) $k = \frac{7}{3}$

5. (i) 17 ச.அலகுகள் (ii) 43 ச.அலகுகள் (iii) 60.5 ச.அலகுகள் 7. 1 ச.அலகு, 1 : 4

பயிற்சி 5.3

1. (i) 45° (ii) 60° (iii) 0° 2. (i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $\sqrt{3}$ (iii) வரையறுக்கப்படவில்லை

3. (i) 1 (ii) -2 (iii) 1 4. (i) 45° (ii) 30° (iii) $\tan\theta = \frac{b}{a}$

5. $-\frac{1}{2}$ 6. (i) 0 (ii) வரையறுக்கப்படவில்லை (iii) 1 7. $\sqrt{3}$, 0 10. $a = -1$

11. $b = 6$ 12. $-\frac{9}{10}$ 13. $\frac{11}{7}, -13, -\frac{1}{4}$ 14. $\frac{1}{12}, -\frac{4}{5}, \frac{9}{2}$

பயிற்சி 5.4

1. $y = 5$, $y = -5$ 2. $y = -2$, $x = -5$

3. (i) $3x + y - 4 = 0$ (ii) $\sqrt{3}x - y + 3 = 0$ 4. $x - 2y + 6 = 0$

5. (i) சாய்வு 1, y-வெட்டுத்துண்டு 1 (ii) சாய்வு $\frac{5}{3}$, y-வெட்டுத்துண்டு 0

(iii) சாய்வு 2, y-வெட்டுத்துண்டு $\frac{1}{2}$ (iv) சாய்வு $-\frac{2}{3}$, y-வெட்டுத்துண்டு $-\frac{2}{5}$

6. (i) $4x + y - 6 = 0$ (ii) $2x - 3y - 22 = 0$ 7. $2x - 2\sqrt{3}y + (3\sqrt{3} - 7) = 0$

8. (i) $x - 5y + 27 = 0$ (ii) $x + y + 6 = 0$ 9. $6x + 5y - 2 = 0$

11. (i) $3x + 2y - 6 = 0$ (ii) $9x - 2y + 3 = 0$ (iii) $15x - 8y - 6 = 0$

12. (i) 3, 5 (ii) -8, 16 (iii) $-\frac{4}{3}, -\frac{2}{5}$

13. $2x + 3y - 18 = 0$ 14. $2x + y - 6 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$ 15. $x - y - 8 = 0$

16. $x + 3y - 6 = 0$ 17. $2x + 3y - 12 = 0$ 18. $x + 2y - 10 = 0$, $6x + 11y - 66 = 0$

19. $x + y - 5 = 0$ 20. $3x - 2y + 4 = 0$

பயிற்சி 5.5

1. (i) $-\frac{3}{4}$ (ii) 7 (iii) $\frac{4}{5}$ 4. $a = 6$ 5. $a = 5$ 6. $p = 1,2$ 7. $h = \frac{22}{9}$

8. $3x - y - 5 = 0$ 9. $2x + y = 0$ 10. $2x + y - 5 = 0$ 11. $x + y - 2 = 0$

12. $5x + 3y + 8 = 0$ 13. $x + 3y - 7 = 0$ 14. $x - 3y + 6 = 0$ 15. $x - 4y + 20 = 0$

16. (3, 2) 17. 5 அலகுகள் 18. $x + 2y - 5 = 0$ 19. $2x + 3y - 9 = 0$

பயிற்சி 5.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	A	D	A	B	D	A	D	C	C	B
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
C	C	C	D	B	B	D	A	A	B	B	

6. வடிவியல்

பயிற்சி 6.1

1. (i) 20 செ.மீ (ii) 6 செ.மீ (iii) 1 **2.** 7.5 செ.மீ **3** (i) இல்லை (ii) ஆம்

4. 10.5 செ.மீ **6.** 12 செ.மீ, 10 செ.மீ **9.** (i) 7.5 செ.மீ (ii) 5.8 செ.மீ (iii) 4 செ.மீ

10. (i) ஆம் (ii) இல்லை **11.** 18 செ.மீ

பயிற்சி 6.2

1. (i) $x = 4$ செ.மீ, $y = 9$ செ.மீ (ii) $x = 3.6$ செ.மீ, $y = 2.4$ செ.மீ, $z = 10$ செ.மீ

(iii) $x = 8.4$ செ.மீ, $y = 2.5$ செ.மீ **2.** 3.6 மீ **3.** 1.2 மீ **4.** 140 மீ

6. 6 செ.மீ **7.** 64 செ.மீ^{2} **8.** 166.25 செ.மீ **9.** (i) $\frac{9}{64}$ (ii) $\frac{55}{64}$ **10.** 6.3 ச.கி.மீ

11. 72 செ.மீ **12.** 9 மீ **13.** (i) $\triangle XWY$, $\triangle YWZ$, $\triangle XYZ$ (ii) 4.8 மீ

பயிற்சி 6.3

1. 65° **2.** (i) 4 செ.மீ (ii) 12 செ.மீ **3.** (i) 12 செ.மீ (ii) 5 செ.மீ **6.** 30 செ.மீ

பயிற்சி 6.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	A	D	B	C	B	D	B	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	C	D	D	A	B	B	D	C

7. முக்கோணவியல்

பயிற்சி 7.1

1. (i) இல்லை (ii) இல்லை

பயிற்சி 7.2

1. 1.8மீ **2.** 30° **3.** இல்லை **4.** 174.7மீ **5.** 40 செ.மீ

6. காகம் B **7.** $5\sqrt{6}$ மீ **8.** 1912.40 மீ **9.** $30\sqrt{2}$ மீ **10.** 1.098 மீ

11. $19\sqrt{3}$ மீ **12.** ஆம் **13.** 87மீ **14.** 3 நிமிடங்கள் **15.** 3464 கி.மீ

16. 40 மீ **17.** 60 மீ ; $40\sqrt{3}$ மீ **18.** 90 மீ

பயிற்சி 7.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	**C**	**C**	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**C**	**B**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	**C**	**A**	**D**	**C**	**C**	**D**	**B**	**B**	**D**

8. அளவியல்

பயிற்சி 8.1

1. 704 செ.மீ ^{2}, 1936 செ.மீ ^{2} 2. $h = 8$ செ.மீ, 352 செ.மீ ^{2} 3. $h = 40$ செ.மீ, $d = 35$ செ.மீ
4. ₹2640 5. $r = 3.5$ செ.மீ, $h = 7$ செ.மீ 6. $h = 28$ செ.மீ
7. $C_1 : C_2 = 5:2$ 8. 1300π செ.மீ ^{2} 9. 3168 செ.மீ ^{2}
10. 550 செ.மீ ^{2}, 704 செ.மீ ^{2} 11. $h = 15\sqrt{3}$ செ.மீ, $l = 30$ செ.மீ 12. 1416 செ.மீ ^{2}
13. 23.1 மீ ^{2} 14. 10.5 செ.மீ 15. $301\frac{5}{7}$ செ.மீ ^{2} 16. 2.8 செ.மீ 17. 4158 செ.மீ ^{2}
18. $C_1 : C_2 = 9:25$, $T_1 : T_2 = 9:25$ 19. 44.1π செ.மீ ^{2}, 57.33π செ.மீ ^{2} 20. ₹246.40

பயிற்சி 8.2

1. 18480 செ.மீ ^{3} 2. 38.5 லிட்டர் 3. 4620 செ.மீ ^{3} 4. $r = 2.1$ செ.மீ
5. $V_1 : V_2 = 20:27$ 6. 10 செ.மீ 7. 4158 செ.மீ ^{3} 8. 7.04 செ.மீ ^{3}
9. 8800 செ.மீ ^{3} 10. 616 செ.மீ ^{3} 11. 5 செ.மீ 12. 1408.6 செ.மீ ^{3}
13. $314\frac{2}{7}$ செ.மீ ^{3} 14. $2\sqrt{13}$ செ.மீ 15. 8 செ.மீ 16. 2.29 கி.கி
17. $3050\frac{2}{3}$ செ.மீ ^{3} 18. 288π செ.மீ ^{2} 19. $718\frac{2}{3}$ செ.மீ ^{3} 20. 1 : 8

பயிற்சி 8.3

1. 11.88π செ.மீ ^{2} 2. 7623 செ.மீ ^{3} 3. 220 மி.மீ ^{2} 4. 1034 ச.மீ
5. 12 செ.மீ 6. 12.8 கி.மீ 7. 2 செ.மீ 8. 1 செ.மீ
9. 1386 லிட்டர் 10. 3 மணி 12 நிமிடங்கள் 11. 16 செ.மீ 12. 16 செ.மீ
13. 750 கோள வடிவ குண்டுகள் 14. 10 கூம்புகள் 15. 70 செ.மீ
16. $r = 36$ செ.மீ, $l = 12\sqrt{13}$ செ.மீ 17. 11 மீ

பயிற்சி 8.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	**C**	**A**	**A**	**B**	**C**	**A**	**B**	**D**	**C**	**C**
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
D	**D**	**B**	**D**	**B**	**C**	**B**	**D**	**A**	**D**	**C**

10. வரைபடங்கள்

பயிற்சி 10.1

2. (i) $\{-2, 2\}$ (ii) $\{-2, 5\}$ (iii) $\{5, 1\}$ (iv) $\left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$
3. $\{-1, 5\}$ 4. $\{-2, 3\}$ 5. $\{-2.5, 2\}$ 6. $\{-3, 5\}$ 7. மெய் மூலங்கள் ஏதும் இல்லை

பயிற்சி 10.2

1. 120 கி.மீ 2. (i) ₹105 (ii) 11 நோட்டுப் புத்தகங்கள்
3. (i) $y = 8$ (ii) $x = 6$ 4. (i) $k = 15$ (ii) ₹ 45 5. $y = 4$; $x = 2$ 6. 24 நாட்கள்

11. புள்ளியியல்

பயிற்சி 11.1

1. (i) 36, 0.44 (ii) 44, 0.64 **2.** 71 **3.** 3.38 கி.கி **4.** $2\sqrt{5}$, 20 **5.** 3.74

6. (i) 5.97 (ii) 4.69 **7.** 6.32 **8.** 1.107 **9.** 15.08 **10.** 36.76, 6.06

11. 416, 20.39 **12.** 54.19 **13.** 4800, 240400 **14.** 10.2, 1.99 **15.** 25

16. 20.41 **17.** 12 **18.** 5.24 **19.** 1159, 70 **20.** மாணவர் *A*

பயிற்சி 11.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	C	B	D	C	C	B	A	D
11	12	13	14	15					
D	B	C	D	B					

12. நிகழ்தகவு

பயிற்சி 12.1

1. $\frac{1}{10}$ **2.** $\frac{1}{9}$ **3.** $\frac{1}{3}$ **4.** $\frac{1}{5}$ **5.** $\frac{3}{4}$

6. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{12}{13}$ **7.** (i) $\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{1}{2}$ **8.** (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{5}$

9. (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{24}{25}$ **10.** $\frac{1}{2}$ **11.** (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{2}{3}$

12. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{17}{20}$ **13.** $\frac{1}{3}$ **14.** $\frac{1}{36}$ **15.** $\frac{1}{6}$ **16.** 12

17. (i) $\frac{22}{25}$ (ii) $\frac{24}{25}$ **18.** (i) $\frac{1}{4}$ (ii) 3 **19.** (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

பயிற்சி 12. 2

1. $\frac{4}{5}$ **2.** $\frac{3}{20}$ **3.** (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{4}{5}$ **4.** $\frac{5}{9}$ **5.** $\frac{8}{25}$

6. $\frac{5}{8}$ **7.** $\frac{4}{9}$ **8.** $\frac{9}{10}$ **9.** $\frac{3}{5}$ **10.** $\frac{4}{13}$

11. $\frac{8}{13}$ **12.** $\frac{2}{3}$ **13.** $\frac{5}{13}, \frac{4}{13}$ **14.** (i) 0.45 (ii) 0.3 **15.** $\frac{101}{105}$

பயிற்சி 12. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	D	B	A	A	B	A	A	D	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	C	C	B	B	D	D	A	A	B

பல்வகைக் கணக்குகள்

(தேர்வுக்குரியவை அல்ல)

1. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}, x \neq -1$ எனில், $f(2x) = \dfrac{3f(x)+1}{f(x)+3}$ என நிறுவுக.

2. x-ன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கும் $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர் $\left(\text{விடை : } x = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right)$

3. $\log_{10} 2,\ \log_{10}(2^x - 1)$ மற்றும் $\log_{10}(2^x + 3)$ என்பன அதே வரிசையில் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையினை அமைத்தால் x-ன் மதிப்புகளைக் காண்க? (விடை: $x = \log_5 2$)

4. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் பொதுவிகிதம் r, முதல் நான்கு உறுப்புகளின் கூடுதல் 15 மற்றும் முதல் நான்கு உறுப்புகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 85 எனில், $14r^4 - 17r^3 - 17r^2 - 17r + 14 = 0$ என நிறுவுக.

5. $\{b_n\}_1^\infty$ -ல் $n > 1$ எனும்போது $b_n^2 = b_{n-1}\, b_{n+1}$ என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $\{b_n\}_1^\infty$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும் என நிறுவுக. (விடை 1110)

6. 17, 21, $\cdots$ மற்றும் 16, 21, $\cdots$ ஆகிய இரண்டு கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளிலும் சில எண்கள் பொது உறுப்புகளாக உள்ளன. இரண்டு கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளிலும் வரும் முதல் 10 பொது எண்களின் கூடுதல் காண்க.

7. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n > 1$ எனில், எனில் மட்டுமே $\{a_n\}_1^\infty$ என்ற தொடர்வரிசை ஒரு கூட்டுத்தொடர்வரிசை என நிறுவுக.

8. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$ என நிரூபி.

9. $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$ எனக் காட்டுக.

10. ஓர் ஈரிலக்க எண்ணை, அவ்வெண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதலால் வகுக்க ஈவு 4, மீதி 3 எனக் கிடைக்கும். அதே ஈரிலக்க எண்ணை, அதன் இலக்கங்களின் பெருக்கல் பலனால் வகுக்க ஈவு 3, மீதி 5 எனக் கிடைக்கும் எனில், அந்த எண்ணைக் காண்க.

(விடை : 23)

11. 4 ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 1 கிடைக்குமாறு அமைந்த அனைத்து ஈரிலக்க எண்களின் கூடுதலைக் காண்க. (விடை : 1210)

12. சுருக்குக : $\left(\dfrac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}\right)\left(1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$ (விடை : $\dfrac{1}{2bc}$)

13. $ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண்கள் இல்லை மற்றும் $a + b + c < 0$ எனில், எண் c-யின் குறியினைக் காண்க. (குறிப்பு : $f(x) = 0$-க்கு மெய்யெண்களாலான மூலங்கள் இல்லை எனில், x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f(x)$ -ன் மதிப்புகள் அனைத்தும் ஒரே குறியினைக் கொண்டிருக்கும்) (விடை: $c < 0$)

14. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - x + 6} > 0$ என்றவாறு அமையும் x-ன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புகளைக் காண்க. (விடை $x > 1$)

15. $1 + a + a^2 + \cdots + a^x = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$ என்ற சமன்பாட்டினைத் தீர்

(விடை: $x = 15$)

16. கணக்கிடுக $\dfrac{6x_1^2x_2 - 4x_1^3 + 6x_1x_2^2 - 4x_2^3}{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2}$, இங்கு x_1 மற்றும் x_2 ஆகியன $x^2 - 5x + 2 = 0$ என்பதின் மூலங்களாகும். (விடை : $-\dfrac{320}{73}$)

17. $\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha - \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sec\alpha - 1}{\sin\alpha} = -1$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

18. ஒரு ஒட்டக மந்தையில் உள்ள ஒட்டகங்களில் நான்கில் ஒரு பங்கு ஒட்டகங்கள் காட்டில் காணப்பட்டன. மந்தையில் உள்ள ஒட்டகங்களில் மொத்த எண்ணிக்கையின் வர்க்க மூலத்தின் இரு மடங்கு எண்ணிக்கையுள்ள ஒட்டகங்கள் மலைக்குச் சென்று உள்ளன. எஞ்சியுள்ள 15 ஒட்டகங்கள் ஆற்றங்கரையில் காணப்பட்டன எனில், மந்தையில் உள்ள ஒட்டகங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. (விடை: 36)

19. ஒரு தொடர் வண்டியானது 30 கி.மீ தூரத்தை ஒரு சீரான வேகத்தில் கடந்த பிறகு அதன் இயந்திரத்தில் (Engine) சிறு கோளாறு ஏற்பட்டது. ஆகையால் வண்டியின் வேகம் அதன் சீரான வேகத்தில் $\dfrac{4}{5}$ பங்காக குறைக்கப்பட்டது. இதனால், தொடர்வண்டி அது போய்ச் சேர வேண்டிய நிலையத்தை 45 நிமிடங்கள் காலதாமதமாக சென்று அடைந்தது. இக்கோளாறு இன்னும் 18 கி.மீ தூரம் கடந்த பின் ஏற்பட்டிருக்குமானால், தொடர்வண்டி 9 நிமிடங்கள் முன்னதாக போய்ச் சேர்ந்திருக்கும். தொடர்வண்டியின் வேகம் மற்றும் தொடர்வண்டி பயணம் செய்த தூரம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(விடை: தொடர்வண்டியின் வேகம் 30 கி.மீ/மணி; பயணம் செய்த தூரம் 120 கி.மீ)

20. $\sin\theta + \sin^2\theta + \sin^3\theta = 1$ எனில், $\cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 8\cos^2\theta = 4$ என நிறுவுக.

21 $\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta = l$ மற்றும் $\sec\theta - \cos\theta = m$ எனில், $l^2m^2(l^2 + m^2 + 3) = 1$ என நிறுவுக.

22. ஒரு மலையின் அடிவாரத்திலிருந்து மலையின் சிகரம் 45° ஏற்றத்தில் உள்ளது 1000 மீ தூரம் மலை மீது 30° சாய்வுக் கோணத்தில் ஏறிய பின், மலை சிகரத்தின் ஏற்றம் 60° ஆக உள்ளது. மலையின் உயரத்தைக் காண்க. (விடை: 1.366 கி.மீ)

23. ஒரு சதுரத்தின் எதிர் கோண முனைகள் $(3, 4)$ மற்றும் $(1, -1)$ எனில், மற்றக் கோண முனைகளைக் காண்க. (விடை: $\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$ மற்றும் $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$)

24. ஒரு கூடும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் முதல் மற்றும் கடைசி உறுப்புகளின் கூடுதல் 66, இரண்டாவது மற்றும் கடைசி உறுப்பிற்கு முந்தைய உறுப்பு ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலன் 128 மற்றும் அவ்வரிசையின் எல்லா உறுப்புகளின் கூடுதல் 126 எனில், இத்தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. (விடை : 6)

25. ஒரு கோபுரத்தின் உச்சி ஆனது தரையில் A என்ற புள்ளியில் α கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. அதே புள்ளி A-யிலிருந்து b உயரத்தில் கோபுரத்தின் அடிக்கு இறக்கக்கோணம் β எனில், கோபுரத்தின் உயரம் $b\cot\beta\tan\alpha$ என நிறுவுக.

26. ஒரு செவ்வக வடிவக் குளம் 40 அடி $\times$ 20 அடி அளவுகளைக் கொண்டுள்ளது. குளத்தைச் சுற்றி சீரான அகலமும் ஆழமும் கொண்ட சுற்று பாதை அமைக்க நம்மிடம் 99 கனஅடி கான்கிரிட் உள்ளது. சுற்றுப்பாதையின் ஆழம் 3 அங்குலம் என்க. கான்கிரிட் முழுமையாக பயன்படுத்தப்பட்டால் பாதையின் அகலம் காண்க. (விடை : 3 அடி)

27. சுருக்குக: $(1+\frac{2}{2})(1+\frac{2}{3})(1+\frac{2}{4})\cdots(1+\frac{2}{n})$. (விடை : $\frac{(n+1)(n+2)}{6}$)

28. மூன்று வட்டவடிவ வட்டுகளில் இரண்டின் ஆரங்கள் r அங்குலம். மூன்றாவதின் ஆரம் $2r$ அங்குலம். ஒரு வட்டின் எல்லைக்கும் மற்றதின் எல்லைக்கும் பொதுப் புள்ளி ஒன்றே ஒன்று இருக்குமாறு மூன்று வட்டுகளும் ஒரே தளத்தில் வைக்கப்படுகின்றன. இவ்வட்டுகளின் மையப் புள்ளிகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க. (விடை : $2\sqrt{2}\, r^2 n$)

29. 8 அங்குல ஆரமுள்ள 6 வட்டவடிவ வட்டுகள் ஒவ்வொன்றும் அதன் அருகிலுள்ள மற்ற இரண்டு வட்டுகளை ஒவ்வொரு புள்ளியில் மட்டும் தொடுமாறு வட்டவடிவில் அமைக்கப்பட்டன. அதன் மையப்பகுதியில் 7வது வட்டினை 6 வட்டுகளையும் ஒவ்வொரு புள்ளியில் மட்டும் தொடுமாறு வைக்க இயலும் எனில், 6 வட்டுகளால் மையப்பகுதியில் உண்டாக்கப்பட்ட இடத்தின் பரப்பளவைக் காண்க. (விடை : $192\sqrt{3}$)

30. ஆரம் 4 செ.மீ மற்றும் உயரம் 5 செ.மீ உடைய உருளை வடிவ மரத்துண்டிலிருந்து அதே அளவு அடிப்பக்க ஆரம் மற்றும் 3 செ.மீ உயரம் கொண்ட நேர்வட்டக் கூம்பு வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது எனில், மீதி உள்ள மரத்துண்டின் மொத்த புறப்பரப்பளவு 76π செ.மீ^{2} எனக் காட்டுக.

31. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$ எனக்காட்டு .
இங்கு $n! = 1\times2\times3\times\cdots\times n$.

பார்வை நூல்கள்

1. Peter J. Eccles, Introduction to Mathematical Reasoning, Cambridge University Press 2007

2. Ann Xavier Gantert, Algebra 2 and Trigonometry, Amsco School Publications Inc., 2009

3. Boris A Kordemsky, The Moscow Puzzles: 359 Mathematical Recreations, Dover Publications

4. Imre Lakatos, Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery, January 1976

5. Krishnan Namboodiri, Richard G. Niemi, Matrix Algebra, An Introduction, Sage Publications 1984

6. Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind, Challenging Problems in Geometry, Dover Publications

7. Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind, Challenging Problems in Algebra, Dover Publications

8. James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson, College Algebra, Thomson Brooks/Cole, Jan 2010

9. Michael Sullivan, College Algebra, Pearson Publishing, January 2007

10. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html

11. V.Govorov, P.Dybov, N.Miroshin, S.Smirnova, Problems in Mathematics, G.K. Publications 2010

12. H.S.Hall, S.R. Knight, Elementary Algebra for Schools, Surjeet Publications 2007

13. H.S.Hall, S.R. Knight, Higher Algebra, A.I.T.B.S Publishers 2009

14. D.Dorokhin, Z.Plaksenko, G.Bazhora, Collection of Problems and Exercises in Mathematics, Mir Publications 1990

வினாத் தாள் வடிவமைப்பு

பாடம்: கணிதம் காலம் : **2.30** மணி

வகுப்பு : **X** மொத்த மதிப்பெண்கள் : **100**

கற்றலின் நோக்கங்களுக்கு ஏற்ப மதிப்பெண் பங்கீடு

குறிக்கோள்	சதவீதம்
அறிவுத் திறன்	19
புரிந்து கொள்ளல்	31
பயன்படுத்துதல்	23
திறன்	27
மொத்தம்	100

வினாக்களில் மதிப்பெண் பங்கீடு

வினாக்களின் விவரம்	பிரிவு - அ மிகக் குறுகிய விடை	பிரிவு - ஆ குறுகிய விடை	பிரிவு - இ பெரிய விடை	பிரிவு - ஈ மிகப் பெரிய விடை	மொத்தம்
வினாக்களின் எண்ணிக்கை	15	10	9	2	36
மதிப்பெண்	15	20	45	20	100
மதிப்பெண் (நிமிடங்களில்)	20	35	65	30	2.30 மணி நேரம்

வினாக்களின் தர அடிப்படை

அளவு	மதிப்பெண் சதவீதம்
கடினம்	12
நடுத்தரம்	28
எளியது	60

பிரிவுகளும் வாய்ப்புகளும்

பிரிவுகள்	வினா எண்		வினாக்களின் எண்ணிக்கை	விடையளிக்கப்பட வேண்டிய வினாக்கள்
	முதல்	வரை		
அ	1	15	15	15
ஆ	16	30	16 30 வது வினா 'கட்டாய வினா' இது 'இரண்டில் ஒன்று' வடிவில் இருக்கும்	10
இ	31	45	16 45 வது வினா 'கட்டாய வினா'. கட்டாய வினா 'இரண்டில் ஒன்று' வடிவில் இருக்கும்	9
ஈ	46		2 இரண்டில் ஒன்று (either or)	1
	47		2 இரண்டில் ஒன்று (either or)	1

பொருளடக்கத்திற்கு ஏற்ப மதிப்பெண் பங்கீடு

பாடப்பிரிவு எண்.	பாடப்பிரிவு	வினாக்களின் எண்ணிக்கை				மொத்த மதிப்பெண்கள்
		1 மதிப்பெண்	**2** மதிப்பெண்	**5** மதிப்பெண்	**10** மதிப்பெண்	
1	கணங்களும் சார்புகளும்	1	2	2		15
2	தொடர்களும் தொடர் வரிசைகளும்	2	1	2		14
3	இயற்கணிதம்	2	2	3		21
4	அணிகள்	1	2	1		10
5	ஆயத்தொலை வடிவியல்	2	2	2		16
6	வடிவியல்	2	1	1		9
7	முக்கோணவியல்	2	2	1		11
8	அளவியல்	1	2	2		15
9	செய்முறை வடிவியல்				2	20
10	வரைபடங்கள்				2	20
11	புள்ளியியல்	1	1	1		8
12	நிகழ்தகவு	1	1	1		8
மொத்தம்		15	16	16	4	167

எடுத்துக்காட்டுகள், பயிற்சிகள், தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள் ஆகியவற்றிற்கான மதிப்பெண் பங்கீடு

	பிரிவு அ (1 மதிப்பெண்)	பிரிவு ஆ (2 மதிப்பெண்)	பிரிவு இ (5 மதிப்பெண்)	பிரிவு ஈ (10 மதிப்பெண்)	மொத்தம்	சதவீதம்
பாடநூலில் உள்ள எடுத்துக்காட்டுகள்	---	6 (2)	6 (5)	1 (10)	52	31
பயிற்சிக் கணக்குகள்	10 (1)	8 (2)	8 (5)	3 (10)	96	58
குறிப்பிட்ட பாடப்பிரிவுகளிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள்	5 (1)	2 (2)	2 (5)	---	19	11
மொத்தம்	15 (1)	16 (2)	16 (5)	4 (10)	167	100

- அடைப்புகளுக்குள் குறிக்கப்பட்டுள்ள எண்கள், ஒவ்வொரு வினாவிற்கான மதிப்பெண்ணைக் குறிக்கும்.

பிரிவு - அ

1. 1 முதல் 15 வரை எண்ணுள்ள அனைத்து 15 வினாக்களும் கட்டாய வினாக்கள், அவை ‘உரிய விடையைத் தெரிவு செய்’ வினாக்கள் ஆகும். ஒவ்வொரு வினாவிலும், 4 மாற்று விடைகள் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும். அவற்றுள் சரியான அல்லது மிகப்பொருத்தமான விடையை தேர்ந்தெடுத்து எழுத வேண்டும். ஒவ்வொரு வினாவிற்கும் ஒரு மதிப்பெண்.
2. 15 வினாக்களில் 10 வினாக்கள் பாட நூலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ‘உரிய விடையைத் தெரிவு செய்’ வினாக்கள் ஆகும். மீதி 5 வினாக்கள் 2, 3, 5, 6 மற்றும் 7 ஆகிய பாடப் பிரிவுகளிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள் ஆகும். அவை பாட நூலிலுள்ளத் தேற்றங்கள், முடிவுகள், எடுத்துக்காட்டுகள் மற்றும் பயிற்சிக் கணக்குகள் ஆகியவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டிருக்கும்.

பிரிவு - ஆ

1. 16 முதல் 30 வரை எண்ணுள்ள வினாக்களில் 10 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும் ஒவ்வொரு வினாவிற்கும் 2 மதிப்பெண்கள்.
2. முதல் 14 வினாக்களில் ஏதேனும் 9 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும் 30 ஆவது வினா ‘கட்டாய வினா’ ஆகும். அது ‘இரண்டில் ஒன்று’ என்ற வடிவில் இருக்கும்.
3. முதல் 14 வினாக்கள் பாட நூலில் உள்ள பாடப் பிரிவுகளின் வரிசையில் இருக்கும்.
4. 14 வினாக்களில் 6 வினாக்கள் எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்தும் 8 வினாக்கள் பயிற்சிகளிலிருந்தும் கேட்கப்படும்.
5. 30 ஆவது எண் வினாவிலுள்ள இரண்டு வினாக்கள் ‘தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள்’ ஆகும். அவை 2, 3, 5 மற்றும் 8 ஆகியப்பாடப் பிரிவுகளிலுள்ள எடுத்துக்காட்டுகள், பயிற்சிக் கணக்குகள் ஆகியனவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டு அமையும். இரண்டு கணக்குகளும் வெவ்வேறு பிரிவுகளிலிருந்து கேட்கப்படும்.

பிரிவு - இ

1. 31 முதல் 45 வரை எண்ணுள்ள வினாக்களிலிருந்து 9 வினாக்களுக்கு விடையளிக்கப்பட வேண்டும். ஒவ்வொரு வினாவிற்கும் **5** மதிப்பெண்.
2. முதல்14 வினாக்களில் ஏதேனும் 8 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும் 45 ஆவது வினா ‘கட்டாய வினா’வாகும். இது ‘இரண்டில் ஒன்று’ என்ற வடிவில் இருக்கும்.
3. முதல்14 வினாக்கள் பாட நூலிலுள்ள பாடப் பிரிவுகளின் வரிசையில் அமைந்திருக்கும்.
4. முதல்14 வினாக்களில், 6 வினாக்கள் எடுத்துக் காட்டுகளிலிருந்தும், 8 வினாக்கள் பயிற்சிகளிலிருந்தும் கேட்கப்படும்.
5. 45 வது எண் வினாவிலுள்ள இரண்டு வினாக்கள் ‘தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள்’ ஆகும். அவை 2, 3, 5 மற்றும் 8 ஆகியப் பாடப்பிரிவுகளிலுள்ள எடுத்துக்காட்டுகள், பயிற்சிக் கணக்குகள் ஆகியனவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டு அமையும். இரண்டு கணக்குகளும் வெவ்வேறு பிரிவுகளிலிருந்துக் கேட்கப்படும்.
6. 30(a), 30(b), 45(a) மற்றும் 45(b) எண்களுள்ள வினாக்கள் 2, 3, 5 மற்றும் 8 ஆகிய பாடப்பிரிவுகளிலுள்ள எடுத்துக்காட்டுகள், பயிற்சிகளிலுள்ள கணக்குகள் ஆகியனவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டு தயாரிக்கப்படும். ஒவ்வொரு வினாவும் வெவ்வேறு பிரிவுகளிலிருந்து கேட்கப்பட வேண்டும் என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டுத் தயாரிக்கப்படும்.

பிரிவு - ஈ

1. இப்பிரிவில், 9 வது பாடப்பிரிவு மற்றும் 10 வது பாடப்பிரிவு ஆகியவற்றிலிருந்து ஒரு பாடப்பிரிவில் இரண்டு வினாக்கள் வீதம் கேட்கப்படும். அவை ‘இரண்டில் ஒன்று’ (Either or) என்ற வடிவில் இருக்கும். ஒவ்வொரு வினாவிற்கும் 10 மதிப்பெண்கள்.
2. இரண்டு வினாக்களுக்கும் விடையளிக்க வேண்டும்.
3. 46(a), 47(a), 46(b) மற்றும் 47(b) ஆகிய எண்ணுள்ள வினாக்களில், ஒரு வினா, பாடநூலிலுள்ள எடுத்துக் காட்டுகளிலிருந்து கேட்கப்படும்.

வினாத்தாள் வடிவமைப்பு - X ஆம் வகுப்பு

குறிக்கோள் / பாடப்புரிவு	அறிவுத்திறன்				புரிந்துகொள்ளல்				பயன்படுத்துதல்				திறன்				மொத்த மதிப்பெண்
	மிகுவி	குவி	நீவி	மிநீவி	மிகுவி	குவி	நீவி	மிநீவி	மிகுவி	குவி	நீவி	மிநீவி	மிகுவி	குவி	நீவி	மிநீவி	
கணங்களும் சார்புகளும்	1(1)	2(1)	5(1)			2(1)					5(1)						15
மெய் எண்களின் தொடர் வரிசைகளும் தொடர்களும்		2(1)	5(1)		1(1)				1(1)		5(1)						14
இயற்கணிதம்		2(1)	5(1)		1(1)				1(1)	2(1)	5(1)				5(1)		21
அணிகள்						4(2)	5(1)		1(1)								10
ஆயத்தொலை வடிவியல்		2(1)			1(1)	2(1)	5(1)		1(1)		5(1)						16
வடிவியல்					1(1)	2(1)	5(1)		1(1)								9
முக்கோணவியல்					1(1)	2(1)	5(1)		1(1)	2(1)							11
அளவியல்	1(1)					2(1)	5(1)			2(1)	5(1)						15
செய்முறை வடிவியல்																10(2)	20
வரைபடங்கள்																10(2)	20
புள்ளியியல்			5(1)			2(1)			1(1)								8
நிகழ்தகவு		2(1)					5(1)		1(1)								8
மொத்தம்	2(2)	10(5)	20(4)		5(5)	16(8)	30(6)		8(8)	6(3)	25(5)				5(1)	40(4)	167

- அடைப்புகளுக்குள் குறிக்கப்பட்டுள்ள எண் வினாக்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும்
- மற்ற எண்கள் மதிப்பெண்ணினைக் குறிக்கும்

மிகுவி – மிக குறுகிய விடை
குவி – குறுகிய விடை
நீவி – நீளமான விடை
மிநீவி – மிக நீளமான விடை