حل : فرض کرو کہ $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x = 3x\,(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)$

فرض کرو کہ $g(x) = 4x^4 + 14x^3 - 8x^2 - 8x = 2x\,(2x^3 + 7x^2 - 4x - 4)$

کثیر رقمی $(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)$ اور $(2x^3 + 7x^2 + 4x - 4)$ کا GCD معلوم کیجئے۔

ہمیں کثیر رقمی $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ کو مقسوم علیہ کہنا چاہئے۔

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ \hline x^2 + 4x + 4 & x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\ & x^3 + 4x^2 + 4x \\ \hline & -2x^2 - 8x - 8 \\ & -2x^2 - 8x - 8 \\ \hline & \text{باقی} \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 \\ & 2x^3 + 4x^2 - 8x - 16 \\ \hline & 3x^2 + 12x + 12 \\ & (x^2 + 4x + 4) \\ & \text{باقی} \neq 0 \end{array}$$

$x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ اور $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ کا مشترک جزوِ ضربی $x^2 + 4x + 4$ ہے۔

$3x$ اور $2x$ کا مشترک جزوِ ضربی x ہے۔

$\text{GCD}\,(f(x)\ ,\ g(x)) = x\,(x^2 + 4x + 4)$

مشق 3.6

(1) G.C.D (م.ع.ا) معلوم کیجئے۔

(i) $7x^2\,yz^4\ ,\ 21x^2\,y^5\,z^3$

(ii) $x^2\,y\ ,\ x^3y\ ,\ x^2\,y^2$

(iii) $25bc^4\,d^3\ ,\ 35b^2\,c^5\ ,\ 45c^3\,d$

(iv) $35x^5\,y^3\,z^4\ ,\ 49x^2\,yz^3\ ,\ 14xy^2\,z^2$

(2) نیچے دئے ہوئے کثیر رقمی کا GCD معلوم کیجئے۔

(i) $c^2 - d^2\ ,\ c\,(c - d)$

(ii) $x^4 - 27a^3\,x\ ,\ (x - 3a)^2$

(iii) $m^2 - 3m - 18,\ m^2 + 5m + 6$

(iv) $x^2 + 14x + 33,\ x^3 + 10x^2 - 11x$

(v) $x^2 + 3xy + 2y^2\ ,\ x^2 + 5xy + 6y^2$

(vi) $2x^2 - x - 1,\ 4x^2 + 8x + 3$

(vii) $x^2 - x - 2,\ x^2 + x - 6,\ 3x^2 - 13x + 14$

(viii) $x^3 - x^2 + x - 1,\ x^4 - 1$

(ix) $24(6x^4 - x^3 - 2x^2)\ ,\ 20(2x^6 + 3x^5 + x^4)$

(x) $(a - 1)^5\,(a + 3)^2\ ,\ (a - 2)^2\,(a - 1)^3\,(a + 3)^4$

(3) تقسیمی الگارتم استعمال کر کے کثیر رقمی جوڑیوں کا GCD معلوم کیجئے۔

(i) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15,\ 4x^2 - 16x + 12$

(ii) $3x^3 + 18x^2 + 33x + 18,\ 3x^2 + 13x + 10$

(iii) $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2,\ 6x^3 + 12x^2 + 6x + 12$

(iv) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12,\ x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x$

3.5.3 مشترک ذواضعاف اقل : Least Common Multiple (L.C.M)

دو یا دو سے زیادہ جملوں کے ذواضعاف اقل سب سے کم درجے کا جملہ ہے۔ جو ہر ایک عدد سے بغیر باقی کے تقسیم ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر فرض کرو کہ سادہ جملے $a^4\ ,\ a^3\ ,\ a^6\ .\ .\ .\ .$

اب a^6 , a^3 , a^4 کے مشترک ذواضعاف اقل . . . . a^8 , a^7 , a^6 ہیں۔

مشترک ذواضعاف اقل a^6 ہے۔

چنانچہ a^6 , a^3 , a^4 کا LCM a^6 ہے۔

ایسے ہی $a^3 b^4$, ab^5 , $a^2 b^7$ کا LCM $a^3 b^7$ ہے۔

ہم تھوڑے اور زیادہ مثالوں کو استعمال کرتے ہوئے LCM معلوم کریں گے۔

مثال 3.22

نیچے دیے ہوئے کثیر رقمی کا LCM معلوم کیجئے۔

(i) 90, 150, 225 (ii) $35a^2 c^3 b, 42a^3 cb^2, 30ac^2 b^3$

(iii) $(a-1)^5 (a+3)^2, (a-2)^2 (a-1)^3 (a+3)^4$ (iv) $x^3+y^3, x^3-y^3, x^4+x^2y^2+y^4$

حل :

(i) اب $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1$

$150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2^1 \times 3^1 \times 5^2$

$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 3^2 \times 5^2$

حاصلِ ضرب $= 2^1 \times 3^2 \times 5^2 = 450$ LCM ہے۔

(ii) 35، 42، اور 30 کا LCM $5 \times 7 \times 6 = 210$ ہے۔

$$\text{LCM} = 210 \times a^3 \times c^3 \times b^3 = 210\, a^3 c^3 b^3$$

(iii) $(a-1)^5 (a+3)^2$ ، $(a-2)^2 (a-1)^3 (a+3)^4$ کا $\text{LCM} = (a-1)^5 (a+3)^4 (a-2)^2$ ہے۔

(iv) پہلے ہم دیے گئے ہر ایک جملہ کے لئے اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$x^4+x^2y^2+y^4 = (x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

$$\text{LCM} = (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$= (x^3+y^3)(x^3-y^3) = x^6-y^6$$

مشق 3.7

مندرجۂ ذیل کا LCM معلوم کیجئے۔

1) $x^3 y^2, xyz$

2) $3x^2 yz, 4x^3 y^3$

3) $a^2 bc, b^2 ca, c^2 ab$

4) $66a^4 b^2 c^3, 44a^3 b^4 c^2, 24a^2 b^3 c^4$

5) $a^{m+1}, a^{m+2}, a^{m+3}$

6) $x^2 y + xy^2, x^2 + xy$

7) $3(a-1), 2(a-1)^2, (a^2-1)$

8) $2x^2 - 18y^2, 5x^2 y + 15xy^2, x^3 + 27y^3$

9) $(x+4)^2 (x-3)^3, (x-1)(x+4)(x-3)^2$

10) $10(9x^2+6xy+y^2), 12(3x^2-5xy-2y^2), 14(6x^4+2x^3)$

3.5.4 LCM اور GCD کا درمیانی تعلق

ہم جانتے ہیں کہ دو مثبت سالم اعداد کا حاصل ضرب ان کے LCM اور GCD کے حاصل ضرب کے برابر ہے۔ مثال کے طور پر $21 \times 35 = 105 \times 7$ یہاں $\text{LCM}(21, 35) = 105$ اور $\text{GCD}(21, 35) = 7$

اسی طریقے میں ہمیں ذیل کے نتیجے حاصل ہوئے۔

کوئی دو کثیر رقمیات کا حاصل ضرب ان کے LCM اور GCD کے حاصل ضرب کے برابر ہے۔

$$f(x) \times g(x) = \text{LCM}(f(x), g(x)) \times \text{GCD}(f(x), g(x))$$

غرض اس نتیجے کو ایک مثال کے ساتھ اخذ کریں گے۔

فرض کرو کہ $f(x) = 12(x^4 - x^3)$ اور $g(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$ دو کثیر رقمیات ہیں۔

$$f(x) = 12(x^4 - x^3) = 2^2 \times 3 \times x^3 \times (x-1) \quad (1)$$

اور $$g(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2) = 2^3 \times x^2 \times (x-1) \times (x-2) \quad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوا۔

$$\text{LCM}(f(x), (g(x) = 2^3 \times 3^1 \times x^3 \times (x-1) \times (x-2) = 24x^3(x-1)(x-2)$$

$$\text{GCD}(f(x), g(x) = 4x^2(x-1)$$

چنانچہ $$\text{LCM} \times \text{GCD} = 24x^3(x-1)(x-2) \times 4x^2(x-1)$$

$$= 96x^5(x-1)^2(x-2) \quad (3)$$

اور $$f(x) \times g(x) = 12x^3(x-1) \times 8x^2(x-1)(x-2)$$

$$= 96x^5(x-1)^2(x-2) \quad (4)$$

(3) اور (4) سے ہم اخذ کئے $\text{LCM} \times \text{GCD} = f(x) \times g(x)$

غرض دو کثیر رقمیات کے GCD اور LCM کا حاصل ضرب دو کثیر رقمیات کے حاصل ضرب کے برابر ہے اور بھی اگر $f(x), g(x)$، LCM اور GCD میں کوئی ایک دیا گیا ہو تو ہم دوسرا آسانی کے ساتھ معلوم کر سکتے ہیں۔ اس لئے کہ LCM اور GCD بے مثال (Unique) ہیں۔ سوائے -1 کے جزوِ ضربی کے لئے۔

مثال 3.23

$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$ اور $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$ کا GCD $x^2 + 5x + 7$ ہے LCM معلوم کیجئے۔

فرض کرو کہ $f(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$ اور $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$

دیا ہوا $\text{GCD} = x^2 + 5x + 7$

ہمیں $\text{LCM} \times \text{GCD} = f(x) \times g(x)$

چنانچہ $$\text{LCM} = \frac{f(x) \times g(x)}{\text{GCD}} \quad (1)$$

اب GCD $f(x)$ اور $g(x)$ کو تقسیم کرتا ہے۔

فرض کرو کہ $f(x)$ تقسیم کرتا ہے GCD سے

			1	−2	8		
1	5	7	1	3	5	26	56
			1	5	7		
				−2	−2	26	
				−2	−10	−14	
					8	40	56
					8	40	56
					0		

جب GCD $f(x)$ کا تقسیم پذیر ہے تو ہمیں خارج قسمت $x^2 - 2x + 8$ حاصل ہوتا ہے۔

اب $(1) \Rightarrow \text{LCM} = (x^2 - 2x + 8) \times g(x)$

چنانچہ $\text{LCM} = (x^2 - 2x + 8)(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28)$

غور کریں

اوپر کے مسلہٗ میں ہم $g(x)$ کو GCD سے تقسیم کر سکتے ہیں اور خارج قسمت کو $f(x)$ سے ضرب کر سکتے ہیں۔ ہمیں مطلوبہ LCM حاصل ہوگا

مثال 3.24 $x + 1$ اور $x^6 - 1$ دو کثیر رقمی کا LCM اور GCD ہے۔ اگر ایک کثیر رقمی $x^3 + 1$ ہے تو دوسری کثیر رقمی معلوم کیجئے۔

حل : دیئے ہوئے

$$\text{LCM} = x^6 - 1 \quad \text{اور} \quad \text{GCD} = x + 1$$

فرض کرو کہ $f(x) = x^3 + 1$

ہمیں معلوم ہے کہ $\text{LCM} \times \text{GCD} = f(x) \times g(x)$

$$\Longrightarrow g(x) = \frac{\text{LCM} \times \text{GCD}}{f(x)} = \frac{(x^6 - 1)(x + 1)}{x^3 + 1}$$

$$= \frac{(x^3 + 1)(x^3 - 1)(x + 1)}{x^3 + 1} = (x^3 - 1)(x + 1)$$

$$g(x) = (x^3 - 1)(x + 1).$$

مشق 3.8

1. مندرجۂ ذیل کثیر رقمی جوڑیوں کا LCM معلوم کیجئے۔

(i) $x^2 - 5x + 6$, $x^2 + 4x - 12$ جس کا GCD $x - 2$ ہے

(ii) $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3$, $x^4 + 2x^2 + x + 2$ جس کا GCD $x^2 + x + 1$ ہے

(iii) $2x^3 + 15x^2 + 2x - 35$, $x^3 + 8x^2 + 4x - 21$ جس کا GCD $x + 7$ ہے

(iv) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, $2x^4 - x^3 - 10x^2 - 11x + 8$ جس کا GCD $2x - 1$ ہے

2۔ $p(x)$ کے LCM اور GCD دیئے گئے ہیں۔ ان کے دیگر کثیر رقمیات $q(x)$ معلوم کیجئے۔

(i) $(x + 1)^2 (x + 2)^2$, $(x + 1)(x + 2)$, $(x + 1)^2 (x + 2)$

(ii) $(4x + 5)^3 (3x - 7)^3$, $(4x + 5)(3x - 7)^2$, $(4x + 5)^3 (3x - 7)^2$

(iii) $(x^4 - y^4)(x^4 + x^2 y^2 + y^4)$, $x^2 - y^2$, $x^4 - y^4$

(iv) $(x^3 - 4x)(5x + 1)$, $(5x^2 + x)$, $(5x^3 - 9x^2 - 2x)$

(v) $(x - 1)(x - 2)(x^2 - 3x + 3)$, $(x - 1)$, $(x^3 - 4x^2 + 6x - 3)$

(vi) $2(x + 1)(x^2 - 4)$, $(x + 1)$, $(x + 1)(x - 2)$

3.6 ناطق جملے (Rational Expression)

ناطق عدد کو خارج قسمت $\frac{m}{n}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ m اور $n \neq 0$ دو سالم اعداد ہیں۔ اسی طرح ناطق جملے کا خارج قسمت $\frac{p(x)}{q(x)}$ ہیں۔ $p(x)$ اور $q(x)$ دو کثیر رقمیات ہیں۔ اسمیں $q(x)$ غیر صفری کثیر رقمی ہے۔

ہر کثیر رقمی $p(x)$ ایک ناطق جملہ ہے جب تک $p(x)$ کو $\frac{p(x)}{1}$ کے طور پر لکھیں گے اسمیں '1' مستقل کثیر رقمی ہے۔

چنانچہ ناطق جملوں کا کثیر رقمی ہونا ضروری نہیں ہے۔ مثال کے طور پر $\frac{x}{x^2+1}$ ناطق جملہ ہے مگر کثیر رقمی نہیں ہے۔

ناطق جملوں کی چند مثالیں یہ ہیں۔ $2x+7$, $\frac{3x+2}{x^2+x+1}$, $\frac{x^3+\sqrt{2x}+5}{x^2+x-\sqrt{3}}$

3.6.1 ناطق جملوں کی مختصر ترین صورت (Rational Expressions in Lowest Form)

اگر دو کثیر رقمی $p(x)$ اور $q(x)$ کے سر اعداد اس طرح کے سالم اعداد ہوں کہ $p(x)$ اور $q(x)$ کا GCD '1' ہے۔ تو ہم کہیں گے کہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ کا مختصر ترین ناطق جملہ ہے۔

اگر ناطق جملہ مختصر انداز میں نہیں ہے تو ہم اس کو مختصر کر سکتے ہیں۔ دونوں نسب نما $p(x)$ اور شمار کنندہ $q(x)$ کو $p(x)$ اور $q(x)$ کے GCD سے تقسیم کرتے ہیں۔ آیئے چند مثالوں پر غور کریں۔

مثال 3.25

ناطق جملے کو مختصر کیجئے۔

(i) $\frac{5x+20}{7x+28}$ (ii) $\frac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4}$

(iii) $\frac{6x^2-5x+1}{9x^2+12x-5}$ (iv) $\frac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-1)(x^2-2x-3)}$

حل :

(i) $$\frac{5x+20}{7x+28} = \frac{5(x+4)}{7(x+4)} = \frac{5}{7}$$

(ii) $$\frac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4} = \frac{x^2(x-5)}{x^3(2x+3)} = \frac{x-5}{x(2x+3)}$$

(iii) فرض کرو کہ $p(x) = 6x^2 - 5x + 1 = (2x-1)(3x-1)$ اور

$$q(x) = 9x^2 + 12x - 5 = (3x+5)(3x-1)$$

لہٰذا $$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(2x-1)(3x-1)}{(3x+5)(3x-1)} = \frac{2x-1}{3x+5}$$

(iv) فرض کرو کہ $f(x) = (x-3)(x^2-5x+4) = (x-3)(x-1)(x-4)$ اور

$$g(x) = (x-1)(x^2-2x-3) = (x-1)(x-3)(x+1)$$

لہٰذا $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-3)(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-3)(x+1)} = \frac{x-4}{x+1}$$

مشق 3.9

I۔ مندرجۂ ذیل کو مختصر کیجئے۔

(i) $\dfrac{6x^2+9x}{3x^2-12x}$ (ii) $\dfrac{x^2+1}{x^4-1}$ (iii) $\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$

(iv) $\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$ (v) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$ (اشارہ $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2$)

(vi) $\dfrac{x^3+8}{x^4+4x^2+16}$ (vii) $\dfrac{2x^2+x-3}{2x^2+5x+3}$ (viii) $\dfrac{2x^4-162}{(x^2+9)(2x-6)}$

(ix) $\dfrac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-4)(x^2-2x-3)}$ (x) $\dfrac{(x-8)(x^2+5x-50)}{(x+10)(x^2-13x+40)}$ (xi) $\dfrac{4x^2+9x+5}{8x^2+6x-5}$

(xii) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x^2-9x+14)}{(x-7)(x^2-3x+2)}$

3.6.2 ناطق جملے کی ضرب اور تقسیم :

اگر $\dfrac{g(x)}{h(x)};\ h(x)\neq 0$ اور $\dfrac{p(x)}{q(x)};\ q(x)\neq 0$ دو ناطق جملے ہیں۔ تب

(i) ان کا حاصل ضرب $\dfrac{p(x)}{q(x)}\times\dfrac{g(x)}{h(x)}=\dfrac{p(x)\times g(x)}{q(x)\times h(x)}$ ہے

(ii) ان کی تقسیم $\dfrac{p(x)}{q(x)}\div\dfrac{g(x)}{h(x)}=\dfrac{p(x)}{q(x)}\times\dfrac{h(x)}{g(x)}$

$\dfrac{p(x)}{q(x)}\div\dfrac{g(x)}{h(x)}=\dfrac{p(x)\times h(x)}{q(x)\times g(x)}$ ہے

مثال 3.26 ضرب دیجئے۔

(i) $\dfrac{x^3y^2}{9z^4}$ سے $\dfrac{27z^5}{x^4y^2}$ (ii) $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}$ سے $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$ (iii) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ سے $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4}$

حل :

(i) اب $\dfrac{x^3y^2}{9z^4}\times\dfrac{27z^5}{x^4y^2}=\dfrac{(x^3y^2)(27z^5)}{(9z^4)(x^4y^2)}=\dfrac{3z}{x}.$

(ii) $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}\times\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=\dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a+b)}\times\dfrac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}=a^2-ab+b^2$

(iii) اب $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}\times\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4}=\dfrac{x^3-2^3}{x^2-2^2}\times\dfrac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4}$

$=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}\times\dfrac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4}=x+4.$

مثال 3.27 تقسیم کیجئے۔

(i) $\dfrac{4x-4}{x^2-1}$ سے $\dfrac{x-1}{x+1}$ (ii) $\dfrac{x^3-1}{x+3}$ سے $\dfrac{x^2+x+1}{3x+9}$ (iii) $\dfrac{x^2-1}{x^2-25}$ سے $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$

حل :

(i) $\dfrac{4x-4}{x^2-1} \div \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)} \times \dfrac{(x+1)}{(x-1)} = \dfrac{4}{x-1}.$

(ii) $\dfrac{x^3-1}{x+3} \div \dfrac{x^2+x+1}{3x+9} = \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+3} \times \dfrac{3(x+3)}{x^2+x+1} = 3(x-1).$

(iii) $\dfrac{x^2-1}{x^2-25} \div \dfrac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+5)(x-5)} \times \dfrac{(x+5)(x-1)}{(x-5)(x+1)}$

$= \dfrac{(x-1)(x-1)}{(x-5)(x-5)} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}.$

مشق 3.10

1) مندرجۂ ذیل کو ضرب دیجئے جواب مختصر ترین ہو۔

(i) $\dfrac{x^2-2x}{x+2} \times \dfrac{3x+6}{x-2}$

(ii) $\dfrac{x^2-81}{x^2-4} \times \dfrac{x^2+6x+8}{x^2-5x-36}$

(iii) $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-x-20} \times \dfrac{x^2-2x+4}{x^3+8}$

(iv) $\dfrac{x^2-16}{x^2-3x+2} \times \dfrac{x^2-4}{x^3+64} \times \dfrac{x^2-4x+16}{x^2-2x-8}$

(v) $\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-x-2} \times \dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2+5x-2}$

(vi) $\dfrac{2x-1}{x^2+2x+4} \times \dfrac{x^4-8x}{2x^2+5x-3} \times \dfrac{x+3}{x^2-2x}$

2) مندرجۂ ذیل کو تقسیم کیجئے جواب مختصر ہو۔

(i) $\dfrac{x}{x+1} \div \dfrac{x^2}{x^2-1}$

(ii) $\dfrac{x^2-36}{x^2-49} \div \dfrac{x+6}{x+7}$

(iii) $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-25} \div \dfrac{x^2-3x-10}{x^2+7x+10}$

(iv) $\dfrac{x^2+11x+28}{x^2-4x-77} \div \dfrac{x^2+7x+12}{x^2-2x-15}$

(v) $\dfrac{2x^2+13x+15}{x^2+3x-10} \div \dfrac{2x^2-x-6}{x^2-4x+4}$

(vi) $\dfrac{3x^2-x-4}{9x^2-16} \div \dfrac{4x^2-4}{3x^2-2x-1}$

(vii) $\dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2+9x+9} \div \dfrac{2x^2+x-1}{2x^2+x-3}$

3.6.3 ناطق جملے کی جمع اور تفریق

اگر $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ اور $\dfrac{r(x)}{s(x)}$ دو ناطق جملے کے ساتھ $q(x) \neq 0$ اور $s(x) \neq 0$ ہو تو تب حاصلِ جمع اور فرق

$$\frac{p(x)}{q(x)} \pm \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x).s(x) \pm q(x)r(x)}{q(x).s(x)}$$

مثال 3.28

مختصر کیجئے۔

(i) $\dfrac{x+2}{x+3} + \dfrac{x-1}{x-2}$ (ii) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x+1}$ (iii) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9} + \dfrac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$

حل :

(i) $$\frac{x+2}{x+3}+\frac{x-1}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)+(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}$$

(ii) $$\frac{x+1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{2x^2+2}{(x^2-1)\ (x+1)}$$

$$= \frac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$$

(iii) $$\frac{x^2-x-6}{x^2-9}+\frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}+\frac{(x+6)(x-4)}{(x+3)(x-4)}$$

$$= \frac{x+2}{x+3}+\frac{x+6}{x+3} = \frac{x+2+x+6}{x+3} = \frac{2x+8}{x+3}$$

مثال 3.29 $\frac{x^3-1}{x^2+2}$ کثیر رقمی کے ساتھ کونسا کثیر رقمی جمع کرنے پر ہمیں یہ $\frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$ حاصل ہوتا ہے ؟

فرض کرو کہ p(x) ناطق عدد ہے۔

$$\frac{x^3-1}{x^2+2}+p(x) = \frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$$

یعنی $$p(x) = \frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}-\frac{x^3-1}{x^2+2}$$

$$= \frac{2x^3-x^2+3-x^3+1}{x^2+2} = \frac{x^3-x^2+4}{x^2+2}$$

مثال 3.30 $\left(\frac{2x-1}{x-1}-\frac{x+1}{2x+1}\right)+\frac{x+2}{x+1}$ کو دو کثیر رقمیوں کے خارج قسمت کے طور پر مختصر کیجئے۔

حل :

Now, $$\left(\frac{2x-1}{x-1}-\frac{x+1}{2x+1}\right)+\frac{x+2}{x+1}$$

$$= \left[\frac{(2x-1)(2x+1)-(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+1)}\right]+\frac{x+2}{x+1}$$

$$= \frac{(4x^2-1)-(x^2-1)}{(x-1)(2x+1)}+\frac{x+2}{x+1} = \frac{3x^2}{(x-1)(2x+1)}+\frac{x+2}{x+1}$$

$$= \frac{3x^2(x+1)+(x+2)(x-1)(2x+1)}{(x^2-1)(2x+1)} = \frac{5x^3+6x^2-3x-2}{2x^3+x^2-2x-1}$$

مشق 3.11

1) مندرجۂ ذیل کو دو کثیر رقمیوں کے خارج قسمت کے طور پر مختصر کیجئے۔

(i) $\frac{x^3}{x-2}+\frac{8}{2-x}$

(ii) $\frac{x+2}{x^2+3x+2}+\frac{x-3}{x^2-2x-3}$

(iii) $\frac{x^2-x-6}{x^2-9}+\frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$

(iv) $\frac{x-2}{x^2-7x+10}+\frac{x+3}{x^2-2x-15}$

(v) $\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}-\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-3x-2}$ (vi) $\dfrac{x^2-4}{x^2+6x+8}-\dfrac{x^2-11x+30}{x^2-x-20}$

(vii) $\left[\dfrac{2x+5}{x+1}+\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right]-\left(\dfrac{3x-2}{x-1}\right)$ (viii) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}-\dfrac{2}{x^2+4x+3}$

(2 $\dfrac{x^3-1}{x^2+2}$ ناطق جملے کے ساتھ کونسا کثیر رقمی جمع کرنے پر ہمیں $\dfrac{3x^3+2x^2+4}{x^2+2}$ حاصل ہوتا ہے ؟

(3 $\dfrac{4x^3-7x^2+5}{2x-1}$ کے ساتھ کونسا ناطق جملے کو تفریق کرنے پر ہمیں $2x^2-5x+1$ حاصل ہوتا ہے۔

(4 اگر $P=\dfrac{x}{x+y}, Q=\dfrac{y}{x+y}$ ہوتو $\dfrac{1}{P-Q}-\dfrac{2Q}{P^2-Q^2}$ دریافت کیجئے۔

3.7 جذرالمربع (Square Root)

فرض کرو۔ $a \in R$ ایک غیر صفری حقیقی عدد ہے۔ایک حقیقی عدد 'a' کا جذرالمربع b ہے ،اس طرح سے کہ $b^2 = a$۔
a کا مثبت جذرالمربع کو $\sqrt[2]{a}$ یا $\sqrt{a}$ کے طور پر ظاہر کرتے ہیں۔حالانکہ دونوں $(-3)^2 = 9$ اور $(+3)^2 = 9$ صحیح ہیں۔نشان $\sqrt{\ }$ جو عدد اس کے اندر ہوتا ہے۔مثبت جذرالمربع کی نشان دہی کے لئے استعمال ہوتا ہے۔چنانچہ $\sqrt{9} = 3$ ۔اسی طرح $\sqrt{121} = 11$ $\sqrt{10000} = 100$ ہے۔

اس طریقے میں جملہ یا کثیر رقمیات کا جذرالمربع ،وہ جملہ ہے جو دئے گئے مربع جملے کے برابر ہے۔کثیر رقمی میں ہم اس طرح لیتے ہیں۔

$$|p(x)| = \begin{cases} p(x) & \text{اگر } p(x) \geq 0 \\ -p(x) & \text{اگر } p(x) < 0 \end{cases}$$ جس میں $\sqrt{(p(x)^2)} = |p(x)|$

مثال کے طور پر $\sqrt{(a-b)^2} = |(a-b)|.$ $\sqrt{(x-a)^2} = |(x-a)|$

عام طور پر کثیر رقمی کا جذالمربع معلوم کرنے کیلئے نیچے دئے دو طریقے عام ہیں۔

(i) اجزائے ضربی کا طریقہ (ii) تقسیمی طریقہ

اس حصہ میں ہم کثیر رقمی جملے،اگر وہ جزوضربی کے قابل ہوتو اجزائے ضربی کے طریقے سے چند مثالوں کے ذریعے سیکھیں گے۔

3.7.1 اجزائے ضربی کے طریقے سے جذرالمربع معلوم کرنا :

مثال 3.31 جذرالمربع معلوم کیجئے۔

(i) $121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}$ (ii) $\dfrac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}$ (iii) $(2x+3y)^2-24xy$

حل :

(i) $\sqrt{121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}} = 11|(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^6|$

(ii) $\sqrt{\dfrac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}} = \dfrac{9}{8}\left|\dfrac{x^2y^3z^4}{w^6s^7}\right|$

(iii) $\sqrt{(2x+3y)^2-24xy} = \sqrt{4x^2+12xy+9y^2-24xy} = \sqrt{(2x-3y)^2}$

$= |(2x-3y)|$

مثال 3.32

جذرالمربع معلوم کیجئے۔

(i) $4x^2 + 20xy + 25y^2$ (ii) $x^6 + \frac{1}{x^6} - 2$

(iii) $(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)$

حل :

(i) $\sqrt{4x^2 + 20xy + 25y^2} = \sqrt{(2x + 5y)^2} = |(2x + 5y)|$

(ii) $\sqrt{x^6 + \frac{1}{x^6} - 2} = \sqrt{\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2} = \left|\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)\right|$

(iii) پہلے کثیر رقمی کا اجزائے ضربی معلوم کرنا چاہئے

$6x^2 - x - 2 = (2x + 1)(3x - 2)$; $3x^2 - 5x + 2 = (3x - 2)(x - 1)$

$2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$

اب $\sqrt{(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)}$

$= \sqrt{(2x + 1)(3x - 2) \times (3x - 2)(x - 1) \times (x - 1)(2x + 1)}$

$= \sqrt{(2x + 1)^2 (3x - 2)^2 (x - 1)^2} = |(2x + 1)(3x - 2)(x - 1)|$

مشق 3.12

1. مندرجۂ ذیل کا جذرالمربع معلوم کیجئے۔

(i) $196a^6b^8c^{10}$ (ii) $289(a - b)^4 (b - c)^6$ (iii) $(x + 11)^2 - 44x$

(iv) $(x - y)^2 + 4xy$ (v) $121x^8y^6 \div 81x^4y^8$ (vi) $\frac{64(a + b)^4 (x - y)^8 (b - c)^6}{25(x + y)^4 (a - b)^6 (b + c)^{10}}$

2. مندرجۂ ذیل کا جذرالمربع معلوم کیجئے۔

(i) $16x^2 - 24x + 9$

(ii) $(x^2 - 25)(x^2 + 8x + 15)(x^2 - 2x - 15)$

(iii) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy + 30yz - 20zx$

(iv) $x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$

(v) $(6x^2 + 5x - 6)(6x^2 - x - 2)(4x^2 + 8x + 3)$

(vi) $(2x^2 - 5x + 2)(3x^2 - 5x - 2)(6x^2 - x - 1)$

3.7.2 تقسیمی طریقے سے کثیر رقمیات کا جذرالمربع معلوم کرنا :

اس طریقے میں ہم ان کثیر رقمیات کا جذرالمربع معلوم کریں گے۔ جن کے جزوِ ضربی آسانی کے ساتھ مختصر نہیں کر سکتے۔ اگر ان کے درجہ اعلیٰ ہوں تو تقسیم میں آسانی ہوگی۔

جس طرح سے مثبت سالم اعداد کا جذرالمربع معلوم کرتے ہیں۔ اسی طریقے سے کثیر رقمی کا جذرالمربع بھی معلوم کر سکتے ہیں۔ آیئے نیچے دیئے گئے مثالوں کے ساتھ اس طریقے کو ہم سمجھیں۔

معلوم کرنے کے لئے:

(i) $\sqrt{66564}$

$$\begin{array}{r|l} & 2\ \ 5\ \ 8 \\ \hline 2 & 6\ 65\ 64 \\ & 4 \\ \hline 45 & 2\ 65 \\ & 2\ 25 \\ \hline 508 & 40\ 64 \\ & 40\ 64 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(ii) $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1}$

فرض کریں کہ $p(x) = 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 + 2x + 1 \\ \hline 3x^2 & 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1 \\ & 9x^4 \\ \hline 6x^2 + 2x & 12x^3 + 10x^2 \\ & 12x^3 + 4x^2 \\ \hline 6x^2 + 4x + 1 & 6x^2 + 4x + 1 \\ & 6x^2 + 4x + 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

چنانچہ $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$ اور $\sqrt{66564} = 258$

برائے ذہن نشینی

(i) کثیر رقمی کے x کے درجوں کو **صعودی اور نزولی ترتیب** میں لکھتے وقت چھوٹی ہوئی رقموں کیلئے صفر لکھیں گے۔

(ii) اوپر کے طریقے کو نیچے دئے ہوئے عمل کے ساتھ موازنہ کر سکتے ہیں۔

$$\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(a+b+c)^2}$$

چنانچہ اس طریقے سے ہم مطلوبہ یا مناسب a, b, c معلوم کر سکتے ہیں۔

اب
$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\ &= a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c)c \\ &= (3x^2)^2 + (6x^2 + 2x)(2x) + (6x^2 + 4x + 1)(1)\end{aligned}$$

غرض

جب $a = 3x^2$ ، $b = 2x$ اور $c = 1$ ، $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$

متبادل طریقہ : جذرالمربع معلوم کرنے کے لئے پہلے ہم اسے اس طرح لکھیں۔ $9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$

$$= (mx^2 + nx + l)^2 = m^2x^4 + 2mnx^3 + (n^2 + 2lm)x^2 + 2nlx + l^2$$

پہلے سر اعداد کا موازنہ کریں اور اس کے بعد مناسب مستقل جیسے n, m, l معلوم کریں۔

(iii) اور بھی بالکل دلچسپ ہوگا۔ ذیل کو نوٹ کریں گے۔

$$25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4 = 25x^4 - 30x^3 + 9x^2 + 20x^2 - 12x + 4$$
$$= (5x^2)^2 + [10x^2 + (-3x)](-3x) + (10x^2 - 6x + 2)2$$
$$= (5x^2)^2 + [2(5x^2) + (-3x)](-3x) + [2(5x^2) + 2(-3x) + 2]2$$
$$= a^2 + [2a + (-b)](-b) + [2a + 2(-b) + c]c$$
$$= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ac$$
$$= (a - b + c)^2$$ جہاں $a = 5x^2,\ b = 3x,\ c = 2$

$$\therefore\ \sqrt{25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4} = |5x^2 - 3x + 2|.$$

مثال 3.33

$x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$ کا جذرالمربع دریافت کیجئے۔

حل : دی گئی کثیر رقمی پہلے ہی سے x کی نزولی قوتوں میں ہے۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 5x + 6 \\
\hline
x^2 & x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36 \\
 & x^4 \\
\hline
2x^2 - 5x & -10x^3 + 37x^2 \\
 & -10x^3 + 25x^2 \\
\hline
2x^2 - 10x + 6 & 12x^2 - 60x + 36 \\
 & 12x^2 - 60x + 36 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

چنانچہ $\sqrt{x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36} = |(x^2 - 5x + 6)|$

مثال 3.34

$x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 30x + 25$ کا جذرالمربع دریافت کیجئے۔

حل : پہلے x کے درجوں کو ان کی صعودی ترتیب میں لکھیں۔ اسکے بعد جذرالمربع معلوم کریں۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5 - 3x + x^2 \\
\hline
5 & 25 - 30x + 19x^2 - 6x^3 + x^4 \\
 & 25 \\
\hline
10 - 3x & -30x + 19x^2 \\
 & -30x + 9x^2 \\
\hline
10 - 6x + x^2 & 10x^2 - 6x^3 + x^4 \\
 & 10x^2 - 6x^3 + x^4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

چنانچہ کثیر رقمی کا جذرالمربع $|x^2 - 3x + 5|$ ہے۔

مثال 3.35

اگر $m - nx + 28x^2 + 12x^3 + 9x^4$ ایک کامل مربع ہو تو m اور n کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

حل :

کثیر رقمی کو x کی صعودی ترتیب میں لکھیں $9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m$

	$3x^2 + 2x + 4$
$3x^2$	$9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m$
	$9x^4$
$6x^2 + 2x$	$12x^3 + 28x^2$
	$12x^3 + 4x^2$
$6x^2 + 4x + 4$	$24x^2 - nx + m$
	$24x^2 + 16x + 16$
	0

چونکہ دی گئی کثیر رقمی ایک کامل مربع ہے، اس میں $n = -16$ اور $m = 16$ ہوگا۔

مشق 3.13

1) مندرجۂ ذیل کثیر رقمی کا جذر المربع تقسیمی طریقے سے دریافت کیجئے۔

(i) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$ (ii) $4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1$

(iii) $9x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x + 1$ (iv) $4 + 25x^2 - 12x - 24x^3 + 16x^4$

2) مندرجہ ذیل کثیر رقمیات ایک کامل مربع ہو تو a اور b کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $4x^4 - 12x^3 + 37x^2 + ax + b$ (ii) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - ax + b$

(iii) $ax^4 + bx^3 + 109x^2 - 60x + 36$ (iv) $ax^4 - bx^3 + 40x^2 + 24x + 36$

3.8 دو درجی مساوات : (Quadratic equations)

یونانی ریاضی دان اقلیدس (Euclid) نے لمبائی معلوم کرنے کے لئے ایک ہندسوی طریقے کو اپنایا جسے ہم موجودہ دور میں دو درجی مساوات کا حل دریافت کرنے کے لئے استعمال کرتے ہیں۔ دو درجی مساوات کو حل کرنے کا سہرا قدیم ہندوستانی ریاضی دانوں کے سر جاتا ہے۔ یہ حقیقت ہے کہ برہما گپتا (598 - 665 AD) نے دو درجی مساوات $ax^2 + bx = c$ کو حل کرنے کے لئے ایک ضابطہ دیا بعد میں سری دھر آچاریہ (1025 AD) نے کامل مربع کے طریقے سے دو درجی مساوات حل کرنے کے لئے ایک ضابطہ دیا جسے دو درجی ضابطہ کہا جاتا ہے۔ (بھاسکرا II کے مطابق)

اس حصّے میں مختلف طریقے سے دو درجی مساوات کو حل کرنا سیکھیں گے۔ ہم دو درجی مساوات کے استعمالات بھی دیکھیں گے۔

تعریف

مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ ایک دو درجی مساوات ہے جس میں x ایک متغیر ہے۔ a, b, c حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$

حقیقت میں $p(x) = 0$ کوئی بھی مساوات، جس میں $p(x)$ کثیر رقمی کا درجہ 2 ہے، دو درجی مساوات ہوگی۔ جس کی معیاری صورت $ax^2 + bx + c = 0$ ہے، $a \neq 0$

مثال کے طور پر $2x^2 - 3x + 4 = 0$, $1 - x + x^2 = 0$ بعض دو درجی مساوات ہیں۔

3.8.1 اجزائے ضربی طریقے سے دو درجی مساوات کا حل

اجزائے ضربی طریقہ استعمال کرتے ہیں جب دو درجی کے اجزائے ضربی نکال سکتے ہیں۔اس کے خطی اجزا میں حاصل ضرب دیا گیا ہے۔ اگر کوئی بھی جز صفر ہے تو پورا حاصل ضرب صفر ہے۔ایسے ہی اگر حاصل ضرب صفر کے برابر ہے تو چند جز اس حاصل ضرب کے صفر ہی ہوں گے اور کوئی جز میں جس میں نامعلوم رقم ہے وہ بھی صفر کے برابر ہوں گے۔غرض دو درجی مساوات کو حل کرنے میں ہمیں x کی قیمت معلوم کرنا ہے جو ہر ایک جز کو صفر بنا دیتی ہے۔ایسے ہی ہم ہر جز کو صفر کے برابر کرنا ہے اور نامعلوم کو حل کرنا ہے۔

مثال 3.36 حل کرو : $6x^2 - 5x - 25 = 0$

حل : $6x^2 - 5x - 25 = 0$

یعنی پہلے 'α' اور ' β' معلوم کرنا چاہئے۔ اس طرح کہ $\alpha + \beta = -5$ اور $\alpha\beta = 6\times(-25) = -150$ ہے۔

یہاں x کا سر عدد -5 ہے۔چنانچہ ہمیں $\alpha = -15$ اور $\beta = 10$ دوسرا عدد

$$6x^2 - 5x - 25 = 6x^2 - 15x + 10x - 25 = 3x(2x-5) + 5(2x-5)$$

$$= (2x-5)(3x+5)$$

$2x - 5 = 0$ $\therefore$ اور $3x + 5 = 0$

$x = -\frac{5}{3}$, $x = \frac{5}{2}$ حل مجموعہ $= \left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right\}$

مثال 3.37 حل کرو $\frac{6}{7x-21} - \frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{x^2-9} = 0$

حل : دی گئی مساوات دو درجی مساوات نہیں ہے۔مگر اس کو دو درجی مساوات میں مختصر کر سکتے ہیں۔

اب $\frac{6}{7(x-3)} - \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x+3)(x-3)} = 0$

$$\Longrightarrow \frac{6(x^2-9) - 7(x+3) + 7(x-3)}{7(x-3)^2(x+3)} = 0$$

$$\Longrightarrow 6x^2 - 54 - 42 = 0 \Longrightarrow x^2 - 16 = 0$$

$x^2 = 16$ مساوات دو درجی مساوات ہے۔اور اسکی دو قیمتیں حاصل ہوتے ہیں۔

$x = 4 , x = -4$

$\therefore$ حل مجموعہ $= \{4 , -4\}$

مثال 3.38 حل کرو $\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x , 3 - 4x > 0$

$\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x$

حل : دونوں طرف مربع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $24 - 10x = (3 - 4x)^2$

$$\Rightarrow 16x^2 - 14x - 15 = 0 \Rightarrow 16x^2 - 24x + 10x - 15 = 0$$

$\Longrightarrow \quad (8x+5)(2x-3)=0 \qquad x=\frac{3}{2}$ یا $-\frac{5}{8}$

جب $x=\frac{3}{2}$ ، $3-4x=3-4\left(\frac{3}{2}\right)<0$ مساوات کا حل نہیں ہے۔ $x=\frac{3}{2}$

جب $3-4x>0$ ، $x=-\frac{5}{8}$ $\qquad \therefore$ حل مجموعہ $\left\{-\frac{5}{8}\right\}$ ہے۔

برائے ذہن نشینی

اوپر دی گئی مساوات کو حل کرنے کے لئے ہم **مربع کرنے کی خاصیت** استعمال کرتے ہیں۔

$a=b \Rightarrow a^2=b^2$ بدقسمتی سے یہ مربع خاصیت یقینی نہیں ہے کہ نئی مساوات کے سب حل اصلی مساوات کے حل ہیں۔ مثال کے طور پر مساوات $x=5$ کو مربع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $x^2=25$ جس سے ہمیں اس طرح حاصل ہوتا ہے۔ $x=5$ اور $x=-5$ ۔ مگر $x=-5$ اصل (دی گئی) مساوات کا حل نہیں ہے۔ ایسے حل **خارجی (extraneous) حل** کہلاتے ہیں۔

لہٰذا اوپری مثال میں دکھایا گیا ہے کہ جب مساوات کے دونوں طرف مربع کرتے ہیں تو حاصل شدہ مساوات کے حل کو جانچنا چاہئے کہ وہ حل اصلی مساوات کے حل ہیں یا نہیں۔ یہ ضروری ہے اس لئے کہ مربع کرنے پر اصلی مساوات کے حل کھو نہ جائیں۔ مگر چند رقموں کا تعارف کروانا ہے جو نئے مساوات کے جذر ہیں۔ مگر اصلی مساوات کے نہیں۔

مشق 3.14

1. مندرجۂ ذیل دو درجی مساوات کو اجزائے ضربی کے طریقے سے حل کیجئے۔

(i) $(2x+3)^2-81=0$ (ii) $3x^2-5x-12=0$ (iii) $\sqrt{5}x^2+2x-3\sqrt{5}=0$

(iv) $3(x^2-6)=x(x+7)-3$ (v) $3x-\frac{8}{x}=2$ (vi) $x+\frac{1}{x}=\frac{26}{5}$

(vii) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{34}{15}$ (viii) $a^2b^2x^2-(a^2+b^2)x+1=0$

(ix) $2(x+1)^2-5(x+1)=12$ (x) $3(x-4)^2-5(x-4)=12$

3.8.2 کامل مربع کے طریقے سے دو درجی مساوات کا حل (Solution of a quadratic equation by completing square)

$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2$ سے غور کیجئے کہ آخری رقم $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ، 'x' سر عدد کے آدھا کا مربع ہے۔ چنانچہ (x^2+bx) میں $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ کم ہوگا۔ صرف رقم $\left(x+\frac{b}{2}\right)$ کا مربع ہوگا۔ غرض اگر x سر عدد کے آدھے کا مربع x^2+bx جملے میں جمع کیا جائے تو نتیجہ دو رقمی کا مربع ہے۔ اس طرح کی جمع عام طور پر **کامل مربع کی جمع** کہلاتی ہے۔ اس حصّے میں ہم دو درجی مساوات کا حل کامل مربع کا طریقے سے نیچے دئے گئے منزل کے مطابق کریں گے۔

منزل 1 : اگر x^2 کا سر عدد '1' ہے تو دوسری منزل کو جانا ہے۔ اگر نہیں تو مساوات کے دونوں طرف x^2 کے سر عدد سے تقسیم کرنا ہے تمام رقمیں متغیر کے ساتھ مساوات کے ایک ہی طرف لانا ہے۔

منزل 2 : x کے سر عدد کا آدھا معلوم کرو اور اسے مربع کرو۔ حاصل شدہ عدد کو مساوات کے دونوں طرف جمع کرو۔ مساوات کو حل کرنے کے لئے **جذر المربع کی خاصیت** استعمال کرو۔

$x^2=t \Rightarrow x=\sqrt{t}$ یا $x=-\sqrt{t}$ جس میں 't' غیر منفی عدد ہے۔

مثال 3.39

کامل مربع کے طریقے سے $5x^2 - 6x - 2 = 0$ دودرجی مساوات کو حل کیجئے۔

حل : دی گئی مساوات $5x^2 - 6x - 2 = 0$ ہے۔

$\Longrightarrow \quad x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0$ (دونوں جانب 5 سے تقسیم کرنا چاہئے)

$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x = \frac{2}{5}$ (x کے سرعدد کا آدھا $\frac{3}{5}$ ہے)

$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x + \frac{9}{25} = \frac{9}{25} + \frac{2}{5}$ (دونوں جانب $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ جمع کرنے پر)

$\Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$

$\Longrightarrow \quad x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}}$ (دونوں جانب جذرالمربع کرنا چاہئے)

چنانچہ ہمیں $x = \frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{19}}{5} = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}$.

اور حل مجموعہ $\left\{\frac{3+\sqrt{19}}{5}, \frac{3-\sqrt{19}}{5}\right\}$. ہے۔

مثال 3.40

کامل مربع کے طریقے سے مساوات کو حل کیجئے۔ $a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$

حل : اگر $a = 0$ ہوتو اس مساوات میں ثابت کرنے کیلئے کچھ بھی نہیں۔ $a \neq 0$ کے لئے ہمارے پاس ہے تو ہمیں

$a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$

$\Longrightarrow \quad x^2 - \frac{3b}{a}x + \frac{2b^2}{a^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x = \frac{-2b^2}{a^2}$

$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x + \frac{9b^2}{4a^2} = \frac{9b^2}{4a^2} - \frac{2b^2}{a^2}$

$\Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{9b^2 - 8b^2}{4a^2} \qquad \Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

$\Longrightarrow \quad x - \frac{3b}{2a} = \pm\frac{b}{2a} \qquad \Longrightarrow \quad x = \frac{3b \pm b}{2a}$

حل مجموعہ $= \left\{\frac{b}{a}, \frac{2b}{a}\right\}$.

3.8.3 ضابطے کے طریقے سے دودرجی مساوات کا حل (Solution of quadratic equation by formula method)

اس حصّے میں ہم دودرجی ضابطہ حاصل کریں گے، جو دودرجی مساوات کے جذروں کو معلوم کرنے کے لئے فائدہ مند ہوگا۔

ایک دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ کو فرض کریں۔ ہم دی گئی مساوات کو دوبارہ اس طرح لکھیں گے۔

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$\Longrightarrow \quad x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \Longrightarrow \quad x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a}$

$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ کو دونوں طرف جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا۔ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

یعنی $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

جیسا کہ $\Longrightarrow \quad x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

لہٰذا ہمیں حاصل ہوا $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (1)

حل مجموعہ $\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$.

مساوات (1) میں دیا گیا دو درجی ضابطہ کہلاتا ہے۔ اب ہم دو درجی ضابطہ استعمال کرتے ہوئے مساوات کو حاصل کریں۔

مثال 3.41

ضابطہ کو استعمال کر کے مساوات کو حل کیجئے۔ $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+4}$

جس میں $x+1\neq 0,\ x+2\neq 0$ اور $x+4\neq 0$

حل : دی گئی مساوات دو درجی مساوات نہیں ہے۔ غور کریں

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+4}$$

یعنی $\frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{2}{x+4}-\frac{1}{x+2}\right] = 2\left[\frac{2x+4-x-4}{(x+4)(x+2)}\right]$

$$\frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{x}{(x+2)(x+4)}\right]$$

$$x^2+6x+8 = 2x^2+2x$$

ہمیں $x^2-4x-8=0$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ دو درجی مساوات ہے۔

(اوپر دی گئی مساوات کو LCM کے ذریعے بھی حل کر سکتے ہیں)

ضابطہ کے استعمال سے

$$x = \frac{4\pm\sqrt{16-4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{4\pm\sqrt{48}}{2}$$

چنانچہ $x = 2+2\sqrt{3}$ or $2-2\sqrt{3}$

حل مجموعہ $= \{2-2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3}\}$

مشق 3.15

1) کامل مربع کے طریقہ سے مندرجۂ ذیل دو درجی مساوات کو حل کیجئے۔

(i) $x^2+6x-7=0$

(ii) $x^2+3x+1=0$

(iii) $2x^2+5x-3=0$

(iv) $4x^2+4bx-(a^2-b^2)=0$

(v) $x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$

(vi) $\frac{5x+7}{x-1} = 3x+2$

2. ضابطے کو استعمال کر کے دو درجی مساوات کو حل کیجئے۔

(i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (ii) $15x^2 - 11x + 2 = 0$

(iii) $x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$ (iv) $3a^2x^2 - abx - 2b^2 = 0$

(v) $a(x^2 + 1) = x(a^2 + 1)$ (vi) $36x^2 - 12ax + (a^2 - b^2) = 0$

(vii) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-3}{x-4} = \frac{10}{3}$ (viii) $a^2x^2 + (a^2 - b^2)x - b^2 = 0$

3.8.4 دو درجی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے مسئلوں کا حل

اب ہم بعد روزمرہ کی زندگی میں استعمال ہونے والے چند سادے مسئلے جو الفاظ میں ظاہر کئے گئے اور چند مسئلے روزانہ زندگی کے حالات جن میں دو درجی مساوات شامل ہیں۔ پہلے ہم دی گئی مساوات کو تبدیل کرتے ہوئے ایک اور مساوات بنائیں۔ اس کے بعد ہم مسئلہ کی مناسبت سے اس کا حل معلوم کریں گے۔

مثال 3.42

ایک عدد اور اس کے معکوس کا حاصلِ جمع $5\frac{1}{5}$ ہے۔ عدد دریافت کیجئے۔

حل : فرض کرو کہ عدد x اور اُسکا معکوس $\frac{1}{x}$ ہے۔

دونوں کو جمع کرنے پر $x + \frac{1}{x} = 5\frac{1}{5} \implies \frac{x^2+1}{x} = \frac{26}{5}$

$$5x^2 - 26x + 5 = 0$$

$$\implies 5x^2 - 25x - x + 5 = 0$$

$$(5x - 1)(x - 5) = 0 \implies x = 5 \text{ یا } \frac{1}{5}$$

لہٰذا دو درکار اعداد $5, \frac{1}{5}$ ہیں۔

مثال 3.43

مثلث کا قاعدہ اس کے عمود سے 4 سمر بڑا ہے۔ اگر مثلث کا رقبہ 48 مربع سمر ہے۔ مثلث کا قاعدہ اور عمود کی اونچائی دریافت کیجئے۔

حل : فرض کرو کہ مثلث کی اونچائی x سمر ہے۔

دئے گئے اصول کے تحت مثلث کا قاعدہ $(x + 4)$ سمر ہے۔

$\therefore$ مثلث کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times$ قاعدہ $\times$ اونچائی

دئے گئے اصول کے تحت $\frac{1}{2}(x + 4)(x) = 48$

$$\implies x^2 + 4x - 96 = 0 \implies (x + 12)(x - 8) = 0$$

$$\implies x = -12 \text{ یا } 8$$

مگر $x = -12$ ممکن نہیں ہے۔ (اونچائی مثبت عدد ہونا چاہئے)

$\therefore x = 8$ اور $x + 4 = 12$

لہٰذا مثلث کی اونچائی 8 سمر ہے اور قاعدہ 12 سمر ہے۔

مثال 3.44 ایک کار مقرر کردہ وقت سے 30 منٹ بعد نکلتی ہے۔اس کی منزل 150 کلومیٹر دور ہے۔وقت پر پہنچنے کے لئے وہ اپنی معمول رفتار سے 25 کلومیٹر فی گھنٹہ اپنی رفتار کو بڑھاتا ہے۔ اس کی معمول رفتار معلوم کیجئے۔

حل : فرض کرو کہ کار کی معمولی رفتار x کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔

حالانکہ بڑھائی گئی کار کی رفتار $(x + 25)$ کلومیٹر فی گھنٹہ ہے

$$\text{لیا گیا وقت} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}} \qquad \text{کل فاصلہ} = 150 \text{ کلومیٹر}$$

T_1 اور T_2 گھنٹوں میں لیا گیا وقت ہے جس میں وقت پر پہنچنے کے لئے کار کو دیا گیا وقت اور کم کیا گیا وقت (جب کار کی رفتار بڑھے گی) حسب معمول ہے

دئے گئے معلومات سے $\left(30 \text{ منٹ} = \frac{1}{2} \text{ گھنٹہ}\right)$ $\quad T_1 - T_2 = \frac{1}{2}$ گھنٹہ

$$\Rightarrow \quad \frac{150}{x} - \frac{150}{x+25} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 150\left[\frac{x+25-x}{x(x+25)}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 25x - 7500 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 100)(x - 75) = 0$$

$$x = 75 \text{ یا } -100$$

چونکہ $x = -100$ منفی قیمت ہے لہٰذا یہ قابل قبول قیمت نہیں۔ لہٰذا کار کی معمولی رفتار 75 کلومیٹر فی گھنٹہ ہوگی۔

مشق 3.16

1. ایک عدد اور اس کے معکوس کا حاصل جمع $\frac{65}{8}$ ہے۔عدد معلوم کرو۔
2. دو مثبت اعداد کے مربعوں کا فرق 45 ہے چھوٹے عدد کا مربع، بڑے مربع کا چار گنا ہے۔اعداد معلوم کیجئے۔
3. ایک کسان چاہتا ہے کہ 100 مربع میٹر مستطیلی ترکاری کا باغ شروع کریں اس کے پاس صرف 30 میٹر (Barbed wire) ہے۔ وہ مستطیلی باغ کو باڑھ لگاتا ہے۔وہ اپنے گھر کے ایک حصہ کے کمپاؤنڈ کو بطور چوتھا حصہ مان کر صرف تین حصوں میں باڑھ لگاتا ہے۔ باغ کے ابعاد معلوم کیجئے۔
4. ایک مستطیل کھیت کی لمبائی 20 میٹر اور چوڑائی 14 میٹر ہے۔ وہاں ایک بیرونی راستہ ہے، جس کی مساوی چوڑائی ہے۔اس کا رقبہ 111 مربع میٹر ہے۔باہر کے راستے کی چوڑائی معلوم کیجئے۔
5. ایک ریل گاڑی مساوی رفتار میں 90 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتی ہے۔اور وہ 15 کلومیٹر فی گھنٹہ اپنی رفتار بڑھاتا ہے تو اس کے سفر کے وقفہ میں 30 منٹ کم لگیں گے۔ ریل گاڑی کی مخصوص رفتار معلوم کیجئے۔
6. ایک کشتی کی رفتار ساکن پانی میں 30 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے وہ پانی کے بہاؤ کی مخالف سمت میں 30 کلومیٹر جا کر واپس اپنے مقام تک آنے کے لئے 4 گھنٹے 30 منٹ لیتی ہے۔ پانی کی رفتار معلوم کیجئے۔
7. ایک سال پہلے ایک آدمی کی عمر اس کے بیٹے کی عمر کا 8 گنا تھی۔ اب اس کی عمر اس کے بیٹے کی عمر کے مربع کے برابر ہے۔ان کی موجودہ عمریں معلوم کرو۔
8. ایک شطرنج کے بورڈ میں 64 مساوی مربع ہیں اور ہر مربع کا رقبہ 6.25 مربع سمر ہے۔بورڈ کے اطراف کا کنارا 2 سنٹی میٹر چوڑا ہے۔ شطرنج کے بورڈ کی اطراف کی لمبائی معلوم کیجئے۔

9۔ ایک کام کو ختم کرنے کے لئے A کو B سے 6 دن کم لگتے ہیں۔ اگر A اور B دونوں مل کر اس کام کو 4 دن میں پورا کرتے ہیں تو صرف B کو اس کام ختم کرنے کے لئے کتنے دن لگیں گے؟

10۔ دو ٹرینیں ایک اسٹیشن سے ایک ہی وقت پر نکلتی ہیں۔ ایک ٹرین مغرب کی طرف روانہ ہوتی ہے اور دوسری ٹرین شمال کی طرف روانہ ہوتی ہے۔ دوسری ٹرین کی بہ نسبت پہلی ٹرین 5 کلومیٹر فی گھنٹہ تیز چلتی ہے۔ دو گھنٹوں پر وہ دونوں ایک دوسرے سے 50 کلومیٹر کی دوری پر ہیں۔ ٹرین کی اوسط رفتار معلوم کرو۔

3.8.5۔ ایک دو درجی مساوات کے جذروں کی نوعیت

مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذروں کے لئے یہ ضابطہ کیا گیا ہے $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

اگر $b^2 - 4ac > 0$ ، ہو تو ہم دو حقیقی جذر حاصل ہوتے ہیں۔

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{اور} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

اگر $b^2 - 4ac = 0$ ہو تو اس کے دو جذر ہوں گے $x = \dfrac{-b}{2a}$

اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہو تو $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ایک حقیقی عدد نہیں ہوگا۔ لہٰذا دی گئی دو درجی مساوات کے حقیقی جذر نہیں ہوں گے۔

لہٰذا جذروں کی نوعیت $b^2 - 4ac$ کی قیمتوں پر منحصر ہوتی ہے۔ $b^2 - 4ac$ کی عبارت ، $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذروں کی نوعیت کا فرق کرتی ہے اور اس لئے اس کو دو درجی مساوات کی **امتیازی خصوصیت** کہا جاتا ہے اور اس کو علامت Δ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

جذروں کی نوعیت	امتیازی خصوصیت $\Delta = b^2 - 4ac$
حقیقی اور غیر مساوی	$\Delta > 0$
حقیقی اور مساوی	$\Delta = 0$
حقیقی جذر نہیں ہوتے (اس کے مجازی جذر ہوتے ہیں)	$\Delta < 0$

مثال 3.45 درج ذیل دو درجی مساوات کے جذروں کی نوعیت معلوم کرو۔

(i) $x^2 - 11x - 10 = 0$ (ii) $4x^2 - 28x + 49 = 0$ (iii) $2x^2 + 5x + 5 = 0$

حل : مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے لئے امتیازی خصوصیت $\Delta = b^2 - 4ac$

(i) یہاں پر $a = 1$ $b = -11$ اور $c = -10$

یہاں پر امتیازی خصوصیت $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-11)^2 - 4(1)(-10) = 121 + 40 = 161$

$\Delta > 0$، لہٰذا جذر حقیقی اور غیر مساوی ہیں

(ii) $a = 4$; $b = -28$ اور $c = 49$

یہاں پر امتیازی خصوصیت $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-28)^2 - 4(4)(49) = 0$

چونکہ $\Delta = 0$ ہے، دی گئی مساوات کے جذر حقیقی اور مساوی ہیں۔

(iii) یہاں پر $a = 2$ ؛ $b = 5$ اور $c = 5$

یہاں پر امتیازی خصوصیت $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (5)^2 - 4(2)(5) = 25 - 40 = -15$

چونکہ $\Delta < 0$ ہیں، مساوات کے حقیقی جذر نہیں ہیں۔

مثال 3.46

ثابت کیجئے کہ مساوات $(a - b + c)x^2 + 2(a - b)x + (a - b - c) = 0$ کے جذر تمام حقیقی اعداد a اور b کے لئے ناطق اور تمام c کے لئے ناطق ہوں گے۔

حل : فرض کرو کہ دی گئی مساوات $Ax^2 + Bx + c = 0$ کی شکل میں ہو تو

$A = a - b + c$, $B = 2(a - b)$ اور $c = a - b - c$

اب $Ax^2 + Bx + c = 0$ کا امتیازی خصوصیت

$B^2 - 4AC = [2(a - b)]^2 - 4(a - b + c)(a - b - c)$

$= 4(a - b)^2 - 4[(a - b) + c][(a - b) - c]$

$= 4(a - b)^2 - 4[(a - b)^2 - c^2]$

$\Delta = 4(a - b)^2 - 4(a - b)^2 + 4c^2 = 4c^2$ ایک کامل مربع ہے

چونکہ $\Delta > 0$ $\therefore$ ایک کامل مربع ہے، لہٰذا دی گئی مساوات کے جذر ناطق اعداد ہوں گے۔

مثال 3.47

k کی قیمت دریافت کیجئے۔ جبکہ مساوات $x^2 - 2x(1 + 3k) + 7(3 + 2k) = 0$ حقیقی اور مساوی جذر ہے۔

حل : دی گئی مساوات

$$x^2 - 2x(1 + 3k) + 7(3 + 2k) = 0 \quad (1)$$

فرض کرو کہ مساوات (1) $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل میں ہے۔

یہاں $a = 1$, $b = -2(3k + 1)$, $c = 7(3 + 2k)$

یہاں پر امتیازی خصوصیت $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-2(3k + 1))^2 - 4(1)(7)(3 + 2k)$

$= 4(9k^2 + 6k + 1) - 28(3 + 2k) = 4(9k^2 - 8k - 20)$

دی گئی مساوات کے جذر مساوی ہیں، لہٰذا $\Delta = 0$

$\Rightarrow 9k^2 - 8k - 20 = 0$

$\Rightarrow (k - 2)(9k + 10) = 0$

چنانچہ $k = 2, -\frac{10}{9}$.

مشق 3.17

1. مساوات کے جذروں کی نوعیت معلوم کیجئے۔

(i) $x^2 - 8x + 12 = 0$ (ii) $2x^2 - 3x + 4 = 0$

(iii) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ (iv) $3x^2 - 2\sqrt{6x} + 2 = 0$

(v) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$ (vi) $(x - 2a)(x - 2b) = 4ab$

2. مندرجۂ ذیل مساوات میں k کی قیمت معلوم کیجئے۔ جبکہ جذر حقیقی اور مساوی ہیں۔

(i) $2x^2 - 10x + k = 0$ (ii) $12x^2 + 4kx + 3 = 0$

(iii) $x^2 + 2k(x - 2) + 5) = 0$ (iv) $(k + 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$

3. ثابت کیجئے کہ مساوات کے جذر غیر حقیقی ہیں۔ $x^2 + 2(a + b)x + 2(a^2 + b^2) = 0$

4. ثابت کیجئے کہ مساوات کے جذر حقیقی نہیں ہیں۔ $3p^2x^2 - 2pqx + q^2 = 0$

5. اگر مساوات کے جذر $(a^2 + b^2)x^2 - 2(ac + bd)x + c^2 + d^2 = 0$ ہو تو ثابت کیجئے کہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$ad - bc \neq 0$

6. ثابت کیجئے کہ $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ کے جذر ہمیشہ حقیقی ہیں اور وہ اس وقت تک مساوی نہیں ہو سکتے جب تک کہ $a = b = c$ ہو۔

7. اگر مساوات $(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$ کے جذر مساوی ہوں تو ثابت کیجئے کہ $c^2 = a^2(1 + m^2)$

3.8.6 دو درجی مساوات کے جذر اور سر اعداد کا درمیانی تعلق :

دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ پر غور کیجئے، جہاں پر 'a' 'b' اور 'c' حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ ہے۔
دی گئی مساوات کے جذر α اور β ہیں۔

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{اور} \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

جذروں کا حاصلِ جمع

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b}{a} = \frac{x \text{ کا سر عدد } -}{x^2 \text{ کا سر عدد}}$$

جذروں کا حاصلِ ضرب

$$\alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a} = \frac{\text{مستقل رقم}}{x^2 \text{ کا سر عدد}}$$

چنانچہ $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر 'α' اور 'β' ہیں۔

(i) جذروں کا حاصلِ جمع $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

(ii) جذروں کا حاصلِ ضرب $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

اگر جذریں دیئے گئے ہوں تو ان سے مساوات کی تشکیل

فرض کرو کہ مساوات کے جذریں α اور β ہیں۔تب $(x-\alpha)$ اور $(x-\beta)$ جزوِ ضربی ہیں۔

یعنی

$$(x-\alpha)\ (x-\beta) = 0$$

$$\Rightarrow\ x^2 - (\alpha+\beta)\,x + \alpha\,\beta = 0$$

$$x^2 - (\text{جذروں کا حاصلِ جمع})\ x + (\text{جذروں کا حاصلِ ضرب}) = 0$$

غور کریں

اس میں ایک ہی جذروں کے لامحدود دو درجی مساوات ہوتے ہیں۔

مثال 3.48

اگر ایک مساوات $3x^2 - 10x + k = 0$ کا جذر $\frac{1}{3}$ ہو تو دوسرا جذر معلوم کیجئے۔اور k کی قیمت بھی معلوم کیجئے۔

حل :

دی گئی مساوات $3x^2 - 10x + k = 0$ ہے۔

فرض کرو کہ جذریں α اور β ہیں۔

$$\alpha + \beta = \frac{-(-10)}{3} = \frac{10}{3} \qquad (1)$$

$\alpha = \frac{1}{3}$ مساوات (1) میں درج کریں تو ہمیں $\beta = 3$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\alpha\,\beta = \frac{k}{3} \quad \Rightarrow k = 3$$

چنانچہ دوسرا جذر $\beta = 3$ اور k کی قیمت 3 ہے۔یعنی $k = 3$ ہے۔

مثال 3.49

اگر دو درجی مساوات $ax^2 - 5x + c = 0$ کا حاصلِ جمع اور حاصلِ ضرب 10 کے مساوی ہے۔تو a اور c کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

حل : دی گئی مساوات $ax^2 - 5x + c = 0$ ہے۔

جذروں کا حاصلِ جمع $\frac{5}{a} = 10, \ \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$

جذروں کا حاصلِ ضرب $\frac{c}{a} = 10$

$$\Longrightarrow c = 10\,a = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

$\therefore\ c = 5$ اور $a = \frac{1}{2}$ ہے۔

غور کریں

اگر $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر α اور β ہیں تو $\alpha + \beta$ اور $\alpha\beta$ کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے α اور β کے کئی جملے جیسے $\alpha^2 + \beta^2$، $\alpha^2 \beta^2$، $\alpha^2 - \beta^2$ وغیرہ معلوم کر سکتے ہیں۔

α اور β کو شمار کرتے ہوئے چند نتیجے لکھیں۔

(i) $|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = [(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]$

(iii) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha + \beta\,[\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}]$ صرف اگر $\alpha \geq \beta$

(iv) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

(v) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

(vi) $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = [(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 - 2(\alpha\beta)^2$

(vii) $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2)$

مثال 3.50

اگر مساوات $2x^2 - 3x - 1 = 0$ کے جذر α اور β ہوں تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $\alpha^2 + \beta^2$

(ii) $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}$

(iii) $\alpha - \beta$ اگر $\alpha > \beta$

(iv) $\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta} + \dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)$

(v) $\left(\alpha + \dfrac{1}{\beta}\right)\left(\dfrac{1}{\alpha} + \beta\right)$

(vi) $\alpha^4 + \beta^4$

(vii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta} + \dfrac{\beta^3}{\alpha}$

حل : دی گئی مساوات $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ہے۔

فرض کرو کہ مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ ہے۔

$a = 2, b = -3, c = 1$ α اور β مساوات کے جذریں ہیں۔

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{اور} \quad \alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

(i) $$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$$

(ii) $$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{13}{4} \times (-2) = -\frac{13}{2}$$

(iii) $$\alpha - \beta = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$$

$$= \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4} + 2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

(iv) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\dfrac{\frac{27}{8}+\frac{9}{4}}{\frac{-1}{2}}=-\dfrac{45}{4}$

(v) $\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\beta\right)=\dfrac{(\alpha\beta+1)(1+\alpha\beta)}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(1+\alpha\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

(vi) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

$$=\left(\frac{13}{4}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{169}{16}-\frac{1}{2}\right)=\frac{161}{16}.$$

(vii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta}+\dfrac{\beta^3}{\alpha}=\dfrac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha\beta}=\left(\dfrac{161}{16}\right)\left(-\dfrac{2}{1}\right)=-\dfrac{161}{8}.$

مثال 3.51

مساوات کی تشکیل کیجئے جس کے جذریں $7+\sqrt{3}$ اور $7-\sqrt{3}$ ہیں۔

حل : دی گئی جذریں $7+\sqrt{3}$ اور $7-\sqrt{3}$ ہیں۔

جذروں کا حاصلِ جمع $=7+\sqrt{3}+7-\sqrt{3}=14$

جذروں کا حاصلِ ضرب $=(7+\sqrt{3})(7-\sqrt{3})$

$=(7)^2-(\sqrt{3})^2=49-3=46$

مساوات کی تشکیل $=x^2-$ (حاصلِ جمع) $x-$ (حاصلِ ضرب) $=0$

چنانچہ مساوات $x^2-14x+46=0$ ہے۔

مثال 3.52

اگر مساوات $3x^2-4x+1=0$ کے جذر α اور β ہوں تو مساوات کی تشکیل کیجئے جس کے جذریں ہیں۔ $\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ اور $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ ہیں

حل : فرض کرو کہ $3x^2-4x+1=0$ مساوات کے جذر α اور β ہیں۔

تو ہمیں $\alpha+\beta=\dfrac{4}{3},\qquad \alpha\beta=\dfrac{1}{3}$

جذروں کا حاصلِ جمع $=\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3-3\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{28}{9}$$

جذروں کا حاصلِ ضرب $=\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)=\alpha\beta=\dfrac{1}{3}$

چنانچہ مساوات $9x^2-28x+3=0$ یا $\therefore\ x^2-\dfrac{28}{9}x+\dfrac{1}{3}=0$

مشق 3.18

1) مندرجۂ ذیل مساوات کے حاصلِ جمع اور حاصلِ ضرب معلوم کیجئے۔

(i) $x^2 - 6x + 5 = 0$ (ii) $kx^2 + rx + pk = 0$

(iii) $3x^2 - 5x = 0$ (iv) $8x^2 - 25 = 0$

2). مساوات کی تشکیل کیجئے جس کے جذر ہیں۔

(i) $3 , 4$ (ii) $3 + \sqrt{7} , 3 - \sqrt{7}$ (iii) $\frac{4+\sqrt{7}}{2}, \frac{4-\sqrt{7}}{2}$

3). اگر مساوات $3x^2 - 5x + 2 = 0$ کے جذر α اور β ہوں تو ذیل کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\alpha - \beta$ (iii) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$

4). اگر مساوات $3x^2 - 6x + 4 = 0$ کے جذریں α اور β ہیں۔تو $\alpha^2 + \beta^2$ کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

5). اگرمساوات $2x^2 - 3x - 5 = 0$ کے جذریں α اور β ہیں تو مساوات کی تشکیل کیجئے۔جسکے جذریں α^2 اور β^2 ہیں۔

6). اگرمساوات $x^2 - 3x + 2 = 0$ کے جذریں α اور β ہوں تو دودرجی مساوات کی تشکیل کیجئے جس کے جذریں $-\alpha$ اور $-\beta$ ہیں

7). اگر α اور β مساوات $x^2 - 3x - 1 = 0$ کے جذریں ہیں تو مساوات کی تشکیل کیجئے۔جسکے جذریں $\frac{1}{\beta^2}$ اور $\frac{1}{\alpha^2}$ ہیں

8). اگر α اور β مساوات $3x^2 - 6x + 1 = 0$ کے جذریں ہیں۔ دو درجی مساوات کی تشکیل کیجئے۔جس کے جذریں

(i) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (ii) $\alpha^2\beta , \beta^2\alpha$ (iii) $2\alpha + \beta, 2\beta + \alpha$

9). ایک دودرجی مساوات معلوم کیجئے جس کے جذریں مساوات کے $4x^2 - 3x - 1 = 0$ کے جذر کے معکوس ہیں۔

10). اگر $3x^2 + kx - 81 = 0$ مساوات کا ایک جذر اس کے دوسرے جذر کے مربع ہے تو k کی قیمت معلوم کیجئے۔

11). اگر $2x^2 - ax + 64 = 0$ مساوات کا ایک جذر اس کے دوسرے جذر کا دُگنا ہے۔a کی قیمت معلوم کیجئے۔

12). اگر $5x^2 - px + 1 = 0$ کا جذر α اور β ہیں اور $\alpha - \beta = 1$ ہے۔تو p کی قیمت معلوم کیجئے۔

مشق 3.19

صحیح جواب منتخب کیجئے۔

1). اگر سسٹم $6x - 2y = 3$ ، $kx - y = 2$ ایک ہی حل رکھتے ہیں تو

(A) $k = 3$ (B) $k \neq 3$ (C) $k = 4$ (D) $k \neq 4$

2). ایک سسٹم کے دو خطی مساوات میں دو متغیرات ملتے ہیں اگر ان کی ترسیم

(A) ملتے ہیں (B) صرف ایک نقطے پر قطع کرتے (C) کسی بھی نقطے پر قطع نہیں کرتے (D) x محور پر کاٹتے ہیں

3). مساوات کے نظام $x - 4y = 8 , 3x - 12y = 24$

(A) لامحدود کئی حل ہیں (B) حل نہیں (C) ایک ہی حل ہے (D) حل ہو بھی سکتا یا نہیں بھی

4). اگر کثیر رقمی $p(x) = (k+4)x^2 + 13x + 3k$ ایک صفر دوسرے کا معکوس ہے۔تو k برابر ہے۔

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

5). کثیر رقمی $f(x) = 2x^2 + (p+3)x + 5$ دو صفروں کا حاصل جمع صفر ہے۔تو p کی قیمت ہے۔

(A) 3 (B) 4 (C) -3 (D) -4

6) $x^2 - 2x + 7$ کو $x + 4$ سے تقسیم کرنے پر باقی

(A) 28 (B) 29 (C) 30 (D) 31

7). $x^3 - 5x^2 + 7x - 4$ کو $x - 1$ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت

(A) $x^2 + 4x + 3$ (B) $x^2 - 4x + 3$ (C) $x^2 - 4x - 3$ (D) $x^2 + 4x - 3$

8). $(x^3 + 1)$ اور $(x^4 - 1)$ کا GCD

(A) $x^3 - 1$ (B) $x^3 + 1$ (C) $x + 1$ (D) $x - 1$

9). $x^2 - 2xy + y^2$ اور $x^4 - y^4$ کا G.C.D

(A) 1 (B) $x + y$ (C) $x - y$ (D) $x^2 - y^2$

10). $x^3 - a^3$ اور $(x - a)^2$ کا L.C.M

(A) $(x^3 - a^3)(x + a)$ (B) $(x^3 - a^3)(x - a)^2$

(C) $(x - a)^2 (x^2 + ax + a^2)$ (D) $(x + a)^2 (x^2 + ax + a^2)$

11). a^k, a^{k+3}, a^{k+5} کا L.C.M جہاں $K \in N$ ہے۔

(A) a^{k+9} (B) a^k (C) a^{k+6} (D) a^{k+5}

12). $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 6}$ ناطق جملے کو مختصر کیجئے۔

(A) $\dfrac{x-3}{x+3}$ (B) $\dfrac{x+3}{x-3}$ (C) $\dfrac{x+2}{x-3}$ (D) $\dfrac{x-3}{x+2}$

13). اگر $\dfrac{a+b}{a-b}$ اور $\dfrac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$ دو ناطق جملے ہیں تو۔اُن کا حاصلِ ضرب

(A) $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$ (B) $\dfrac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$ (C) $\dfrac{a^2 - ab - b^2}{a^2 + ab + b^2}$ (D) $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab - b^2}$

14). $\dfrac{x^2 - 25}{x + 3}$ کو $\dfrac{x + 5}{x^2 - 9}$ سے تقسیم کرنے پر مساوی ہے۔

(A) $(x-5)(x-3)$ (B) $(x-5)(x+3)$ (C) $(x+5)(x-3)$ (D) $(x+5)(x+3)$

15). اگر $\dfrac{a^3}{a-b}$ کو $\dfrac{b^3}{b-a}$ کے ساتھ جمع کرنے پر نیا ناطق جملہ

(A) $a^2 + ab + b^2$ (B) $a^2 - ab + b^2$ (C) $a^3 + b^3$ (D) $a^3 - b^3$

16). $49(x^2 - 2xy + y^2)^2$ کا جذرالمربع

(A) $7|x - y|$ (B) $7(x + y)(x - y)$ (C) $7(x + y)^2$ (D) $7(x - y)^2$

17). $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$ کا جذرالمربع

(A) $|x + y - z|$ (B) $|x - y + z|$ (C) $|x + y + z|$ (D) $|x - y - z|$

18) $121x^4 y^8 z^6 (l-m)^2$ کا جذرالمربع

(A) $11x^2y^4z^4|l-m|$ (B) $11x^4y^4|z^3(l-m)|$

(C) $11x^2y^4z^6|l-m|$ (D) $11x^2y^4|z^3(l-m)|$

19). اگر $ax^2+bx+c=0$ مساوات کے جذر مساوی ہیں تو c مساوی ہے۔

(A) $\frac{b^2}{2a}$ (B) $\frac{b^2}{4a}$ (C) $-\frac{b^2}{2a}$ (D) $-\frac{b^2}{4a}$

20). اگر $x^2+5kx+16=0$ مساوات کے جذر غیر حقیقی ہیں۔تب

(A) $k>\frac{8}{5}$ (B) $k>-\frac{8}{5}$ (C) $-\frac{8}{5}<k<\frac{8}{5}$ (D) $0<k<\frac{8}{5}$

21). دو درجی مساوات کا ایک جذر $3+2\sqrt{3}$ ہے۔

(A) $x^2-6x-5=0$ (B) $x^2+6x-5=0$

(A) $x^2-5x-6=0$ (D) $x^2-5x+6=0$

22). مساوات $x^2-bx+c=0$ اور $x^2+bx-a=0$ کے مشترک جذر

(A) $\frac{c+a}{2b}$ (B) $\frac{c-a}{2b}$ (C) $\frac{c+b}{2a}$ (D) $\frac{a+b}{2c}$

23). اگر $ax^2+bx+c=0$ مساوات کے جذر α اور β ہیں۔$a\neq 0$ اس کا غلط بیان اس طرح ہوگا۔

(A) $\alpha^2+\beta^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$ (B) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

(C) $\alpha+\beta=\frac{b}{a}$ (D) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{b}{c}$

24). اگر α اور β مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے جذر ہیں۔تب دو درجی مساوات کے جذر یں $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ ہیں۔

(A) $ax^2+bx+c=0$ (B) $bx^2+ax+c=0$

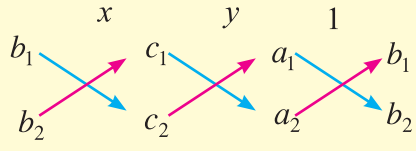
(C) $cx^2+bx+a=0$ (D) $cx^2+ax+b=0$

25). اگر $b=a+c$ تب مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے جذر مساوی ہوں گے،اگر

(A) $a=c$ (B) $a=-c$ (C) $a=2c$ (D) $a=-2c$

یاد رکھنے کے نکات

- x اور y دو تغیرات میں محدود اعداد کے خطی مساوات کا مجموعہ x اور y میں خطی مساوات کا نظام کہلاتا ہے۔ایسے نظام کو مسلسل مساوات بھی کہا جاتا ہے۔
- پہلے کوئی ایک تغیر کا خارج کریں پھر نظام کو حل کرنا اخراج کا طریقہ کہلاتا ہے۔
- مندرجۂ ذیل کے تیر کے خاکے $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ کو اس ضربی طریقہ سے حل کرنے میں معاون ہیں۔



- ایک حقیقی عدد k کو کثیر رقمی $p(x)$ کا صفر بھی کہا جاتا ہے اگر $p(k)=0$ ہے۔

- دودرجی کثیر رقمی کے سرعدد اور صفر کے درمیان بنیادی تعلق $ax^2 + bx + c = 0$ ہوتو

$$-\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ کا سرعدد}}{x^2 \text{ کا سرعدد}}$$ صفر کا حاصل جمع

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{مستقل رقم}}{x^2 \text{ کا سرعدد}}$$ صفر کا حاصل ضرب

- (i) کوئی بھی کثیر رقمی $p(x)$, $x = a$ صفر ہوتو ایک اور صرف ایک $p(a)=0$ ہوگا۔
- (ii) $p(x)$ کا جزوِ ضربی $x - a$ ہوتو ایک اور صرف ایک $p(a)=0$ ہوگا۔
- دو یا دو سے زیادہ الجبرائی جملوں کا G.C.D جملوں کا اعلیٰ درجہ ہوگا جو ہر ایک بغیر باقی کے تقسیم ہوگا۔
- دو یا دو سے زیادہ الجبرائی جملوں کا L.C.M جملوں کا ادنیٰ درجہ ہوگا۔ جو ہر ایک بغیر باقی کے تقسیم ہوں گے۔
- کوئی بھی دو کثیر رقمی کے GCD اور LCM کا حاصل ضرب دو کثیر رقمی کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا۔
- فرض کریں $a \in R$ ایک غیر منفی حقیقی عدد ہے۔ a کا جذرالمربع، حقیقی عدد b ہے۔ لہٰذا $b^2 = a$ ہوگا۔ a کے جذرالمربع کو $\sqrt{a}$ یا $\sqrt[2]{a}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- تغیرات میں دودرجی مساوات کے x کی صورت $ax^2 + bx + c = 0$ ہے۔ یہاں a, b, c ایک حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$۔
- دودرجی مساوات کو ان طریقوں سے حل کر سکتے ہیں۔

  (i) اجزائے ضربی کے طریقے سے (ii) مکمل مربع طریقے سے

  (iii) دودرجی ضابطے کو استعمال کر کے۔
- دودرجی مساوات کے جذر $ax^2 + bx + c = 0$ دیا گیا ہوتو $-b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ، تو $b^2 - 4ac \geq 0$ حاصل ہوگا۔
- دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ ہوتو

  (i) دو متفرق (distinct) حقیقی جذر اگر $b^2 - 4ac > 0$ ہوگا۔

  (ii) دو مساوی جذر اگر $b^2 - 4ac = 0$ ہوگا۔

  (iii) غیر حقیقی جذر اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہوگا۔

کیا تم جانتے ہو ؟

فرمیٹ کا آخری مسئلہ : مساوات $x^n + y^n = z^n$ کا کوئی حل سالم عدد نہ ہوگا جب $n>2$ ہوگا۔ فرمیٹ نے لکھا کہ میں نے ایک ایسا بہترین ثبوت پیش کیا ہے جس کو بیان کرنا بہت مشکل ہے۔ 300 سالوں تک کوئی بھی اس کا حل ڈھونڈ نہیں نکال سکے جب 1994 میں برطانوی ریاضی دان **انڈریو وائلس** نے اس کو حل کیا۔ دلچسپ بات یہ ہے کہ جب وہ ہائی اسکول کے طالب علم تھے، اُس وقت انہیں اس مسئلہ کے بارے میں معلوم ہوا۔

4

میٹریس

MATRICES

"Number, place, and combination - the three intersecting but distinct spheres of thought to which all mathematical ideas admit of being referred" - Sylvester

- تعارف
- میٹرکس کی تشکیل
- میٹرکس کی قسمیں
- میٹرکس کی جمع، تفریق اور ضرب
- میٹرکس کی مساوات

4.1 تمہید

اس باب میں ہم ریاضی کے ایک اہم چیز کو ''میٹرکس'' کہتے ہیں، کے متعلق بحث کریں گے۔ یہاں ہم **میٹریس** کا تعارف کریں گے اور میٹرکس الجبرا کی بنیاد کا مطالعہ کریں گے۔

میٹریس کی ابتدا 18 اور 19 ویں صدی کے درمیان میں صرف ایک تصور کی طرح ہوئی۔ ابتداء میں ان کی نشوونما یا ترقی ہندسوں کی شکلوں میں تبدیلی اور خطی مساوات کے حل کے باعث ہوئی۔ غرض اب میٹریس ریاضی کا ایک قوی آلہ ہے۔ میٹرکس بہت کارآمد ہے کیوں کہ یہ ہمیں اس قابل بناتے ہیں کہ ہم کئی اعداد کی صف بندوں کو ایک تنہا شئے کی طرح غور کرتے ہیں اور ان نشانات کے ذریعہ بہت ہی مختصر طریقہ پر محسوب کرتے ہیں۔ اس طرح حاصل ہونے والی ریاضی کی ''اختصار نویسی'' (Mathematical Short Hand) بہت شستہ اور قوی ہے اور مختلف عملی مسائل کو حل کرنے کے لئے مناسب ہے۔

لفظ 'میٹرکس' کا اعداد کی ترتیب کے لئے 1850 میں **جیمس سیلویسٹر** (James Sylvester) نے تعارف کرایا تھا۔ ''میٹرکس'' لاطینی زبان کا لفظ ''رحم'' کے لئے ہے اور یہ انگریزی میں اسی معنی کو برقرار رکھتا ہے۔ مزید یہ عام طور پر یہ معنی رکھتا ہے کہ کوئی جگہ یہاں کچھ بنایا یا نکالا جاتا ہے۔

آیئے اب ہم x اور y کی خطی مساواتوں پر غور کریں۔

$$3x - 2y = 4 \qquad (1)$$

$$2x + 5y = 9 \qquad (2)$$

ہمیں پہلے سے پتہ ہے کہ کس طرح اخراج کے طریقے سے اس نظام کا حل $(2,1)$ حاصل کر سکتے ہیں۔ اس کو گاسین اخراج کا طریقہ (Guassian Elimination) بھی کہتے ہیں۔ جہاں صرف ضریب استعمال ہوتے ہیں اور متغیر نہیں۔ اسی لئے طریقہ کو آسانی سے عمل میں لا سکتے ہیں اور اس طرح میٹرکس الجبرا کے استعمال سے حل حاصل کر سکتے ہیں۔

جیمس جوسف سِلوسٹر
(1814-1897)
انگلستان

انہوں نے میٹرکس کے نظریہ، متغیرات کے نظریہ، عددی نظریہ اور اتحادی نظریہ کے بنیادی نظام کے لئے بہت کام کیا۔ اس نے بتایا کہ تمام میٹرسس ایک میٹرکس میں سما سکتے ہیں۔ انہوں نے کئی حسابی اصطلاحات بنائے، جیسے ''discriminant''۔ 1880ء میں رائل سوسائٹی آف لنڈن نے سلوسٹر کو پہلے میڈل سے نوازا جو دنیا میں سب سے سائنسی تحقیقات کا سب سے بڑا ایوارڈ مانا جاتا ہے۔ 1901ء میں رائل سوسائٹی آف لنڈن نے ان کی یاد سے ''سلوسٹر میڈل'' حسابی تحقیقات کرنے والوں کی حوصلہ افزائی کے لئے موسوم کیا۔

4.2 میٹریس کی ترکیب (Formation of Matrices)

آیئے ہم چند مثالوں کے طریقوں پر غور کریں جس سے میٹریس کی ترتیب دی جاتی ہے۔

کمار کے پاس 10 پن ہیں۔ ہم اس کو (10) کی طرح ظاہر کر سکتے ہیں اس فہم کے ساتھ ( ) کے اندر کا عدد کمار کے پن کی تعداد ہے۔

اب اگر کمار کے پاس 10 پن اور 7 پنسل ہیں تو ہم اس کو (7 10) کی طرح ظاہر کر سکتے ہیں اسی خیال کے ساتھ کہ ( ) کے اندر پہلا عدد پن اور دوسرا عدد پنسل ہے۔

ذیل کی اطلاعات کو دیکھئے۔

کمار اور اس کے دوست راجو اور گوپو کے پاس جو پن اور پنسل ہیں ان کو ذیل میں اس طرح دیا گیا ہے۔

کمار کے پاس 10 پن اور 7 پنسل ہیں

راجو کے پاس 8 پن اور 4 پنسل ہیں

گوپو کے پاس 6 پن اور 5 پنسل ہیں

اس کو ہم جدول میں اس طرح ترتیب دے سکتے ہیں۔

	پن	پنسل
کمار	10	7
راجو	8	4
گوپو	6	5

اس کو ہم ایک مستطیلی ترتیب سے ظاہر کر سکتے ہیں جہاں اندراج بالترتیب اشیاء کو ظاہر کرتے ہیں

$$\text{(i)} \quad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{پہلی صف} \\ \leftarrow \text{دوسری صف} \\ \leftarrow \text{تیسری صف} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{پہلی} & \text{دوسری} \\ \text{قطار} & \text{قطار} \end{array} & \end{array}$$

اسی اطلاع کو ہم ایک جدولی طریقہ میں اس طرح مرتب کر سکتے ہیں۔

	کمار	راجو	گوپو
پن	10	8	6
پنسل	7	4	5

اسی کو ہم ایک مستطیلی ترتیب میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\text{(ii)} \quad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{پہلی صف} \\ \leftarrow \text{دوسری صف} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{پہلی} & \text{دوسری} & \text{تیسری} \\ \text{قطار} & \text{قطار} & \text{قطار} \end{array} & \end{array}$$

ترتیب (i) میں پہلی قطار کی اندراج بالترتیب کمار، راجو، گوپو کے پن کی تعداد کی نمائندگی کرتی ہے اور دوسری قطار بالترتیب کمار، راجو، گوپو کے پنسلوں کے تعداد کی نمائندگی کرتی ہے۔

اسی طرح ترتیب (ii) میں پہلی صف کی اندراج بالترتیب کمار، راجو، گوپو کے پن کی تعداد کی نمائندگی کرتی ہے اور دوسری صف کی اندراج بالترتیب کمار، راجو، گوپو کے پاس پنسل کی تعداد کی نمائندگی کرتی ہے۔

مندرجۂ بالا قسم کے اعداد کی ترتیب یا اظہار ''میٹرکس'' کہلاتا ہے۔

تعریف

اعداد کی مستطیلی ترتیب جو صفوں اور قطاروں میں قوسین کے اندر بند ہے میٹرکس کہلاتی ہے۔

میٹرکس کو عام طور پر ایک تنہا حروف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسے A,B,X, Y . . . . . اعداد جو میٹرکس بناتے ہیں میٹرکس کی **اندراج** یا **عناصر** کہلاتے ہیں۔ میٹرکس میں ہر افقی ترتیب اُس میٹرکس کی **صف** کہلاتی ہے۔ میٹرکس میں ہر انتصابی ترتیب اس میٹرکس کی **قطار** کہلاتی ہے۔

میٹریس کی چند مثالیں ہیں۔

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & 9 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ اور } C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.2.1۔ میٹرکس کی عام شکل

ایک میٹرکس A جس کی m صفیں اور n قطاریں ہیں کی شکل ہے۔

جہاں A جس کی m صفیں اور n قطاریں ہیں کی شکل ہے

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

جہاں a_{11}, a_{12}, a_{13}..... میٹرکس کے عناصر ہیں اوپر کی میٹرکس کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یا $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ جہاں $i=1,2,3,.....m.$ اور $j=1,2,3,.....,n$ یہاں a_{ij}, i ویں صف اور j ویں قطار کے میٹرکس کا عنصر ہے۔

مثال کے طور پر اگر $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ہو تو $a_{23}=1$ وہ عنصر جو دوسری صف اور تیسری قطار میں واقع ہے۔

اسی طرح

$$a_{11} = 4,\ a_{12} = 5,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 6,\ a_{22} = 2,\ a_{31} = 7,\ a_{32} = 8 \text{ اور } a_{33} = 9.$$

4.2.2 میٹرکس کا درجہ یا ابعاد (Order or Dimension of a Matrix)

اگر میٹرکس A میں m صفیں اور n قطاریں ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ A کا درجہ $m\times n$ (m by n پڑھتے ہیں) ہے۔

میٹرکس $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ، میٹرکس A میں دوصف اور 3 قطاریں ہیں۔اسلئے A کا درجہ 2×3 ہے۔

غور کریں

$m \times n$ میٹرکس میں پہلا حرف m ہمیشہ صفوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے اور دوسرا صرف n ہمیشہ قطاروں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

4.3 میٹریس کی اقسام (Types of Matrices)

آیئے ہم میٹریس کی چند اقسام سیکھیں

(i) صف میٹرکس (Row Matrix)

ایک میٹرکس کو **صف میٹرکس** کہا جاتا ہے اگر وہ صرف ایک صف رکھتا ہے۔مثلاً $A = (5\ 3\ 4\ 1)$ اور $B = (-3\ 0\ 5)$ کے درجہ 1×4 اور 1×3 بالترتیب ہیں۔

عام طور پر $A = (a_{ij})_{1\times n}$ صف میٹرکس کا درجہ $1\times n$ ہے۔

(ii) قطار میٹرکس (Column matrix)

ایک میٹرکس کو **قطار میٹرکس** کہا جاتا ہے اگر وہ صرف ایک قطار رکھتا ہے۔

مثلاً قطار میٹرکس $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ اور $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

کے درجہ 2×1 اور 3×1 بالترتیب ہیں۔

عام طور پر $A = [a_{ij}]_{m\times 1}$ قطار میٹرکس کا درجہ $m \times 1$ ہے۔

(iii) مربع میٹرکس (Square matrix)

ایک میٹرکس جس میں صفوں اور قطاروں کی تعداد مساوی ہو مربع میٹرکس کہلاتا ہے۔

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ اور $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -7 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ بالترتیب 2 اور 3 درجہ کے مربع میٹریسیس ہیں۔

عام طور پر $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ مربع میٹرکس کا درجہ m ہے۔

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots a_{mm}$ میں موجود عناصر، میٹرکس A کے **بنیادی وتر یا اولین وتر** کے عناصر کہلاتے ہیں۔

(iv) وتر میٹرکس (Diagonal matrix)

ایک مربع میٹرکس جس میں اولیّن وتر کے اوپر اور نیچے کے تمام عناصر صفر ہوں تو وہ **وتر میٹرکس** کہلاتا ہے۔مثال کے طور پر

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ اور $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ بالترتیب 2 اور 3 درجے کے وتر میٹریس ہیں۔

عام طور پر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ وتر میٹرکس کا درجہ m ہے۔ اگر $a_{ij} = 0$ تمام $i \neq j$ کیلئے۔