Government of Tamilnadu

حساب

MATHEMATICS - URDU MEDIUM

دسویں جماعت کے لئے

X - STANDARD

Untouchability is Inhuman and a Crime

Department of School Education

© Government of Tamil Nadu
First Edition - 2011
Revised Edition - 2015
(Published under Uniform System of School Education scheme)

Textbook Preparation

State Council of Educational Research and Training

College Road, Chennai - 600 006.

Textbook Printing

Tamil Nadu Textbook and Educational Services Corporation

College Road, Chennai - 600 006.

This book has been printed on 80 G.S.M. Maplitho Paper

Price : Rs.

Printed by Offset at :

Textbook available at
www.textbooksonline.tn.nic.in

پیش لفظ

یہ بڑی مسرت آمیز بات ہے کہ ٹمل ناڈو میں عمومی طور پر تعلیم اور خصوصی طور پر اسکول کی تعلیم میں نمایاں تبدیلی ہوئی ہے ،جس کی وجہ سے یکساں نظام تعلیم عمل میں آیا۔ تمل ناڈو میں تعلیم کی ترقی کے لئے حکومت تمل ناڈو کی جانب سے ایک سنہری موقع عطا کیا گیا ہے جس کا ہم مکمل فائدہ اٹھائیں۔

ریاضیات، جو تمام علومِ سائنس کی ملکہ ہے، اور ہمیشہ ایک دلکش موضوع بنی ہوئی ہے، ہمیشہ اپنے اندر ایک ذاتی قیمت رکھتی ہے۔ یہ سائنس، انجینئرنگ اور دوسرے اسباق میں اہم رول ادا کرتی ہے۔ اس لئے سائنس اور ٹکنالوجی کی ترقی کے لئے علم ریاضی کی ضرورت ہے اور کسی بھی فرد کو اس کے پسندیدہ میدان میں ترقی کرنے کے لئے بھی ریاضی معلومات درکار ہیں۔ اس کے علاوہ سخت کاوش و محنت سے کسی شخص کو نہ صرف ریاضیات کا گہرا علم حاصل ہوتا ہے بلکہ اس کو صحیح طور پر سوچنے سمجھنے کی صلاحیت اور الجھے ہوئے مسئلوں کا تجربہ کرنے میں مدد ملتی ہے۔

ترووّلو ور جو ٹمل زبان کے الہامی شاعر تھے، انہوں نے دو ہزار سال پہلے ریاضی تعلیم کی اہمیت کو ظاہر کرتے ہوئے کہا تھا

எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு - குறள் (392)

منظوم ترجمہ:

اک ''عدد'' ہے حساب کی بنیاد — دوسرا ''لفظ'' جس سے کہہ پائیں
نسلِ آدم جو اس زمیں پر ہے — درحقیقت یہ اس کی دو آنکھیں

(ترو کرل:392) ترجمہ: مختار بدرؔی

علم ریاضی کی صلاحیت کی بدولت ہماری زندگی میں ہمیشہ پیش آنے والے پیچیدہ مسئلوں کا حل ڈھونڈ سکتے ہیں۔ اس کے علاوہ علمِ ریاضی ایک زبردست تخلیقی قوت ہے اور یہ صرف مسئلوں کو حل کرنے کا آلۂ کار نہیں ہے۔ اس علم کے حاصل کرنے والے اس حقیقت کو جان جائیں گے اور جیسے جیسے وہ زیادہ سے زیادہ علم ریاضی حاصل کریں گے ان کو پورا اطمینان حاصل ہوگا۔

اس کے علاوہ آئندہ نسلوں کی فلاح و بہبودی کے لئے ریاضیات کی مشق کی بہت ضرورت ہے۔ اسکول کی سطح میں حاصل کئے ہوئے بنیادی ریاضی معلومات آگے چل کر ریاضی اور دوسرے سائنس کے میدانوں کی بنیاد بنتی ہیں۔ ریاضی کا بنیادی علم سیکھنے کے علاوہ یہ جاننا بھی ضروری ہے کہ ان کو مسئلوں کے حل کرنے میں کس طرح استعمال کیا جاتا ہے۔

بنیادی اصول کو اچھی طرح سمجھنا اور مسئلوں کا حل ڈھونڈنا علمِ ریاضی کے سیکھنے کے دو اہم مشتمل حصّے ہیں۔ یہ کتاب اُس رخ کا پہلا قدم ہے۔ اس سے طالبِ علم کو علم ریاضی کی بنیاد کو اخذ کرنے اور ان کے ذریعہ مسئلوں کو حل کرنے میں مدد ملے گی۔ اس حصولِ مقصد کو مدنظر رکھتے ہوئے بابوں کو فطری اور منطقی ترتیب دی گئی ہے جن میں کافی حل کردہ مثالیں شامل ہیں۔ ہر باب اس طرح سے بنایا گیا ہے جس سے طالبِ علم کو ان نظریات (concept) کو اچھی طرح سمجھنے میں کافی ضروری مشق دی گئی ہے۔ ان مسئلوں کو حل کرنے سے پہلے ہم یہ صلاح دیتے ہیں کہ اساتذہ اور طلباء دونوں ان مسئلوں میں استعمال ہونے والے ریاضی نظریات سے اچھی طرح واقفیت حاصل کرلیں۔

تاہم یہ بھی ذہن نشین کرلیں کہ علمِ ریاضی اعداد کی سائنس کے علاوہ بھی بہت کچھ ہے۔ کلاس روم میں استاد کی اہمیت بہت زیادہ ہے جس کی مدد اور رہنمائی سے علمِ ریاضی سیکھی جاتی ہے۔ بنیادی ریاضی سے اعلیٰ ریاضی حاصل کرنے کے درجہ کو عبور کرنے میں استاد ایک اہم رول ادا کرتا ہے۔ اس ضمن میں ہم یقین کرتے ہیں کہ یہ کتاب اس مقصد کو حاصل کرنے میں کارآمد ثابت ہوگی۔ اس سے انتہائی فائدہ حاصل کرنے کے لئے استاد کو ضروری طور پر دوطرفہ بات چیت سے کام لینا پڑے گا۔ یہ جدوجہد بغیر کسی شک کے کلاس روم میں طالب علم کو مدِنظر رکھتے ہوئے سرگرمیوں میں حصّہ لینے کا سبب بنیں گی۔ نیز اس کتاب کی مدد سے طالبِ علم کو علمِ ریاضی کا گہرا مطالعہ کرنے اور اپنی مہارت میں اضافہ کرنے کا موقعہ ملے گا۔ ہم پہلے ہی بتا چکے ہیں کہ ریاضی کے سیکھنے کے دو حصّے ہیں۔ ایک اس کی بنیادی اصولوں کو سیکھنا اور ان اصولوں کو مسئلوں کے حل کرنے میں استعمال کرنا۔ لیکن ان اصولوں کو سیکھنے اور مشق میں دے گئے مسئلوں کو خود سے حل کرنے اور استاد کی مدد سے اس قسم کے نئے مسئلوں کی تخلیق کرنے سے طالبِ علم کے حسابی معلومات کو استحکام حاصل ہوتا ہے۔

ریاضی کی مشق سے ہم ریاضی سیکھتے ہیں۔

اس کتاب کو مزید بہتر بنانے کے لئے ہم ماہرین تعلیم، اساتذہ اور طلباء کے مفید مشوروں اور تنقیدی تبصروں کا ہم تہہ دل سے استقبال کرتے ہیں۔

نصابی کتاب کی ٹیم

موضوع	اسباق	متوقع سیکھنے کے نتائج	تعلیمی کاروائی کا طریقہ	پیریڈ کی تعداد
I ۔ سٹ اور تفاعلات	(i) تعارف (ii) سٹ پر کاروائی عمل کی خصوصیات (iii) مثالوں اور ون نقشوں کے ذریعہ ڈی مارگن کے کلیوں کی تصدیق (iv) $n(A \cup B \cup C)$ کا ضابطہ (v) تفاعلات	• سٹ پر کارروائی عمل کے بنیادی نظریات کا اعادہ کرنا • سٹ پر کارروائی عمل کو سمجھنا۔ • متبادلت، تقسیمیت جو تین مجموعوں تک محدود ہے • سٹوں کی اتمامیت کے اصولوں کو سمجھنا۔ • ڈی مارگن کے کلیوں کو سمجھنا اور ون نقشوں سے ان کی وضاحت کرنا۔ • الفاظی مسئلوں کو ضابطہ کے ذریعہ اور ون نقشوں کے ذریعہ حل کرنا۔ • تفاعلات کی توضیح، ان کے اقسام ان کی نمائندگی کرنا آسان مثالوں کے ذریعہ تفاعلات کی اقسام کو سمجھنا	تمام مثالوں کے لئے ون کے خاکوں کا استعمال کیجئے۔ تفاعلات کی مثالیں معاشیات، علمِ طب اور سائنس سے دیجئے۔	26
II۔ حقیقی اعداد کے تواتر اور سلسلے	(i) تعارف (ii) سلسلے (iii) حسابی سلسلے (A.P) (iv) ہندسی سلسلے (G.P) (v) تواتر	• حسابی سلسلوں اور ہندسی سلسلوں کو سمجھنا اور ان کی نشاندہی کرنا • حسابی سلسلوں اور ہندسی سلسلوں کے استعمال سے n ویں رقم معلوم کرنا • حسابی سلسلوں اور ہندسی سلسلوں کے n رقموں کا حاصلِ جمع معلوم کرنا • چند محدود تواتر کا مجموعہ معلوم کرنا	نمونہ کا طریقہ استعمال کریں۔ نقاط کے نمونے کو سکھانے کے لئے استعمال کریں۔ ضابطہ کے حصول کے لئے نمونہ استعمال کریں۔ حقیقی زندگی کے موقعوں سے مثالیں پیش کریں۔ واضح کرنے والی مثالیں۔	27
III۔ الجبرا	(i) خطّی مساوات کا حل کرنا (ii) کثیر رقمیات (iii) ترکیبی تقسیم (iv) مقسوم علیہ اعظم (G.C.D) اور ذواضعافِ اقل (L.C.M) (v) ناطق عبارتیں	• دونا معلوم متغیرات کے خطّی مساوات کے متعلق تصوّر قائم کرنا ایک جوڑی، دونا معلوم خطّی مساوات کا حل اخراج کے طریقے اور ترچھی ضرب کے طریقہ سے معلوم کرنا۔ صفر اور کثیر رقمیات کے ضریب کا تعلق خصوصاً دو درجی کثیر رقمیات کے حوالہ سے سمجھنا۔ • دی ہوئی کثیر رقمی کا خارج قسمت اور بچت ترکیبی تقسیم کے طریقہ سے معلوم کرنا۔ ترکیبی تقسیم کے طریقے سے دی ہوئی کثیر رقمی کا اجزائے ضربی معلوم کرنا۔ کثیر رقمی عبارتوں کے G.C.D اور L.C.M کے فرق کو پہچاننا۔ ناطق عبارتوں کو مختصر کرنے کے قابل بنانا (آسان مسئلے)	سکھانے کے لئے نقشوں کی مدد لیں۔ ابتداء میں اعداد کے GCD اور LCM کو دوبارہ یاد دلائیں۔ کسروں پر طرزِ عمل سے موازنہ کیجئے۔	

III۔ الجبرا	(vi) جذرالمربع (vii) دودرجی مساوات	جذرالمربع کو سمجھنا۔ دودرجی مساوات کی معیاری شکل کو سمجھنا۔ دودرجی مساوات کو حل کرنا (جن کے اصل حقیقی ہیں) اجزائے ضربی کا طریقہ، مربع کو مکمل کا طریقہ اور دودرجی ضابطہ کے طریقے سے۔ دودرجی مساوات پر منحصر لفظی مسئلوں کو حل کرنے کے قابل بنانا۔ ممیّز (Discriminant) اور جذر کی نوعیّتوں کے درمیانی تعلق کو جوڑنا دئے ہوئے جذروں کی مدد سے دودرجی مساوات بنانا	اعداد پر جذالمربع کے عمل سے موازنہ کیجئے جذروں کی نوعیت کو الجبریائی اور ترسیمی طریقے سے سمجھنا	40
IV۔ میٹریس	تعارف میٹریس کے اقسام جمع اور تعریف ضرب میٹرکس کی مساوات	میٹریس کی بناوٹ اور ترتیب کو پہچاننا۔ میٹریس کے اقسام کو پہچاننا۔ دی ہوئی میٹریس کو جمع اور تفریق کرنا۔ ایک میٹرکس کو عددیہ (scalar) سے ضرب دینا اور میٹرکس کا ٹرانسپوز معلوم کرنا۔ دئے ہوئے میٹریسوں کو ضرب دینا۔ (2 × 2, 2 × 3, 3 × 2 میٹریس) دو متغیرات کی مساواتوں کا حل میٹرکس کے طریقہ سے کرنا۔	اعداد کے مستطیلی صف بندی کا استعمال۔ حقیقی زندگی کے حالات کا استعمال۔ حسابی عمل کو استعمال کرنا ہوگا۔	16
V۔ محدّدی علم ہندسہ	(i) تعارف (ii) اعادہ : دونقاط کا درمیانی فاصلہ (iii) تقسیمی ضابطہ، وسطی نقطہ کا ضابطہ، ہندسی مرکز کا ضابطہ (iv) مثلث اور چار ضلعی کا رقبہ (v) خطِ مستقیم	دونقاط کے درمیانی فاصلے کو دوبارہ یاد دلانا اور دئے ہوئے دونقطوں کے وسطی نقطہ کو معلوم کرنا تقسیمی ضابطہ کی مدد سے تقسیم کرنے کا نقطہ معلوم کرنا شاٹ کا رقبہ محسوب کرنا دونقاط کی مدد سے یا مساوات کی مدد سے میلان معلوم کرنا خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا : میلان۔ مقطوعہ کی شکل میں : میلان۔ نقطہ کی شکل میں، دو۔نقاط کی شکل میں مقطوعات کی شکل میں ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو دی ہوئی خطِ مستقیم کے (i) متوازی ہو۔ (ii) عمودی ہو۔	مثلث اور چار ضلعی کے آسان ہندسی نتائج کی تصدیق بطورِ استعمال (application) کرنا ابتدائی مرحلہ کے طور پر $y = mx + c$ کی شکل کا استعمال کریں	2

VI - علمِ ہندسہ	(i) بنیادی تناسب کا مسئلہ (ثبوت کا ساتھ) (ii) بنیادی تناسب کے مسئلہ کا برعکس (ثبوت کے ساتھ) (iii) ناصفِ زاویہ کا مسئلہ (ثبوت کے ساتھ۔صرف اندرونی صورت) (iv) ناصف زاویہ کا برعکس ثبوت کے ساتھ (صرف اندرونی صورت) (v) متشابہ مثلثیں (بغیر ثبوت کے مسئلے) (vi) فیثاغورث کا مسئلہ اور مماس-وتر کا مسئلہ (ثبوت کے بغیر)	مسئلوں کو سمجھنا اور ان کو استعمال کر کے آسان حسابات کا حل کرنا	تناسب طریقہ سے کاغذ تہہ کرنے کے طریقے، تبدیلی (Transformation) تکنیک کا استعمال باضابطہ ثبوت پیش کرنا نقشوں کو کھینچنا بتدریج منطقی ثبوت نقشوں کے ذریعہ تشریح کرنا اور بحث کرنا	20
VII - علمِ مثلث	(i) تعارف (ii) متماثلات (iii) بلندیاں اور فاصلے	علمِ مثلث کے متماثلات کو پہچاننا اور ان کو آسان مسئلوں میں استعمال کرنا۔ علمِ مثلث کی نسبتوں کو سمجھنا اور ان کے استعمال سے بلندیاں اور فاصلے محسوب کرنا۔ (دو قائمۃ الزاویہ مثلث سے زیادہ نہیں)	الجبریائی ضابطہ کے استعمال سے۔ علمِ مثلث کے متماثلات کے استعمال سے۔	21
VIII مساحت	تعارف استوانہ، مخروط، کرّہ، نصف کرّہ اور مخروط کے مخطوعہ کا سطحی رقبہ اور حجم مخلوط شکلوں کا سطحی رقبہ اور حجم غیر متبادلوں کا حجم	استوانہ، مخروط، کرّہ، نصف کرّہ اور مخروط کے مقطوعہ کا سطحی رقبہ اور مجموعوں کا دریافت کرنا مخلوط اجسام (صرف دو) کا سطحی رقبہ اور حجم دریافت کرنا چند مسئلوں کے مستقل مجموعی کو محدود رکھا گیا ہے۔	قیمتوں کے تقریبی نوعیت کی وضاحت کرنا۔ مخلوط شکلوں کو بنانے کے لئے 3D ماڈلوں کا استعمال کرو۔	24
IX - عملی علمِ ہندسہ	(i) تعارف (ii) دائرہ پر مماسوں کا بنانا (iii) مثلثوں کا بنانا (iv) مدوّر چار ضلعی کا بنانا	دائروں پر مماس کے بنانے کے قابل ہونا قاعدہ، راس کا زاویہ اور مقابل کے راس اور (i) خطِ وسطی (ii) ارتفاع کی مدد سے مثلث کے بنانے کے قابل ہونا مدوّر چار ضلعی بنانے کے قابل ہونا۔	مماس کی لمبائی کی تصدیق کے لئے الجبرائی طریقہ کا تعارف کرانا مثلث بنانے سے پہلے دائروں سے متعلق زاویوں کے خصوصیات کا یاد دلانا۔ نظریاتی علمِ ہندسہ میں سے مناسب مسئلوں کو یاد دلائیں۔	15

X- ترسیم	(i) تعارف (ii) دودرجی ترسیم (iii) چند مقصوص ترسیم	ترسیم کے ذریعہ دودرجی مساوات کو حل کرنے کے قابل ہونا۔ لفظی مسئلوں کو حل کرنے کے لئے ترسیم کو استعمال کرنے کے قابل ہونا۔	دودرجی مساوات کی ترسیم کے ذریعہ الجبریائی مفہوم کے سمجھنے کا بھی دھیان رکھا جائے۔ حقیقی زندگی کے حالات سے تعارف کرایا جائے ۔	10
XI- مقداریات	(i) مرکزی رجحان کی پیمائشوں کو دوبارہ یاد دلائیں۔ (ii) انتشار کی پیمائش (iii) تغیرات کا ضریب	گروہی اور غیر گروہی معطیات کے اوسط کو دوبارہ یاد دلانا منتشار (Dispersion) کے نظریہ کو سمجھنا اور وسعت۔ معیاری انحراف اور اختلاف (Variance) کے نظریہ کو سمجھنا۔	حقیقی زندگی کے حالات کو استعمال کیجئے۔ جیسے امتحانات، اسپورٹس وغیرہ میں کارگردگی	16
XII- امکان	(i) تعارف (ii) امکان ۔ نظریاتی پہنچ (iii) امکان میں جمع کا مسئلہ	تغیرات کے ضریب کو محسوب کرنے کے قابل ہونا۔ سریعی تجربہ، نظیری عرصہ، موقع کو سمجھنا۔ باہم اخراجی، اتمامی یقینی اور ناممکن مواقع امکان میں جمع کے مسئلہ کو سمجھنا اور اس کے استعمال سے چند آسان مسئلوں کو حل کرنا	خاکے اور سکّوں کے اچھالنے، پانسوں کے پھینکنے اور تاش کی گڈی سے ایک کارڈ کے نکالنے میں تفتیش یا تحقیق کریں	15

فہرست

1۔	سٹ اور تقاعلات	1-33
1.1	تعارف	1
1.2	سٹ	1
1.3	سٹ پر عمل	3
1.4	سٹ پر عمل کے خوصیات	5
1.5	ڈی مارگن کے کلیّے	12
1.6	سٹ کی بنیادیت	16
1.7	رشتے (تعلقات)	19
1.8	تقاعلات	20

2۔	حقیقی اعداد کے سلسلے اور تواتر	34-67
2.1	تعارف	34
2.2	تواتر	35
2.3	حسابی تواتر	38
2.4	ہندسی تواتر	43
2.5	سلسلے	49
3۔	الجبرا	68-117
3.1	تعارف	68
3.2	دو نامعلوم خطّی مساوات کا نظام	69
3.3	دو درجی کثیر رقمیات	80
3.4	ترکیبی تقسیم	82
3.5	مقسوم علیہ اعظیم اور ذوافعافِ اقل	86
3.6	ناطق عبارتیں	93
3.7	جذر المربع	97
3.8	دو درجی مساوات	101
4۔	میٹریس	118-139
4.1	تعارف	118
4.2	میٹریس کو ترتیب دینا	119
4.3	میٹریس کے اقسام	121
4.4	میٹریس پر عمل	125
4.5	میٹرکس کی جمع کی خصوصیات	128
4.6	میٹریس کی ضرب	130
4.7	میٹرکس کے ضرب کی خصوصیات	132
5۔	محددی علمِ ہندسہ	140-170
5.1	تعارف	140
5.2	تقسیمی ضابطہ	140
5.3	مثلث کا رقبہ	147
5.4	تین نقاط کی ہم خطّی	148
5.5	چار ضلعی کا رقبہ	148
5.6	خطِ مستقیم	151
5.7	خطِ مستقیم کے مساوات کی عام شکل	164

6۔	علمِ ہندسہ	171-195
6.1	تعارف	171
6.2	متشابہ مثلثیں	182
6.3	دائرے اور مماس	189
7۔	علمِ مثلث	196-218
7.1	تعارف	196
7.2	علمِ مثلث کے متحاثلات	196
7.3	بلندیاں اور فاصلے	205
8۔	مساحت	219-248
8.1	تعارف	219
8.2	سطحی رقبے	219
8.3	حجم	230
8.4	مخلوط ٹھوس اجسام	240
9۔	عملی علمِ ہندسہ	249-266
9.1	تعارف	249
9.2	دائرہ پر مما بنانا	250
9.3	مثلثوں کا بنانا	254
9.4	مدوّر چار ضلعی کا بنانا	259
10۔	ترسیم	267-278
10.1	تعارف	267
10.2	دو درجی ترسیم	267
10.3	چند مخصوص ترسیم	275
11۔	شماریات	279-298
11.1	تعارف	279
11.2	انتشار کی پیمائش	280
12۔	امکان	299-316
12.1	تعارف	299
12.2	امکان کی کلاسیکی تعریف	302
12.3	امکان میں جمع کا مسئلہ	309
☆	جوابات	317-327
☆	متفرق مسئلے	328-329
☆	کتابوں کی تاریخ	330
☆	سوال کے پرچہ کا بنیادی خاکہ (Blue print)	331-334

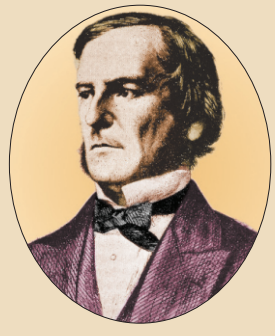
1

سٹ اور تفاعلات

SETS AND FUNCTIONS

A set is Many that allows itself to be thought of as a One.
- George Cantor

- تمہید
- سٹ
- مجموعوں پر اعمال کی خصوصیات
- ڈی مارگن کے اصول
- تفاعلات



جارج بُولے
(1815-1864)
انگلستان

یہ کہا جاتا ہے کہ منطقی علامات اور الجبریائی علامات کے درمیان قریبی تعلق ہے۔ اس نے حسابی علامات کو منطقی تعلقات کے اظہار کے لئے استعمال کیا۔ حالانکہ اس وقت کمپیوٹر نہیں تھا۔ بولے کی الجبرا ہی کمپیوٹر کی ریاضیات کی بنیاد بنی۔

چونکہ کمپیوٹر کے ریاضیات کی بنیاد بولے کی جدید منطق سے ہوئی، اسے کمپیوٹر سائنس کے میدان کا بانی کہا جاتا ہے۔

1.1۔ تمہید

ریاضی میں مجموعہ یا سٹ کا تصوّر ایک بنیادی تصوّر ہے۔ ریاضی کی ہر شاخ اور ہر حِصّہ میں سٹ تھیوری کی ترقیم اور اصطلاحات استعمال ہوتے ہیں۔ چنانچہ ہم کہہ سکتے ہیں کہ سٹ تھیوری ریاضیات کی زبان ہے۔ یہ باب جارج بولے (George Boole) (1815 - 1864) اور جارج کینٹر (George Cantor) (1845 - 1918) کی کاوشوں کا نتیجہ ہے جو 19 ویں صدی کے بعد میں وجود میں آیا۔ 20 ویں صدی میں ریاضی کے تمام ابواب کی ترقی کے دوران اس نظریہ بہت زیادہ اثر اندوز رہا۔ کئی غیر منسلک خیالات کو جوڑنے میں یہ کارآمد رہا اور اسطرح ریاضی کی ترقی آسان ہوگئی۔

نویں جماعت میں ہم نے سٹ یا مجموعہ کا تصوّر پڑھا ہے۔ چند عمل جیسے اتحاد، تقاطع، اور دوسٹوں کا فرق وغیرہ۔ یہاں ہم بعض اور تصوّرات کے متعلق سیکھیں گے جو مجموعے سے متعلق ہیں اور ایک دوسرا اہم تصوّر ریاضی میں تفاعلات (functions) سے متعلق ہے۔ پہلے ہم چند مثالوں کی مدد سے ان بنیادی تصوّرات کا اِعادہ کریں گے۔ ہم تمام مثبت سالم اعداد کو N سے اور تمام حقیقی اعداد کو R سے تعبیر کرتے ہیں۔

1.2۔ سٹ یا مجموعہ Sets

تعریف

خوب واضح اشیاء کا مجموعہ ایک سٹ کہلاتا ہے۔
سٹ کے اشیاء اُس سٹ کے عناصر بھی کہلاتے ہیں۔

یہاں "خوب واضح" سے مُراد ہے کہ ایک شئے مجموعہ سے تعلق رکھتی ہے یا نہیں اسکا فیصلہ بغیر کسی اُلجھن کے اچھی طرح واضح ہو۔

مثلاً "چنئی میں تمام اونچے آدمیوں کا مجموعہ" ایک سٹ نہیں ہے کیونکہ یہاں جو فیصلہ کا اصول "اونچے آدمی" اچھی طرح واضح نہیں ہے چنانچہ یہ ایک سٹ کو واضح نہیں کرتا ہے۔

ترقیم (Notation)

عام طور پر ہم ایک سٹ کو انگریزی کے حروف جلی (Capital letter) مثلاً A ، B, X وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔ سٹ کے ہر ایک عنصر کو حروف خفی (small letters) x ، y وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔ $x \in Y$ لکھتے ہیں تو اسکا مطلب ہے x مجموعہ Y کا ایک عنصر ہے۔ $t \notin Y$ لکھتے ہیں تو مطلب ہے کہ t مجموعہ Y کا عنصر نہیں ہے۔

مثالیں : (Examples)

(i) ٹمل ناڈو میں تمام ہائی اسکول کے طلباء کا سٹ

(ii) ٹمل ناڈو میں ہائی اسکول یا کالج کے تمام طلباء کا سٹ

(iii) تمام مثبت جفت سالم اعداد کا مجموعہ یا سٹ

(iv) تمام سالم اعداد کا سٹ جنکا مربع منفی ہے

(v) چاند پر جو لوگ پہنچے تھے ان تمام کا مجموعہ

فرض کرو کہ A ، B ، C ، D اور E بالترتیب (i)،(ii)،(iii)،(iv)،(v) میں واضح سٹ کو ظاہر کرتے ہیں۔ غور کریں کہ کسی بھی صحیح سالم عدد کا مربع ایک سالم صحیح عدد ہے جو صفر یا مثبت ہوتا ہے۔ اسلئے کوئی صحیح عدد ایسا نہیں ہے جسکا مربع منفی ہوتا ہے۔ چنانچہ سٹ D میں کوئی بھی عنصر نہیں ہے۔ اسطرح کے مجموعے کو خالی مجموعہ کہتے ہیں۔ ہم **خالی مجموعہ** یا سٹ کو ϕ سے ظاہر کرتے ہیں۔

تعریف

(i) ایک مجموعے کو **محدود مجموعہ** کہا جاتا ہے اگر وہ صرف محدود عناصر رکھتا ہو۔

(ii) ایک مجموعہ جو محدود نہیں ہے "**لامحدود مجموعہ**" کہلاتا ہے۔

غور کرو کہ اوپر دیا گیا سٹ A محدود سٹ ہے جبکہ سٹ C لامحدود سٹ ہے۔ غور کرو کہ خالی سٹ میں کوئی بھی عنصر نہیں ہے۔ یعنی خالی سٹ میں عناصر کی تعداد صفر ہے۔ لہٰذا خالی سٹ بھی ایک محدود سٹ ہے۔

تعریف

(i) اگر مجموعہ X محدود ہو تو ہم X کی **بنیادیت (Cardinality)** یا اصلیت کی تعریف یوں کرتے ہیں "X میں عناصر کی تعداد ہے"۔ سٹ X کے بنیادی عدد کو $n(X)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

(ii) اگر ایک سٹ X لامحدود ہے تو ہم اس کی بنیادیت کو ∞ نشان سے تعبیر کرتے ہیں۔

اب اوپر دی گئی مثالوں میں A ، B سٹوں کو دیکھئے۔ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ A ہر کا ایک عنصر B کا بھی عنصر ہے۔ ایسی حالتوں میں ہم کہتے ہیں B کا تحتی سٹ A ہے۔

ہم IX ویں کلاس میں سیکھے ہوئے چند بیانات (definition) کا اعادہ کریں گے۔

تحتی سٹ : (Subset) فرض کرو کہ X ، Y دو سٹ ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ Y کا **تحتی مجموعہ** X ہے اگر X کا ہر عنصر Y کا بھی عنصر ہو۔ یعنی X ، Y کا تحتی سٹ ہے اگر $z \in X$ کا مفہوم $z \in Y$

اگر X ، Y کا تحتی سٹ ہو تو اسکو $X \subseteq Y$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہ صاف ظاہر ہے کہ ہر ایک سٹ خود اپنے سٹ کا تحتی سٹ ہے۔

مجموعوں کی مساویت : (Set equality) دو مجموعے X ، Y مساوی کہلاتے ہیں اگر دونوں ٹھیک طور پر مساوی عناصر رکھتے ہوں۔
ایسی حالت میں ہم اسکو $X = Y$ لکھتے ہیں۔ یعنی $X = Y$ اگر صرف اور صرف $Y \subseteq X$ اور $X \subseteq Y$ ہو۔

معادل سٹ : (Equivalent sets) X, Y دو محدود سٹوں کو معادل سٹ بھی کہتے ہیں اگر $n(X) = n(Y)$ ہے۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ $P = \{x/x^2-x-6=0\}$ اور $Q = \{3,-2\}$ ۔ یہ آسانی سے دیکھا جاتا ہے کہ دونوں P, Q مساوی عناصر رکھتے ہیں اور اسلئے $P = Q$ اگر $F = \{3,2\}$ ہو تو F, Q معادل سٹ ہیں مگر $Q \neq F$

قوتی سٹ : (Power set) A دیا گیا مجموعہ ہے۔ فرض کرو کہ $P(A)$ ، A کے تمام تختی سٹوں کا ذخیرہ ہے
$P(A)$ کو A کا **قوتی سٹ** کہا جاتا ہے۔ اگر $n(A)=m$ اور ہو تو $P(A)$ میں عناصر کی تعداد کو $n[P(A)]=2^m$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
مثال کے طور پر اگر $A = \{a, b, c\}$ ہو تو
$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\} \{c\}. \{a, b\}, \{b,c\}, \{c, a\}, \{a, b,c\}\}$ اور $n[P(A)]=8$

اب دو سٹ دیئے گئے ہیں۔ ہم کس طرح دیئے گئے سٹوں کے استعمال سے نئے سٹ بنا سکتے ہیں ؟

ایک امکان یہ ہے کہ دونوں سٹوں کے تمام عناصر مِلا کر ایک نیا سٹ بنا سکتے ہیں۔ دوسرا امکان یہ ہے کہ دونوں سٹوں سے صرف مشترک عناصر لے کر ایک سٹ بنا سکتے ہیں۔ نیز ہم ایک ایسا سٹ بنا سکتے ہیں جس میں ایک سٹ کے عناصر ایسے ہوں جو دوسرے سٹ میں نہ ہوں۔
اِنکی مختصر طور پر تشکیل ذیل کے بیانات میں دی گئی ہے۔ ہم نے ہر ایک تعریف کی وضاحت کیلئے وِن کے خاکوں کو شامل کیا ہے۔

1.3 سٹوں پر عمل : (Operations on Sets)

فرض کرو کہ X، Y دو سٹ ہیں۔ ہم ذیل میں نئے سٹوں کی تعریف یوں کرتے ہیں۔

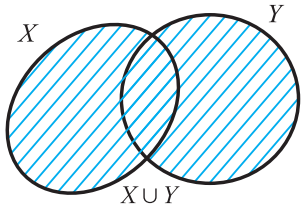


Fig. 1.1

(i) اتحاد (Union) $X \cup Y = \{z/z \in X \text{ or } z \in Y\}$,
("X اتحاد Y" پڑھتے ہیں)
(غور کرو کہ $X \cup Y$ میں X کے تمام عناصر اور Y کے تمام عناصر شامل ہیں اور خاکہ 1.1 اسکی وضاحت کرتا ہے) $X \subseteq X \cup Y$ اور $Y \subseteq X \cup Y$ دونوں واضح ہیں۔

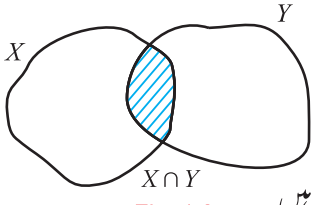


Fig. 1.2

(ii) تقاطع (Intersection) $X \cap Y = \{z/z \in X \text{ or } z \in Y\}$,
("X تقاطع Y" پڑھتے ہیں)
(غور کرو کہ $X \cap Y$ میں صرف وہ عناصر ہیں جو X اور Y دونوں کے ہیں اور خاکہ 1.2 اسکی وضاحت کرتا ہے) $X \cap Y \subseteq X$ اور $X \cap Y \subseteq Y$ دونوں واضح ہیں۔

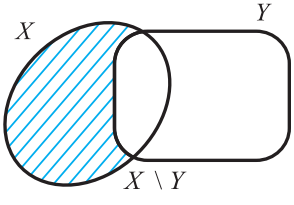


Fig. 1.3

(iii) سٹوں کا فرق (Set difference) $X / Y = \{z/z \in X \text{ or } z \notin Y\}$,
("X فرق Y" پڑھتے ہیں)
(غور کرو کہ $X \setminus Y$ میں X کے ایسے عناصر ہیں جو Y نہیں ہیں اور خاکہ 1.3 اسکی وضاحت کرتا ہے۔ نیز $A \setminus B$ کو $A - B$ لکھتے ہیں۔ ہم یہاں $A \setminus B$ استعمال کر سکتے ہیں جو ترقیم وسیع طور پر ریاضی میں استعمال کی گئی ہے)

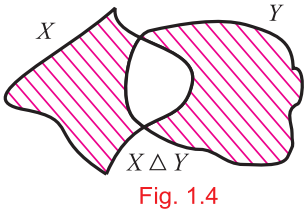


Fig. 1.4

(iv) تشاکل فرق (Symmetric difference) $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$
("X تشاکل ہے Y" پڑھتے ہیں)
غور کرو کہ $X \Delta Y$ میں $X \cup Y$ کے تمام عناصر ہیں جو $X \cap Y$ میں نہیں ہیں۔

(v) متمّم سٹ : (Complement Sets) اگر $X \subseteq U$ جہاں U ہمہ گیر سٹ ہے

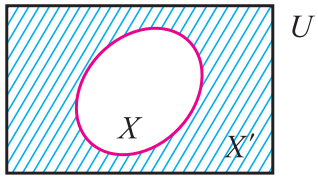


Fig. 1.5

تو U \ X کو X کا متمّم U کے تحت کہتے ہیں۔

اگر ماتحت ہمہ گیر مجموعہ ثابت یا غیر تغیّر پذیر ہو تو ہم U \ X کو X' سے ظاہر کرتے ہیں اور اسکو X کا متمّم کہتے ہیں۔

(vi) غیر منسلک یا جُداست (Disjoint Sets)

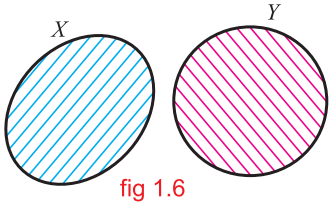


fig 1.6

دو سٹ X اور Y غیر منسلک یا جُدا کہلاتے ہیں اگر ان میں کوئی بھی مشترک عنصر نہ ہو۔

یعنی اگر $X \cap Y = \phi$ ہو تو X اور Y جُدا کہلاتے ہیں۔

صاف طور پر n(AUB)=n(A)+n(B) ہے۔ اگر A اور B جدا محدود مجموعے ہیں۔

برائے ذہن نشینی

عام طور پر ون نقشوں کو ظاہر کرنے کے لئے دائرے استعمال کئے جاتے ہیں۔ جب کہ کوئی بھی بند منحنی کو ون نقشہ میں ایک سٹ کے طور پر ظاہر کر سکتے ہیں۔ ایک سٹ کے عناصر کو لکھتے وقت، ہم عناصر کو دہرانے نہیں دیتے۔

اب ہم یہاں چند مثالیں دیکھیں گے۔

فرض کرو کہ $A = \{x \mid x$ ہے 12 سے کم مثبت سالم عدد$\}$ $B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 12, 15\}$

اور $C = \{-2, -1, 0, 1, 3, 5, 7\}$ اب ہم مندرجۂ ذیل دریافت کرتے ہیں۔

(i) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ or $x \in B\}$

$= \{x \mid x$ ہے x مثبت سالم عدد 12 سے کم یا $x = 12$ یا $15\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15\}$

(ii) $C \cap B = \{y \mid y \in C$ اور $y \in B\} = \{1, 7\}$.

(iii) $A \setminus C = \{x \mid x \in A$ مگر $x \notin C\} = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

(iv) $A \triangle C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$

$\{2,4,6,8,9,10,11\} \cup \{-2,-1,0\} = \{-2,-1,0,2,4,6,8,9,10,11\}$

(v) فرض کرو کہ $U = \{x \mid x$ ایک سالم عدد ہے$\}$ ایک ہمہ گیر مجموعہ ہے۔

غور کرو کہ 0 نا تو مثبت ہے اور نہ منفی اسلئے $0 \notin A$

اب $A' = U \setminus A = \{x \mid x$ ایک سالم عدد ہے مگر A میں نہیں ہونا چاہئے$\}$

$= \{x \mid x$ ہے یا منفی سالم عدد ہے یا تو 0 ہے یا بڑا مثبت سالم عدد 12 کے مساوی$\}$

$= \{\cdots -4, -3, -2, -1, 0\} \cup \{12, 13, 14, 15, \ldots\}$

$= \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 12, 13, 14, 15, \cdots\}$.

ہم یہاں چند کارآمد نتیجوں کی فہرست نکالتے ہیں۔

فرض کرو کہ U ایک ہمہ گیر مجموعہ ہے اور U کے تحتی مجموعے A اور B ہیں تو مندرجہ ذیل لاگو ہوتا ہے۔

(i) $A \setminus B = A \cap B'$ (ii) $B \setminus A = B \cap A'$

(iii) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$ (iv) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

(v) $(A \setminus B) \cap B = \phi$ (vi) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1.4 مجموعوں کے عمل کی خصوصیات Properties of Set operations

مجموعوں کے عمل کی چند خصوصیات ہم بیان کرتے ہیں۔کوئی تین مجموعے A ، B اور C کیلئے لاگو ہوتا ہے۔

(i) متبادلتی خاصیت (Commutative property)

(a) $A \cup B = B \cup A$ (سٹوں کا اتحاد متبادلہ ہے)

(b) $A \cap B = B \cap A$ (سٹوں کا تقاطع متبادلہ ہے)

(ii) مربوطی خصوصیات (Assosiative property)

(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (سٹوں کا اتحاد مربوطی ہے)

(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (سٹوں کا تقاطع مربوطی ہے)

(iii) تقسیمی خاصیت (Distributive property)

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (تقاطع، اتحاد پر تقسیمی ہے)

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (اتحاد، تقاطع پر تقسیمی ہے)

اوپر کی خصوصیات کو مثالوں سے تصدیق کرنے کے بجائے یہ بہتر ہے کہ انکے ریاضی ثبوت دیئے جائیں۔یہ اس کتاب کی دسترس سے باہر ہے۔کسی طرح ریاضی کے سخت گیر ثبوت کے ساتھ سمجھانے کے لئے اسکا ثبوت دیتے ہیں۔

(i) اتحاد میں متبادلت کی خاصیت : (Commutative property of Union)

اس حصّے میں ہم کوئی دوسٹ A اور B کیلئے $A \cup B$ اور $B \cup A$ مساوی ہیں ثابت کرنا چاہتے ہیں۔ہمارے سٹ کے مساویت کے ضابطے سے ظاہر ہوتا ہے کہ "دوسٹ مساوی ہیں اگر وہ صرف مساوی عناصر رکھتے ہیں۔"

پہلے ہم دِکھائیں گے کہ $A \cup B$ کا ہر عنصر $B \cup A$ کا عنصر بھی ہے۔لہٰذا فرض کرو کہ $Z \in (A \cup B)$ ایک آزاد عنصر ہے تو A اور B کے اتحاد کے ضابطے سے ہمیں $Z \in A$ یا $Z \in B$ حاصل ہوتا ہے یعنی ہر ایک

$z \in A \cup B \implies z \in A$ or $z \in B$ کیلئے

$\implies z \in B$ or $z \in A$

$\implies z \in B \cup A$ کے ضابطے کے مطابق $B \cup A.$ (1)

چونکہ (1) ہر ایک $Z \in (A \cup B)$ کیلئے درست ہے اوپر کے خُلاصے سے ظاہر ہے کہ $A \cup B$ کا ہر عنصر $B \cup A$ کا بھی عنصر ہے۔لہٰذا تختی سٹ کے ضابطے سے ہمیں $A \cup B \subseteq B \cup A$ حاصل ہوتا ہے۔

پھر ہم ایک اور خودمختار (آزاد) عنصر $y \in (B \cup A)$ پر غور کریں اور دِکھاتے ہیں کہ یہ y بھی $A \cup B$ کا ایک عنصر ہے۔

$y \in B \cup A \implies y \in B$ or $y \in A$ ہر ایک کے لئے

$\implies y \in A$ or $y \in B$

$\implies y \in A \cup B$ کے ضابطے کے مطابق $A \cup B.$ (2)

چونکہ (2) ہر ایک $y \in B \cup A$ کیلئے درست ہے۔اوپر کی وضاحت سے ظاہر ہے کہ $B \cup A$ کا ہر ایک عنصر $A \cup B$ کا بھی عنصر ہے۔لہٰذا تختی مجموعوں کے ضابطے سے ہمیں $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$ حاصِل ہوتا ہے۔

اسلئے ہم نے بتایا کہ $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$ اور $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$ یہ اُسی وقت ہوسکتا ہے جبکہ $(A \cup B) = (B \cup A)$ ۔ٹھیک اسی طریقے سے اوپر کی فہرست میں دی گئی خصوصیات کو ثابت کرنے کے لئے اوپر دئے گئے مرحلوں پر عمل کرنا چاہئے۔چنانچہ ہم انہیں یہاں ثابت نہیں کریں گے۔

ریاضی میں ثبوت سے متعلق

ریاضی میں ایک بیان کو **درست بیان** کہا جاتا ہے جب کہ وہ ہمیشہ درست ہو۔ اگر ایک بیان کم از کم کسی ایک مثال میں درست نہ ہو تو اس بیان کو **غلط بیان** کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر، چند بیانات پر غور کریں۔

(i) کوئی بھی مثبت طاق سالم عدد ایک عددِ اولی (prime number) ہے۔ (ii) ایک مثلث کے تمام زاویوں کا حاصل جمع $180°$ ہے

(iii) ہر ایک مفرد عدد ایک طاق سالم عدد ہے۔ (iv) A اور B کوئی دو (مجموعہ) سٹوں کیلئے $A\backslash B = B\backslash A$

اب بیان (i) غلط ہے۔ باوجود یہ کہ کئی زیادہ طاق مثبت سالم اعداد مفرد ہیں، کیونکہ سالم اعداد جیسے 9، 15، 21، 45 وغیرہ مثبت اور طاق ہیں مگر مفرد نہیں۔

بیان (ii) درست بیان ہے کیونکہ مثلث کسی بھی طرح کا ہو، اس کے زاویوں کا حاصل جمع $180°$ ہے۔

بیان (iii) غلط ہے۔ اسلئے کہ 2 ایک مفرد عدد ہے مگر یہ ایک جفت سالم عدد ہے۔ درحقیقت بیان (iii) سوائے 2 کے ہر ایک مفرد کیلئے درست ہے۔ اسلئے اگر ہم ایک بیان کو ثابت کرنا چاہتے ہیں تو ہمیں یہ ثابت کرنا چاہئے کہ یہ تمام مثالوں کیلئے یا موقعوں کیلئے درست ہے۔ اگر ہم کسی بیان کو غیر ثابت کرنا چاہتے ہیں تو یہ کافی ہے کہ ایک مثال دیں جہاں یہ غلط ہے۔

بیان (iv) غلط ہے۔ چلئے ہم اس بیان کی جانچ کریں۔ بنیادی طور پر جب ہم $A\backslash B$ بناتے ہیں تو ہم A سے B کے تمام عناصر کو خارج کر دیتے ہیں۔ اسی طرح $B\backslash A$ کیلئے بھی۔ چنانچہ اسکا بہت زیادہ امکان ہے کہ اوپر کا بیان غلط ہے۔ دراصل ہم ایک صورت لیتے ہیں جہاں $A = \{2, 5, 8\}$ اور $B = \{5, 7, -1\}$۔ اس صورت میں، $A\backslash B = \{2, 8\}$ اور $B\backslash A = \{7, -1\}$ ہمیں $A\backslash B \neq B\backslash A$ حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ (iv) میں دیا گیا بیان غلط ہے۔

مثال 1.1

نیچے دئے گئے مجموعوں کیلئے تصدیق کیجئے کہ (i) سٹوں کا اتحاد متبادلت پذیر ہے۔ وِن نقشے سے بھی تصدیق کیجئے۔

(ii) سٹوں کا تقاطع متبادلت پذیر ہے۔ وِن نقشے سے بھی تصدیق کیجئے۔

$A = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$ اور $B = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$

حل : (i) اب $A \cup B = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\} \cup \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$

$= \{-10, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ (1)

نیز $B \cup A = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\} \cup \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$

$= \{-10, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ (2)

اس طرح (1) اور (2) سے ہم نے ثابت کیا ہے $(A \cup B) = (B \cup A)$

وِن نقشوں سے

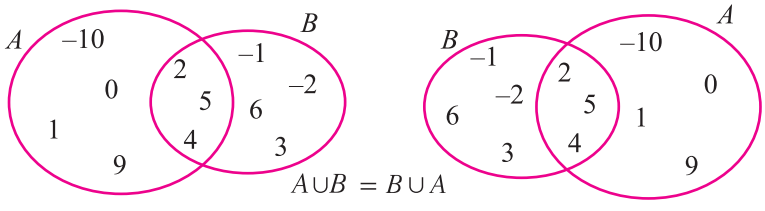


Fig. 1.7

چنانچہ ثابت ہوا کہ مجموعوں کا اتحاد متبادلت پذیر ہے۔

(ii) آیئے ہم اس بات کی تصدیق کریں کہ تقاطع متبادلہ ہے۔

اب $A \cap B = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\} \cap \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$

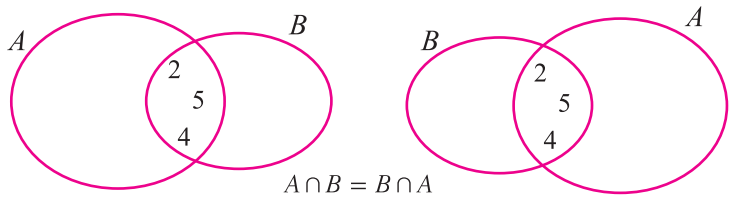
$= \{2, 4, 5\}$. (1)

نیز $B \cap A = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\} \cap \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$

$= \{2, 4, 5\}$. (2)

(1) اور (2) سے ہمیں دیئے گئے دو مجموعوں A اور B کیلئے $(A \cap B) = (B \cap A)$ حاصل ہوتا ہے۔

وِن نقشوں کے ذریعے



$A \cap B = B \cap A$

Fig. 1.8

چنانچہ اسکی تصدیق ہوگئی۔

مثال 1.2

دیا گیا ہے کہ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ $C = \{5, 6, 7, 8\}$

ثابت کرو کہ کہ (i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. (ii) مزید وِن نقشوں کے استعمال سے تصدیق کیجئے۔

حل :

(i) اب $B \cup C = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\therefore A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (1)

اب $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore (A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (2)

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(ii) وِن نقشوں کے استعمال سے

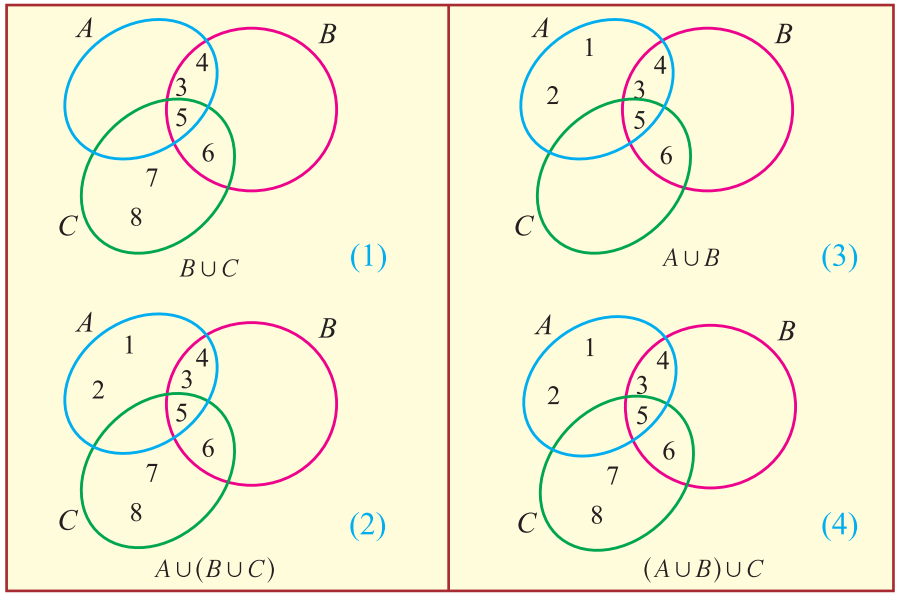


Fig. 1.9

چنانچہ (2) اور (4) سے ہم نے تصدیق کیا کہ مجموعوں کا اتحاد مربوطی ہے۔

مثال 1.3

فرض کریں $A = \{a, b, c, d\}$ ، $B = \{a, c, e\}$ اور $C = \{a, e\}$ تصدیق کیجئے کہ (i) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(ii) وِن کے خاکوں سے بھی تصدیق کیجئے۔

حل : ہمیں دیا گیا ہے $A = \{a, b, c, d\}$ ، $B = \{a, c, e\}$ اور $C = \{a, e\}$

اور ہمیں یہ معلوم کرنے کی ضرورت ہے $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ اسلئے ہم پہلے $A \cap (B.\cap C)$ پر غور کریں۔

پہلے ہم دریافت کریں گے $B \cap C = \{a,c,e\} \cap \{a,e\} = \{a,e\}$

چنانچہ $A \cap (B \cap C) = \{a,b,c,d\} \cap \{a,e\} = \{a\}.$ (1)

$A \cap B = \{a,b,c,d.\} \cap \{a,c,e\} = \{a, c\}$

چنانچہ $(A \cap B) \cap C = \{a,c\} \cap \{a,e\} = \{a\}$ (2) اب ہم دریافت کریں گے

اب (1) اور (2) سے مطلوبہ نتیجہ فراہم کرتے ہیں

وِن کے خاکوں سے استعمال سے

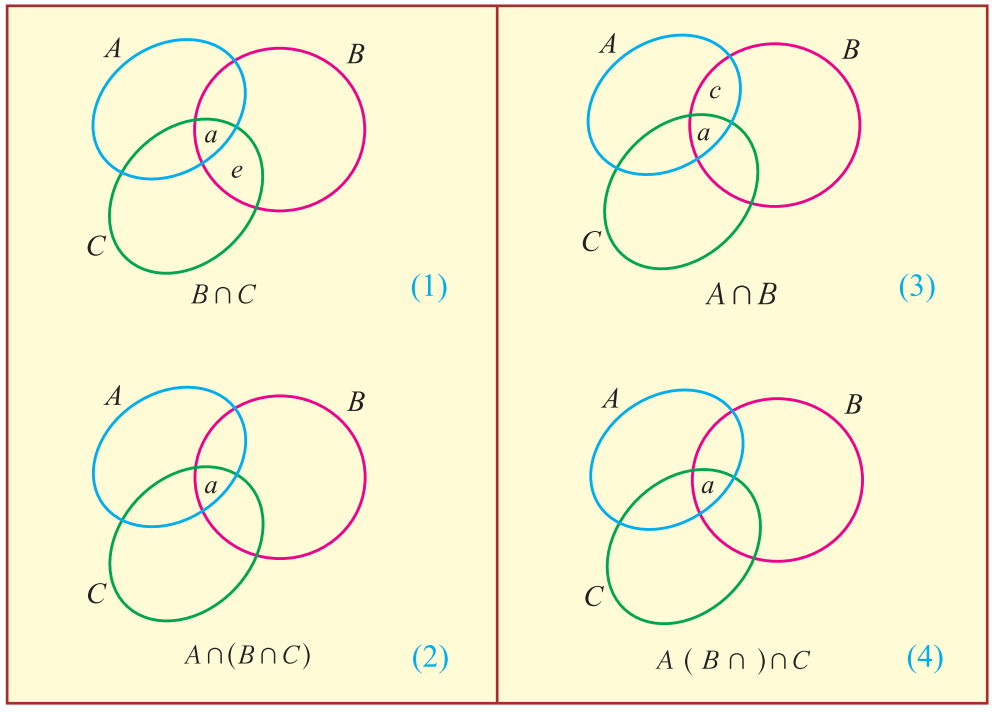


Fig. 1.10

(2) اور (4) سے تصدیق ہوا کہ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ہے۔

مثال 1.4

دیا گیا ہے $A = \{a, b, c, d, e\}$ ، $B = \{a, e, i, o, u\}$ اور $C = \{c, d, e, u\}$

دِکھاؤ کہ $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$ مزید وِن کے خاکوں کے استعمال سے تصدیق کیجئے۔

حل : (i) آیئے پہلے ہم $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ دریافت کریں

$$(B \setminus C) = \{a,e,i,o,u\} \setminus \{c,d,e,u\} = \{a,i,o\}$$

$$A \setminus (B \setminus C) = \{a,b,c,d,e\} \setminus \{a,i,o\} = \{b,c,d,e\}. \qquad (1)$$

پھر ہم $(A \setminus B) \setminus C$ دریافت کرتے ہیں۔

$$A \setminus B = \{a,b,c,d,e\} \setminus \{a,e,i,o,u\} = \{b,c,d\}$$

چنانچہ $(A \setminus B) \setminus C = \{b,c,d\} \setminus \{c,d,e\} = \{b\}. \qquad (2)$

(1) اور (2) سے ہم دیکھتے ہیں کہ $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$

چنانچہ سٹوں کا فرق مربوطی نہیں ہے۔

(ii) ون کے خاکوں کی مدد سے

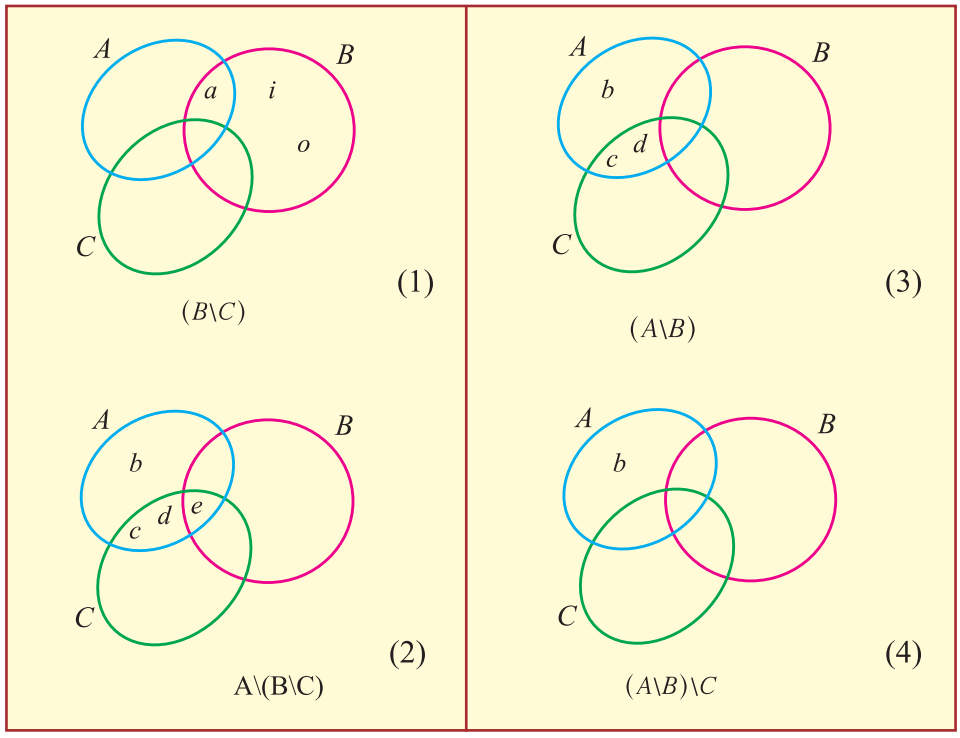


Fig. 1.11

(2) اور (4) سے تصدیق ہوتا ہے کہ $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$.

برائے ذہن نشینی

تاہم اگر مجموعہ A، B اور C باہم غیر منسلک ہیں تو $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ ہے۔ اِسکو ثابت کرنا بہت آسان ہے۔ آیئے ہم اسکو ثابت کرتے ہیں۔ چونکہ B اور C غیر منسلک یا جُدا ہیں ہمیں $B \setminus C = B$ حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ A، B غیر منسلک ہیں ہمیں $(A \setminus B) = A$ حاصل ہوتا ہے۔ اسطرح ہمیں $A \setminus (B \setminus C) = A$ حاصِل ہوتا ہے۔

مزید $A \setminus B = A$ اور A، C جُدا ہیں اسلئے ہمیں $A \setminus C = A$ حاصِل ہوتا ہے۔ چنانچہ $(A \setminus B) \setminus C = A$ اسلئے ہمیں $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ مطلوبہ سٹ حاصِل ہوتا ہے۔ اسطرح سٹوں کے لئے جو باہم غیر منسلک ہیں سٹوں کا فرق مربوطی ہے

مثال 1.5 فرض کرو کہ $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, -2, 3, 4, 5, 6\}$ $C = \{2, 4, 6, 7\}$

(i) بتاؤ کہ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) وِن نقشوں سے تصدیق کیجئے۔

حل : پہلے ہم $A \cup (B \cap C)$ دریافت کرتے ہیں۔

$$B \cap C = \{1, -2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6, 7\} = \{4, 6\};$$

فرض کرو کہ $A \cup (B \cap C) = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{4, 6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}.$ (1)

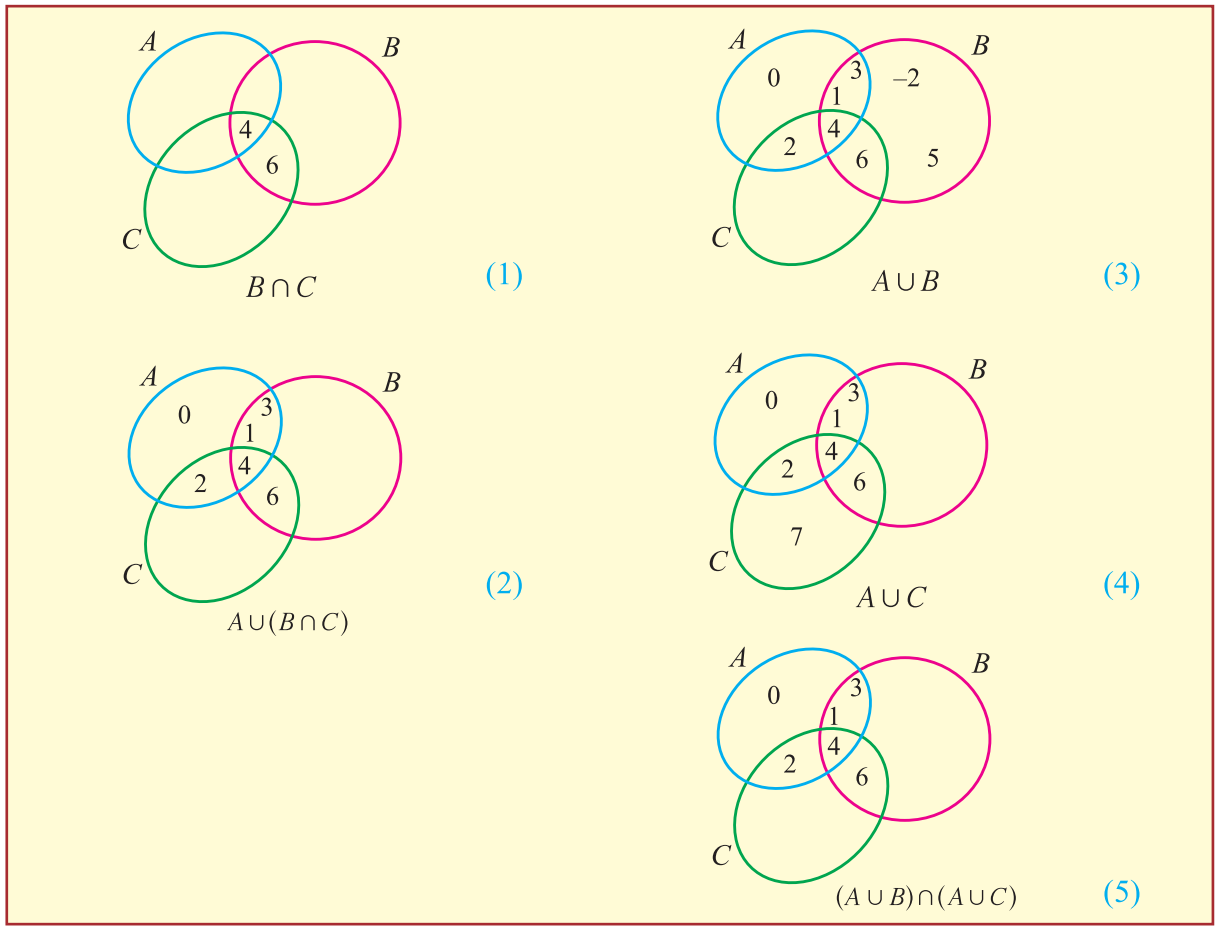
$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{1, -2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$= \{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

پھر فرض کرو $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 7\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7\}$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7\}$$
$$= \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}. \quad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) وِن نقشوں کے استعمال سے



(2) اور (5) سے تصدیق ہوتا ہے کہ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Fig. 1.12

مثال 1.6 $A = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x \mid x < 5, x \in \mathbb{N}\}$

اور $C = \{-5,-3,-1,0,1,3\}$ معلوم کرو کہ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

حل :

پہلے غور کرو کہ سٹ A میں تمام حقیقی اعداد (صرف سالم اعداد نہیں) جو 3– سے بڑے یا مساوی ہیں اور 4 سے چھوٹے ہیں۔

دوسری جانب سٹ B میں تمام سالم اعداد ہیں۔ جو 5 سے چھوٹے ہیں۔ اسلئے

$A = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\}$ یعنی A میں 3– سے 4 تک تمام حقیقی اعداد ہیں مگر 4 اسمیں شامل نہیں ہے۔ اور

$B = \{x \mid x < 5, x \in \mathbb{N}\} = \{1,2,3,4\}$ اب ہم دریافت کرتے ہیں

$$B \cup C = \{1,2,3,4\} \cup \{-5,-3,-1,0,1,3\}$$

$$= \{1,2,3,4,-5,-3,-1,0\}$$ اسطرح

$$A \cap (B \cup C) = A \cap \{1,2,3,4,-5,-3,-1,0\}$$

$$= \{-3,-1,0,1,2,3\}. \qquad (1)$$

پھر ہم $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ دریافت کرتے ہیں۔ ہم فرض کرتے ہیں

$$A \cap B = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\} \cap \{1,2,3,4\} = \{1,2,3\};$$

اور $A \cap C = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\} \cap \{-5,-3,-1,0,1,3\}$

$$= \{-3,-1,0,1,2,3\}$$

چنانچہ $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,2,3,\} \cup \{-3,-1,0,1,3\}$

$$= \{-3,-1,0,1,2,3\}. \qquad (2)$$

اب (1) اور (2) سے معلوم ہوا کہ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

مشق 1.1

1. اگر $A \subset B$ ہو تو دِکھاؤ کہ $(A \cup B) = B$ (ون نقشہ کا استعمال کیجئے)
2. اگر $A \subset B$ ہو تو $A \cap B$ اور $A \setminus B$ معلوم کیجئے۔ (ون نقشہ استعمال کیجئے)
3. فرض کرو کہ $P = \{a, b, c\}$ ، $Q = \{g, h, x, y\}$ اور $R = \{a, e, f, s\}$ مندرجۂ ذیل معلوم کیجئے۔

   (i) $P \setminus R$ (ii) $Q \cap R$ (iii) $R \setminus (P \cap Q)$.
4. اگر $C = \{1,2,3,4,5,6\}$ $B = \{2,4,6\}$, $A = \{4,6,7,8,9\}$ ہو تو دریافت کیجئے

   (i) $A \cup (B \cap C)$ (ii) $A \cap (B \cup C)$ (iii) $A \setminus (C \setminus B)$
5. دیا گیا ہے $A = \{a, x, y, r, s\}$ ، $B = \{1, 3, 5, 7, -10\}$ سٹ کے اتحاد کی متبادلہ خاصیت کی تصدیق کیجئے۔

6. مجموعوں کے تقاطع کیلئے متبادلہ خاصیت کی تصدیق کیجئے۔

$A = \{l, m, n, o, 2,3,4,7\}$ اور $B = \{2, 5, 3, -2, m, n, o, p\}$.

7. اگر $A = \{x \mid x$ 42 کا جزوضربی ہے $\}$, $B = \{x \mid 5 < x \leq 12, x \in \mathbb{N}\}$

اور $C = \{1,4,5,6\}$ ہے تصدیق کیجئے $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

8. دیا گیا ہے $P = \{a,b,c,d,e\}$ ، $Q = \{a,e,i,o,u\}$ اور $R = \{a,c,e,g\}$

سٹوں کے تقاطع کیلئے مربوطی خاصیت کی جانچ کیجئے۔

9. $B = \{6,10,12,18,24\}$; $A = \{5,10,15,20\}$ اور $C = \{7,10,12,14,21,28\}$

$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ کی تصدیق کیجئے۔ اپنے جواب کی تصدیق کیجئے

10. فرض کرو $A = \{-5,-3,-2,-1\}$ ، $B = \{-2,-1,0\}$ اور $C = \{-6, -4, -2\}$

$(A \setminus B) \setminus C$ اور $A \setminus (B \setminus C)$ دریافت کیجئے۔ مجموعوں کے فرق کے عمل کے بارے میں ہم کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں ؟

11. اگر $A = \{-3, -1, 0, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{-1, -2, 3, 4, 5, 6\}$ $C = \{-1, 2, 3, 4, 5, 7\}$,

بتاؤ کہ (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(iii) وِن نقشوں کی مدد سے (i) کی تصدیق کیجئے۔ (iv) وِن نقشوں کی مدد سے (ii) کی تصدیق کیجئے۔

1.5۔ ڈی مارگن کے کلیے (De Morgan's Laws)

ڈی مارگن کے والد (ایک برطانوی شہری)، ایسٹ انڈیا کمپنی، ہندوستان میں ملازمت کرتے تھے۔ آگسٹس ڈی مارگن (1806-1871) میں تمل ناڈو میں واقع مدورائی میں پیدا ہوئے۔ جب وہ سات ماہ کے تھے، تو ان کا خاندان برطانیہ کو منتقل ہو گیا۔ انہوں نے انگلستان کے ٹرینٹی کالج، کیمبرڈج میں تعلیم پائی۔ ڈی مارگن کے کلیے سٹ کے تین بنیادی اعمال اتحاد، تقاطع اور اتمام کے تعلق کو ظاہر کرتے ہیں۔

سیٹ کے فرق (Set difference) کے لئے ڈی مارگن کے کلیے

تین مجموعوں A، B، C کیلئے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

(i) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (ii) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

سیٹ کے اتمام (Set complementation) کے لئے ڈی مارگن کے کلیے

فرض کرو کہ U ہمہ گیر سٹ ہے جو A، B سٹوں کو رکھتا ہے تو

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

اِتمامی کلیوں کے ثبوت پر غور کریں جو سٹ فرق کے ثبوت پر عمل پیرا ہے کیونکہ کوئی سٹ D کیلئے $D' = U \setminus D$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم انہیں دوبارہ ثابت کرنے کی کوشش نہیں کریں گے، مگر ہم سیکھیں گے کہ ان کلیوں کو کس طرح حسابوں کے حل کرنے میں استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال 1.7

وِن کے خاکوں کے استعمال سے تصدیق کیجئے $(A \cap B)' = A' \cup B'$

حل :

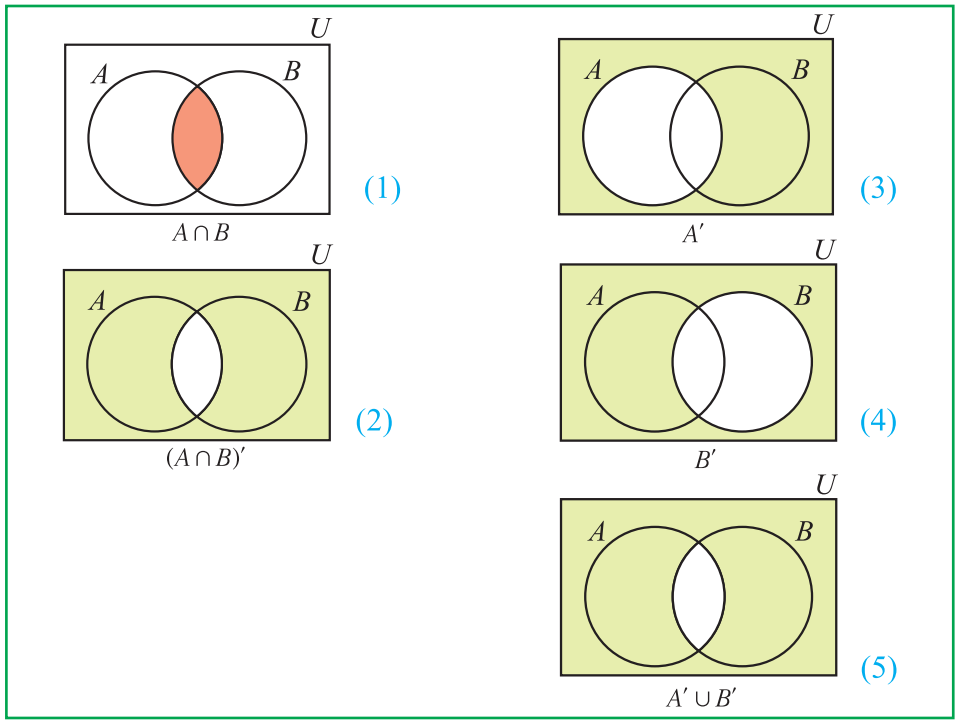


Fig. 1.13

(2) اور (5) سے تصدیق ہوتا ہے کہ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

مثال 1.8

ون کے خاکوں کے استعمال سے سٹ کے فرق کیلئے ڈی مارگن کُلیے کی تصدیق کیجئے۔

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

حل :

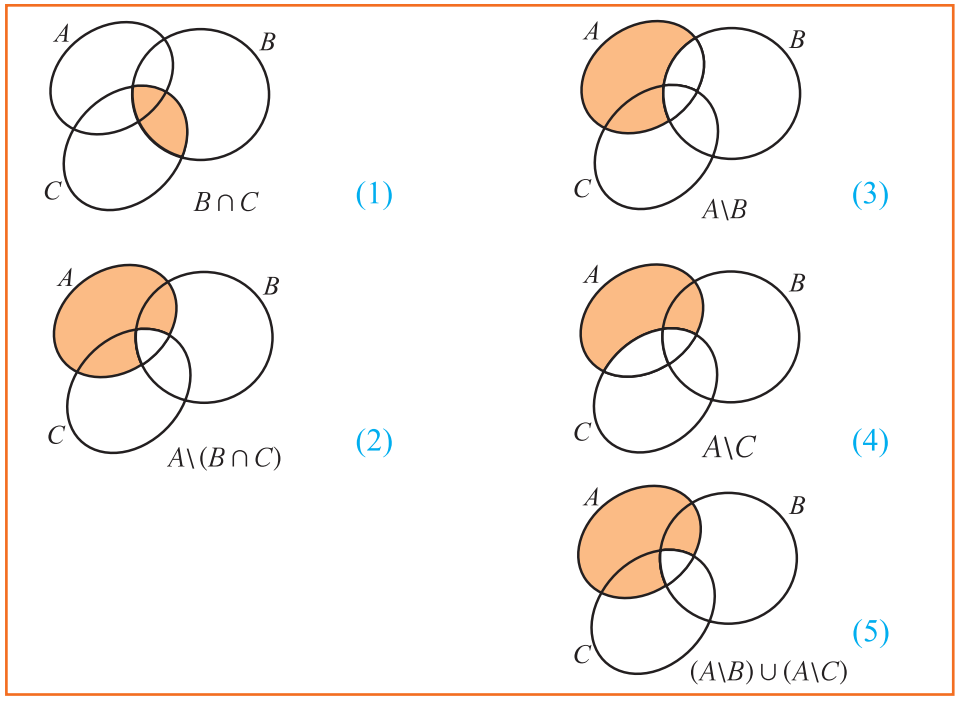


Fig. 1.14

(2) اور (5) سے ثابت ہوتا ہے کہ $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

مثال 1.9

فرض کرو کہ $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots 10\}$ $A = \{-2, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{1, 3, 5, 8, 9\}$. اتمام کیلئے ڈی مارگن کلیوں کی تصدیق کیجئے۔

حل : پہلے ہم تصدیق کریں گے۔ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

اس کے لئے پہلے ہم فرض کریں گے کہ

$$A \cup B = \{-2, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 3, 5, 8, 9\} = \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\};$$

$$(A \cup B)' = U \setminus \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\} = \{-1, 0, 6, 7, 10\} \quad (1)$$

$$A' = U \setminus A = \{-1, 0, 1, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

جس سے معلوم ہوتا ہے

$$B' = U \setminus B = \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 7, 10\}.$$

اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$A' \cap B' = \{-, 1, 0\ 1, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{-\ 2, -\ 1, 0, 2, 4, 6, 7, 10\}$$

$$= \{-1, 0, 6, 7, 10\} \quad (2)$$

چنانچہ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ ہوتا ہے ثابت سے (2) اور (1)

اسی طرح اوپر دیئے گئے سٹوں کیلئے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ہم اس کی مزید معلومات کو مشق میں کرائیں گے۔

مثال 1.10

فرض کرو کہ $A = \{a, b, c, d, e, f, g, x, y, z\}$, $B = \{1, 2, c, d, e\}$ and $C = \{d, e, f, g, 2, y\}$.

تصدیق کیجئے $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

حل : پہلے ہم دریافت کرتے ہیں

$$B \cup C = \{1, 2, c, d, e\} \cup \{d, e, f, g, 2, y\}$$

$$= \{1, 2, c, d, e, f, g, y\}.$$

پھر $A \setminus (B \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, g, x, y, z\} \setminus \{1, 2, c, d, e, f, g, y\}$

$$= \{a, b, x, z\}. \quad (1)$$

$A \setminus C = \{a, b, c, x, z\}$ اور $A \setminus B = \{a, b, f, g, x, y, z\}$ پھر اس کے بعد ہم معلوم کریں گے

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{a, b, x, z\}. \quad (2)$$

چنانچہ (1) اور (2) سے ظاہر ہوتا ہے $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

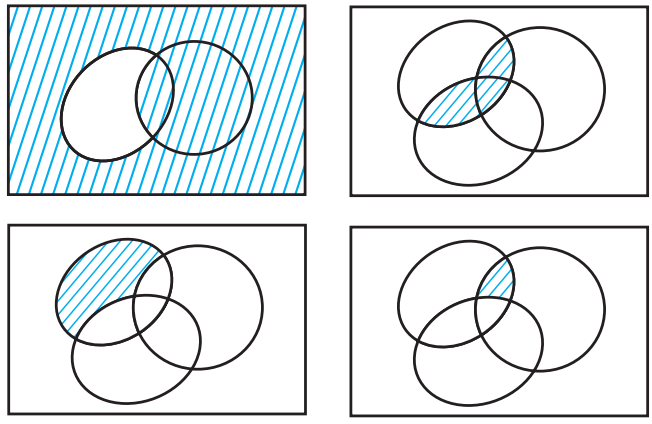
مشق 1.2

1. مندرجۂ ذیل کو ون نقشوں سے ظاہر کیجئے۔

(i) $U = \{5, 6, 7, 8, \ldots\ldots 13\}$, $A = \{5, 8, 10, 11\}$, اور $B = \{5, 6, 7, 9, 10\}$

(ii) $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ $M = \{b, d, f, g\}$ اور $N = \{a, b, d, e, g\}$

2. ہر ایک کا سیاہ کردہ حصہ کی تشریح کیجئے۔ جہاں کہیں ضروری ہو نشانات A، B، C، ∪، ∩ اور \ استعمال کریں۔



3 ذیل کے بیانات سمجھانے کیلئے تین مجموعے A، B، C کیلئے ون کے خاکے کھینچئے۔

(i) $A \cap B \cap C$ (ii) A اور B جُدا ہیں مگر دونوں C کے تحتی سٹ ہیں

(iii) $A \cap (B \setminus C)$ (iv) $(B \cup C) \setminus A$ (v) $A \cup (B \cap C)$

(vi) $C \cap (B \setminus A)$ (vii) $C \cap (B \cup A)$

4. ون نقشوں کے استعمال سے تصدیق کیجئے $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$.

5. فرض کرو کہ $B = \{4, 16, 20, 28\}$ اور $A = \{8, 16, 24\}$, $U = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$
دریافت کیجئے۔ $(A \cap B)'$ اور $(A \cup B)'$

6. دیا گیا ہے۔ $B = \{a, b, c\}$ اور $A = \{a, b, f, g\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
اتمامی عمل کیلئے ڈی مارگن کُلیوں کی تصدیق کیجئے۔

7. ذیل میں دیئے گئے سٹوں کے استعمال سے سٹ فرق کیلئے ڈی مارگن اصول کی تصدیق کیجئے۔
$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, $B = \{1, 2, 5, 7\}$ اور $C = \{3, 9, 10, 12, 13\}$.

8. اگر $A = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$, $B = \{1, 5, 10, 15, 20, 30\}$
اور $C = \{7, 8, 15, 20, 35, 45, 48\}$ تصدیق کیجئے۔ $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

9. ون نقشوں سے ذیل کی تصدیق کیجئے کہ کیا وہ صحیح ہیں

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(iii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (iv) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

1.6 سٹوں کی بنیادیت (Cardinality of sets)

IX ویں کلاس میں ضابطہ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ کے استعمال سے دو سٹوں سے متعلق مسئلوں کو حل کر چکے ہیں۔اس ضابطے کی مدد سے ہم مجموعہ $A \cup B$ کی بنیادیت معلوم کر سکتے ہیں جبکہ A، B اور $A \cap B$ کی بنیادیت ہمیں معلوم ہے۔فرض کرو کہ A، B اور C تین سٹ ہیں ہم $A \cup B \cup C$ کی بنیادیت دریافت کرنا چاہتے ہیں تو نظیری ضابطہ کیا ہوگا ؟ اس صورت میں ذیل کا ضابطہ استعمال ہوتا ہے۔

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

ذیل کی مثال اس ضابطے کا استعمال سمجھاتی ہے۔

مثال 1.11

طلباء کی ایک جماعت میں 65 فٹ بال کھیلتے ہیں۔45 ہاکی کھیلتے ہیں، 42 کرکٹ کھیلتے ہیں۔20 فٹ بال اور ہاکی کھیلتے ہیں، 25 فٹ بال اور کرکٹ کھیلتے ہیں۔15 ہاکی اور کرکٹ کھیلتے ہیں اور 8 تینوں کھیل کھیلتے ہیں۔جماعت میں طلباء کی تعداد دریافت کیجئے۔

حل :

فرض کرو کہ F، H اور C ان طلباء کے سٹوں کی نُمائندگی کرتے ہیں جو بالترتیب فٹ بال، ہاکی اور کرکٹ کھیلتے ہیں۔تو

$$n(F) = 65, n(H) = 45, \text{ and } n(C) = 42 \cdot$$

نیز $n(F \cap H) = 20$, $n(F \cap C) = 25$, $n(H \cap C) = 15$ اور $n(F \cap H \cap C) = 8$

$n(F \cup H \cup C)$ ہم پوری جماعت میں طلباء کی تعداد دریافت کرنا چاہتے ہیں۔یعنی $n(F \cup H \cup C)$ ضابطے سے ہم کو حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} n(F \cup H \cup C) &= n(F) + n(H) + n(C) - n(F \cap H) \\ &\quad - n(H \cap C) - n(F \cap C) + n(F \cap H \cap C) \\ &= 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + 8 = 100. \end{aligned}$$

چنانچہ جماعت میں طلباء کی تعداد = 100 ہے۔

دوسرا طریقہ :

اسی حساب کو ون نقشوں کے استعمال سے بھی حل کیا جا سکتا ہے۔روزمرّہ زندگی میں پیش آنیوالے حسابوں میں بھی آجکل ون نقشوں اور منطق کے استعمال سے حل کرنا اب ممکن ہے۔ون نقشوں میں تین تقاطع سٹ ہوں گے۔جو ہر ، ایک کھیل کی نمائندگی کرتے ہیں۔خاکے کو دیکھئے اور جماعت میں کھلاڑیوں کی تعداد دریافت کرنے کی کوشش کریں۔دیئے گئے بیانات پر احتیاط سے کام کرتے ہوئے درج کرتے چلے جائیں۔

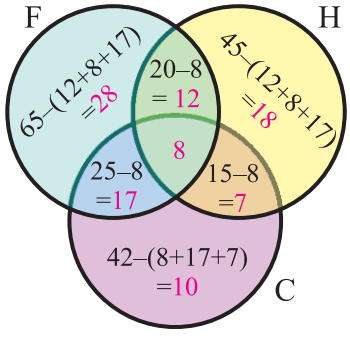


Fig 1.15

جماعت میں طلباء کی تعداد $= 28 + 12 + 18 + 7 + 10 + 17 + 8 = 100.$

مثال 1.12

یونیورسٹی طلباء نے ایک جائزہ لیا، جس میں ذیل کی معلومات حاصل ہوئیں۔ 64 نے ریاضی کا کورس لیا، 94 نے کمپیوٹر سائنس کا کورس لیا۔ 58 نے طبیعیات کا کورس لیا، 28 نے ریاضی اور طبیعیات لیا۔ 26 نے ریاضی اور کمپیوٹر سائنس، 22 نے کمپیوٹر سائنس اور طبیعیات کا کورس لیا۔ اور 14 نے تینوں کورس میں حِصّہ لیا۔ جائزہ لئے گئے طلباء کی کل تعداد معلوم کیجئے۔ دریافت کرو کہ کتنے طلباء نے صرف ایک کورس کا انتخاب کیا ؟

حل : آیئے ہم دئے گئے معلومات کو ون نقشہ سے نُمائندگی کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ M, C, P ان طلباء کے مجموعوں کی نُمائندگی کرتے ہیں جنھوں نے با لترتیب ریاضی، کمپیوٹر سائنس اور طبیعیات لی۔ دی گئی معلومات ون کے خاکہ میں درج کی گئی ہے۔

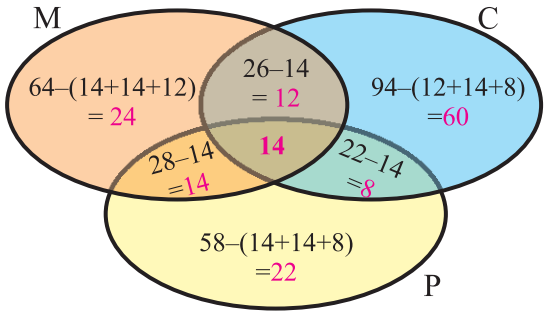


Fig 1.16

$n(M \cap C \cap P') = 26 - 14 = 12$

$n(M \cap P \cap C') = 28 - 14 = 14$

$n(C \cap P \cap M') = 22 - 14 = 8$

$n(M \cap C \cap P) = 14$

جائزہ لیے گئے طلباء کی تعداد

$= 24 + 12 + 60 + 8 + 22 + 14 + 14 = 154$

صرف ریاضی لینے والے طلباء کی تعداد $= 64-(14+14+12) = 24$

صرف کمپیوٹر سائنس لینے والے طلباء کی تعداد $= 94 - (12+14+8) = 60$

صرف طبیعیات لینے والے طلباء کی تعداد $= 58 - (14+14+8) = 22$

صرف ایک کورس لینے والے طلباء کی تعداد $= 24 + 60 + 22 = 106$

مثال 1.13

ایک ریڈیو اسٹیشن نے موسیقی کی قسم جو طلباء پسند کرتے ہیں، اس کے بارے میں 190 طلباء کا جائزہ لیا۔ اس سے پتہ چلا کہ 114 طلباء راک موسیقی، 50 طلباء فوک موسیقی اور 41 طلباء کلاسیکی موسیقی، 14 طلباء راک اور فوک موسیقی، 15 طلباء راک اور کلاسیکی موسیقی، 11 طلباء کلاسیکی اور فوک موسیقی، 5 طلباء تینوں موسیقی کی قسموں کو پسند کرتے ہیں۔

معلوم کرو کہ : (i) کتنے لڑکوں نے موسیقی کی کسی بھی قسم کو پسند نہیں کیا ؟

(ii) کتنے لڑکے صرف دو قسموں کو پسند کرتے ہیں؟

(iii) کتنے لڑکے فوک موسیقی پسند کرتے ہیں مگر راک موسیقی پسند نہیں کرتے ؟

حل :

فرض کیجئے کہ F, R اور C موسیقی کی تین قسموں کی بالترتیب نمائندگی کرتے ہیں۔ وِن نقشے میں دی گئی اطلاعات کو بھرتے ہیں۔ اس سے ہمیں حاصل ہوا۔

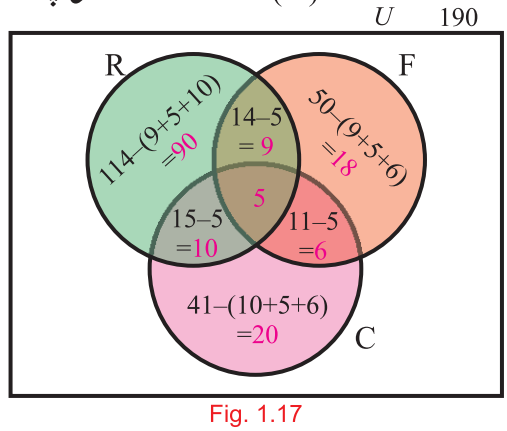


Fig. 1.17

$n(R \cap F \cap C') = 14 - 5 = 9$

$n(R \cap C \cap F') = 15 - 5 = 10$

$n(F \cap C \cap R') = 11 - 5 = 6.$

وِن نقشے سے معلوم ہوا کہ طلباء کی تعداد جو تین قسموں میں سے کسی نہ کسی ایک قسم کو پسند کرنے والے طلباء کی تعداد

$90 + 9 + 30 + 6 + 20 + 10 + 5 = 170.$

جائزہ لئے گئے طلباء کی تعداد $= 190$

تینوں قسموں کو پسند نہ کرنے والے طلباء کی تعداد $= 190 - 170 = 20$

صرف دو قسموں کو پسند کرنے والے طلباء کی تعداد $= 9 + 6 + 10 = 25$

صرف فوک موسیقی پسند کرتے ہیں مگر راک موسیقی نہیں $= 30 + 6 = 36$

مشق 1.3

1. اگر A اور B دو مجموعے ہیں اور U ہمہ گیر سٹ ہے اسطرح کہ $n(A) = 200, n(B) = 300$, $n(U) = 700$ اور $n(A \cap B) = 100$ دریافت کیجئے۔ $n(A' \cap B')$

2. دیا گیا ہے, $n(A) = 285, n(B) = 195, n(U) = 500, n(A \cup B) = 410$ دریافت کیجئے $n(A' \cup B')$

3. کوئی تین سٹ A ، B اور C کیلئے اگر $n(A) = 17$ $n(B) = 17,$ $n(C) = 17$, $n(A \cap B) = 7$, $n(A \cap B \cap C) = 2$, $n(A \cap C) = 5$, $n(B \cap C) = 6$ ہو تو دریافت کیجئے $n(A \cup B \cup C)$

4. ذیل میں دیئے گئے سٹوں کیلئے تصدیق کیجئے

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

(i) $A = \{4,5,6\}$, $B = \{5, 6, 7,8\}$ اور $C = \{6,7,8,9\}$

(ii) $A = \{a,b,c,d,e\}$ $B = \{x,y,z\}$ اور $C = \{a, e, x\}$.

5. ایک کالج میں 60 طلباء کیمیاء میں داخلہ لیا، 40 نے طبیعیات میں، 30 نے حیاتیات میں، 15 نے کیمیاء اور طبیعیات میں، 10 نے طبیعیات اور حیاتیات میں، 5 نے بیالوجی اور کیمیاء میں داخلہ لیا۔ کسی نے بھی تینوں میں داخلہ نہیں لیا۔ دریافت کیجئے کہ کتنوں نے کم از کم ایک سبق میں داخلہ لیا۔

6. ایک گاؤں میں 85% لوگ ٹمل بولتے ہیں۔ 40% انگریزی بولتے ہیں اور 20% ہندی بولتے ہیں۔ مزید 32% انگریزی اور ٹمل بولتے ہیں 13% ٹمل اور ہندی بولتے ہیں۔ اور 10% انگریزی اور ہندی بولتے ہیں۔ دریافت کرو کہ کتنے فیصد لوگ تینوں زبانیں بولتے ہیں

7. ایک اشتہاری ایجنسی نے دریافت کیا کہ اسکے 170 صارفوں میں سے 115 ٹیلی ویژن استعمال کرتے ہیں، 110 ریڈیو استعمال کرتے ہیں اور 130 میگزین استعمال کرتے ہیں۔ مزید 85 ٹیلی ویژن اور میگزین استعمال کرتے ہیں۔ 75 ٹیلی ویژن اور ریڈیو استعمال کرتے ہیں۔ 95 ریڈیو اور میگزین استعمال کرتے ہیں۔ 70 تینوں استعمال کرتے ہیں۔ ان معطیات کی نُمائندگی کیلئے ون کے خاکے کھینچئے۔ دریافت کیجئے

(i) کتنے صرف ریڈیو استعمال کرتے ہیں (ii) کتنے صرف ٹیلی ویژن استعمال کرتے ہیں

(iii) کتنے ٹیلی ویژن اور میگزین استعمال کرتے ہیں مگر ریڈیو استعمال نہیں کرتے ہیں

8. 4000 طلباء کے ایک مدرسے میں 2000 فرنچ جانتے ہیں، 3000 ٹمل جانتے ہیں، اور 500 ہندی جانتے ہیں۔ 1500 فرانسیسی اور ٹمل جانتے ہیں 300 فرانسیسی اور ہندی جانتے ہیں۔ 200 ٹمل اور ہندی جانتے ہیں اور 50 تینوں زبانیں جانتے ہیں۔

(i) کتنے طلباء تینوں زبانوں میں سے ایک بھی نہیں جانتے (ii) کتنے طلباء کم از کم صرف ایک زبان جانتے ہیں

(iii) کتنے طلباء صرف دو زبانیں جانتے ہیں

9. ایک گاؤں کے 120 خاندان میں 93 خاندان پکوان کے لئے لکڑیاں استعمال کرتے ہیں، 63 خاندان کروسین استعمال کرتے ہیں، 45 پکوان گیس استعمال کرتے ہیں۔ 45 خاندان لکڑیاں اور کروسین استعمال کرتے ہیں، 24 خاندان کروسین اور پکوان گیس استعمال کرتے ہیں، 27 خاندان پکوان گیس اور لکڑیاں استعمال کرتے ہیں۔ دریافت کرو کہ کتنے لکڑیاں، کروسین اور پکوان گیس استعمال کرتے ہیں۔

1.7 تعلقات (Relations)

پچھلے حصّے میں ہم نے مجموعے کے تصوّر کو دیکھا۔ ہم نے یہ بھی دیکھا کہ کس طرح دیئے ہوئے سٹوں سے اتحاد، تقاطع اور اتمام کو لے کر نئے مجموعے بنا سکتے ہیں۔ یہاں ہم دیکھیں گے کہ کس طرح دیئے ہوئے دو سٹ A ، B سے ایک دوسرے طریقے سے نیا مجموعہ بنا سکتے ہیں۔ یہ نیا مجموعہ ریاضی کے ایک اہم تصوّر "تعلق، تفاعل" کی تعریف کیلئے اہم ہے۔

دو غیر معدوم (non-empty) سٹ A اور B دیئے گئے ہیں۔ ہم ایک نیا سٹ $A \times B$ بنا سکتے ہیں اسکو A کراس B پڑھتے ہیں جو A اور B کا کارتیسی حاصل ضرب کہلاتا ہے۔ اسکی تعریف یوں کی جاتی ہے۔

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \text{ اور } b \in B\}$$

اسی طرح سٹ $B \times A$ کی تعریف یوں ہے

$$B \times A = \{(b, a) / b \in B \text{ اور } a \in A\}$$

غور کریں

(i) (a, b) کی جوڑی کی ترتیب بہت اہم ہے۔ یعنی $(a, b) \neq (b, a)$ اگر $a \neq b$

(ii) سٹ A اور B مساوی ہیں تو یہ ممکن ہے۔ $A \times B$

آیئے ہم ایک مثال دیکھیں

فرض کرو کہ ایک سیل فون (cell phone) کی دُکان 3 مختلف قسم کے سیل فون فروخت کرتی ہے اور ہم انہیں C1, C2, C3 کہتے ہیں آیئے یہ بھی فرض کریں کہ C1 کی قیمت ₹ 1200 ، C2 کی قیمت ₹ 2500 اور C3 کی قیمت ₹ 2500 ہے

ہم $A = \{ C_1, C_2, C_3 \}$ اور $B = \{ 1200 , 2500 \}$ کہتے ہیں

$A \times B = \{(C_1, 1200), (C_1, 2500), (C_2, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 1200), (C_3, 2500)\}$ ایسی صورت میں

$B \times A = \{(1200, C_1), (2500, C_1), (1200, C_2), (2500, C_2,),(1200, C_3), (2500, C_3).$ مگر

ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ اگر $A \neq B$ ہو تو $A \times B \neq B \times A$

آیئے $A \times B$ کے ایک تحتی مجموعہ F پر غور کریں۔ $F = \{ (C_1,1200), (C_2,2500), (C_3,2500) \}$

اوپر کی ترتیب وار جوڑی میں ہر ایک پہلا عنصر ایک مخصوص عنصر سے تعلق رکھتا ہے۔ یعنی پہلی جگہ کا کوئی بھی عنصر دوسری جگہ کے ایک سے زیادہ عنصر سے نہیں جوڑا گیا۔

F کے ہر ایک عنصر کے لئے بنیادی طور پر دوسرا عنصر پہلے عنصر کے قیمت کی نُمائندگی کرتا ہے۔ اسکے بعد $A \times B$ کے تحتی سٹ E پر غور کریں۔ $E = \{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$

یہاں پہلا جُز 2500 , C_2 اور C_3 دو مختلف عناصر سے تعلق رکھتا ہے۔

تعریف

فرض کرو کہ A ، B کوئی دو غیر معدوم سٹ ہیں ، ایک **تعلق** R ، A سے B کو $A \times B$ کا ایک غیر معدوم تحتی سٹ ہے۔یعنی $R \subseteq A \times B$

$R = \{ x \in A / (x, y) \in R$ کیلئے $y \in B /$ کوئی $\}$ کا علاقہ (Domain)

$R = \{ y \in B / (x, y) \in R$ کیلئے $x \in A$ کوئی $\}$ کی حد (Range)

1.8 تفاعلات (Functions)

فرض کرو کہ A اور B دو غیر معدوم سٹ ہیں A سے B کو تعلق ایک **تفاعل** ہے اس طرح کہ $f \subseteq A \times B$ ذیل میں رکھتا ہے۔

(i) f کا علاقہ A ہے

(ii) ہر ایک $x \in A$ کیلئے صرف اور صرف ایک $y \in B$ ہے اس طرح کہ $(x, y) \in f$.

پیٹر ڈرچلٹ، جرمنی

(1805-1859)

ڈرچلٹ نے عددی نظام، تجزیہ اور میکانیات کے میدان میں بے مثال عنایات پیش کی ہیں۔ 1837 میں اس نے تفاعل میں ترقیم $y=f(x)$ کا نظریہ پیش کیا۔اس نے مشہور Pigeonhole Principle کا اصول پیش کیا۔

غور کریں کہ A سے B کو تفاعل ایک مخصوص قسم کا تعلق ہے جو (i) اور (ii) کی شرط پوری کرتا ہے۔ایک تفاعل کو **میپنگ** (Mapping) بھی کہا جاتا ہے۔

ایک تفاعل A سے B کی نُمائندگی $f : A \to B$ سے کی جاتی ہے اور اگر $(x,y) \in f$ ہو تو ہم $y = f(x)$ لکھتے ہیں۔

ہم تفاعل کی تعریف کو تعلق کے خیال کے بغیر دوبارہ ذیل کی طرح ترتیب دے سکتے ہیں۔

درحقیقت کئی اوقات اس ضابطے کو تفاعل کے ضابطۂ عمل میں استعمال کیا جاتا ہے۔

تعریف

فرض کرو کہ A اور B کوئی دو غیر معدوم سٹ ہیں۔ ایک تفاعل A سے B کو ایک اصول ہے جو xEA کے ہر عنصر کو yEB کے مخصوص عنصر سے جوڑتا ہے۔ ہم $y = f(x)$ کا مطلب اس طرح لیتے ہیں کہ x کا تفاعل y ہے۔

سٹ A تفاعل کا **علاقہ** Domain، سٹ B تفاعل کا **معاون علاقہ** Co-Domain کہلاتا ہے۔مزید x کو y کا **خیال** (Image) 'f' کی تحت کہتے ہیں اور x کو y کا **پیش خیال** (Preimage) کہتے ہیں۔A کے تمام خیالوں کا سٹ 'f' کا **حد** (Range) کہلاتا ہے۔غور کرو کہ ایک تفاعل کی حد اُسکے معاون علاقے کا تحتی سٹ ہے۔

اوپر دیئے گئے تفاعل کے جدید ضابطے کو **نکولائی لاباچیوسکی** (Nikolai Labachevsky) اور **پیٹر ڈیرچ لٹ** (Peter dirichlet) نے 1837 کے قریب آزادانہ طور پر پیش کیا تھا۔اس سے پہلے تفاعل کی کوئی واضح تعریف نہیں تھی۔

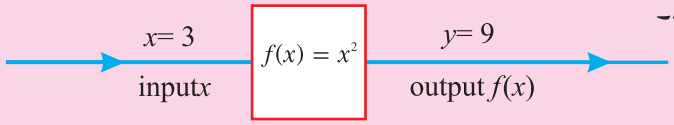
اوپر دی گئی تعریف سے پہلے دی گئی مثال حصہ 1.7 میں ہم غور کرتے ہیں، $F = \{ (C_1,1200), (C_2,2500), (C_3,2500) \}$
ایک تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے کیونکہ $F \subseteq A \times B$ ایک تفاعل ہے جو اوپر دیئے گئے (i) اور (ii) شرائط پوری کرتا ہے۔

مگر $E = \{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$

ایک تفاعل کی نمائندگی نہیں کرتا ہے اوپر دی گئی شرط (ii) پوری نہیں کرتی جیسے $(2500, C_2),(2500, C_3) \in E$.

برائے ذہن نشینی

i) ایک تفاعل 'f' کو ایک مشین تصوّر کیا جاتا ہے جو x کی ہر ایک داخلی قیمت (Input value) کیلئے y میں ایک مخصوص نتیجہ (Output) مُہیّا کرتی ہے۔



ii) ایک تفاعل کی تعریف کے لئے ہم کو ایک علاقہ، معاون علاقہ اور ایک اصول کی ضرورت ہے جو علاقے کے ہر ایک عنصر کو معاون علاقے کے ایک مخصوص عنصر سے رابطہ پیدا کرتا ہے۔

مثال 1.14 فرض کرو کہ $A=\{ 1,2,3,4\}$ اور $B = \{ -1, 2, 3,4,5,6,7,9,10,11,12\}$

فرض کرو کہ ایک تعلق $R = \{ (1,3), (2,6), (3,10), (4,9)\} \subseteq A \times B$ ہے۔ دِکھاؤ کہ R ایک تفاعل ہے اور اسکا علاقہ، معاون علاقہ اور R کی حد دریافت کیجئے۔

حل : $R=\{ 1,2,3,4\}=A$ کا علاقہ

مزید ہر ایک $x \in A$ کیلئے صرف ایک $y \in B$ اسطرح ہے کہ $y = R(x)$

اسلئے دیا گیا R ایک تفاعل ہے۔ معاون علاقہ ظاہر ہے کہ B ہے۔

چونکہ $R(1) = 3, R(2)=6 , R(3)=10 , R(4) = 9$ ، R کی حد $\{3, 6, 10, 9\}$ دی گئی ہے۔

مثال 1.15 کیا ذیل میں دیا گیا ہر ایک پیکانی نقشہ ایک تفاعل کی نُمائندگی کرتا ہے ؟ وضاحت کیجئے۔

(i)

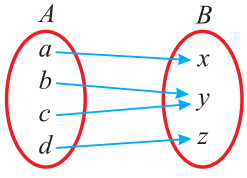


Fig. 1.18

(ii)

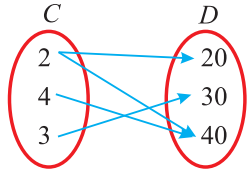


Fig 1.19

حل : پیکانی نقشہ (i) میں A کے ہر ایک عنصر کیلئے ایک مخصوص خیال ہے۔ چنانچہ یہ تفاعل ہے

پیکانی نقشہ (ii) میں عنصر 2 کیلئے دو خیال مثلاً 20 اور 40 ہیں۔ چنانچہ یہ تفاعل نہیں ہے۔

مثال 1.16 فرض کیجئے کہ $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ۔ جانچ کیجئے کہ ذیل میں دیا گیا ہر ایک تعلق X سے X کو ایک تفاعل ہے یا نہیں۔ سمجھایئے۔

(i) $f = \{ (2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4) \}$

(ii) $g = \{ (3, 1), (4, 2), (2, 1) \}$ (iii) $h = \{ (2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 3) \}$

حل :

(i) یہاں $f = \{ (2,3), (1,4), (2,1), (3,2), (4,4) \}$

'f' ایک تفاعل نہیں ہے 2 ، دو مختلف عناصر 3 اور 1 سے ربطہ رکھتا ہے۔

(ii) دیا گیا $g = \{ (3,1), (4,2), (2,1) \}$

g ایک تفاعل نہیں ہے۔عنصر '1' کوئی خیال نہیں رکھتا۔یعنی علاقہ $g = \{ 2,3,4 \} \neq x$

(iii) اس کے بعد ہم فرض کریں کہ $h = \{ (2,1), (3,4), (1,4), (4,3) \}$

لہٰذا h ایک تفاعل ہے۔ X کا ہر ایک عنصر X کے ایک مخصوص عنصر سے تعلق رکھتا ہے۔

مثال 1.17

ذیل کے تعلقات میں کون سے $A = \{ 1,4,9,16 \}$ سے $B = \{-1,2,-3,-4,5,6\}$ کو تفاعلات ہیں ؟ اگر تفاعل ہو تو اسکی حد لکھئے۔

(i) $f_1 = \{ (1, -1), (4, 2), (9, -3), (16, -4) \}$

(ii) $f_2 = \{ (1, -4), (1, -1), (9, -3), (16, 2) \}$

(iii) $f_3 = \{ (4, 2), (1, 2), (9, 2), (16, 2) \}$

(iv) $f_4 = \{ (1, 2), (4, 5), (9, -4), (16, 5) \}$

حل :

(i) ہمیں $f_1 = \{ (1,-1), (4,2), (9,-3), (16,-4) \}$ حاصل ہے

چونکہ A کا ہر ایک عنصر B کے ایک مخصوص عنصر سے تعلق رکھتا ہے۔ '$f1$' ایک تفاعل ہے۔

$f1$ کی حد $\{-1,2,-3,-4\}$ ہے

(ii) یہاں $f_2 = \{ (1,-4), (1,-1), (9,-3), (16,-2) \}$

f_2 تفاعل نہیں ہے کیونکہ 1 خیال کے دو مختلف عناصر 4 – اور 1 – سے تعلق رکھتا ہے۔یہ بھی غور کریں کہ f_2 تفاعل نہیں ہے، کیونکہ تفاعل 4 کا خیال نہیں ہے۔

(iii) فرض کرو کہ $f_3 = \{ (4,2), (1,2), (9,2), (16,2) \}$

کیونکہ A کا ہر ایک عنصر B کے ایک مخصوص عنصر سے ربطہ رکھتا ہے۔چنانچہ f_3 ایک تفاعل ہے۔

$f3$ کی حد $= \{2\}$

(iv) ہمارے پاس $f_4 = \{(1,2), (4,5), (9,-4), (16,5)\}$ ہے۔

چونکہ A کا ہر ایک عنصر B کے ایک مخصوص عنصر سے متعلقہ ہے۔ $f4$ ایک تفاعل ہے۔

$f4$ کی حد $= \{2, 5, -4\}$