مثال 1.18 فرض کریں کہ $|x| = \begin{cases} x & \text{اگر } x \geq 0 \\ -x & \text{اگر } x \leq 0 \end{cases}$ جس میں $x \in R$ ہے۔

کیا تعلق $\{(x,y) | y = |x|, x \in R\}$ ایک تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔ اسکی حد معلوم کیجئے۔

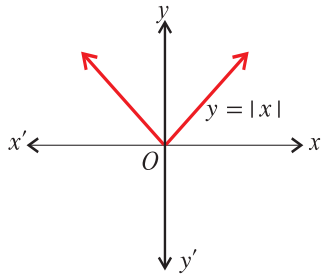


Fig. 1.20

حل : x کی ہر ایک قیمت کیلئے ایک مخصوص قیمت $y = |x|$ ہے۔ اسلئے دیا گیا تعلق تفاعل ہے۔

تفاعل کا علاقہ R کے مجموعہ کے تمام حقیقی اعداد ہیں۔

چونکہ $|x|$ ہمیشہ یا تو صفر ہے یا مثبت ہے x کے ہر ایک حقیقی عدد کیلئے اس تفاعل کے تحت ہر ایک حقیقی عدد کو خیال کے طور پر حاصل کر سکتے ہیں۔

اس طرح اسکی حد غیر منفی حقیقی اعداد کا سٹ ہوگی (یا تو مثبت یا صفر)

برائے ذہن نشینی

تفاعل $y = |x|$ کی تعریف $y = |x| = \begin{cases} x & \text{اگر } x \geq 0 \\ -x & \text{اگر } x \leq 0 \end{cases}$ سے بھی کی جاتی ہے $x \in R$

اس تفاعل کو **ماڈولس** (modulus) یا **مطلق قیمت تفاعل** (absolute value function) کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر $|-8| = -(-8) = 8$ نیز $|8| = 8.$

1.8.1 تفاعل کی نُمائندگی : Representation of functions

ایک تفاعل کی نمائندگی اس طرح کر سکتے ہیں۔

(i) ترتیب وار جوڑیوں کا (مجموعہ) سٹ (ii) ایک جدول (iii) ایک پیکانی نقشہ (iv) ایک ترسیم

ایک تفاعل کو لو $f : A \to B$

(i) سٹ $f = \{ (x,y) ; y = f(x), x \in A\}$ کی تمام ترتیب وار جوڑیاں تفاعل کی نُمائندگی کرتی ہیں۔

(ii) x کی قیمتیں اور 'f' کے تحت انکے بالترتیب خیال ایک جدول کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں

(iii) ایک پیکانی نقشہ 'f' کے علاقے کے عناصر کو انکے قائم مقام خیالات کو تیر کے نشانات سے ظاہر کرتا ہے۔

(iv) $f = \{ (x,y) ; y = f(x), x \in A\}$ کی ترتیب وار جوڑیوں کے ذخیرہ کو ایک سطح پر مرتسم کیا جاتا ہے۔

ان تمام نقطوں کا مجموعہ f کی ترسیم ہے۔ آیئے ہم تفاعلات کی مختلف قسموں کی نمائندگی چند مثالوں کے ذریعے سمجھائیں۔

ہم کئی تفاعلات کے لئے اس کی ترسیم حاصل کر سکتے ہیں۔ مگر ہر ایک ترسیم تفاعل کی نُمائندگی نہیں کریگی۔ ذیل کے جانچ (test) کی مدد سے ہم دی گئی ترسیم کے تفاعل ہونے یا نا ہونا معلوم کر سکتے ہیں۔

1.8.2 عمودی خطّی جانچ (Vertical line test)

اگر ہر ایک عمودی خط ترسیم کو زیادہ سے زیادہ ایک نقطہ پر قطع کرے تو ترسیم تفاعل کی نمائندگی کرتی ہے۔

غور کریں

یہ ممکن ہے کہ چند عمودی خطوط ترسیم کو قطاع نہیں کر سکتے جو کہ درست ہے۔ اگر کوئی ایک بھی عمودی خط جو ترسیم کو ایک سے زیادہ نقاط پر ملتا ہے تو وہ ترسیم تفاعل کی نُمائندگی نہیں کر سکتی کیونکہ اس حالت میں ہمیں x کی ایک ہی قیمت کیلئے y کی کم از کم دو قیمتیں حاصل ہونگی۔ مثال کے طور پر $y^2 = x$ ایک تفاعل نہیں ہے۔

مثال 1.19

عمودی خط کی جانچ کی مدد سے معلوم کرو کہ کونسی ترسیم تفاعل کی نُمائندگی کرتی ہے۔

(i)

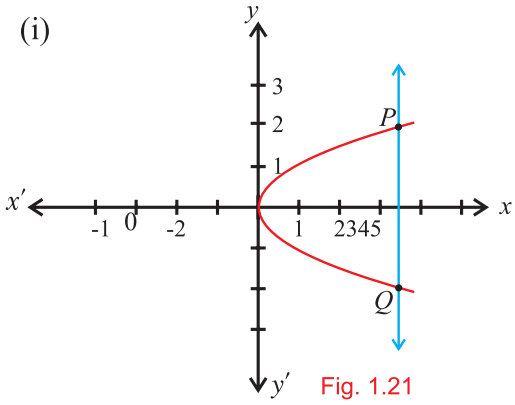


Fig. 1.21

(ii)

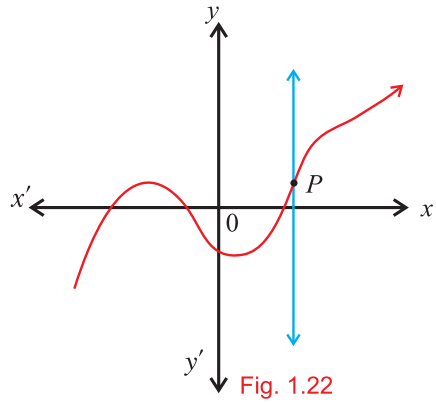


Fig. 1.22

(iii)

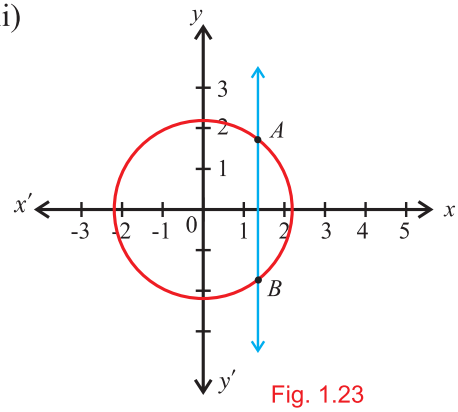


Fig. 1.23

(iv)

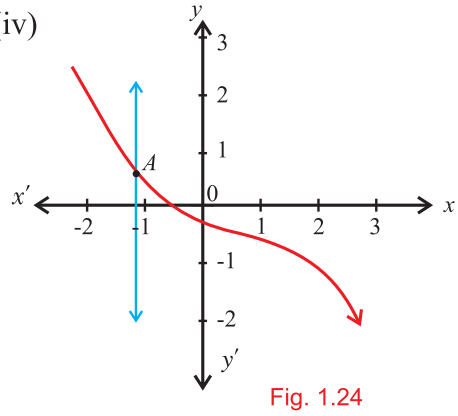


Fig. 1.24

حل :

(i) دی گئی ترسیم تفاعل کی نُمائندگی نہیں کرتی ہے کیونکہ عمودی خط ترسیم کو دو نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے۔

(ii) دی گئی ترسیم تفاعل کی نُمائندگی کرتی ہے کیونکہ کوئی بھی عمودی خط ترسیم کو صرف ایک نقطہ P پر قطع کرتا ہے۔

(iii) دی گئی ترسیم تفاعل کی نُمائندگی نہیں کرتی ہے کیونکہ عمودی خط ترسیم کو دو نقاط A ، B دو نقاط پر قطع کرتا ہے۔

(iv) دی گئی ترسیم تفاعل کی نُمائندگی کرتی ہے کیونکہ ترسیم عمودی خطی جانچ کی شرط پوری کرتی ہے۔

مثال 1.20

$A = \{0, 1, 2, 3\}$ اور $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ دوسٹ ہیں۔ $f : A \to B$ ایک تفاعل ہے جو $f(x) = 2x+1$ سے دیا گیا ہے۔اس تفاعل کی نُمائندگی کیجئے (i) ترتیب وار جوڑیوں کے طور پر (ii) جدول کے طور پر (iii) پیکانی نقشہ سے (iv) ترسیم سے

حل :

$A = \{ 0, 1, 2, 3 \}, \ B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}, \ f(x) = 2x + 1$

$f(0) = 2(0) + 1 = 1, f(1) = 2(1)+1 = 3 , \ f(2) = 2(2) + 1 = 5, f(3) = 2(3) + 1 = 7$

(i) پیکانی نقشہ (Arrow diagram)

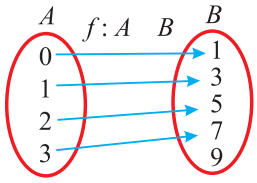


Fig. 1.25

آیئے ہم پیکانی نقشے سے f کی نمائندگی کریں۔

ہم دو بند منحنیاں کھینچتے ہیں جو سٹ A اور B کی نُمائندگی کرتی ہیں۔

پھر A کے ہر ایک عنصر کو B میں اسکے مخصوص خیال سے

تعلق کو تیر کے نشان سے ظاہر کرتے ہیں۔

(ii) جدولی شکل

آیئے ہم جدول کے استعمال سے جیسا کہ نیچے دِکھایا گیا ہے 'f' کی نُمائندگی کرتے ہیں

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	5	7

(iii) ترتیب وار جوڑیاں :

دئے گئے تفاعل 'f' کو ترتیب وار جوڑیوں سٹ سے نُمائندگی کر سکتے ہیں۔

$f = \{ (0,1), (1,3),(2,5),(3,7) \}$

(iv) ترسیم : دیا گیا ہے

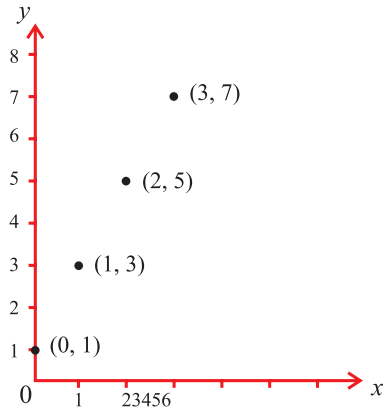


Fig. 1.26

$f = \{x, f(x) | x \in A\} = \{ (0,1), (1,3),(2,5),(3,7) \}$

اب نقاط (2, 5) ، (1,3) ، (0, 1) اور (3, 7)

کو نیچے دِکھائے ہوئے طریقے پر مرتسم کریں۔

تمام نقاط کی مجملہ (Totality) تفاعل کی ترسیم کی نُمائندگی کرتی ہے۔

1.8.3 تفاعل کی قسمیں :

تفاعل کی خصوصیات بنیاد پر ہم تفاعلات کو چند قسموں میں تقسیم کرتے ہیں۔

(i) ایک ۔ ایک تفاعل (one-one function)

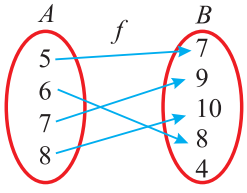


Fig. 1.27

فرض کیجئے $f : A \to B$ ایک تفاعل ہے تفاعل 'f' **ایک ۔ ایک تفاعل** کہلاتا ہے اگر A کے علٰحدہ عناصر B کے علٰحدہ عناصر سے تعلق رکھتے ہیں۔یعنی ہم 'f' کو ایک ۔ ایک تفاعل کہہ سکتے ہیں جبکہ A میں $u \neq v$ ہمیشہ لاگو ہوتا ہے۔$f(u) \neq f(v)$ دوسرے الفاظ میں 'f' ایک ۔ ایک تفاعل ہے اگر B کا کوئی بھی عنصر A کے ایک سے زیادہ عناصر سے تعلق نہیں رکھتا ہے۔

ایک ۔ ایک تفاعل **دروں تفاعل** (injective function) بھی کہلاتا ہے۔اوپر کا خاکہ ایک ۔ ایک تفاعل کی نُمائندگی کرتا ہے۔

(ii) بروں تفاعل (on to function)

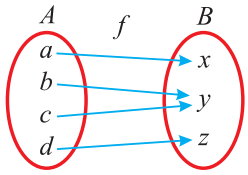


Fig. 1.28

ایک تفاعل $f : A \to B$ اس وقت **بروں تفاعل** ہوگا اگر B کے ہر ایک عنصر کیلئے A میں پیشِ خیال ہو۔یعنی ایک تفاعل 'f' بروں کہلائیگا اگر ہر ایک $b \in B$ کیلئے کم از کم ایک عنصر $a \in A$ ہو اسطرح کہ $f(a) = b$ یہ مساوی ہے اسطرح کہنے پر B ، 'f' کی حد ہے۔**بروں تفاعل** surjective function بھی کہلاتا ہے۔اوپر کے خاکے میں 'f' ایک بروں تفاعل ہے۔

(iii) ایک ۔ ایک اور بروں تفاعل (one - one and onto function)

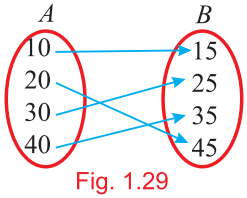


Fig. 1.29

ایک تفاعل $f : A \to B$ ایک ۔ ایک اور بروں یا **دوہرا تفاعل** (bijective function) کہلاتا ہے اگر 'f' دونوں ایک ۔ ایک اور بروں تفاعل ہو۔چنانچہ $f : A \to B$ ایک ۔ ایک اور بروں تفاعل ہے اگر 'f' میپنگ کرتا ہے A کے مختلف عناصر کو B کے مختلف خیال سے اور B کا ہر ایک عنصر A کا کوئی پیش خیال ہوتا ہے۔

غور کریں

(i) $f : A \to B$ بروں ہے صرف اور صرف $f = B$ کی وسعت ہو۔

(ii) $f : A \to B$ ایک ۔ ایک اور دروں ہے،اس کا مطلب A میں $a_1 = a_2$ ہے،صرف اور صرف اگر $f(a_1) = f(a_2)$ اور B کا ہر ایک عنصر A میں صرف ایک پیشِ خیال رکھتا ہو۔

(iii) اگر $f : A \to B$ ایک دوہرا تفاعل bijective function ہے تو A اور B دونوں محدود سٹ ہوں تو ان کی بنیادیت Cardinalities یکساں ہوں گے۔ خاکہ 1.29 میں تفاعل f ایک-ایک اور برون ہے۔

(iv) اگر $f : A \quad B$ ایک دوسرا تفاعل ہو تو A اور B معادل مجموعے ہوں گے۔

(v) ایک-ایک اور بروں تفاعل کو ایک-ایک مطابقت بھی کہتے ہیں۔

(iv) مستقل تفاعل (constant function)

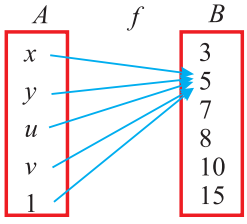


Fig. 1.30

ایک تفاعل $f : A \to B$ **مستقل تفاعل** کہلاتا ہے اگر A کا ہر ایک عنصر B میں ایک ہی خیال رکھتا ہے۔مستقل تفاعل کی حد ایک اکائی والا (singleton set) سٹ ہے۔

فرض کرو کہ $A = \{x,y,u,v,1\}$ ، $B = \{3,5,7,8,10,15\}$

$f : A \to B$ کی وضاحت اس طرح کی جاسکتی ہے کہ $f(x) = 5$ ، A کے ہر ایک عنصر کیلئے $x \in A$ دیا گیا ہے خاکہ مستقل تفاعل کی نُمائندگی کرتا ہے۔

(v) متماثل تفاعل (Identity function)

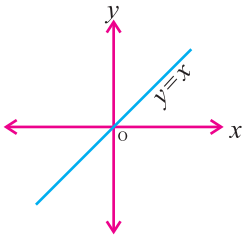


Fig. 1.31

فرض کیجئے A ایک غیر معدوم سٹ ہے ایک تفاعل $f : A \to A$ یکساں تفاعل یا **متماثل تفاعل** A کا ہوگا اگر تمام $a \in A$ کیلئے $f(a) = a$ ہو۔یعنی متماثل تفاعل میں A کا ہر عنصر خود ہی سے تعلق رکھے گا۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ $A = R$ ہے۔تفاعل $f : R \to R$ کی تعریف $f(x) = x$ تمام $x \in R$ کے لئے ایک متماثل تفاعل R پر ہے۔اوپر کا خاکہ A پر متشابہ تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے۔

مثال 1.21 فرض کرو کہ $A = \{1,2,3,4,5\}$ ، $B = N$ اور $f : A \to B$ کی وضاحت $f(x) = x^2$ سے کی جاتی ہے۔ 'f' کی حد معلوم کیجئے۔ تفاعل کی قسم پہچانئے۔

حل : یہاں $A = \{1,2,3,4,5\}$ اور $B = \{1,2,3,4,....\}$

$f(x) = x^2$ اور $f : A \to B$ دیا گیا ہے

$f(1) = 1^2 = 1$; $f(2) = 2^2 = 4$; $f(3) = 9$; $f(4) = 16$; $f(5) = 25$

f کی حد $= \{1,4,9,16,25\}$

چونکہ مختلف عناصر مختلف خیالات سے متعلق ہیں یہ ایک ۔ ایک تفاعل ہے۔ مگر بروں نہیں ہے۔ کیونکہ $3 \in B$ مگر یہاں $x \in A$ کوئی بھی عنصر اس طرح نہیں ہے جو $f(x) = x^2-3$ ہو۔

برائے ذہن نشینی

ایک تفاعل $g : R \to R$ کی تعریف $g(x) = x^2$ سے کی جاتی ہے یہ ایک ایک نہیں ہے کیونکہ اگر $u = 1$ اور $v = -1$ ہو $u \neq v$ مگر $g(u) = g(1) = 1 = g(-1) = g(v)$ اسلئے صرف ضابطہ ہی تفاعل کو ایک ۔ ایک اور بروں نہیں بناتا۔

مثال 1.22

ایک تفاعل $f : [1,6) \to R$ کی وضاحت ذیل کی طرح ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & 1 \le x < 2 \\ 2x - 1 & 2 \le x < 4 \\ 3x^2 - 10 & 4 \le x < 6 \end{cases}$$

(یہاں , $[1 , 6) = \{ x \in R : 1 \le x < 6\}$)

قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $f(5)$ (ii) $f(3)$ (iii) $f(1)$

(iv) $f(2) - f(4)$ (v) $2 f(5) - 3 f(1)$

حل :

(i) آیئے $f(5)$ دریافت کرتے ہیں۔

چونکہ 5 ، 4 اور 6 کے درمیان واقع ہے ہم کو $f(x) = 3x^2 - 10$ استعمال کرنا چاہئے۔

اس طرح $f(5) = 3(5)^2 - 10 = 65$

(ii) $f(3)$ دریافت کرنے کیلئے غور کریں کہ 3 ، 2 اور 4 کے درمیان واقع ہے اس لئے ہم $f(3)$ محسوب کرنے کے لئے $f(x) = 2x - 1$ استعمال کرتے ہیں۔ اس طرح $f(3) = 2(3) - 1 = 5$

(iii) آیئے $f(1)$ دریافت کرتے ہیں۔

اب 1 وقفہ $1 \le x < 2$ میں ہے۔ ∴ ہمیں $f(1)$ معلوم کرنے کے لئے $f(x) = 1+x$ استعمال کرنا چاہئے۔

$f(1) = 1+1 = 2$

(iv) $f(2) - f(4)$

اب 2 ، $2 \le x < 4$ کے وقفے میں ہے اور اسلئے ہم $f(x) = 2x - 1$ استعمال کرتے ہیں۔ چنانچہ

$$f(2) = 2(2) - 1 = 3.$$

مزید 4 ، $4 \le x < 6$ کے وقفے میں ہے چنانچہ ہم $f(x) = 3x^2 - 10$ استعمال کرتے ہیں۔ اسلئے

$$f(4) = 3(4)^2 - 10 = 3(16) - 10 = 48 - 10 = 38$$

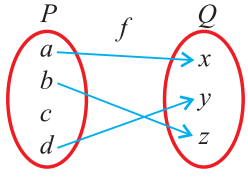
چنانچہ $f(2) - f(4) = 3 - 38 = -35$

(v) $2f(5) - 3f(1)$ محسوب کرنے کے لئے ہم اُن قیمتوں کو استعمال کریں گے، جنھیں ہم پہلے ہی (i) اور (iii) میں محسوب کر چکے ہیں۔ لہٰذا $2f(5) - 3f(1) = 2(65) - 3(2) = 130 - 6 = 124$

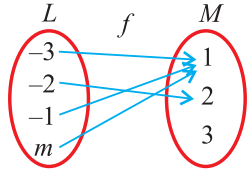
مشق 1.4

1. بیان کرو کہ کیا ذیل میں دئے گئے خاکے تفاعل کی تعریف کرتے ہیں۔ اپنے جواب کے لئے جواز پیش کیجئے۔

(i)



(ii)



2. دئے گئے تفاعل $f = \{ (1,3), (2,5), (4,7), (5,9), (3,1) \}$ کیلئے علاقہ اور حد لکھئے۔

3. فرض کرو کہ $A = \{ 10, 11, 12, 13, 14 \}$; $B = \{ 0, 1, 2, 3, 5 \}$ اور $f_i : A \to B$ ، $i = 1,2,3.$ ذیل کے لئے تفاعل کی قسمیں بیان کیجئے۔ (وجہ پیش کیجئے)

$$f_1 = \{ (10, 1), (11, 2), (12, 3), (13, 5), (14, 3) \}$$

$$f_2 = \{ (10, 1), (11, 1), (12, 1), (13, 1), (14, 1) \}$$

$$f_3 = \{ (10, 0), (11, 1), (12, 2), (13, 3), (14, 5) \}$$

4. اگر $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$; $Y = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ اور $f : X \to Y$ ذیل میں کون سے تعلقات X سے Y کو تفاعلات ہیں؟ تمہارے جواب کیلئے وجہ بتاؤ۔ اگر یہ ایک تفاعل ہے تو اسکی قسم بیان کرو۔

(i) $R_1 = \{ (x, y) | y = x + 2, x \in X, y \in Y \}$

(ii) $R_2 = \{ (1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 3), (5, 5) \}$

(iii) $R_3 = \{ (1, 1), (1, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 7) \}$

(iv) $R_4 = \{ (1, 3), (2, 5), (4, 7), (5, 9), (3, 1) \}$

5. اگر $R = \{(a, -2), (-5, b), (8, c), (d, -1)\}$ ایک متماثل تفاعل کی نمائندگی کرتا ہو تو a, b, c اور d کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

.6 $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ اور $f = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x \in A\right\}$ ، 'f' کی حد لکھئے۔ کیا f, A سے A کو ایک تفاعل ہے ؟

.7 فرض کرو کہ $f = \{ (2, 7), (3, 4), (7, 9), (-1, 6), (0, 2), (5, 3) \}$ ایک تفاعل ہے۔
$A = \{ -1, 0, 2, 3, 5, 7 \}$ سے $B = \{ 2, 3, 4, 6, 7, 9 \}$ کو کیا یہ
(i) ایک-ایک تفاعل ہے (ii) بروں تفاعل ہے۔ (iii) ایک-ایک اور بروں تفاعل ہے؟

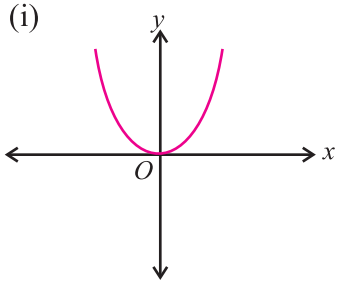
.8 تفاعل میں 2 اور 3 کے پیشِ خیال لکھئے. $f = \{ (12, 2), (13, 3), (15, 3), (14, 2), (17, 17) \}$.

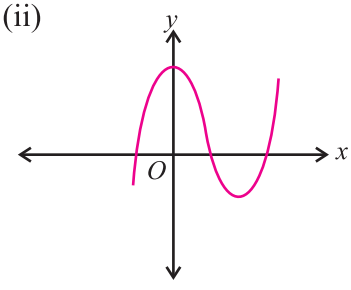
.9 ذیل کی جدول ایک تفاعل $A = \{ 5, 6, 8, 10 \}$ سے $B = \{ 19, 15, 9, 11 \}$ کو تفاعل کی نُمائندگی کرتی ہے۔
جہاں $f(x) = 2x - 1$ ہے۔ a اور b کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

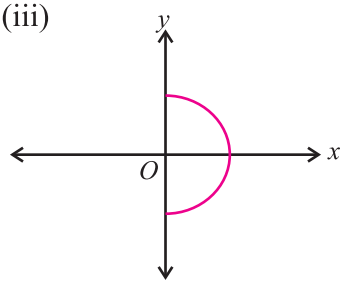
x	5	6	8	10
$f(x)$	a	11	b	19

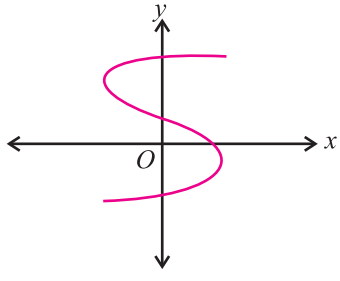
.10 فرض کرو کہ $A = \{ 5, 6, 7, 8 \}$ ، $B = \{ -11, 4, 7, -10, -7, -9, -13 \}$ اور
$f = \{(x, y) : y = 3 - 2x,\ x \in A,\ y \in B \}$
(i) f کے عناصر لکھئے۔ (ii) معاون علاقہ کیا ہے ؟
(iii) حد کیا ہے ؟ (iv) تفاعل کی قسم کی نشان دہی کیجئے۔

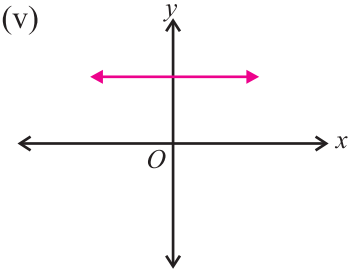
.11 ذیل کی ترسیم کیا تفاعل کی نُمائندگی کرتی ہے ؟ بیان کیجئے۔ تمہارے جواب کیلئے وجہ پیش کیجئے۔

(i)


(ii)


(iii)


(iv)


(v)


.12 تفاعل کی نُمائندگی $f = \{(-1, 2), (-3, 1), (-5, 6), (-4, 3)\}$ ذیل کی طرح کیجئے

(i) ایک جدول اور (ii) ایک پیکانی نقشہ سے

.13 فرض کرو کہ $A = \{6, 9, 15, 18, 21\}$ ، $B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ اور $f : A \to B$ کی تعریف ہے۔

$f(x) = \frac{x-3}{3}$ میں f کی نمائندگی کیجئے

(i) پیکانی نقشہ سے (ii) ترتیب وار جوڑیوں کی طرح (iii) جدول کی طرح (iv) ترسیم سے

.14 فرض کرو کہ $A = \{4, 6, 8, 10\}$ ، $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

اگر $f : A \to B$ کی تعریف $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ سے کی گئی ہے تو 'f' کو

(i) پیکانی نقشہ سے (ii) ایک ترتیب وار جوڑیوں کی مجموعہ سے اور (iii) ایک جدول سے نمائندہ کیجئے۔

.15 ایک تفاعل $f : [-3, 7) \Longrightarrow \mathbb{R}$ کی تعریف ذیل کی طرح ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 1; & -3 \le x < 2 \\ 3x - 2; & 2 \le x \le 4 \\ 2x - 3; & 4 < x \le 6 \end{cases}$$

دریافت کیجئے

(i) $f(5) + f(6)$ (ii) $f(1) - f(-3)$

(iii) $f(-2) - f(4)$ (iv) $\dfrac{f(3) + f(-1)}{2f(6) - f(1)}$.

.16 ایک تفاعل $f : [-7, 6) \Longrightarrow \mathbb{R}$ کی تعریف ذیل میں اسطرح ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & -7 \le x < -5 \\ x + 5 & -5 \le x \le 2 \\ x - 1 & 2 < x < 6 \end{cases}.$$

دریافت کیجئے

(i) $2f(-4) + 3f(2)$ (ii) $f(-7) - f(-3)$ (iii) $\dfrac{4f(-3) + 2f(4)}{f(-6) - 3f(1)}$

مشق 1.5

صحیح جواب مُنتخب کیجئے۔

.1 دوسٹ A اور B کیلئے، $A \cup B = A$ ہے اگر صرف اور صرف

(A) $B \subseteq A$ (B) $A \subseteq B$ (C) $A \neq B$ (D) $A \cap B = \phi$

.2 اگر $A \subset B$ ہوتو $A \cap B =$

(A) B (B) $A \backslash B$ (C) A (D) $B \backslash A$

.3 کوئی دوسٹ P اور Q کیلئے $P \cap Q =$

(A) $\{x : x \in P \text{ or } x \in Q\}$ (B) $\{x : x \in P \text{ and } x \notin Q\}$

(C) $\{x : x \in P \text{ and } x \in Q\}$ (D) $\{x : x \notin P \text{ and } x \in Q\}$

.4 اگر $A = \{p, q, r, s\}$, $B = \{r, s, t, u\}$ ہوتو $A \setminus B =$

(A) $\{p, q\}$ (B) $\{t, u\}$ (C) $\{r, s\}$ (D) $\{p, q, r, s\}$

.5 اگر $n[p(A)] = 64$, ہوتو n(A)

(A) 6 (B) 8 (C) 4 (D) 5

.6 کوئی تین سٹ A ، B اور C کیلئے $A \cap (B \cup C) =$

(A) $(A \cup B) \cup (B \cap C)$ (B) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(C) $A \cup (B \cap C)$ (D) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

.7 کوئی دوسٹ A اور B کیلئے $\{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\} \cap (A \cap B)$

(A) ϕ (B) $A \cup B$ (C) $A \cap B$ (D) $A' \cap B'$

.8 درج ذیل میں سے کونسا صحیح نہیں ہے؟

(A) $A \setminus B = A \cap B'$ (B) $A \setminus B = A \cap B$

(C) $A \setminus B = (A \cup B) \cap B'$ (D) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$

.9 کسی بھی تین سٹ A,B اور C کے لئے B\(AUC) ہے

(A) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (B) $(B \setminus A) \cap (B \setminus C)$

(C) $(B \setminus A) \cap (A \setminus C)$ (D) $(A \setminus B) \cap (B \setminus C)$

.10 اگر n(A) = 20، n(B) = 30 اور n(A U B) = 40 ہوتو n (A ∩B) مساوی ہے۔

(A) 50 (B) 10 (C) 40 (D) 70.

.11 اگر $\{(x,2), (4,y)\}$ ایک مشابہ تفاعل ہوتو (x,y) ہے

(A) (2, 4) (B) (4, 2) (C) (2, 2) (D) (4, 4)

.12 اگر $\{(7,11), (5,a)\}$ ایک متماثل تفاعل کوظاہر کرتا ہےتو 'a' کی قیمت

(A) 7 (B) 11 (C) 5 (D) 9

.13 دیا گیا ہے $f(x) = (-1)^x$، N سے Z کو ایک تفاعل ہوتو f کی حد ہے۔

(A) $\{1\}$ (B) N (C) $\{1, -1\}$ (D) Z

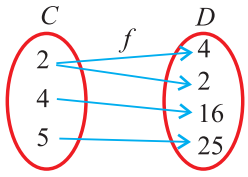
.14 اگر $f = \{(6,3),(8,9),(5,3),(-1,6)\}$ ہوتو 3 کے پیشِ خیال ہیں۔

(A) 5 اور -1 (B) 6 اور 8 (C) 8 اور -1 (D) 6 اور 5

.15 فرض کروکہ $A = \{1, 3, 4, 7, 11\}$، $B = \{-1, 1, 2, 5, 7, 9\}$ اور $f : A \to B$ کودیا گیا ہے۔
تو 'f' ہے۔

(A) ایک ۔ ایک (B) بروں (C) دوہرا (D) تفاعل نہیں ہے

16. دیئے گئے خاکے نُمائندگی کرتے ہیں



(A) بروں تفاعل (B) مستقل تفاعل

(C) ایک ۔ ایک اور بروں تفاعل (D) تفاعل نہیں ہے

17. اگر $A = \{5, 6, 7\}$، $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ اور $f : A \to B$ کو ظاہر کرتا ہے $f(x) = x - 2$ ہوتو 'f' کی حد ہے۔

(A) $\{1, 4, 5\}$ (B) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (C) $\{2, 3, 4\}$ (D) $\{3, 4, 5\}$

18. اگر $f(x) = x^2 + 5$ ہوتو $f(-4)$ ہے۔

(A) 26 (B) 21 (C) 20 (D) –20

19. اگر ایک تفاعل کی حد ایک اکائی سٹ ہے تو یہ ہے

(A) ایک مستقل تفاعل (B) ایک متماثل تفاعل (C) ایک دوہرا تفاعل (D) ایک ۔ ایک تفاعل

20. اگر $f : A \to B$ ایک دُہرا تفاعل ہے اور اگر $n(A) = 5$ ہوتو $n(B)$ مساوی ہے

(A) 10 (B) 4 (C) 5 (D) 25

یاد رکھنے کے نکات

سٹ

- ایک مجموعہ خوب واضح اشیاء کا ذخیرہ ہے۔
  - سٹوں کا اتحاد متبادلہ اور مربوطی ہے۔
  - سٹوں کا تقاطع متبادلہ اور مربوطی ہے۔
  - سٹ کا فرق متبادلہ نہیں ہے۔
  - جب سٹ باہم غیر منسلک ہوں تو سٹ کا فرق مربوطی ہے۔
- تقسیمی کُلیے
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- سٹ کے فرق سے متعلق ڈی مارگن اصول
  - $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
  - $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- اِتمام سے متعلق ڈی مارگن اصول
  - $(A \cap B)' = A' \cup B'$
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- مجموعوں کے اتحاد کیلئے بُنیادیت کے ضابطے۔
  - $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
  - $n(A \cup B \cup C)$
    $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

تفاعلات

- A اور B کے محددی حاصل ضرب کی وضاحت اس طرح کی جاسکتی ہے۔

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}.$$

- R سے A سے B کی جانب ایک تعلق، A×B کا ایک غیر خالی تحتی مجموعہ ہے۔ یعنی $R \subseteq A \times B$ ہے۔
- ایک تفاعل $f : X \to Y$ کی تعریف کی جاتی ہے اگر ذیل کے شرائط رکھتے ہوں۔
  ہر ایک $x \in X$ صرف ایک $y \in Y$ سے تعلق رکھتا ہے۔
- ہر تفاعل کو ایک ترسیم کے ذریعہ ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ جب کہ عام طور پر اس کا معکوس صحیح نہیں ہے۔
- ایک عمودی خط ترسیم کو صرف ایک نقطہ پر قطاع کرتی ہے تو وہ ترسیم تفاعل کی نُمائندگی کرتی ہے۔
- ایک تفاعل کو اس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے۔
  - ایک ترتیب وار جوڑی
  - ایک تیر کا نشان
  - ایک جدول اور
  - ایک ترسیم
- ماڈولس یا مطلق تفاعلی قیمت $y = |x|$ کی وضاحت اس طرح کی جاسکتی ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x & \text{اگر } x \geq 0 \\ -x & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

- تفاعل کی قسمیں ہیں
  - ایک ۔ ایک تفاعل - (واضح عناصر کے واضح خیال ہوں گے)
  - بروں تفاعل - (حد اور معاون علاقہ دونوں مساوی ہیں)
  - دُہرا تفاعل - (ایک ۔ ایک اور بروں دونوں ہے)
  - مستقل تفاعل - (ایک اکائی والے سٹ کی حد)
  - مشابہ تفاعل - (جو ہر ایک داخلہ کو ایسے ہی چھوڑ دیتا ہے)

کیا تم جانتے ہو؟

USA کی کلے میتھے میٹکس انسٹی ٹیوٹ نے 2000ء میں ملینیم پرائز پرابلمس کے نام سے سات مسئلے پیش کئے۔ اگست 2010ء تک ان میں سے چھ مسئلوں کا حل نہیں نکالا گیا۔ ان میں سے کسی بھی ایک مسئلہ کا درست حل پیش کرنے پر انسٹی ٹیوٹ کی جانب سے ایک ملین ڈالر انعام دیا جائے گا۔ (Poincare Conjecture) نامی صرف ایک مسئلہ کو 2010ء میں روس کے ایک ریاضی دان گری گوری پیریل مین نے حل کیا ہے۔ مگر اس نے ملینیم انعام لینے سے انکار کردیا۔ یہاں پر Conjecture سے مراد ایک ریاضی مسئلہ جو ثابت یا غیر ثابت کیا جاسکتا ہے۔

2

حقیقی اعداد کے تواتر اور سلسلے

SEQUENCES AND SERIES OF REAL NUMBERS

Mathematics is the Queen of Sciences and Arithmetic is the Queen of Mathematics - C.F. Gauss

- تمہید
- تواتر (سیکوئنس)
- حسابی سلسلہ (A.P.)
- ہندسی سلسلہ (G.P.)
- سلسلے

2.1 تمہید

اس حصے میں ہم حقیقی اعداد کے تواتر اور سلسلے کے متعلق گفتگو کریں گے۔ حساب کی ابتدا ہی سے تواتر حساب کا ایک بنیادی جز رہا ہے۔ حقیقی زندگی کے حسابی افعال میں بھی وہ دیگر نظریات کو پیش کرنے میں مددگار ثابت ہوئے ہیں۔

فرض کرو کہ حرف N اور R تمام مثبت سالم اعداد اور حقیقی اعداد کے مجموعے ہیں۔ زندگی کے بعض مرحلوں کو فرض کریں۔

(i) ISRO کے سائنس دانوں کی ایک ٹیم نے وقفہ سے ایک مدت کے دوران سطح سمندر سے سیارے کی بلندی کا مشاہدہ کر کے اسے درج کیا ہے۔

(ii) وزرات ریلوے یہ جاننا چاہتی ہے کہ روزانہ چنئی ریلوے اسٹیشن کو کتنے لوگ استعمال کرتے ہیں۔ اس لئے وہ 180 دن تک روزانہ چنئی سنٹرل اسٹیشن میں داخل ہونے والے لوگوں کی تعداد درج کرتے ہیں۔

(iii) نویں جماعت کا ایک دلچسپ طالب علم غیر ناطق عدد $\sqrt{5} = 2.236067978.....$ کے اعشاریہ کے تمام ہندسے معلوم کرنا چاہتا ہے۔ اور وہ انہیں اس طرح سے لکھتا ہے۔ 2,3,6,0,6,7,9,7,8,.....

(iv) ایک طالب علم شمار کنندہ میں 1 سے شروع ہونے والے تمام مثبت کسری اعداد کو جاننا چاہتا ہے۔ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$.

(v) حساب کے استاد اپنی کلاس کے طالب علموں کو حروف تہجی کے مطابق مارکس لکھتے ہیں جیسے 75,95,67,35,58,47,100,89,85,60

لیونارڈو پیسانو
(فیبو ناکی)
(1170-1250)
اٹلی

قدیم حسابوں کی تجدید میں فیبو ناکی نے ایک اہم رول ادا کیا ہے۔ ریاضی دانوں کو اس کا نام اس لئے معلوم ہے کہ اس کے نام سے ایک عددی تواتر موسوم ہے جسے 'فیبو ناکی اعداد' کہتے ہیں۔ حالانکہ اس نے یہ اعداد ایجاد نہیں کئے بلکہ انہیں اس نے بطورِ مثال استعمال کیا۔

(vi) وہی استاد ان مارکس کو صعودی ترتیب میں اس طرح لکھتے ہیں۔

35,47,58,60,67,75,85,89,95,100

مندرجہ بالا ہر ایک مثال میں حقیقی اعداد کے مجموعے ایک ترتیب میں دئے گئے ہیں۔

نوٹ کیجئے کہ (iii) اور (iv) کی فہرست میں لامحدود اعداد موجود ہیں۔ (ii)، (v) اور (vi) میں صرف محدود اعداد کی رقمیں ہیں، مگر (v) اور (vi) میں اعداد کے اُسی مجموعے کو مختلف ترتیب میں دیا گیا ہے۔

2.2 تواتر Sequence

تعریف

حقیقی اعداد کی فہرست ایک خاص ترتیب میں ہو تو اس کو **تواتر** کہتے ہیں۔

(i) اگر کسی تواتر میں صرف محدود اعداد (رقمیں) ہوں تو اس کو **محدود تواتر** کہیں گے۔

(ii) اگر کسی تواتر میں لامحدود اعداد (رقمیں) ہوں تو اس کو **لامحدود تواتر** کہیں گے۔

محدود تواتر کو $S : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ یا $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ سے تعبیر کیا جاتا ہے اور
لامحدود تواتر کو $S : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ یا $S = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

جس میں a_k اس تواتر کے k ویں رقم کو ظاہر کرتا ہے۔ مثال کے طور پر a_7 اس تواتر کی 7 ویں رقم کو ظاہر کرتا ہے۔

نوٹ کریں کہ مندرجہ بالا مثالوں میں (ii)، (v) اور (vi) محدود تواتر ہیں جب کہ (iii) اور (iv) لامحدود تواتر ہیں۔

مشاہدہ کریں کہ

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ کسی تواتر میں اعداد کا ایک مجموعہ ہے، اس کا مطلب یہ ہے کہ اس تواتر میں موجود اعداد کی شناخت اس کے پہلے ممبر، دوسرے ممبر اور تیسرے ممبر اسی طرح جاری رہتا ہے۔ ہم تواتر کی بعض مثالیں پہلے ہی دیکھ چکے ہیں۔ آیئے بعض اور مثالوں کو فرض کریں۔

(i) $2, 4, 6, 8, \cdots, 2010.$ (محدود رقموں کے اعداد)

(ii) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots$ (1 اور 1– کے درمیان رقمیں اہتزاز کرتے ہیں)

(iii) $\pi, \pi, \pi, \pi, \pi.$ (رقمیں یکساں ہیں، اس طرح کے تواتر مستقل تواتر کہلاتے ہیں)

(iv) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \cdots$ (تمام اولی اعداد کی فہرست)

(v) $0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, 0.33333, \cdots.$

(vi) $S = \{a_n\}_1^{\infty}$

کسی سکہ کو n ویں مرتبہ اچھالے جانے پر سر یا پشت حاصل ہونے کے مطابق $a_n = 0$ یا 1 ہوگا۔

مندرجہ بالا مثالوں میں (i) اور (iii) محدود تواتر ہیں اور دیگر لامحدود تواتر ہیں۔ کوئی آسانی سے اسے پہچان سکتا ہے۔ یعنی (i) سے (v) تک ترتیب وار یا کسی قانون کے مطابق فہرست کئے گئے ہیں۔ چنانچہ ہم تواتر میں کوئی رقم ایک مخصوص مقام پر دیکھ سکتے ہیں۔

مگر (vi) میں ہم یہ پیشین گوئی نہیں کر سکتے ہیں کہ اس کی ایک خاص رقم کتنی ہے۔ مگر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ وہ رقم یا تو 1 ہے یا 0 ۔ یہاں پر ہم نے اصطلاح Pattern کو کسی تواتر میں موجود رقم سے پہلے والے عناصر معلوم ہونے پر ہی تواتر کی n ویں رقم کو پہچاننے کے لئے لیا گیا ہے۔ عام طور پر تواتر کو تفاعل کی نظر سے بھی دیکھا گیا ہے۔

2.2.1 تواتر، تفاعل کے نقطہ نظر سے 2.2.1 Sequences viewed as functions

ایک محدود حقیقی تواتر $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ or $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ کو تفاعل $f : \{1,2,3,4, \cdots, n\} \to \mathbb{R}$ کی طرح بھی دیکھا جاسکتا ہے۔ جس کی وضاحت اس طرح کی جاسکتی ہے۔ $f(k) = a_k,\ k = 1,2,3, \cdots, n.$

ایک لامحدود حقیقی تواتر $a_1, a_2, a_3; \cdots, a_n; \cdots$ or $S = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ کو تفاعل $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ کی طرح بھی دیکھا جاسکتا ہے۔ جس کی وضاحت اس طرح کی جاسکتی ہے۔ $g(k) = a_k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$

اس میں علامت $\forall$ ''سب کے لئے'' ظاہر کرتی ہے۔ اگر کسی تواتر $\{a_k\}_1^{\infty}$ کی عام رقم a_k ہو تو ہم مکمل تواتر کو بنا سکتے ہیں۔

جیسا کہ ہم نے مشاہدہ کیا، تواتر ایک تفاعل ہے۔

برائے ذہن نشینی

یہ ضروری نہیں کہ تواتر ایک تفاعل ہو۔ مثال کے طور پر تفاعل $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، سے دیا گیا ہے $f(x) = 2x+1, \forall x \in \mathbb{R}$ ایک تواتر نہیں ہے، چونکہ درکار فہرست بندی ممکن نہیں ہے۔ یہ بھی غور کریں کہ f کا N یا N کا ایک تحتی مجموعہ $\{1,2, \ldots, n\}$ نہیں ہے۔

مثال 2.1

درج ذیل تواتر کے پہلی تین رقمیں لکھئے جس کی n ویں رقم اس طرح سے ہے $c_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall\, n \in \mathbb{N}$

حل:

یہاں پر $c_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall\, n \in \mathbb{N}$

$n = 1,$ کے لئے $c_1 = \dfrac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1.$

$n = 2,$ کے لئے $c_2 = \dfrac{2(2+1)(4+1)}{6} = \dfrac{2(3)(5)}{6} = 5.$

بالآخر $n = 3,$ $c_3 = \dfrac{3(3+1)(7)}{6} = \dfrac{(3)(4)(7)}{6} = 14.$

چنانچہ اس تواتر کی پہلی تین رقمیں 1، 5 اور 14 ہیں۔

مندرجہ بالا مثال میں عام رقم کے لئے ہمیں ایک ضابطہ دیا گیا تھا اور کسی بھی ایک خاص رقم کو براہ راست معلوم کر سکتے ہیں۔ درج ذیل مثال میں ہم تواتر کے بنانے کا ایک اور طریقہ دیکھیں گے۔

مثال 2.2 درج ذیل ہر ایک تواتر میں پہلی پانچ رقمیں لکھئے۔

(i) $a_1 = -1,\quad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n+2},\quad n > 1$ اور $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(ii) $F_1 = F_2 = 1$ اور $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n = 3,4, \ldots.$

حل : معطیہ

(i) $a_1 = -1$ اور $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n+2}, \quad n > 1$

$$a_2 = \frac{a_1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3+2} = \frac{-\frac{1}{4}}{5} = -\frac{1}{20}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4+2} = \frac{-\frac{1}{20}}{6} = -\frac{1}{120}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{5+2} = \frac{-\frac{1}{120}}{7} = -\frac{1}{840}$$

چنانچہ تواتر کی درکار رقمیں ہیں $-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{120}$ اور $-\frac{1}{840}$.

(ii) معطیہ $F_1 = F_2 = 1$ اور $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$ کے لئے

اب $F_1 = 1, F_2 = 1$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

چنانچہ اس تواتر کی پہلی پانچ رقمیں 1, 1, 2 , 3, 5 ہیں

غور کریں

تواتر جس میں $F_1 = F_2 = 1$ اور $n = 3,4$ کے لئے $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n = 3,4, \ldots$ کو ''فیبو نا کی تواتر'' کہا جاتا ہے۔ اس کی رقمیں اس طرح سے ہیں $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$ فیبو نا کی (Fibonacci Sequence) قدرتی نظام میں موجود ہے جیسا کہ سورج مکھی کے پھول میں بیجوں کی ترتیب۔ سورج مکھی کے پھول کے بیجوں کی مخالف سمت میں موجود مرغولوں کی تعداد، فیبو نا کی تواتر کے متواتر اعداد ہیں۔

مشق 2.1

1۔ درج ذیل تواتر کی پہلی تین رقمیں معلوم کرو جس کی n ویں رقمیں اس طرح سے ہیں۔

(i) $a_n = \dfrac{n(n-2)}{3}$ (ii) $c_n = (-1)^n 3^{n+2}$ (iii) $z_n = \dfrac{(-1)^n n(n+2)}{4}$

2۔ درج ذیل تواتر میں ان کی n ویں رقمیں دی گئی ہیں۔ ہر ایک کے لئے اس میں دی گئی رقمیں معلوم کیجئے۔

(i) $a_n = \dfrac{n+2}{2n+3}; \quad a_7, a_9$ (ii) $a_n = (-1)^n 2^{n+3}(n+1); \; a_5, a_8$

(iii) $a_n = 2n^2 - 3n + 1; \; a_5, a_7$ (iv) $a_n = (-1)^n (1 - n + n^2); a_5, a_8$

3۔ درج ذیل تواتر میں 18 ویں اور 25 ویں رقمیں معلوم کرو جس کو اس طرح

$$a_n = \begin{cases} n(n+3), & \text{اگر } n \in \mathbb{N} \text{ جفت ہو اور n} \\ \dfrac{2n}{n^2+1}, & \text{اگر } n \in \mathbb{N} \text{ طاق ہو۔ اور n} \end{cases}$$

4۔ درج ذیل تواتر میں 18 ویں اور 25 ویں رقمیں معلوم کرو

$$b_n = \begin{cases} n^2, & \text{اگر } n \in \mathbb{N} \text{ جفت ہو اور n} \\ n(n+2), & \text{اگر } n \in \mathbb{N} \text{ طاق ہو۔ اور n} \end{cases}$$

5۔ درج ذیل تواتر کی پہلی پانچ رقمیں معلوم کرو جو اس طرح سے ہے

$a_1 = 2, a_2 = 3 + a_1$ اور $a_n = 2a_{n-1} + 5$ $n > 2$ کے لئے

6۔ درج ذیل تواتر کی پہلی چھ رقمیں معلوم کرو جو اس طرح سے ہے

$a_1 = a_2 = a_3 = 1$ اور $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $n > 3$ کے لئے

2.3۔ حسابی تواتر یا حسابی سلسلے (A.P.)

اس حصے میں ہم بعض خاص قسم کے تواتر دیکھیں گے۔

تعریف

ایک تواتر $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ اس وقت **حسابی سلسلہ** کہلائے گا جب $a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbb{N}$ ہو جس میں d ایک مستقل ہو۔ یہاں پر a1 پہلی رقم اور d عام فرق کہلائے گی۔ حسابی تواتر کو حسابی سلسلہ بھی کہتے ہیں۔ (A.P)

مثالیں

(i) 2, 5, 8, 11, 14, ... ایک حسابی سلسلہ ہے جس میں $a_1 = 2$ اور عام فرق $d = 3$ ہے۔

(ii) – 4, – 4, – 4, – 4, ... ایک حسابی سلسلہ ہے کیوں کہ اس میں $a_1 = -4$ اور عام فرق $d = 0$ ہے۔

(iii) 2, 1.5, 1, 0.5, – 0.5, – 1.01, – 1.5, ... ایک A.P. ہے جس میں $a_1 = 2$ اور $d = -0.5$ ہے۔

A.P کی عام شکل

آیئے ہم A.P. کی عام شکل کو سمجھنے کی کوشش کریں۔ فرض کرو کہ حسابی سلسلہ $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ کی پہلی رقم a ہے اور d عام فرق ہے۔ یعنی $a_{n+1} = a_n + d, \ \forall n \in \mathbb{N}$ اور $a_1 = a$

n = 1, 2, 3,..... کے لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$a_2 = a_1 + d = a + d = a + (2-1)d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a+d) + d = a + 2d = a + (3-1)d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a+2d) + d = a + 3d = a + (4-1)d$$

اور پردئے طریقے سے n ویں رقم a_n اس طرح ہوگی

$$a_n = a_{n-1} + d = [a + (n-2d)] + d = a + (n-1)d$$

چنانچہ ہمارے پاس ہر $n \in \mathbb{N}$ کے لئے $a_n = a + (n-1)\, d$ ہے۔
لہٰذا ایک مثالی تواتر یا A.P. اس طرح دکھائی دیتا ہے۔

$$a\,,\ \ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d\ .\ .\ .\ .\ a + (n-1)\, d,\ a + nd\ .\ .\ .$$

اور ہر ایک $n \in N$ کے کسی بھی حسابی سلسلہ کی عام رقموں کی عام شکل کا ضابطہ اس طرح ہوگا۔
یعنی ہر ایک $n \in N$ کے لئے $a_n = a + (n-1)\, d$

غور کریں

(i) ایک تواتر محدود بھی ہوسکتا ہے۔لہٰذا ایک AP کے صرف n رقم ہوں تو آخری رقم l اس طرح دی جاتی ہے
$l = a + (n-1)d$

(ii) $l = a + (n-1)d$ کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔ $n = \dfrac{l-a}{d} + 1$ اگر پہلی رقم، آخری رقم اور عام فرق دیا گیا ہو تو ہم آخری رقم معلوم کر سکتے ہیں۔

(iii) ایک حسابی سلسلے کے تین متواتر ارقام $m - d\,,\ m\,,\ m + d$ کے شکل میں ہوں گے۔

(iv) ایک حسابی سلسلے کے چار متواتر ارقام $m - 3d\,,\ m - d\,, m + d,\ m + 3d$ کی شکل میں ہوں گے جن کا عام فرق $2d$ ہوگا

(v) ایک حسابی سلسلہ کی ہر ایک رقم کے ساتھ کسی مستقل کو جمع یا تفریق کیا جائے تو وہ سلسلہ حسابی سلسلہ ہی رہے گا۔

(vi) ایک حسابی سلسلہ کی ہر ایک رقم کے ساتھ کسی غیر صفری مستقل کے ساتھ ضرب دیا جائے یا تفریق کیا جائے تو وہ سلسلہ حسابی سلسلہ ہی رہے گا

مثال : 2.3

ذیل کی کونسی تواتر A.P میں ہے۔ (i) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \cdots$. (ii) $3m - 1, 3m - 3, 3m - 5, \cdots$.

حل : (i) فرض کرو کہ دی گئی تواتر $n \in N$ ، t_n کی n ویں رقم ہو تو

$$\therefore \quad t_1 = \frac{2}{3},\ t_2 = \frac{4}{5},\ t_3 = \frac{6}{7}$$

اس لئے $t_2 - t_1 = \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{12-10}{15} = \dfrac{2}{15}$

$$t_3 - t_2 = \frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{30-28}{35} = \frac{2}{35}$$

چونکہ $t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$ دی گئی تواتر A.P. نہیں ہے۔

(ii) دیا گیا ہے۔ $3m - 1, 3m - 3, 3m - 5, \ldots$

یہاں پر $t_1 = 3m - 1,\ t_2 = 3m - 3,\ t_3 = 3m, - 5\ \cdots$.

$$\therefore \quad t_2 - t_1 = (3m-3) - (3m-1) = -2$$

اسی طرح $t_3 - t_2 = (3m-5) - (3m-3) = -2$

لہٰذا دیا گیا تواتر ایک A.P. ہے جس کی پہلی رقم $3m-1$ اور عام فرق -2 ہے۔

مثال : 2.4 حسابی سلسلے کی پہلی رقم اور عام فرق معلوم کیجئے۔

(i) $5, 2, -1, -4, \cdots$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{17}{6}$

حل :

(i) $a = 5$ پہلی رقم اور $d = 2 - 5 = -3$ عام فرق ہے۔

(ii) $a = \frac{1}{2}$ پہلی رقم اور $d = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}$ عام فرق ہے۔

مثال : 2.5

معلوم کرو کہ حسابی سلسلہ $20, 19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}, \ldots$ کا ایک سب سے چھوٹا مثبت سالم عدد n اس طرح کہ t_n ہو، منفی ہوگا؟

حل :

$$a = 20,\ d = 19\frac{1}{4} - 20 = -\frac{3}{4}$$

پہلے مثبت سالم عدد معلوم کرنا چاہئے جیسا کہ $t_n < 0$

اس کو اسی طرح حل کرنا ہے $a + (n-1)d < 0$

چھوٹا سا عدد $n \in N$ کے لئے $20 + (n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < 0$

اب $(n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < -20 \implies (n-1) \times \frac{3}{4} > 20$

(نامساوت کو دونوں جانب -1 سے ضرب کر کے معکوس حاصل کر سکتے ہیں۔)

$$\therefore \quad n - 1 > 20 \times \frac{4}{3} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}.$$

$n > 27\frac{2}{3} = 27.66$ یعنی $n > 26\frac{2}{3} + 1$

$n \in N$ کا چھوٹا مثبت سالم عدد $n = 28$ جو اس نامساوات کی شرط پوری کرتا ہے۔

حسابی سلسلے کا منفی عدد 28 ویں رقم ہے۔

چنانچہ اس حسابی سلسلہ کا پہلا منفی عدد 28 واں رقم ہے۔

مثال 2.6

ایک پھول کے باغ کی پہلی صف میں 23 گلاب کے پودے ہیں۔ اور دوسری صف میں 21 پودے ہیں۔ اور تیسری صف میں 19 پودے ہیں۔ اگر آخری صف میں 5 گلاب کے پودے ہیں۔ تو معلوم کیجئے کہ پھول کے باغ میں کل کتنے صف (row) ہیں۔

حل : فرض کرو کہ پھول کے باغ میں صفوں کی تعداد n ہے۔

قطاروں میں گلاب کے پھول کے پودوں کی تعداد بالترتیب $1^{st}, 2^{nd}, 3^{rd} \ldots n^{th}$ $23, 21, 19, \ldots 5$ ہیں۔

یعنی

$t_k - t_{k-1} = -2$ جہاں $k = 2 \ldots n$ اب

$\therefore$ لہٰذا $23, 21, 19, \cdots, 5$ ارقام حسابی سلسلے میں ہیں۔

یہاں $a = 23,\ \ d = -2,\ \ l = 5$ ہے۔

$$\therefore\ \ n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{5-23}{-2} + 1 = 10.$$

لہٰذا پھول کے باغ میں 10 قطار ہیں۔

مثال : 2.7 ایک شخص 2010ء میں سالانہ تنخواہ ₹ 30,000 پر کام میں داخل ہوتا ہے۔اسکی تنخواہ میں ہر سال ₹ 600 کا اضافہ ہوتا ہے۔تو معلوم کیجئے کہ کس سال اس کی سالانہ تنخواہ ₹ 39,000 ہوگی؟

حل : فرض کرو کہ سالانہ تنخواہ ₹ 39,000 n ویں سال میں پہنچی ہے۔

اس شخص کی سالانہ تنخواہ $[2010 + (n-1)]$, ... , 2010, 2011, 2012 میں بالترتیب اس طرح ہوگی

₹ 30,000 , ₹ 30,600 , ₹ 31,200 ..... ₹ 39,000

پہلے یہ معلوم کیجئے کہ تنخواہ کا سلسلہ ایک حسابی سلسلہ ہے یا نہیں۔

رقموں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے سلسلہ کی رقم کو ایک مستقل 100 سے تقسیم کریں تو ایک نیا سلسلہ اس طرح حاصل ہوتا ہے۔

300, 306, 312....390

یہاں $a = 300, d = 6, l = 390$ ہے۔

چنانچہ $n = \frac{l-a}{d} + 1$

$$= \frac{390-300}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1 = 16$$

اس شخص کی 16 ویں سالانہ تنخواہ ₹ 39,000 ہے۔

چنانچہ 2025 میں اس شخص کی تنخواہ ₹ 39,000 ہوگی۔

مثال : 2.8 تین اعداد کی نسبت 7 : 5 : 2 ہے۔ اگر پہلا عدد، دوسرے عدد سے 7 سے تفریق کرنے کے بعد حاصل ہونے والا عدد اور تیسرا عدد ایک حسابی تواتر بناتے ہوں تو اعداد معلوم کرو۔

حل : فرض کرو کہ $2x, 5x, 7x$ غیر معلوم اعداد ہیں اس طرح سے کہ $x, (x \neq 0)$

دئے گئے سوال کے مطابق $2x, 5x-7, 7x$ ایک A.P. میں ہیں۔

$\therefore\ (5x-7) - 2x = 7x - (5x-7) \implies 3x - 7 = 2x + 7$ چنانچہ $x = 14.$

لہٰذا اعداد 28, 70, 98 ہیں۔

مشق 2.2

1) A.P کی پہلی رقم 6 اور عام فرق 5 ہے۔حسابی سلسلہ اور اس کی عام رقم معلوم کیجئے۔

2) 125, 120, 115, 110..... حسابی سلسلے کا عام فرق اور 15 ویں رقم معلوم کیجئے۔

3) $24,\ 23\frac{1}{4},\ 22\frac{1}{2},\ 21\frac{3}{4}, \cdots$ اس حسابی سلسلہ کی کونسی رقم 3 ہے ؟

4) $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2} \ldots$ حسابی سلسلے کی 12 ویں رقم دریافت کیجئے۔

5) A.P $4, 9, 14 \ldots\ldots$ کی 17 ویں رقم دریافت کیجئے۔

6) نیچے دئے گئے حسابی سلسلے میں کتنے ارقام ہیں۔

(i) $-1, -\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}, \cdots, \frac{10}{3}$. (ii) $7, 13, 19, \cdots, 205$.

7) اگر A.P کی نویں رقم صفر ہے۔تو ثابت کیجئے کہ 29 ویں رقم 19 ویں رقم کی دگنی ہے۔

8) A.P کی 10 ویں اور 18 ویں رقمیں بالترتیب 41 اور 73 ہیں۔27 ویں رقم معلوم کیجئے۔

9) نیچے دئے گئے A.P میں n معلوم کیجئے جب کہ دونوں سلسلوں کے n ویں رقم مساوی ہیں۔

$1, 7, 13, 19, \cdots$ اور $100, 95, 90, \cdots$.

10) کتنے دو ہندسی اعداد 13 سے تقسیم پذیر ہیں؟

11) ایک TV تیار کرنے والی کمپنی 7ویں سال میں TV 1000 تیار کرتی ہے۔10 ویں سال میں TV 1450 تیار کرتی ہے۔TV کی تیاری میں ہر سال مستقل اور مساوی طور پر اضافہ ہوتا ہے تو معلوم کیجئے کہ پہلے سال اور 15 ویں سال میں کتنے TV تیار ہوئے ہوں گے؟

12) ایک آدمی پہلے ماہ کے دوران ₹ 640 بچاتا ہے۔دوسرے ماہ ₹ 720، تیسرے ماہ ₹ 800۔ اسی طرح اگر بچت متواتر جاری رہے تو 25 ویں ماہ میں اس کی بچت کیا ہوگی ؟

13) ایک حسابی سلسلے کے تین متواتر عددوں کا حاصل جمع 6 اور حاصل ضرب -120 ہے تو تین اعداد دریافت کیجئے۔

14) ایک حسابی سلسلے کی تین متواتر عددوں کا حاصل جمع 18 اور ان کے مربعوں کا حاصل جمع 140 ہو تو اعداد دریافت کیجئے۔

15) ایک A.P. کی m ویں رقم کا m گنا، n ویں رقم کا n گنا کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اس کی $(m+n)$ ویں رقم صفر ہے۔

16) ایک شخص ₹ 25,000 جمع کر کے سالانہ 14% شرح سود حاصل کرتا ہے۔کیا یہ رقمیں (سود + اصل) ایک حسابی تواتر بناتی ہیں؟ اگر ہاں تو 20 سال کے بعد کتنی رقم جمع ہو گی؟

17) اگر a, b, c حسابی سلسلے کے ارقام ہیں تو ثابت کیجئے کہ $(a-c)^2 = 4(b^2 - ac)$

18) اگر a, b, c ایک A.P ہے تو ثابت کیجئے $\frac{1}{ab}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{bc}$ بھی ایک A.P. میں ہیں۔

19) اگر a^2, b^2, c^2 ایک A.P ہے تو ثابت کیجئے $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{b+c}$ بھی ایک A.P. میں ہیں۔

20) اگر $a^x = b^y = c^z, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ اور $b^2 = ac$ ہو تو بتائیے کہ $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ ایک حسابی سلسلہ میں ہیں۔

2.4 ہندسی سیکوئنس یا ہندسی سلسلہ (G.P.) (Goemetric Progression)

تعریف

سیکوئنس $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ کو ہندسی سیکوئنس کہتے ہیں۔ $a_{n+1} = a_n\, r,\ n \in N$ یہاں r غیر صفری مستقل عدد ہے۔ a_1 پہلی رقم اور r مشترک نسبت ہے۔ ہندسی سیکوئنس کو ہندسی سلسلہ بھی کہتے ہیں۔

ہندسی سلسلوں کی بعض مثالوں پر غور کریں۔

(i) $3, 6, 12, 24 \ldots\ldots$

یہ سیکوئنس $\{a_n\}_1^\infty$ ہندسی سیکوئنس ہے۔ اگر $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$

$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = 2 \neq 0$ یہ سیکوئنسی ہندسی سیکوئنس ہے۔

(ii) $\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \cdots$

یہاں پر ہمارے پاس ہے $\frac{-\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{81}}{-\frac{1}{27}} = \frac{-\frac{1}{243}}{\frac{1}{81}} = -\frac{1}{3} \neq 0.$

غرض دیا گیا سلسلہ ایک ہندسی سلسلہ ہے۔

ایک ہندسی سلسلہ کی عام شکل :

عام ہندسی سلسلہ میں a پہلی رقم اور r مشترک نسبت ہے۔ تو ہندسی سیکوئنس $\{a_n\}_{k=1}^\infty$ ہے۔ اب ہمارے پاس

$a_1 = a$ اور $\frac{n+1}{a_n} = r$ ، $n \in \mathbb{N}$ کے لئے

لہٰذا $n \in \mathbb{N}$ کے لئے $a_{n+1} = r\, a_n$

$n = 1, 2, 3,$ کے لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$a_2 = a_1 r = ar = ar^{2-1}$$
$$a_3 = a_2 r = (ar)r = ar^2 = ar^{3-1}$$
$$a_4 = a_3 r = (ar^2)r = ar^3 = ar^{4-1}$$

درج ذیل نمونے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$a_n = a_{n-1} r = (ar^{n-2})r = ar^{n-1}.$$

لہٰذا ہر $n \in N$ کے لئے ایک ہندسی سلسلہ کی n ویں رقم $a_n = ar^{n-1}$ ہوگی۔

لہٰذا ایک عام (مثالی) ہندسی سلسلہ $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}, ar^n, \ldots,$ کی صورت میں ہوگا۔

ہندسی سلسلہ کا عام ضابطہ $t_n = ar^{n-1}$ ہے جس میں $n = 1, 2, 3, \ldots,$ ہے۔

فرض کیجئے کہ ایک سلسلے کے پہلے کے چند ارقام دئے گئے ہوں تو ہم یہ کیسے معلوم کر سکتے ہیں دیا گیا سلسلہ ہندسی سلسلہ ہے یا نہیں؟

اگر $\frac{t_{n+1}}{t_n} = r, \forall\, n \in \mathbb{N}$ جس میں r ایک غیر صفری مستقل ہے تو $\{t_n\}_1^\infty$ یہ G.P. میں ہوگا۔

غور کریں

(i) اگر کسی سلسلے میں پہلی رقم کے علاوہ کسی بھی رقم اور اس کی پچھلی رقم کی نسبت غیر صفری مستقل ہو تو وہ سلسلہ ایک ہندسی سلسلہ ہوگا۔

(ii) ایک ہندسی سلسلہ کی ہر ایک رقم کو کسی غیر صفری مستقل کے ساتھ ضرب دیا جائے یا تقسیم کیا جائے تو وہ سلسلہ ہندسی سلسلہ ہی رہے گا

(iii) ہندسی سلسلے میں تین متواتر ارقام اس طرح سے لئے جائیں گے یعنی $\frac{a}{r}, a, ar$ جس کا مشترک فرق r ہے۔

(iv) ایک ہندسی سلسلہ کے چار متواتر اعداد $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ اس طرح سے لئے جائیں گے۔

(یہاں پر مشترک نسبت r^2 ہے، نہ کہ r جیسا کہ اوپر دیا گیا ہے)

مثال : 2.9

نیچے دئے گئے سیکوئنس میں کونسا ہندسی سیکوئنس ہے۔

(i) $5, 10, 15, 20, \cdots$. (ii) $0.15, 0.015, 0.0015, \cdots$. (iii) $\sqrt{7},\ \sqrt{21},\ 3\sqrt{7},\ 3\sqrt{21}, \cdots$.

حل :

(i) متواتر نسبتوں کو فرض کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{10}{5} \neq \frac{15}{10}$.

اسمیں مشترک نسبت نہیں ہے اسی لئے یہ ہندسی سیکوئنس نہیں ہے۔

(ii) ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{0.015}{0.15} = \frac{0.0015}{0.015} = \cdots = \frac{1}{10}$.

چونکہ یہاں مشترک نسبت $\frac{1}{10}$ ہے، اس لئے یہ ہندسی سیکوئنس ہے۔

(iii) یہاں پر $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{3\sqrt{7}} = \cdots = \sqrt{3}$ ، لہٰذا مشترک نسبت $\sqrt{3}$ ہے۔

لہٰذا دی گئی سیکوئنس ہندسی ہندسی سیکوئنس ہے۔

مثال : 2.10

درج ذیل ہندسی سیکوئنس کی مشترک نسبت اور عام رقم معلوم کیجئے۔

(i) $\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, \cdots$. (ii) $0.02, 0.006, 0.0018, \cdots$.

حل :

(i) دی گئی سیکوئنس ہندسی سیکوئنس ہے۔ مشترک نسبت اس طرح دی گئی ہے۔

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \cdots.$$

لہٰذا $r = \dfrac{\frac{6}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}$.

سیکوئنس کی پہلی رقم $\frac{2}{5}$ ہے۔ لہٰذا سیکوئنس کی عام رقم اس طرح سے ہے۔

$$t_n = ar^{n-1},\ n = 1,2,3,\ \cdots$$

$$\Longrightarrow \qquad t_n = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}, \quad n = 1,2,3,\ \cdots$$

(ii) ہندسی سیکوئنس کی مشترک نسبت اس طرح سے ہے۔

$$r = \frac{0.006}{0\ 02} = 0.3 = \frac{3}{10}.$$

ہندسی سیکوئنس کی پہلی رقم 0.02 ہے۔ لہٰذا سیکوئنس کو اس طرح ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$t_n = (0.02)\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}, \quad n = 1,2,3,\ \cdots$$

مثال : 2.11

کسی ہندسی سلسلے کی 4 ویں رقم $\frac{2}{3}$ ہے اور 7 ویں رقم $\frac{16}{81}$ ہے تو ہندسی سلسلہ معلوم کیجئے۔

حل : دیا گیا ہے کہ $t_7 = \frac{16}{81}$. اور $t_4 = \frac{2}{3}$

ضابطے کو استعمال کرتے ہوئے $t_n = ar^{n-1},\ n = 1,2,3,\ \cdots$ کی عام رقم کے لئے ہمارے پاس ہے۔

$$t_4 = ar^3 = \frac{2}{3} \quad \text{اور} \quad t_7 = ar^6 = \frac{16}{81}.$$

غور کیجئے کہ ہندسی سیکوئنس معلوم کرنے کے لئے ہمیں a اور r معلوم کرنا ہے۔

t_7 کو t_4 سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{t_7}{t_4} = \frac{ar^6}{ar^3} = \frac{\frac{16}{81}}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{27}.$$

لہٰذا $r^3 = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $r = \frac{2}{3}$.

اب $t_4 = \frac{2}{3} \Longrightarrow ar^3 = \left(\frac{2}{3}\right)$.

$$\Longrightarrow \qquad a\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{2}{3}. \qquad \therefore \quad a = \frac{9}{4}.$$

لہٰذا مطلوبہ ہندسی سلسلہ اس طرح ہے $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}, ar^n, \ldots,$

یعنی $\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right), \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2, \ldots.$

مثال 2.12

بیکٹیریا کے تکثر (Culture) کے دوران ایک گھنٹہ میں بیکٹیریا کی تعداد دُگنی ہو جاتی ہے۔ ابتداء میں بیکٹیریا کی تعداد 30 تھی تو 14 ویں گھنٹے کے آخر میں بیکٹیریا کی تعداد کتنی ہوگی؟

حل : غور کریں کہ بیکٹیریا کی تعداد ہر گھنٹے کے آخر میں دوہری ہو جاتی ہے۔

حل :

ابتداء میں بیکٹیریا کی تعداد = 30

ایک گھنٹے کے آخر میں بیکٹیریا کی تعداد = 2(30)

بیکٹیریا کی تعداد دوسرے گھنٹے کے آخر میں = $2\ (2)\ (30) = 30\ (2)^2$

اس طرح بیکٹیریا کی مشترک نسبت 2 ہے۔

غرض n گھنٹے مسلسل بڑھنے کے بعد ہر گھنٹہ بیکٹیریا کی تعداد $r = 2$ یعنی مشترک نسبت ہوگی۔

اگر t_n بیکٹیریا کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ تو n گھنٹوں بعد

ہندسی سلسلے کی ایک عام رقم ہوگی $t_n = 30\ (2^n)$

بیکٹیریا کی تعداد کی 14 ویں رقم = $t_{14} = 30\ (2^{14})$

مثال : 2.13

500 روپئے بینک میں جمع کرنے پر سالانہ 10% شرح سود سودِ مرکب محسوب ہوگا ہے۔ 10 ویں سال کے آخر میں اس کی جمع کردہ رقم کتنی ہوگی؟

حل : اصل زر 500 روپئے ہے، لہٰذا پہلے سال میں اس زر اصل کے لئے سود $500\left(\frac{10}{100}\right) = 50.$

لہٰذا دوسرے سال کا زر اصل = پہلے سال کا زر اصل + سود

$$= 500 + 500\left(\frac{10}{100}\right) = 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)$$

اب دوسرے سال کا سود $= \left(500\left(1 + \frac{10}{100}\right)\right)\left(\frac{10}{100}\right).$

لہٰذا تیسرے سال کا زر اصل $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right) + 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)\frac{10}{100}$

$$= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^2$$

اسی طرح جاری رہنے پر n ویں سال کا زر اصل $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1}$

n ویں سال کا زر اصل = (n–1) ویں سال کے آخر میں رقم

لہٰذا n ویں سال کے آخر میں رقم $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1} + 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1}\left(\frac{10}{100}\right) = 500\left(\frac{11}{10}\right)^n$

10 ویں سال کے آخر میں رقم $= ₹\ 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{10} = ₹\ 500\left(\frac{11}{10}\right)^{10}.$

برائے ذہن نشینی

اوپر کے طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے سود مرکب محسوب کرنے کے لئے ضابطہ بنا سکتے ہیں۔

$$A = (P + i)^n$$

جس میں A رقم، P زر اصل، i سود اور n سالوں کی تعداد ہوگی۔

$$i = \frac{r}{100}$$

مثال : 2.14

ایک ہندسی سلسلے کے پہلے تین ارقام کا حاصل جمع $\frac{13}{12}$ اور ان کا حاصل ضرب -1 ہے مشترک نسبت اور رقم معلوم کیجئے۔

حل : ہم فرض کریں کہ ایک ہندسی سلسلے کے پہلے تین ارقام $\frac{a}{r}, a, ar$ اس طرح ہیں۔

$$\text{حاصل جمع} = \frac{a}{r} + a + ar = \frac{13}{12}$$

$$\text{اسی طرح} \quad a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{13}{12} \implies a\left(\frac{r^2 + r + 1}{r}\right) = \frac{13}{12} \qquad (1)$$

$$\text{حاصل ضرب} \quad \left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -1$$

$$\implies \quad a^3 = -1 \quad \therefore \quad a = -1$$

$a = -1$ کو مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$(-1)\left(\frac{r^2 + r + 1}{r}\right) = \frac{13}{12}$$

$$\implies \quad 12r^2 + 12r + 12 = -13r$$

$$12r^2 + 25r + 12 = 0$$

$$(3r + 4)(4r + 3) = 0$$

لہٰذا $r = -\frac{4}{3}$ یا $-\frac{3}{4}$

جب $r = -\frac{4}{3}$ اور $a = -1$ ہو تو رقمیں اس طرح ہوں گی۔ $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$.

جب $r = -\frac{3}{4}$ اور $a = -1$ ہو تو ہم اس طرح حاصل کرتے ہیں، جو الٹی ترتیب میں ہیں $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$ ۔

مثال : 2.15

اگر a, b, c, d ایک G.P ہو تو ثابت کیجئے کہ $(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 = (a - d)^2$

حل : a, b, c, d ایک G.P ہے جس میں a پہلی رقم اور r مشترک نسبت ہے۔

لہٰذا $b = ar, \quad c = ar^2, \quad d = ar^3$

یہاں پر $(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2$

$$= (ar - ar^2)^2 + (ar^2 - a)^2 + (ar^3 - ar)^2$$

$$= a^2[(r - r^2)^2 + (r^2 - 1)^2 + (r^3 - r)^2]$$

$$= a^2[r^2 - 2r^3 + r^4 + r^4 - 2r^2 + 1 + r^6 - 2r^4 + r^2]$$

$$= a^2[r^6 - 2r^3 + 1] = a^2[r^3 - 1]^2$$

$$= (ar^3 - a)^2 = (a - ar^3)^2 = (a - d)^2$$

مشق 2.3

1) معلوم کیجئے کہ مندرجۂ ذیل میں کونسا ہندسی سیکوئنس ہے۔اگر وہ ہندسی سیکوئنس میں ہوں تو ان کی مشترک نسبت معلوم کرو۔

(i) $0.12,\ 0.24,\ 0.48,\cdots.$ (ii) $0.004,\ 0.02,\ 0.1,\cdots.$ (iii) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{27},\ \cdots.$

(iv) $12,\ 1,\ \frac{1}{12},\cdots.$ (v) $\sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}},\cdots.$ (vi) $4,\ -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\cdots.$

2) $\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ -2,\cdots.$ ہندسی سلسلے کی 10 ویں رقم اور مشترک نسبت معلوم کیجئے۔

3) ایک ہندسی سلسلے کی 4 ویں اور 7 ویں رقمیں بالترتیب 54 اور 1458 ہیں۔ G.P معلوم کیجئے۔

4) ایک ہندسی سلسلے کی پہلی رقم $\frac{1}{3}$ اور 6 ویں رقم $\frac{1}{729}$ ہے۔G.P دریافت کیجئے۔

5) ذیل کے کونسے ارقام ہندسی سلسلے میں ہیں :

(i) $\frac{128}{15625}$ ہے $5,\ 2,\ \frac{4}{5},\ \frac{8}{25},\cdots$ (ii) 1024 ہے $1,\ 2,\ 4,\ 8,\cdots$

6) G.P $162, 54, 18.....$ اور $\frac{2}{81},\ \frac{2}{27},\ \frac{2}{9},\cdots$ کی n ویں رقم مساوی ہوں تو n کی قیمت دریافت کیجئے۔

7) G.P کی پہلی رقم 3 اور 5 ویں رقم 1875 ہو تو مشترک نسبت معلوم کیجئے۔

8) ہندسی سلسلے کے تین اعداد کا حاصل جمع $\frac{39}{10}$ اور حاصل ضرب 1 ہے۔مشترک نسبت اور رقمیں معلوم کیجئے۔

9) ایک G.P میں تین متواتر اعداد کا حاصل ضرب 216 ہے۔ان عددوں کے جوڑیوں کے حاصل ضرب کا حاصل جمع 156 ہے اعداد معلوم کیجئے۔

10) ایک G.P کے تین متواتر اعداد معلوم کیجئے جن کا حاصل جمع 7 اور انکے مقلوب کا حاصل جمع $\frac{7}{4}$ ہے۔

11) ایک ہندسی سلسلے کے پہلے تین اعداد کا حاصل جمع 13 ہے۔اوران کے مربعوں کا حاصل جمع 91 ہے۔ G.P معلوم کیجئے۔

12) ₹1000 بنک میں جمع کرنے پر سالانہ سودِ مرکب 5% حاصل ہوتا ہے۔معلوم کیجئے کہ 12 سال کے اختتام کتنی رقم ملے گی؟

13) ایک کمپنی نقل کرنے کی مشین (Copier) ₹ 50,000 میں خریدتی ہے۔مشین کی قیمت میں سالانہ 45 % کی کمی ہوتی ہے۔معلوم کیجئے کہ 15 سال کے بعد مشین کی قیمت کیا ہوگی ؟

14) اگر a, b, c, d ایک G.P ہے تو ثابت کیجئے۔ $(a-b+c)(b+c+d)=ab+bc+cd.$

15) اگر a, b, c, d ایک G.P میں ہوں تو ثابت کیجئے کہ $a+b,\ \ b+c,\ \ c+d,$ بھی ایک G.P میں ہیں۔

2.5 سلسلے (Series):

نیچے دئے گئے مسئلہ پر غور کیجئے۔

ایک آدمی یکم جنوری 1990 کو 25,000 ₹ سالانہ تنخواہ پر کام میں داخل ہوتا ہے۔ ہر سال اس کی تنخواہ میں 500 ₹ کا اضافہ ہوتا ہے۔ معلوم کیجئے کہ یکم جنوری 2010 تک اُس شخص نے کتنی تنخواہ حاصل کی ہوگی ؟

پہلے یہ غور کیجئے کہ اس کی سالانہ تنخواہ حسابی تواتر بنتی ہے۔

$$25000,\ 25500,\ 26000,\ 26500\ .....\ (25000 + 19(500))$$

$$25000 + 25500 + 26000 + 26500\ .....\ (25000 + 19(500)) = 20$$ سال کی تنخواہ جمع کرنے پر

چنانچہ تواتر کے حاصل جمع کا تصور اسی طرح سے ہوا ہے۔

تعریف

کسی تواتر کے رقموں کو جمع کرنے کے لئے بنائی گئی عبارت **سلسلہ** کہلاتی ہے۔

اگر کسی سلسلہ میں محدود تعداد کے ارقام ہوں تو وہ **محدود سلسلہ** کہلاتے ہیں۔

اگر کسی سلسلہ میں لامحدود تعداد کے تواتر ہوں تو وہ **غیر محدود سلسلہ** کہلائے گا۔

حقیقی اعداد کے ایک تواتر کو فرض کریں $S = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ہر ایک $n \in N$ کے لئے ہم جزوی حاصل جمع کو ظاہر کرتے ہیں اس طرح کہ $S_n = a_1 + a_2 + ...a_n$ جس میں $n = 1,2,3, ... ,$ ہوں تو $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ **جزوی حاصل جمع** کا تواتر ہوگا۔

جہاں دیا ہوا تواتر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ہے۔

جوڑی دار ترتیب $(\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$، تواتر $\{a_n\}_1^{\infty}$ کا **لامحدود سلسلہ** کہلاتی ہے۔ لامحدود سلسلہ کو $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ یا صرف $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ لکھ دیتے ہیں۔ نشان Σ کو **سِگما** کہتے ہیں۔ جو جمع کی نمائندگی کرتا ہے۔

ہم آسانی کے ساتھ محدود سلسلوں (محدود رقموں کی جمع) کے بارے میں سمجھ سکتے ہیں۔ مگر عام جمع کے طریقے سے محدود سلسلوں کی جمع ناممکن ہے۔ ہم ہم لامحدود سلسلوں کی جمع کس طرح کریں گے (یا معنی پیش کریں گے)؟ اس کے بارے میں ہم بڑی جماعتوں میں معلومات حاصل کریں گے۔ ہم اب صرف محدود سلسلوں کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

اس باب میں ہم **حسابی سلسلے** اور **ہندسی سلسلے** کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

2.5.1 حسابی سلسلہ: (Arithmetic Series)

ایک حسابی سلسلہ وہی سلسلہ ہوگا جس کے ارقام ایک حسابی تواتر (سیکوئنس) بناتے ہوں۔

حسابی سلسلے کی پہلی n رقموں کا حاصل جمع

فرض کیجئے کہ ایک حسابی سلسلے میں پہلی رقم 'a' اور عام فرق 'd' ہو تو سلسلہ اس طرح ہوگا۔

$$a,\ a + d,\ a + 2d\ .....\ a + (n-1)\,d\ .....$$

S_n حسابی سلسلے کی پہلی n رقموں کا حاصل جمع ہوگا۔

لہٰذا $S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots (a+(n-1)\ d)$

$$\Longrightarrow \quad S_n = na + (d + 2d + 3d + \cdots + (n-1)d)$$
$$= na + d(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1))$$

غرض اگر ہم $1 + 2 + 3 \ldots\ldots + (n-1)$ کا حاصل جمع معلوم کرلیں گے تو اس ضابطہ کو آسان کر سکتے ہیں۔

صرف حسابی سلسلہ $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$ کا حاصل جمع ہے۔

لہٰذا پہلے ہم $1 + 2 + 3 \ldots\ldots + (n-1)$ کا حاصل جمع نیچے معلوم کریں۔

اس کے بعد پہلے n مثبت سالم اعداد کا حاصل جمع معلوم کریں گے۔

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (n-2) + (n-1) + n \qquad (1)$$

اب ہم اوپر کا حاصل جمع کرنے کے لئے ایک چھوٹی چال چلیں گے۔غور کریں کہ ہم Sn کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1. \qquad (2)$$

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1). \qquad (3)$$

اب (3) کے دائیں جانب کتنے $(n+1)$ ہیں؟

(1) اور (2) ہر ایک میں n مرتبہ ہیں۔ (1) اور (2) سے ہم صرف ان رقموں کو جمع کریں گے۔

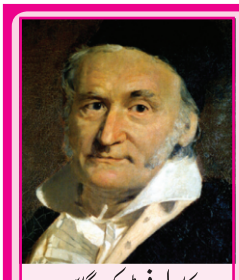
لہٰذا $(n+1)$، ٹھیک n مرتبہ ہوں گے۔

لہٰذا (3) مختصر ہو کر $2S_n = n(n+1)$ بن جاتا ہے۔ چنانچہ پہلے n مثبت سالم اعداد کا حاصل جمع اس طرح ہوگا

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad \text{لہٰذا} \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (4)$$

یہ حاصل جمع معلوم کرنے کا ایک اہم ضابطہ ہے۔

برائے ذہن نشینی



کارل فرڈرِک گاس
(1777 – 1855)

اوپر بتائے طریقہ کو سب سے پہلے جرمنی کے ایک مشہور ریاضی دان **کارل فرڈرِک گاس** نے استعمال کیا تھا۔ان کو علم **ریاضی کا شہزادہ** بھی کہا جاتا ہے۔جب وہ پانچویں جماعت میں تھے تو ان کے استاد نے ان کو پہلے 100 مثبت سالم اعداد کا حاصل جمع معلوم کرنے کے لئے کہا تھا۔ جب آپ بڑی کلاسوں کو جائیں گے تو ضابطہ کس طرح بنائے جاتے ہیں،اس کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

اب ہم حسابی تواتر کے n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرنے کا عام طریقہ پر غور کریں گے۔

پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ

$$S_n = na + [d + 2d + 3d + \cdots + (n-1)d]$$
$$= na + d[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]$$
$$= na + d\frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{استعمال کرکے } (4)$$
$$= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \qquad (5)$$

چنانچہ ہمارے پاس ہے

$$S_n = \frac{n}{2}[a + (a + (n-1)d)] = \frac{n}{2}\ (\text{پہلی رقم} + \text{آخری رقم})$$
$$= \frac{n}{2}(a + l).$$

ایک حسابی سلسلے میں پہلی رقم a ہو تو پہلے n رقموں کا حاصل جمع Sn اس طرح دیا گیا ہے۔

(i) $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ اگر عام فرق d دیا گیا ہو تو

(ii) $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ اگر آخری رقم l دی گئی ہو تو

مثال 2.16

حسابی سلسلے کا حاصل جمع معلوم کرو۔ $5 + 11 + 17 + ... + 95$

حل : دیا گیا سلسلہ $5 + 11 + 17 + ... + 95$ ایک حسابی سلسلہ ہے۔

غور کیجئے کہ $a = 5, \quad d = 11 - 5 = 6, \quad l = 95.$

$$n = \frac{l-a}{d} + 1$$

اب $$= \frac{95-5}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1 = 16.$$

$$S_n = \frac{n}{2}[l + a]$$

چنانچہ مطلوبہ حاصل جمع $S_{16} = \frac{16}{2}[95 + 5] = 8(100) = 800.$

مثال 2.17

درج ذیل سلسلہ میں پہلی 2n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ...$$

حل : ہمیں معلوم کرنا ہے $= 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots 2n$ رقموں تک

$= 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - \cdots 2n$ رقموں تک

$= (1-4) + (9-16) + (25-36) + \cdots$ (گروہ بندی سے) n رقموں تک

$= -3 + (-7) + (-11) + \cdots n$ رقموں تک

درج بالا سلسلہ ایک حسابی سلسلہ ہے جس کی پہلی رقم a= –3 ؛ عام فرق d = –4 ہے۔

چنانچہ مطلوبہ حاصل جمع $= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$= \frac{n}{2}[2(-3) + (n-1)(-4)]$$

$$= \frac{n}{2}[-6 - 4n + 4] = \frac{n}{2}[-4n - 2]$$

$$= \frac{-2n}{2}(2n + 1) = -n(2n + 1)$$

مثال 2.18 ایک حسابی سلسلہ میں پہلے 14 رقموں کا حاصلِ جمع 203– اور اس کے بعد کی 11 رقموں کا حاصل جمع 572– ہے۔ حسابی سلسلہ معلوم کرو۔

حل : معطیہ

$$S_{14} = -203$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{14}{2}[2a + 13d] = -203$$

$$\Longrightarrow \quad 7[2a + 13d] = -203$$

$$\Longrightarrow \quad 2a + 13d = -29. \qquad (1)$$

یہ بھی دیا گیا ہے کہ اس کے بعد کی 11 رقموں کا حاصل جمع = 572–

اب $S_{25} = S_{14} + (-572)$

یعنی $S_{25} = -203 - 572 = -775.$

$$\Longrightarrow \quad \frac{25}{2}[2a + 24d] = -775$$

$$\Longrightarrow \quad 2a + 24d = -31 \times 2$$

$$\Longrightarrow \quad a + 12d = -31 \qquad (2)$$

(1) اور (2) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $a = 5$ اور $d = -3.$

$$5 + (5 - 3) + (5 + 2(-3)) + \cdots.$$

لہٰذا مطلوبہ حسابی سلسلہ یہ ہے $5 + 2 - 1 - 4 - 7 - \cdots.$

مثال 2.19

حسابی سلسلہ $24 + 21 + 18 + 15 + \ldots.$ کی کتنی رقمیں مسلسل لینے پر ان کا حاصل جمع 351– ہوگا؟

حل :

دیئے گئے حسابی سلسلہ میں $a = 24, \quad d = -3.$

اب ہم n معلوم کریں گے اس طرح کہ $S_n = -351.$

اب $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = -351$

یعنی $\frac{n}{2}[2(24) + (n-1)(-3)] = -351$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n}{2}[48 - 3n + 3] = -351$$

$$\Longrightarrow \quad n(51 - 3n) = -702$$

$$\Longrightarrow \quad n^2 - 17n - 234 = 0$$

$$(n - 26)(n + 9) = 0$$

$$\therefore \quad n = 26 \quad \text{or} \quad n = -9$$

چونکہ n یہاں پر رقموں کی تعداد ہے، وہ منفی نہیں ہوسکتا۔

چنانچہ حاصلِ جمع 351– حاصل کرنے کے لئے 26 رقمیں درکار ہیں۔

مثال 2.20 8 سے تقسیم ہونے والے تمام 3 ہندسی طبعی اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

حل : 8 سے تقسیم ہونے والے تین ہندسی فطری اعداد 104, 112,120, ... 992 ہیں۔

فرض کرو کہ ان کا حاصل جمع Sn ہے۔یعنی $Sn = 104 + 112 + 120 + 128 + \ldots 992$

اب 104 , 112 , 120 , ... 992 ایک حسابی سلسلہ ہے۔

یہاں پر a = 104 ؛ d = 8 اور $l = 992$ ہے۔

$$\therefore \quad n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{992-104}{8} + 1$$

$$= \frac{888}{8} + 1 = 112.$$

$$S_{112} = \frac{n}{2}[a+l] = \frac{112}{2}[104+992] = 56(1096) = 61376.$$

چنانچہ 8 سے تقسیم ہونے والے تمام 3 ہندسی طبعی اعداد کا حاصل جمع 61376 ہے۔

مثال 2.21

ایک منظّم کثیر ضلعی کے اندرونی زاویوں کی پیائش اس طرح لی گئی ہے کہ اس سے ایک حسابی سلسلہ بنتا ہے۔سلسلہ کے زاویہ کی کم ترین پیائش 85° اور سب سے بڑے زاویہ کی پیائش 215° ہے۔دئے گئے کثیر ضلعی میں ضلعوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

حل : فرض کریں کہ n کثیر ضلعی کے ضلعوں کی تعداد ہے۔

چونکہ ان کی پیائشیں ایک حسابی سلسلہ بناتی ہیں،اس کثیر ضلعی کے اندرونی زاویوں کا حاصل جمع اس طرح سے ہے۔

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + l \text{ , where } a = 85 \text{ and } l = 215.$$

$$S_n = \frac{n}{2}[l+a] \qquad (1)$$

ہم جانتے ہیں کہ ایک کثیر ضلعی کے اندرونی زاویوں کا حاصل جمع

فرض کریں کہ Sn ، n ضلعوں والے اندرونی زاویوں کا حاصل جمع ہے۔ $(n-2)\times 180^0$

یعنی

$$S_n = (n-2)\times 180$$

سے ہمیں حاصل ہوتا ہے (1) $\frac{n}{2}[l+a] = (n-2)\times 180$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n}{2}[215+85] = (n-2)\times 180$$

$$150n = 180(n-2) \quad \Longrightarrow \quad n = 12..$$

لہٰذا کثیر ضلعی کے ضلعوں کی تعداد 12 ہے۔

مشق 2.4

1۔ حاصل جمع معلوم کیجئے (i) پہلے 75 مثبت سالم اعداد کا (ii) پہلے 125 طبعی اعداد کا

2۔ ایک حسابی سلسلے کے پہلی 30 رقموں کا حاصل جمع معلوم کیجئے جب اس کی n ویں رقم 3 + 2n ہو۔

3۔ حسابی سلسلے کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(i) $38 + 35 + 32 + \cdots + 2.$ (ii) $6 + 5\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2} + \cdots$ 25 رقموں تک

4۔ دئے گئے حسابی سلسلے میں Sn معلوم کرو۔

(i) $a = 5, \quad n = 30, \quad l = 121$ (ii) $a = 50, \quad n = 25, \quad d = -4$

5۔ $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ...$ سلسلہ کے 40 ابتدائی رقموں کو جمع کیجئے۔

6۔ حسابی سلسلے میں پہلی 11 رقموں کا حاصل جمع 44 ہے اور اس کے بعد کی 11 رقموں کا حاصل جمع 55 ہے۔ حسابی سلسلہ معلوم کرو۔

7۔ ایک حسابی سلسلہ 60, 56, 52, 48, ... میں حاصل جمع 368 حاصل کرنے کے لئے پہلی رقم سے شروع کر کے کتنی رقمیں درکار ہیں؟

8۔ 9 سے تقسیم ہونے والے تمام 3 ہندسی طبعی اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

9۔ ایک حسابی سلسلے کی پہلی 20 رقموں کا حاصل جمع معلوم کیجئے جس کی تیسری رقم 7 ہے اور ساتویں رقم، تیسری رقم کے 3 گُنا سے 2 زیادہ ہے۔

10۔ 300 اور 500 کے درمیان 11 سے تقسیم پذیر تمام اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

11۔ حل کیجئے : $1 + 6 + 11 + 16 + ... + x = 148$

12۔ 100 اور 200 کے درمیان 5 سے غیر تقسیم پذیر تمام طبعی اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

13۔ ایک تعمیراتی کمپنی کو ایک پل کی تعمیر میں تاخیر کی وجہ سے ہر روز جرمانہ ڈالا جا رہا ہے۔ جرمانہ پہلے دن 4000 روپئے ہوگا، جو روزانہ 1000 روپئے کے حساب سے بڑھتا جائے گا۔ اپنے بجٹ کو مدنظر رکھتے ہوئے کمپنی زیادہ سے زیادہ 1,65,000 روپئے بطورِ جرمانہ ادا کر سکتی ہے۔ یہ معلوم کرو کہ کام کی تکمیل میں زیادہ سے زیادہ کتنے دن کی تاخیر ہو سکتی ہے؟

14۔ 8% سادہ سود پر 1000 روپئے ہر سال ودیعت کئے جا رہے ہیں۔ ہر سال کے اختتام پر سود محسوب کیجئے۔ کیا یہ سود کی رقم ایک حسابی سلسلہ بناتی ہے؟ اگر ایسا ہے تو 30 سال کے آخر میں جملہ سود کتنا ملے گا معلوم کیجئے۔

15۔ ایک سلسلہ میں پہلے n رقموں کا مجموعہ $3n^2-2n$ ہے۔ ثابت کرو کہ یہ ایک حسابی سلسلہ ہے۔

16۔ اگر ایک گھڑی ایک بجے 1 بار گھنٹی بجاتی ہے، دو بجے دو بار گھنٹی بجاتی ہے اور اسی طرح یہ سلسلہ جاری ہے۔ یہ ایک دن میں کتنی گھنٹیاں بجائے گی؟

17۔ کسی حسابی سلسلہ کی پہلی رقم a ، دوسری رقم b اور آخری رقم c ہو تو بتائیے کہ اس کا حاصل جمع $\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ ہے۔

18۔ کسی حسابی سلسلے میں اگر (2n+1) رقمیں ہوں تو ثابت کرو کہ طاق اعداد کے حاصل جمع اور جفت اعداد کے حاصل جمع کی نسبت (n+1) : n ہے۔

19۔ ایک حسابی سلسلے میں پہلی m رقموں اور پہلی n رقموں کے حاصل جمع کی نسبت $m^2 : n^2$ ہے۔ بتائیے کہ m ویں اور n ویں رقموں کی نسبت $(2m-1):(2n-1)$ ہے۔

20۔ ایک مالی اپنے باغ میں ایک منحرفی شکل بنانا چاہتا ہے۔ منحرف شکل کی لمبائی والا حصہ بنانے کے لئے پہلے صف میں 97 اینٹوں کی ضرورت پڑتی ہے۔ ہر صف میں 2 اینٹیں کم ہوتی جاتی ہیں اور 25 ویں صف میں تعمیری کام مکمل ہو جاتا ہے۔ اس شکل کو بنانے کے لئے اس کو کتنی اینٹیں خریدنا ہوگا؟

2.5.2۔ ہندسی سلسلہ (Geometric Series)

ایک سلسلہ اس وقت **ہندسی سلسلہ** کہلائے گا جب اس میں موجود رقمیں ایک ہندسی سلسلہ بناتی ہیں۔

فرض کیجئے کہ $a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}, ar^n, \cdots$ ایک ہندسی سلسلہ ہے جس میں $r \neq 0$ مشترک نسبت ہے۔

فرض کریں کہ $$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (1)$$

اگر $r = 1$ ہو تو (1) اس طرح ہوگا $S_n = na$.

(1) کو استعمال کر کے $r \neq 1$ کے لئے سلسلہ اس طرح سے ہے۔

$$rS_n = r(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \qquad (2)$$

اب (2) کو (1) سے تفریق کرنے پر

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n)$$

$$\Longrightarrow \quad S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$ چونکہ $r \neq 1$. چنانچہ ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

ایک ہندسی سلسلہ میں پہلے n عددوں کا حاصل جمع اس طرح دیا گیا ہے۔

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}, & \text{اگر } r \neq 1 \\ na & \text{اگر } r = 1. \end{cases}$$

جس میں a پہلی رقم ہے اور r مشترک نسبت ہے۔

برائے ذہن نشینی

درحقیقت $-1 < r < 1$ ہو تو، درج ضابطہ بہتر ثابت ہوگا۔ $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \dfrac{a}{1 - r}$.

غور کیجئے کہ مثبت محدود اعداد کا حاصل جمع ایک محدود قیمت دے گا۔

مثال 2.22

ہندسی سلسلہ $16 - 48 + 144 - 432 \cdots$ کی پہلی 25 رقموں کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

یہاں پر $a = 16, \; r = -\dfrac{48}{16} = -3 \neq 1$ استعمال کرنے پر $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \; r \neq 1$.

$$S_{25} = \frac{16(1 - (-3)^{25})}{1 - (-3)} = \frac{16(1 + 3^{25})}{4} = 4(1 + 3^{25}).$$ ہمیں حاصل ہوا