مثال 5.17

میلان کو نظریہ کو استعمال کرکے ثابت کرو کہ نقاط $(-2, -1)$ ، $(4, 0)$ ، $(3, 3)$ اور $(-3, 2)$ ترتیب سے لینے پر ایک متوازی الاضلاع بنتا ہے۔

حل : فرض کرو $A(-2, -1)$ ، $B(4, 0)$ ، $C(3, 3)$ اور $D(-3, 2)$ ترتیب وار لئے گئے ہیں

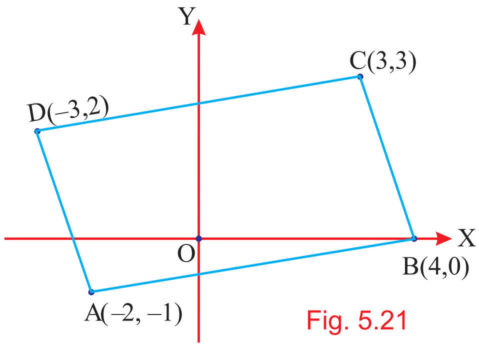


Fig. 5.21

AB کا میلان $= \frac{0+1}{4+2} = \frac{1}{6}$

CD کا میلان $= \frac{2-3}{-3-3} = \frac{1}{6}$

AB کا میلان = CD کا میلان

لہٰذا AB اور CD متوازی ہیں .... (1)

BC کا میلان $= \frac{3-0}{3-4} = -3$

AD کا میلان $= \frac{2+1}{-3+2} = -3$

BC کا میلان = AD کا میلان

لہٰذا BC اور AD متوازی ہیں .... (2)

(1) اور (2) سے ثابت ہوتا ہے کہ ABCD کے مقابل کے اضلاع متوازی ہیں

$\therefore$ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے

مثال 5.18

ΔABC کے راسیں $A(1, 2)$ ، $B(-4, 5)$ اور $C(0, 1)$ ہیں تو مثلث کے ارتقاع کا میلان معلوم کرو۔

حل : فرض کرو AD ، BE اور CF مثلث ABC کے ارتقاع ہیں

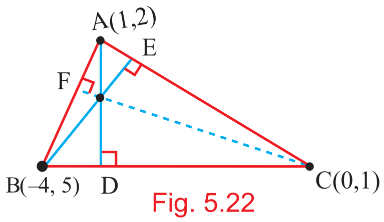


Fig. 5.22

BC کا میلان $= \frac{1-5}{0+4} = -1$

چونکہ ارتقاع AD ، BC کے عمودی ہے

AD کا میلان $= 1$ $\quad \because m_1 m_2 = -1$

AC کا میلان $= \frac{1-2}{0-1} = 1$ $\quad \because BE \perp AC$

لہٰذا BE کا میلان $= -1$

اس کے علاوہ AB کا میلان $= \frac{5-2}{-4-1} = -\frac{3}{5}$

$\therefore$ CF کا میلان $= \frac{5}{3}$ $\quad \because CF \perp AB$

مشق 5.3

1. خطِ مستقیم کے زاویہ مائل معلوم کرو جن کے میلان

(i) 1   (ii) $\sqrt{3}$ (iii) 0

2. خطِ مستقیم کے میلان معلوم کرو جن کے زاویہ میلان

(i) $30°$ (ii) $60°$ (iii) $90°$

3. ذیل کے نقاط سے گزرنے والی خطِ مستقیم کا میلان معلوم کرو

(i) $(3, -2)$ اور $(7, 2)$ (ii) $(2, -4)$ اور مبتداء   (iii) $(1 + \sqrt{3}, 2)$ اور $(3 + \sqrt{3}, 4)$

4. ذیل کے نقاط سے گزرنے والی خطِ مستقیم کے زاویہ میلان معلوم کرو

(i) $(1, 2)$ اور $(2, 3)$ (ii) $(3, \sqrt{3})$ اور $(0, 0)$ (iii) (a, b) اور $(-a, -b)$

5. اس خط کا میلان معلوم کرو جو مبداء سے گزرتے ہوئے نقاط $(0, -4)$ اور $(8, 0)$ کو ملانے والی قطاع خط کے وسطی نقطہ سے گزرتی ہے۔

6. مربع ABCD کا ضلع AB ، x محور کے متوازی ہے۔ذیل کو معلوم کرو

(i) AB کا میلان   (ii) BC کا میلان   (iii) وتر AC کا میلان

7. ایک مثلث مساوی الاضلاع ABC کا ضلع BC ، x محور کے متوازی ہے۔AB کا میلان معلوم کرو اور BC کا میلان معلوم کرو۔

8. میلان کے نظریہ کو استعمال کر کے ثابت کرو کہ ذیل کے نقاط ہم خط ہیں

(i) $(2, 3)$ ، $(3, -1)$ اور $(4, -5)$ (ii) $(4, 1)$ ، $(-2, -3)$ اور $(-5, -5)$

(iii) $(4, 4)$ ، $(-2, 6)$ اور $(1, 5)$

9. اگر نقاط $(a, 1)$ ، $(1, 2)$ اور $(0, b + 1)$ ہم خط ہوں تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$

10. $A(-2, 3)$ اور $B(a, 5)$ کو ملانے والی خط اور $C(0, 5)$ اور $D(-2, 1)$ نقطوں کو ملانے والی خط کے متوازی ہو تو a کی قیمت معلوم کرو۔

11. نقاط $A(0, 5)$ اور $B(4, 2)$ کو ملانے والی خط اور $C(-1, -2)$ اور $D(5, b)$ کو ملانے والی خط کے عمودی ہو تو b کی قیمت معلوم کرو۔

12. ΔABC کے راس $A(1, 8)$ ، $B(-2, 4)$ ، $C(8, -5)$ ہیں اگر AB اور AC کے وسطی نقاط بالترتیب M اور N ہوں تو MN کا میلان معلوم کرو اور تصدیق کرو کہ MN اور BC متوازی ہیں۔

13. ایک مثلث کے راس $(6, 7)$ ، $(2, -9)$ اور $(-4, 1)$ ہیں۔اس کے خطوطِ وسطی کے میلان معلوم کرو۔

14. ΔABC کی راسیں $A(-5, 7)$ ، $B(-4, -5)$ اور $C(4, 5)$ ہیں۔اس مثلث کے ارتفاعوں کے میلان معلوم کرو۔

15. میلان کے نظریہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کرو کہ راسیں $(1, 2)$ ، $(-2, 2)$ ، $(-4, -3)$ اور $(-1, -3)$ کو ترتیب سے لینے پر ایک متوازی الاضلاع بنتا ہے۔

16. ثابت کرو کہ چار ضلعی جس کے راس $A(-2, -4)$ ، $B(5, -1)$ ، $C(6, 4)$ اور $D(-1, 1)$ ترتیب سے لینے پر مقابل کے اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔

5.6.6 خطِ مستقیم کی مساوات

فرض کرو ایک سطح پر ایک خطِ مستقیم L ہے۔ متغیرات (variables) x اور y میں پہلے درجہ کی مساوات $px + qy + r = 0$ جو کسی نقطہ کے x محدّد اور y محدّد کی شرط کو پوری کرتی ہے۔ خط L پر اس مساوات کی شرط پوری کرنے والی x اور y کی کوئی بھی قیمت اس محدد کا ایک نقطہ مانی جائے گی۔ اس لئے یہ مساوات خط L کی مساوات کہلاتی ہے۔ اب ہم اس خط L کو الجبریائی مساوات کے طور پر ظاہر کریں گے۔

خط L ذیل کے کسی بھی شکل میں ہوگا۔

(i) افقی خط (ii) عمودی خط (iii) نہ افقی اور نہ عمودی

(i) افقی خط فرض کرو L ایک افقی خط ہے۔

تب L ہی x محور ہوگا یا L ، x محور کے علاوہ دوسرا افقی خط ہوگا

صورت (a)

اگر L ، x محور ہو تو نقطہ $L'(x, y)$ پر ہوگا جب کہ صرف اور صرف $y = 0$ اور x ایک حقیقی عدد ہو۔

اس طرح $y = 0$ ، x محور کی نمائندگی کرتا ہے۔

$\therefore$ x محور کی مساوات $y = 0$ ہے۔

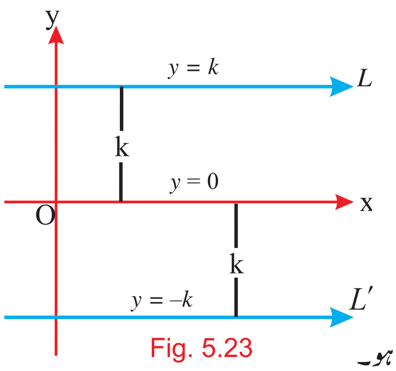


Fig. 5.23

صورت (b) x محور کے علاوہ L ایک افقی خط ہے۔

یعنی L ، x محور کے متوازی ہے۔

اب نقطہ (x, y) ، L پر ہوتا ہے اگر صرف اور صرف y محدّد ایک مستقل رقم (constant) ہو اور x کوئی بھی ایک حقیقی عدد (Real number) ہو۔

$\therefore$ x محور کے متوازی خط کی مساوات $y = k$ ہے۔ جہاں k ایک مستقل رقم ہے۔

نوٹ کیجئے کہ اگر $k > 0$ ہو تو خط L ، x محور کے اوپر ہوگا اور اگر $k < 0$ ہو تو L ، x محور کے نیچے ہوگا اور اگر $k = 0$ ہو تو L ہی x محور ہوگا۔

(ii) عمودی خط فرض کرو کہ L ایک عمودی خط ہے۔

تب L ہی y محور ہے یا L ، y محور کے علاوہ عمودی خط ہے۔

صورت (a)

اگر L ، y محور ہو تو سطح پر نقطہ L (x, y) پر ہوگا جب کہ صرف اور صرف $x = 0$ اور y کوئی حقیقی عدد ہوگا۔

اس طرح $x = 0$ ، y محور کی ظاہر کرتا ہے۔

∴ y محور کی مساوات $x = 0$ ہے۔

صورت (b)

اگر L ، y محور کے علاوہ عمودی خط ہو تو وہ y محور کے متوازی ہوگا۔

اب ایک نقطہ (x, y) ، L پر ہوگا اگر صرف اور صرف x محدّد کو ایک مستقل رقم ہونا چاہئے اور y کوئی حقیقی عدد ہو سکتا ہے۔

∴ y محور کے متوازی خط کی مساوات $x = c$ ہے۔ جہاں c ایک مستقل رقم ہے۔

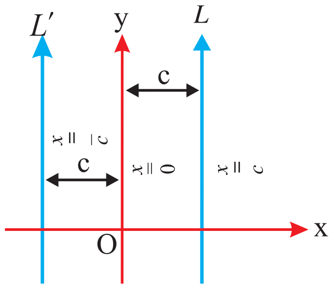


Fig. 5.24

نوٹ کرو کہ
اگر $c > 0$ ہو تو L ، y محور کے دائیں جانب ہوگا
اگر $c < 0$ ہو تو L ، y محور کے بائیں جانب ہوگا
اگر $c = 0$ ہو تو L صرف y محور ہوگا

(iii) فرض کرو کہ L نہ عمودی ہے اور نہ افقی۔

اس صورت میں L کو ہم مساوات کی شکل میں کس طرح ظاہر کریں گے؟ فرض کرو زاویۂ میلان θ ظاہر کرتا ہے۔

غور کرو کہ اگر ہمیں θ معلوم ہو L پر کا ایک نقطہ معلوم ہو تو ہم آسانی کے ساتھ 'L' کو ظاہر کر سکتے ہیں۔

> غیر عمودی خط L کا میلان اس طرح محسوب کر سکتے ہیں۔
>
> (i) اگر ہمیں زاویۂ میلان معلوم ہو تو $m = \tan\theta$
>
> (ii) اگر ہمیں L پر واقع دو مختلف نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) معلوم ہوں تب $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
>
> (iii) اگر صرف اور صرف L افقی ہو تو $m=0$

اب اس حالت پر غور کریں جب کہ L ایک عمودی خط نہ ہو تو خطِ مستقیم کی مساوات کو درج ذیل شکلوں سے حاصل کر سکتے ہیں۔

(a) میلان-نقطہ کی شکل میں
(b) دو نقطوں کی شکل میں
(c) میلان-مقطوعہ کی شکل میں
(d) مقطوعات کی شکل میں

(a) میلان ۔ نقطہ کی شکل (slope - point form)

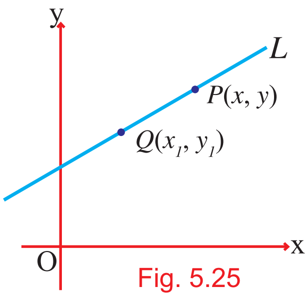


Fig. 5.25

فرض کرو L کا میلان m ہے اور $Q(x_1, y_1)$ ایک نقطہ L پر ہے۔

فرض کرو L پر Q کے علاوہ ایک اور نقطہ $P(x, y)$ ہو۔ تب مساوات اس طرح ہوگی

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow m(x - x_1) = y - y_1$$

اس طرح وہ خط جس کا میلان m ہو اور وہ (x_1, y_1) سے گزرتا ہو، اس کی مساوات

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

ہے جو L پر تمام نقطوں (x, y) کے لئے ہے۔

برائے ذہن نشینی

(i) متغیرات x اور y میں پہلے درجہ کی مساوات (1) کسی بھی نقطہ کے x محدّد اور y محدّد کو مطمئن کرتی ہے جو اس خط L پر ہوتا ہے۔ x اور y کی کوئی بھی قیمت جو اس مساوات کی شرط پوری کرتی ہے، خط L پر اس نقطہ کے محدد ہوں گے۔ لہٰذا مساوات (1) خطِ مستقیم L کی مساوات کہلاتی ہے۔

(ii) مساوات (1) یہ ظاہر کرتی ہے کہ L پر ایک نقطہ کی y محدّد کا فرق ، x محدّد کے فرق کا بالرّاست تناسب ہوتا ہے تناسب کا مستقلہ رقم 'm' میلان ہے۔

(b) دو نقاط کی شکل (Two - point form)

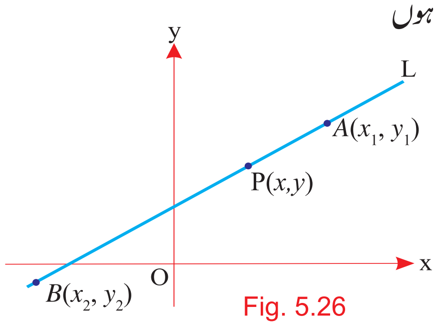


Fig. 5.26

فرض کرو غیر عمودی خط L پر دو مختلف نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) دیے گئے ہوں L کی مساوات معلوم کرنے کے لئے ہم پہلے L کا میلان معلوم کرتے ہیں۔ اور پھر (1) استعمال کرتے ہیں

L کا میلان $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

جہاں پر $x_2 \neq x_1$ کیوں کہ L غیر عمودی ہے۔

اب ضابطہ (1) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

$$\Longrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \Longrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$ L پر تمام نقطے (x, y) کے لئے ...... (2)

غور کریں

L کی مساوات معلوم کرنے کے لئے ہم نقطہ (x_1, y_1) کی بجائے (x_2, y_2) بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

(c) میلان ۔ مقطوعہ کی شکل (Slope - intercept form)

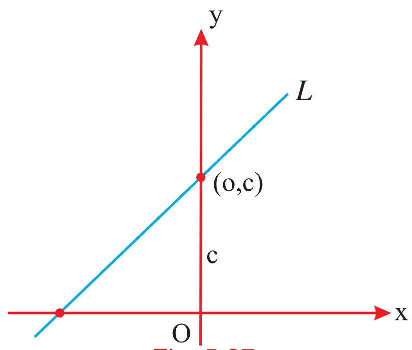


Fig. 5.27

فرض کرو L کا میلان m ، اور L کا y مقطوعہ 'c' ہے۔

چونکہ 'c' y مقطوعہ ہے، نقطہ (0, c) L پر واقع ہے

اب (1) کو $(x_1, y_1) = (0 , c)$ کے ساتھ استعمال کرنے پر

ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے : $y - c = m(x - 0)$

$\Longrightarrow y = mx + c$ L پر تمام نقطے (x, y) کے لئے ...... (3)

چنانچہ $y = mx + c$ میلان-مقطوعہ کی شکل میں خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔

(d) مقطوعات کی شکل (Intercepts form)

فرض کرو خط L ، x محور اور y محور پر غیر صفر مقطوعات بالترتیب a اور b بناتے ہیں۔

$\therefore$ خطِ مستقیم x محور کو $A(a, 0)$ پر قطع کرتی ہے اور y محور کو $B(0, b)$ پر قطع کرتی ہے۔

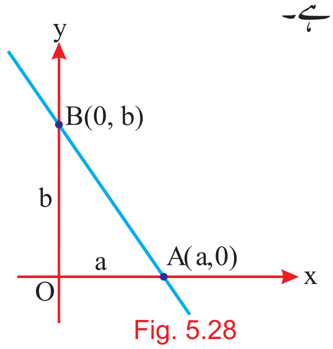


Fig. 5.28

AB کا میلان ; $m = -\frac{b}{a}$

اب (1) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y - 0 = -\frac{b}{a}(x - a)$$

$$\Longrightarrow \quad ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab$$

ab سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$\therefore$ x مقطوعہ 'a' اور y مقطوعہ b رکھنے والی خط کی مساوات

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .... (4) ہے ۔ L پر تمام نقطے (x, y) کے لئے

غور کریں

(i) اگر میلان m رکھنے والی ایک خط x مقطوعہ d بناتی ہے تو اس خط کی مساوات $y = m(x - d)$ ہے۔

(ii) خطِ مستقیم $y = mx$ مبتدمبداء (origin) سے گزرتی ہے۔(x اور y محوردونوں $m \neq 0$ کے لئے صفر ہیں)

(iii) مساوات (3) کو استعمال کرتے ہوئے ہر ایک مساوات (1) ، (2) اور (4) کو میلان-مقطوعہ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

(iv) ہر ایک مساوات (1) ، (2) ، (3) اور (4) کو $px + qy + r = 0$ کی شکل میں L کے تمام نقاط (x, y) کے لئے دوبارہ لکھا جا سکتا ہے۔جس کو خطِ مستقیم کی عام شکل کہا جاتا ہے۔

مثال 5.19

خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو محدد محورات (co-ordinate axes) کے متوازی ہوں اور $(3, -4)$ سے گزرتے ہوں۔

حل : فرض کرو L اور L' دو خطِ مستقیم ہیں جو $(3, -4)$ سے گزرتے ہیں اور بالترتیب x محور اور y محور کے متوازی ہیں۔

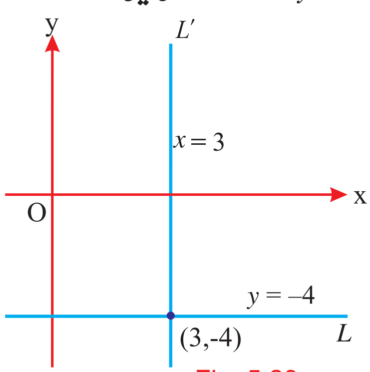


Fig. 5.29

خط L کے ہر ایک نقطہ کا y محدّد -4 ہے۔

لہٰذا خط L کی مساوات $y = -4$ ہے۔

اسی طرح L' کے ہر ایک نقطہ کا x محدّد 3 ہے۔

لہٰذا خط L' کی مساوات $x = 3$ ہے۔

مثال 5.20

خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جس کا زاویہ میلان $45°$ ہے اور y مقطوعہ $\frac{2}{5}$ ہے

حل :

$m = \tan\theta$ خط کا میلان

$= \tan 45° = 1$

$c = \frac{2}{5}$ y مقطوعہ

میلان - مقطوعہ کی شکل کی میں خط مستقیم کی مساوات

$$y = mx + c$$

$$y = x + \frac{2}{5} \implies y = \frac{5x+2}{5}$$

$\therefore$ $5x - 5y + 2 = 0$ خطِ مستقیم کی مساوات

مثال 5.21

خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ $(-2, 3)$ سے گزرتی ہے جس کا میلان $\frac{1}{3}$ ہے۔

حل :

دیا گیا ہے : میلان $m = \frac{1}{3}$ اور ایک نقطہ $(x_1, y_1) = (-2, 3)$

میلان - نقطہ کی شکل میں، خطِ مستقیم کی مساوات $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\implies y - 3 = \frac{1}{3}(x + 2)$$

$x - 3y + 11 = 0$ خطِ مستقیم کی مطلوبہ مساوات

مثال 5.22

نقاط $(-1, 1)$ اور $(2, -4)$ سے گزرنے والی خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو

حل : فرض کرو دیئے گئے نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ ہیں۔

یہاں پر $x_1 = -1, y_1 = 1$ اور $x_2 = 2, y_2 = -4$ ہے۔

دو نقاط کی شکل میں، خطِ مستقیم کی مساوات

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\implies \frac{y - 1}{-4 - 1} = \frac{x + 1}{2 + 1}$$

$$\implies 3y - 3 = -5x - 5$$

$5x + 3y + 2 = 0$ خطِ مستقیم کی مطلوبہ مساوات

مثال 5.23

ایک ΔABC کے راس $A(2, 1)$ ، $B(-2, 3)$ اور $C(4, 5)$ ہیں۔ راس A سے گزرنے والے خطِ وسطی کی مساوات معلوم کرو۔

حل : کسی راس اور اس کے مقابل کے اضلاع کے وسطی نقطہ کو ملانے والی خط کو خط وسطی کہتے ہیں۔

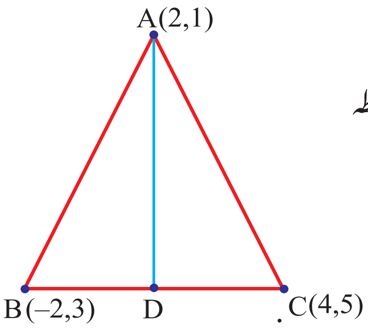


Fig. 5.30

فرض کرو BC کا وسطی نقطہ D ہے

$D\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = D(1, 4)$, BC کا وسطی نقطہ

اب خطِ وسطی AD کی مساوات

$\because$ $(x_1, y_1) = (2,1)$ اور $(x_2, y_2) = (1,4)$

$$\frac{y-1}{4-1} = \frac{x-2}{1-2}$$

$$\frac{y-1}{3} = \frac{x-2}{-1}$$

$\therefore$ لہٰذا مطلوبہ مساوات ہے۔ $3x + y - 7 = 0$

مثال 5.24

اگر کسی خطِ مستقیم کا x مقطوعہ اور y مقطوعہ بالترتیب $\frac{2}{3}$ اور $\frac{3}{4}$ ہوں تو خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو۔

حل : دیا گیا ہے :

$a = \frac{2}{3}$ خطِ مستقیم کا x مقطوعہ

$b = \frac{3}{4}$ خطِ مستقیم کا y مقطوعہ

مقطوعات کی شکل میں خط کی مساوات کا ضابطہ استعمال کرنے پر

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \implies \frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1$$

$$\implies \frac{3x}{2} + \frac{4y}{3} = 1$$

لہٰذا مطلوبہ مساوات ہے $9x + 8y - 6 = 0$

مثال 5.25

خط کی مساوات معلوم کرو جو $(6, -2)$ سے گزرتی ہے اور اس کے مقطوعات کا مجموعہ 5 ہے۔

حل : فرض کرو خطِ مستقیم کا x مقطوعہ اور y مقطوعہ بالترتیب a اور b ہیں۔

دیا گیا ہے

$a + b = 5$ مقطوعات کا حاصل جمع

$$\implies b = 5 - a$$

مقطوعات کی شکل میں خط مستقیم کی مساوات

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \implies \frac{x}{a} + \frac{y}{5-a} = 1$$

$$\implies \frac{(5-a)x + ay}{a(5-a)} = 1$$

لہٰذا $(5= a)x + ay = a(5-a)$ (1)

چونکہ خط مستقیم جو (1) سے حاصل ہوئی ہے، یہ $(6, -2)$ سے گزرتی ہے، اس سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے

$$(5-a)6 + a(-2) = a(5-a)$$

$$\Longrightarrow \quad a^2 - 13a + 30 = 0.$$

یعنی $(a-3)(a-10) = 0$

$\therefore$ $a = 3$ یا $a = 10$

اگر $a = 3$ ہوتو $(1) \Longrightarrow (5-3)x + 3y = 3(5-3)$

$\Longrightarrow \quad 2x + 3y = 6$ (2)

اگر $a = 10$ ہوتو $(1) \Longrightarrow (5-10)x + 10y = 10(5-10)$

$\Longrightarrow \quad -5x + 10y = -50$

یعنی $x - 2y - 10 = 0.$ (3)

لہٰذا $2x + 3y = 6$ اور $x - 2y - 10 = 0$ مطلوبہ خطوطِ مستقیم کی مساوات ہیں۔

مشق 5.4

1. خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو x محور کے متوازی ہیں اور x محور سے 5 اکائی کے فاصلہ پر ہیں۔

2. خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو محدد محورات کے متوازی ہیں اور جو $(-5, -2)$ سے گزرتی ہیں۔

3. خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جس کے
   (i) میلان -3 اور y مقطوعہ 4 ہے۔
   (ii) زاویۂ میلان $60°$ اور y مقطوعہ 3 ہے۔

4. خط کی مساوات معلوم کرو جو y محور کو مبدا کے اوپر 3 اکائی کے فاصلہ پر قطع کرتی ہے اور $\tan\theta = \frac{1}{2}$ جہاں θ زاویۂ میلان ہے۔

5. خط کا میلان اور y مقطوعہ معلوم کرو جس کی مساوات
   (i) $y = x + 1$ (ii) $5x = 3y$ (iii) $4x - 2y + 1 = 0$ (iv) $10x + 15y + 6 = 0$

6. ذیل کے خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جن کا
   (i) میلان -4 اور $(1, 2)$ سے گزرتی ہے (ii) میلان $2/3$ اور $(5, -4)$ سے گزرتی ہے

7. خط کی مساوات معلوم کرو جو $(4, 2)$ اور $(3, 1)$ کو ملانے والی قطاعِ خط کے وسطی نقطے سے گزرتی ہے اور جس کا زاویۂ میلان $30°$ ہے

8. خط کی مساوات معلوم کرو جو ذیل کے نقطوں سے گزرتی ہے
   (i) $(3, 6)$ اور $(-2, 5)$ (ii) $(0, -6)$ اور $(-8, 2)$

9. ΔPQR کے راس R سے گزرنے والی خطِ وسطی کی مساوات معلوم کرو جن کے راس $P(1, -3)$، $Q(-2, 5)$ اور $R(-3, 4)$ ہیں

10۔ خطِ مستقیم کی مساوات کے نظریہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کرو کہ دیے گئے نقاط ہم خط ہیں

(i) $(4, 2)$ ، $(7, 5)$ اور $(9, 7)$ (ii) $(1, 4)$ ، $(3, -2)$ اور $(-3, 16)$

11. خط کی مساوات معلوم کرو جن کے محوروں پر x اور y مقطوعات اس طرح دیے گئے ہیں۔

(i) 2 اور 3 (ii) $-\frac{1}{3}$ اور $\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}$ اور $-\frac{3}{4}$

12. خطِ مستقیم کے x اور y مقطوعات معلوم کرو۔

(i) $5x + 3y - 15 = 0$ (ii) $2x - y + 16 = 0$ (iii) $3x + 10y + 4 = 0$

13. خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ $(3, 4)$ سے گزرتی ہے اور مقطوعات کی نسبت $3 : 2$ ہے۔

14. خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ $(2, 2)$ سے گزرتی ہے اور مقطوعات کا حاصل جمع 9 ہے۔

15. $(5, -3)$ سے گزرنے والی خط کی مساوات معلوم کرو، جن کے محوروں پر مقطوعات مقدار میں یکساں ہیں اور علامت (sign) میں مختلف ہیں۔

16. خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ $(9, -1)$ سے گزرتی ہے اور جس کا x مقطوعہ ، y مقطوعہ کا تگنا ہے۔

17. ایک خطِ مستقیم محدّد محورات کو A اور B پر قطع کرتا ہے۔ اگر AB کا وسطی نقطہ $(3, 2)$ ہو تو AB کی مساوات معلوم کرو۔

18. خط کی مساوات معلوم کرو جو $(22, -6)$ سے گزرتی ہے جس کا x مقطوعہ ، y مقطوعہ سے 5 اکائیاں زیادہ ہے۔

19. اگر $A(3, 6)$ اور $C(-1, 2)$ معین ABCD (Rhombus) کے دو راس ہیں تو خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو وتر BD پر ہو۔

20. خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جس کا ڈھلان 3/2 اور P سے گزرتی ہے جہاں $A(-2, 6)$ اور $B(3, -4)$ کو ملانے والے قطاعِ خط کو P، $2 : 3$ کی نسبت میں اندرونی جانب تقسیم کرتا ہے۔

5.7 خطِ مستقیم کی عام مساوات

ہم پہلے ہی بتلا چکے ہیں کہ خطِ مستقیم کے مختلف شکلوں کی مساوات کو معیاری شکل $ax + by + c = 0$ میں تبدیل کر سکتے ہیں جہاں a ، b اور c حقیقی مستقل رقمیں ہیں اس طرح کہ یا تو $p \neq 0$ یا $q \neq 0$ ہے۔

آیئے اب ہم معلوم کریں

(i) $ax + by + c = 0$ کا میلان

(ii) $ax + by + c = 0$ خط کے متوازی خط کی مساوات

(iii) $ax + by + c = 0$ خط کے عمودی خط کی مساوات

(iv) ایک دوسرے کو قطع کرنے والی دو خطوطِ مستقیم کا نقطۂ تقاطع

(i) خطِ مستقیم کی عام مساوات $ax + by + c = 0$ ہے۔

اس کو دوبارہ اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},\ b \neq 0 \qquad (1)$$

میلان- مقطوعہ کی شکل $y = mx + c$ اور (1) کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

میلان $m = -\frac{a}{b}$ اور y مقطوعہ $-\frac{c}{b}$ ہے۔

∴ مساوات $ax + by + c = 0$ کے لئے، ہمارے پاس ہے

میلان $m = -\frac{x \text{ کا ضریب}}{y \text{ کا ضریب}}$ اور y مقطوعہ $= -\frac{\text{مستقل رقم}}{y \text{ کا ضریب}}$

(ii) $ax + by + c = 0$ خط کے متوازی خط کی مساوات

ہم جانتے ہیں کہ دو خطوطِ مستقیم متوازی ہوتے ہیں اگر صرف اور صرف ان کے میلان مساوی ہوں۔

لہٰذا خط $ax + by + c = 0$ کے تمام متوازی خطوط کی مساوات کی شکل k کی مختلف قیمتوں کے لئے $ax + by + k = 0$ ہے۔

(iii) $ax + by + c = 0$ خط کے عمودی خط کی مساوات

ہم جانتے ہیں کہ دو غیر عمودی خطوط ایک دوسرے کے عمودی ہیں اگر صرف اور صرف ان کے میلان کا حاصلِ ضرب -1 ہو۔

لہٰذا $ax + by + c = 0$ کے تمام عمودی خطوط کی مساوات کی شکل k کی مختلف قیمتوں کے لئے $bx - ay + k = 0$ ہے۔

غور کریں

دو خطوطِ مستقیم $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ جہاں ضریب صفر نہیں ہیں

(i) متوازی ہوتے ہیں صرف اور صرف $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

(ii) عمودی ہوتے ہیں صرف اور صرف $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

(iv) دو خطوطِ مستقیم کا نقطۂ تقاطع

اگر دو خطوطِ مستقیم متوازی نہ ہوں تو وہ ایک نقطہ پر قطع کریں گے۔ یہ نقطہ دونوں خطوط پر ہوگا۔ لہٰذا دو مساوات کو حل کرنے پر نقطۂ تقاطع حاصل ہوگا۔

مثال 5.26

بتلاؤ کہ خطوطِ مستقیم $3x + 2y - 12 = 0$ اور $6x + 4y + 8 = 0$ متوازی ہیں۔

حل :

خطِ مستقیم $3x + 2y - 12 = 0$ کا میلان $m_1 = -\frac{x \text{ کا ضریب}}{y \text{ کا ضریب}} = -\frac{3}{2}$

خطِ مستقیم $6x + 4y + 8 = 0$ کا میلان $m_2 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

∴ $m_1 = m_2$ لہٰذا دونوں خطوطِ مستقیم متوازی ہیں۔

مثال 5.27

ثابت کرو کہ خطوطِ مستقیم $x + 2y + 1 = 0$ اور $2x - y + 5 = 0$ ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

حل : خطِ مستقیم $x + 2y + 1 = 0$ کا میلان ، $m_1 = -\dfrac{x \text{ کا ضریب}}{y \text{ کا ضریب}} = -\dfrac{1}{2}$

خطِ مستقیم $2x - y + 5 = 0$ کا میلان ، $m_2 = -\dfrac{x \text{ کا ضریب}}{y \text{ کا ضریب}} = \dfrac{-2}{-1} = 2$

میلانوں کا حاصلِ ضرب $m_1 m_2 = -\dfrac{1}{2} \times 2 = -1$

لہٰذا دونوں خطوطِ مستقیم عمودی ہیں۔

مثال 5.28

خط کی مساوات معلوم کرو جو خط $x - 8y + 13 = 0$ کے متوازی ہے اور نقطہ $(2, 5)$ سے گزرتی ہے۔

حل : $x - 8y + 13 = 0$ خط کے متوازی خط کی مساوات $x - 8y + k = 0$

چونکہ یہ نقطہ $(2, 5)$ سے گزرتی ہے

$$2 - 8(5) + k = 0 \implies k = 38$$

$\therefore$ مطلوبہ خط کی مساوات $x - 8y + 38 = 0$ ہے۔

مثال 5.29

ΔABC کے راس $A(2, 1)$ ، $B(6, -1)$ اور $C(4, 11)$ ہیں۔ راس A سے گزرنے والی ارتفاع کے خط کی مساوات معلوم کرو۔

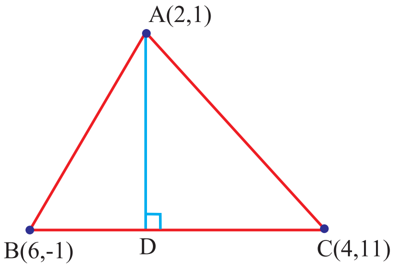


Fig. 5.31

حل : BC کا میلان $= \dfrac{11 + 1}{4 - 6} = -6$

چونکہ خط AD ، BC پر عمود ہے۔

AD کا میلان $= \dfrac{1}{6}$

$\therefore$ AD کی مساوات $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = \frac{1}{6}(x - 2) \implies 6y - 6 = x - 2$$

$\therefore$ مطلوبہ خطِ مستقیم کی مساوات $x - 6y + 4 = 0$

مشق 5.5

1. خطِ مستقیم کا میلان معلوم کرو۔

(i) $3x + 4y - 6 = 0$ (ii) $y = 7x + 6$ (iii) $4x = 5y + 3$

2. معلوم کرو کہ خطوطِ مستقیم $x + 2y + 1 = 0$ اور $3x + 6y + 2 = 0$ متوازی ہیں۔

3. معلوم کرو کہ خطوطِ مستقیم $3x - 5y + 7 = 0$ اور $15x + 9y + 4 = 0$ عمودی ہیں۔

4. اگر خطوطِ مستقیم $y/2 = x - p$ اور $ax + 5 = 3y$ متوازی ہوں تو a کی قیمت معلوم کرو۔

5۔ a کی قیمت معلوم کرو جب کہ خطوطِ مستقیم $5x - 2y - 9 = 0$ اور $ay + 2x - 11 = 0$ ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

6. اگر خطوطِ مستقیم $8px + (2 - 3p)y + 1 = 0$ اور $px + 8y - 7 = 0$ ایک دوسرے کے عمودی ہوں تو p کی قیمت معلوم کرو۔

7. $(h, 3)$ اور $(4, 1)$ نقاط سے گزرنے والی خطِ مستقیم $7x - 9y - 19 = 0$ کو زاویۂ قائمہ پر قطع کرتی ہے تو 'h' کی قیمت معلوم کرو

8. $3x - y + 7 = 0$ خط کے متوازی خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ $(1, -2)$ سے گزرتی ہے۔

9. خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خط $x - 2y + 3 = 0$ کے عمود میں ہو اور نقطہ $(1, -2)$ سے گزرتی ہو۔

10. $(3, 4)$ اور $(-1, 2)$ نقطوں کو ملانے والی خطِ مستقیم کے عمودی ناصف کی مساوات معلوم کرو۔

11. خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خطوط $2x + y - 3 = 0$ اور $5x + y - 6 = 0$ کے نقطۂ تقاطع سے گزرتی ہے اور نقاط $(1, 2)$ اور $(2, 1)$ سے گزرنے والی خط کے متوازی ہے۔

12. خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خطوطِ مستقیم $5x - 6y = 1$ اور $3x + 2y + 5 = 0$ کے نقطۂ تقاطع سے گزرتی ہے اور خط $3x - 5y + 11 = 0$ کے عمودی ہے۔

13. خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خطوط $3x - y + 9 = 0$ اور $x + 2y = 4$ کے نقطۂ تقاطع اور خطوط $2x + y - 4 = 0$ اور $x - 2y + 3 = 0$ کے نقطۂ تقاطع کو ملاتی ہے۔

14. ΔABC کے راس $A(2, -4)$ ، $B(3, 3)$ اور $C(-1, 5)$ ہیں۔ راس B سے گزرنے والی ارتفاع کے ساتھ کے خط کی مساوات معلوم کرو۔

15. ΔABC کے راس $A(-4, 4)$ ، $B(8, 4)$ اور $C(8, 10)$ ہیں۔ راس A سے گزرنے والی خطِ وسطی کے ساتھ کے خط کی مساوات معلوم کرو۔

16. خط مستقیم $3x + 2y = 13$ پر مبداء سے عمود کے قدم (نچلے حصے) کے محدّد (co-ordinates) معلوم کرو۔

17. اگر $x + 2y = 7$ اور $2x + y = 8$ کسی دائرہ کے دوقطروں کے مساوات ہوں تو دائرہ کا نصف قطر معلوم کرو، اگر نقطہ $(0, -2)$ دائرہ پر ہے۔

18. قطاعِ خط کی لمبائی معلوم کرو جس کے حد نقطے (end points) خطوط $2x - 3y + 4 = 0$ اور $x - 2y + 3 = 0$ کا نقطۂ تقاطع اور نقاط $(3, -2)$ اور $(-5, 8)$ کو ملانے والے خط کا وسطی نقطہ ہو۔

19. ΔPQR مساوی الساقین میں $PQ = PR$ ہے۔ قاعدہ QR ، x محور پر ہے۔ P ، y محور پر ہے اور PQ کی مساوات $2x - 3y + 9 = 0$ ہے۔ PR پر خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو۔

مشق 5.6

صحیح جوابات کا انتخاب کرو۔

.1 $(a, -b)$ اور $(3a, 5b)$ نقاط کو ملانے والی خط کا وسطی نقطہ

(A) $(-a, 2b)$ (B) $(2a, 4b)$ (C) $(2a, 2b)$ (D) $-a, -3b$

.2 $A(1, -3)$ اور $B(-3, 9)$ نقاط کو ملانے والی قطاعِ خط کو اندرونی جانب $1 : 3$ کی نسبت میں تقسیم کرنے والا نقطہ P

(A) $(2, 1)$ (B) $(0, 0)$ (C) $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$ (D) $(1, -2)$

.3 اگر نقاط $A(3, 4)$ اور $B(14, -3)$ کو ملانے والی قطاعِ خط x محور کو P پر ملتا ہے تو P ، AB کو اس نسبت میں تقسیم کرتا ہے

(A) $4 : 3$ (b) $3 : 4$ (c) $2 : 3$ (d) $4 : 1$

.4 راسیں $(-2, -5)$ ، $(-2, 12)$ اور $(10, -1)$ رکھنے والے مثلث کا ہندسی مرکز

(A) $(6, 6)$ (B) $(4, 4)$ (C) $(3, 3)$ (D) $2, 2$

.5 اگر $(1, 2)$ ، $(4, 6)$ ، $(x, 6)$ اور $(3, 2)$ ایک متوازی الاضلاع کی راسیں ہیں جو ترتیب سے لی گئی ہیں تو x کی قیمت

(A) 6 (b) 2 (c) 1 (d) 3

.6 مبداء ، $(2, 0)$ اور $(0, 2)$ نقاط سے بننے والی مثلث کا رقبہ

(A) 1 مربع اکائی (B) 2 مربع اکائیاں (C) 4 مربع اکائیاں (D) 8 مربع اکائیاں

.7 $(1, 1)$ ، $(0, 1)$ ، $(0, 0)$ اور $(1, 0)$ نقطوں سے بننے والی چار ضلعی کا رقبہ

(A) 3 مربع اکائیاں (B) 2 مربع اکائیاں (C) 4 مربع اکائیاں (D) 1 مربع اکائی

.8 x محور کے متوازی خط کا زاویۂ میلان

(A) 0° (B) 60° (C) 45° (D) 90°

9 $(3, -2)$ اور $(-1, a)$ نقطوں کو ملانے والی خط کا میلان $-\frac{3}{2}$ ہو تو a کی قیمت

(A) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

.10 $(-2, 6)$ اور $(4, 8)$ کو ملانے والی خط کے عمودی خط کا میلان

(A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

.11 خطوطِ مستقیم $9x - y - 2 = 0$ اور $2x + y - 9 = 0$ کا نقطۂ تقاطع

(A) $(-1, 7)$ (B) $(7, 1)$ (C) $(1, 7)$ (D) $(-1, -7)$

.12 خطِ مستقیم $4x + 3y - 12 = 0$ ، y محور کو اِس نقطہ پر قطع کرتا ہے

(A) $(3, 0)$ (B) $(0, 4)$ (C) $(3, 4)$ (D) $(0, -4)$

.13 $7y - 2x = 11$ خطِ مستقیم کا میلان مساوی ہے

(A) $-\frac{7}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $-\frac{2}{7}$

.14 x محور کے متوازی اور نقطہ $(2, -7)$ سے گذرنے والے خط کی مساوات

(A) $x = 2$ (B) $x = -7$ (C) $y = -7$ (D) $y = 2$

15. خطِ مستقیم $2x - 3y + 6 = 0$ کے x اور y مقطوعات بالترتیب

(A) 2, 3 (b) 3, 2 (c) $-3, 2$ (d) $3, -2$

16. ایک دائرہ کا مرکز $(-6, 4)$ ہے۔اگر دائرہ کے قطر کا ایک حد $(-12, 8)$ ہو تو اس کا دوسرا حد

(A) $(-18, 12)$ (b) $(-9, 6)$ (c) $(-3, 2)$ (d) $(0, 0)$

17. مبداء سے گزرنے والی اور خط $2x + 3y - 7 = 0$ کے عمودی خط کی مساوات

(A) $2x + 3y = 0$ (B) $3x - 2y = 0$ (C) $y + 5 = 0$ (D) $y - 5 = 0$

18. y محور کے متوازی اور نقطہ $(-2, 5)$ سے گزرنے والی خطِ مستقیم کی مساوات

(A) $x - 2 = 0$ (B) $x + 2 = 0$ (C) $y + 5 = 0$ (D) $y - 5 = 0$

19. اگر نقاط $(2, 5)$ ، $(4, 6)$ اور (a, a) ہم خط ہوں تو a کی قیمت

(A) -8 (B) 4 (C) -4 (D) 8

20. ایک خطِ مستقیم $y = 2x + k$ ، نقطہ $(1, 2)$ سے گزرتی ہے تو k کی قیمت

(A) 0 (B) 4 (C) 5 (D) -3

21- میلان 3 اور y-مقطوعہ -4 والے خطِ مستقیم کی مساوات

(A) $3x - y - 4 = 0$ (B) $3x + y - 4 = 0$

(C) $3x - y + 4 = 0$ (D) $3x + y + 4 = 0$

22- خطوطِ مستقیم $y = 0$ اور $x = -4$ کا نقطۂ تقاطع

(A) $(0, -4)$ (B) $(-4, 0)$ (C) $(0, 4)$ (D) $4, 0$

23- اگر خطوطِ مستقیم $3x + 6y + 7 = 0$ اور $2x + ky = 5$ ایک دوسرے کے عمود میں ہوں تو k کی قیمت

(A) 1 (b) -1 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

یاد رکھنے کے نکات

- نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کا درمیانی فاصلہ $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ہے۔
- نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطاعِ خط کو **اندرونی جانب** $l : m$ کی نسبت میں تقسیم کرنے والا نقطہ P
  $\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right)$. ہے۔
- نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطاعِ خط کو **بیرونی جانب** $l : m$ کی نسبت میں تقسیم کرنے والا نقطہ P
  $\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l - m}, \frac{ly_2 - my_1}{l - m}\right)$. ہے۔
- (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) نقطوں کو ملانے والی قطاعِ خط کا وسطی نقطہ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ہے۔

- (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) اور (x_3, y_3) نقطوں سے بننے والے مثلث کا رقبہ

$$\frac{1}{2}\sum x_1(y_2 - y_3) = \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}$$

- تین نقاط A (x_1, y_1) ، B (x_2, y_2) اور C (x_3, y_3) ہم خط ہیں اگر صرف اور صرف

(i) $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$ یا

(ii) AB کا میلان = BC کا میلان یا AC کا میلان

- اگر ایک خط x محور کے مثبت جانب زاویہ θ بناتی ہے تو میلان $m = \tan\theta$;

- (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) سے گزرنے والی غیر عمودی خط کا میلان

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

- خط $ax + by + c = 0$ کا میلان $m = -\frac{x \text{ کا ضریب}}{y \text{ کا ضریب}} = -\frac{a}{b}$، جس میں $b \neq 0$ ہو۔

- افقی خط کا میلان صفر ہوگا اور عمودی خط کا میلان غیر واضح ہے۔

- دو خطوط صرف اور صرف متوازی اس وقت ہوں گے اگر ان کے میلان مساوی ہوں۔

- دو غیر عمودی خطوط صرف اور صرف اس وقت عمودی ہوں گے اگر ان کے میلان کا حاصلِ ضرب -1 ہو، یعنی $m_1 m_2 = -1$

خطوطِ مستقیم کی مساوات

	خطِ مستقیم	مساوات
1.	x محور	$y = 0$
2.	y محور	$x = 0$
3.	x محور کے متوازی	$y = k$
4.	y محور کے متوازی	$x = k$
5.	$ax + by + c = 0$ خط کے متوازی	$ax+by+k = 0$
6.	$ax + by + c = 0$ خط کے عمودی	$bx-ay+k = 0$
	دیا گیا ہے (معطیہ)	**مساوات**
1.	مبدا سے گزرتا ہے	$y = mx$
2.	میلان m اور y مقطوعہ c	$y = mx + c$
3.	میلان m اور ایک نقطہ (x_1, y_1)	$y - y_1 = m(x-x_1)$
4.	دونوں نقاط (x_1,y_1) اور (x_2, y_2) سے گزرنے والا	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
5.	x مقطوعہ a ، y مقطوعہ b	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

6

علمِ ہندسہ

GEOMETRY

There is geometry in the humming of the strings, there is music in the spacing of spheres - *Pythagoras*

- تعارف
- بنیادی تناسب کا مسئلہ
- زاویہ کے ناصف کا مسئلہ
- متشابہ مثلثیں
- مماس وتر کا مسئلہ
- مسئلہ فیثا غورث

6.1 تعارف

علمِ ہندسہ، ریاضی کی ایک شاخ ہے جو مختلف ہندسی شکلوں کی خصوصیات کے موضوعہ (axiom) یا مسئلوں کے ذریعہ بغیر کسی ٹھیک پیمائش کے سمجھاتی ہے، اسے نظریاتی (مسئلاتی) علمِ ہندسہ کہتے ہیں۔ علمِ ہندسہ کے مطالعہ سے ہمارے منطقی طریقہ سے سوچنے کی قوت میں اضافہ ہوتا ہے۔

اقلیدس جو تقریباً 300 ق م. میں موجود تھے، انہیں علم ہندسہ کا بانی مانا جاتا ہے۔ اقلیدس ہندسی مطالعہ میں منطقی نتائج اخذ کرنے میں ایک نئے انداز میں سوچنے کے طریقہ کا آغاز کیا جو پہلے ہی ثابت کئے ہوئے نتائج یا مخصوص مفروضوں پر مبنی ہے۔

انجینئرنگ اور فنِ تعمیر کے میدانوں میں علمِ ہندسہ کی اہمیت بہت زیادہ ہے۔ مثال کے طور پر روزمرہ کی زندگی میں کام آنے والے بہت سے پُل مشابہ مثلث اور مماثل کی بنیاد پر بنائے گئے ہیں۔ اس قسم کے پل جس میں مثلثوں کے اصول استعمال ہوئے ہیں، بہت زیادہ پائیدار اور زیادہ بوجھ اور تناؤ برداشت کر سکتے ہیں۔ عمارتوں کی تعمیر میں علمِ ہندسہ دو قسم کا کردار ادا کرتا ہے۔ ایک یہ ہے کہ اسکی بناوٹ بہت پائیدار ہوتی ہے اور دوسری یہ کہ اسکی خوبصورتی میں اضافہ ہوتا ہے۔ ہندسی شکلوں کا بخوبی استعمال عمارتوں کی ساخت جیسے تاج محل وغیرہ کو ایک عالمی پہچان کی نشان بنا دیتے ہیں جس کو ہر ایک نے سراہا ہے۔ ریاضی کی مختلف شکلوں کو سمجھنے اور وسعت دینے میں ہندسی ثبوت بہت اہم کردار ادا کرتے ہیں۔

بنیادی تناسب کے مسئلہ کو مشہور یونانی ریاضی دان تھیلس (Thales) سے منسوب کیا جاتا ہے۔ اس مسئلہ کو تھیلس کا مسئلہ بھی کہتے ہیں۔

اقلیدس
(300 ق.م.)
یونان

اقلیدس کی تصنیف 'عناصر' علمِ ریاضی میں تاریخ کی سب سے زیادہ پُر اثر تخلیق ہے جو علمِ ریاضی کے سکھانے میں خصوصاً علمِ ہندسہ کے سکھانے میں اہم درسی کتاب کا کردار ادا کرتی ہے۔
اقلیدس کے الگواردم (alogrithm) کا طریقۂ مشترک مقسومِ علیہ اعظم محسوب کرنے میں بہت ہی کارآمد ہے۔

بنیادی تناسب کے مسئلہ کو سمجھنے کے لئے آیئے ہم ذیل کی کارروائی انجام دیں۔

کارروائی

کسی بھی پیمائش کا ایک زاویہ XAY کھینچو اور نقاط (کوئی پانچ نقاط) زاویہ کے بازو AX پر P_1 ، P_2 ، D ، P_3 اور B اس طرح نشان کرو کہ $AP_1 = P_1P_2 = P_2D = DP_3 = P_3B = 1$ اکائی (فرض کریں)

B سے گزارتے ہوئے ایک خط کھینچو جو بازو AY کو C پر قطع کرے۔ پھر D سے گزارتے ہوئے ایک خط BC کے متوازی کھینچو جو AC کو E پر قطع کرے۔

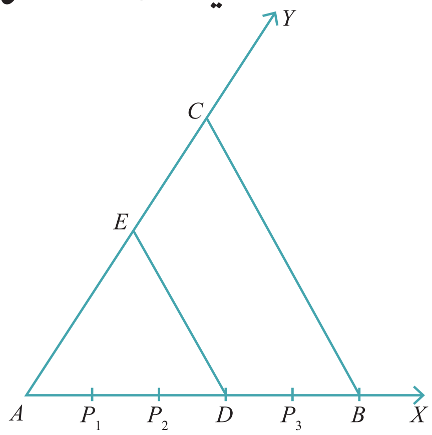


Fig.6.1

$AD = AP_1 + P_1P_2 + P_2D = 3$ اکائیاں اور

$DB = DP_3 + P_3B = 2$ اکائیاں

$$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$$

AE اور EC کی پیمائش کرو۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{3}{2}$

لہٰذا ΔABC میں اگر $DE \parallel BC$ ہو تو $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

ہم اس نتیجہ کو مسئلہ کی صورت میں ثابت کرتے ہیں جو بنیادی تناسب کا مسئلہ یا تھیلس کا مسئلہ کہلاتا ہے۔ جیسا کہ ذیل میں درج ہے۔

6.2 بنیادی تناسب اور زاویائی ناصف کے مسئلے

مسئلہ 6.1 بنیادی تناسب کا مسئلہ یا تھیلس کا مسئلہ

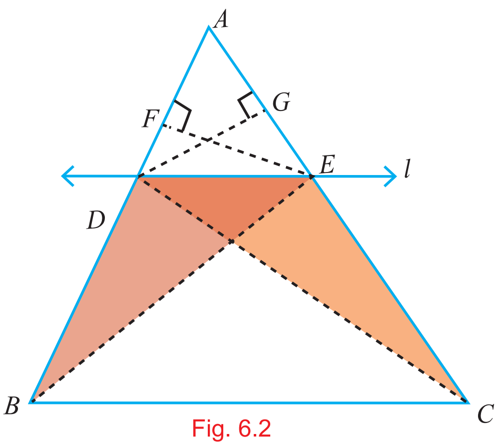


Fig. 6.2

اگر ایک خطِ مستقیم ایک مثلث کے ایک ضلع کے متوازی کھینچی جائے جو دوسرے دو اضلاع کو قطع کرے تو وہ دو اضلاع کو مساوی نسبت میں تقسیم کرتی ہے۔

دیا گیا ہے : مثلث ABC میں،

BC کے متوازی خطِ مستقیم l ،

AB کو D پر اور AC کو E پر قطع کرتی ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

تصنیف : BE اور CD کو ملاؤ۔ $EF \perp AB$ اور $DG \perp CA$ کھینچو۔

ثبوت

چونکہ $EF \perp AB$ ، مثلث ADE اور DBE کا ارتقاع EF ہے۔

اور رقبہ(ΔADE) = ½ × قاعدہ × ارتقاع = ½ AD × EF

رقبہ(ΔDBE) = ½ × قاعدہ × ارتقاع = ½ DB × EF

$$\therefore \quad \frac{\text{رقبہ } (\Delta ADE)}{\text{رقبہ } (\Delta DBE)} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EF}{\frac{1}{2} DB \times EF} = \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

اسی طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{رقبہ } (\Delta ADE)}{\text{رقبہ } (\Delta DCE)} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DG}{\frac{1}{2} \times EC \times DG} = \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

مگر ΔDBE اور ΔDCE ایک ہی قاعدہ BE پر ہیں اور ایک ہی متوازی خطوط BC اور DE کے درمیان ہیں

$$\therefore \quad \text{رقبہ } (\Delta DBE) = \text{رقبہ } (\Delta DCE) \qquad (3)$$

(1) ، (2) اور (3) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ لہٰذا مسئلہ ثابت ہوا۔

منطقی نتیجہ **(Corollary)**

اگر ΔABC میں خطِ مستقیم DE ، BC کے متوازی ہو اور AB کو D پر اور AC کو E پر قطع کرے تو

(i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$

ثبوت

(i) تھیلس کے مسئلہ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

$$\Longrightarrow \quad 1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

(ii) اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$$

کیا آپ جانتے ہیں؟

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہوتو $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

اس کو کامپونینڈو کا اصول (Componendo rule) کہتے ہیں۔

یہاں $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

$$\Rightarrow \frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$

کامپونینڈو کے اصول کے تحت

کیا اس مسئلہ کا برعکس درست ہے؟ اس کی تصدیق کے لئے ہم ذیل کی کارروائی کریں گے۔

کارروائی

شعاع AX پر کوئی زاویہ $\angle XAY$ کھینچو۔ اس پر نقاط P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 اور B اس طرح نشان کرو کہ

(فرض کریں) اکائی $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4B = 1$

اسی طرح شعاع AY پر نقاط Q_1 ، Q_2 ، Q_3 ، Q_4 اور C نشان کرو اس طرح کہ

(فرض کریں) اکائیاں $AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4C = 2$

پھر P1Q1 اور BC کو ملاؤ۔

تو $\frac{AQ_1}{Q_1C} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ اور $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{1}{4}$

لہٰذا $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{AQ_1}{Q_1C}$

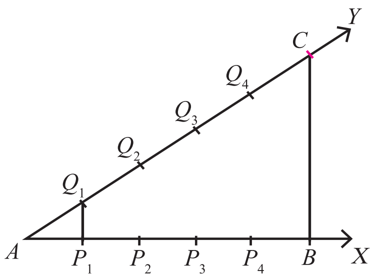


Fig. 6.3

ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ P1Q1 اور BC ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

یعنی $P_1Q_1 \parallel BC$ (1)

اسی طرح P2Q2 ، P3Q3 اور P4Q4 کو ملانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$\frac{AP_2}{P_2B} = \frac{AQ_2}{Q_2C} = \frac{2}{3}$ اور $P_2Q_2 \parallel BC$ (2)

$\frac{AP_3}{P_3B} = \frac{AQ_3}{Q_3C} = \frac{3}{2}$ اور $P_3Q_3 \parallel BC$ (3)

$\frac{AP_4}{P_4B} = \frac{AQ_4}{Q_4C} = \frac{4}{1}$ اور $P_4Q_4 \parallel BC$ (4)

(1) ، (2) ، (3) اور (4) سے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ اگر ایک خطِ مستقیم ایک مثلث کے دو اضلاع کو مساوی نسبت میں تقسیم کرتا ہے تو وہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

اسی مناسبت سے ہم ایک مسئلہ کو بیان کریں جو تھیلس کے مسئلہ کا برعکس ہے۔

مسئلہ 6.2 بنیادی تناسب کے مسئلہ کا برعکس (تھیلس کے مسئلہ کا برعکس)

اگر ایک خطِ مستقیم کسی مثلث کے کوئی اضلاع کو مساوی نسبت میں تقسیم کرتا ہے تو وہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔

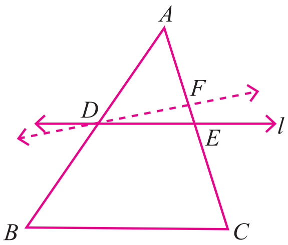


Fig 6.4

دیا گیا ہے : ایک خط l ، ΔABC کے اضلاع AB اور AC کو بالترتیب D اور E پر قطع کرتا ہے ، اس طرح کہ

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad (1)$$

ثابت کرنا ہے: $DE \parallel BC$

تصنیف : اگر DE ، BC کے متوازی نہ ہو تو ایک خط $BC \parallel DF$ کھینچو۔

ثبوت

چونکہ $BC \parallel DF$ ہے ، تھیلس کے مسئلہ کے تحت ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \quad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EC} \implies \frac{AF+FC}{FC} = \frac{AE+EC}{EC}$$

$$\frac{AC}{FC} = \frac{AC}{EC} \quad \therefore\ FC = EC$$

یہ اسی وقت ممکن ہے جب F اور E منطبق (Coincide) ہو جائیں، لہٰذا $DE \parallel BC$

مسئلہ 6.3 زاویہ کے ناصف کا مسئلہ (Angle bisector theorem)

ایک مثلث کے اندرونی (بیرونی) زاویہ کا زاویائی ناصف مقابل کے ضلع کو اس زاویہ کے نظیری اضلاع کی نسبت میں (اندرونی) جانب تقسیم کرتا ہے۔

صورت (i) (اندرونی)

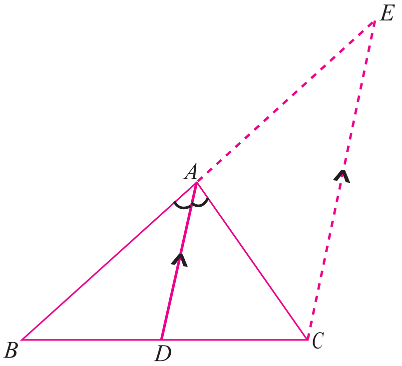


Fig.6.5

دیا گیا ہے : ΔABC میں $\angle BAC$ کا اندرونی ناصف AD ہے جو BC کو D پر ملتا ہے

ثابت کرنا ہے : $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

تصنیف : $DA \parallel CE$ کو اس طرح کھینچو جو دراز کردہ خط BA پر E سے ملے۔

ثبوت

چونکہ $DA \parallel CE$ اور AC قاطع ہے۔اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

(1) $\angle DAC = \angle ACE$ (متبادلہ زاویے)

(2) $\angle BAD = \angle AEC$ (نظیری زاویے)

(3) چونکہ $\angle A$ کا زاویائی ناصف AD ہے، $\angle BAD = \angle DAC$

(1)، (2) اور (3) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $\angle ACE = \angle AEC$

اس طرح ΔACE سے ہمیں $AE = AC$ حاصل ہوتا ہے۔ (مساوی زاویوں کے مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں)

اب ΔBCE سے ہمیں حاصل ہوتا ہے، $DA \parallel CE$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad \text{(تھیلس کا مسئلہ)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (AE = AC)$$

چنانچہ ثابت ہوا۔

صورت (ii) بیرونی (یہ حصہ امتحان کے لئے نہیں ہے)

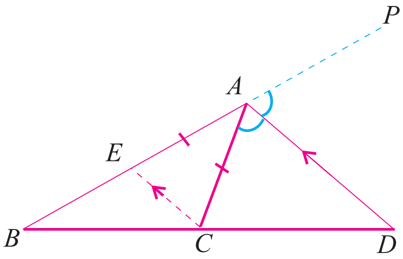


Fig.6.6

دیا گیا ہے : ΔABC میں

$\angle BAC$ کا بیرونی زاویائی ناصف AD ہے اور

دراز کردہ BC کو D پر قطع کرتا ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

تصنیف : $DA \parallel CE$ کھینچو جو AB کو E پر قطع کرے۔

ثبوت

$DA \parallel CE$ ہے اور AC قاطع ہے۔

(1) $\angle ECA = \angle CAD$ (متبادلہ زاویے)

نیز $DA \parallel CE$ اور BP قاطع ہے

$\angle CEA = \angle DAP$ (نظیری زاویے) (2)

لیکن $\angle CAP$ کا ناصف AD ہے

$\angle CAD = \angle DAP$ (3)

(1)، (2) اور (3) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$\angle CEA = \angle ECA$

اس طرح ΔECA سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $AC = AE$ (مساوی زاویوں کے مقابلے کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں)

ΔBDA سے ہمیں حاصل ہوتا ہے، $EC \parallel AD$

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad \text{(تھیلس کا مسئلہ)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} \quad (AE = AC)$$

لہٰذا مسئلہ ثابت ہوا۔

مسئلہ 6.4 زاویہ کے ناصف کے مسئلہ کا برعکس

اگر کسی مثلث کے ایک راس سے گزرنے والا خطِ مستقیم ، مقابلے کے ضلع کو اندرونی (یا بیرونی) جانب سے دوسرے دو اضلاع کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے تو وہ خطِ مستقیم اندرونی (یا بیرونی) طور پر اس پر زاویہ کا ناصف راس پر ہوتا ہے۔

صورت (i) (اندرونی)

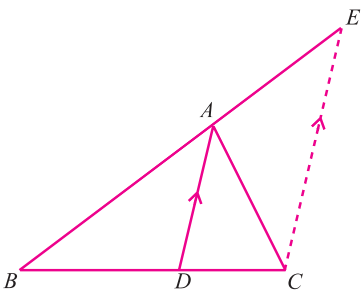


Fig. 6.7

دیا گیا ہے : ΔABC میں ، خط AD مقابل کے ضلع AD کو اندرونی جانب اس طرح تقسیم کرتا ہے کہ

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

ثابت کرنا ہے : $\angle BAC$ کا اندرونی ناصف AD ہے

یعنی ثابت کرنا ہے : $\angle BAD = \angle DAC$

تصنیف :

'C' سے گزارتے ہوئے $DA \parallel CE$ کھینچو جو دراز کردہ BA کو E پر ملے

ثبوت

چونکہ $AD \parallel CE$ ہے ، تھیلس کے مسئلہ کے تحت ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad (2)$$

لہٰذا (1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$

$$\therefore \quad AE = AC$$

(3) اب ΔACE سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $\angle ACE = \angle AEC$ (AE=AC)

چونکہ متوازی خطوط AD اور CE کا قاطع AC ہے۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$\angle DAC = \angle ACE$ (اندرونی متبادلہ زاویے مساوی ہوتے ہیں)......(4)

نیز متوازی خطوط AD اور CE کا قاطع BE ہے۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$\angle BAD = \angle AEC$ (نظیری زاویے مساوی ہوتے ہیں)......(5)

(3) ، (4) اور (5) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$\angle BAD = \angle DAC$

$\angle BAC$ کا زاویائی ناصف AD ہے۔ $\therefore$

لہٰذا مسئلہ ثابت ہوا۔

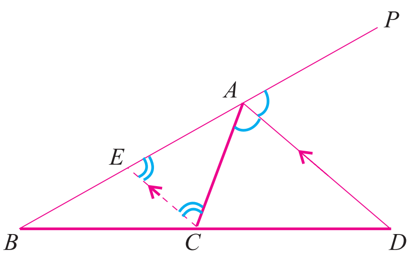


Fig. 6.8

صورت (ii) بیرونی (یہ حصہ امتحان کے لئے نہیں ہے)

دیا گیا ہے : ΔABC میں ، خط AD درازکردہ مقابل کے ضلع BC کو بیرونی طور D پر اس طرح تقسیم کرتا ہے کہ

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \qquad (1)$$

ثابت کرنا ہے : $\angle PAC$ کا ناصف AD ہے

یعنی ثابت کرنا ہے $\angle PAD = \angle DAC$

تصنیف : C سے گزرتے ہوئے $DA \parallel CE$ کھینچو جو BA کو E پر ملے

ثبوت

چونکہ $DA \parallel CE$ ہے ، تھیلس کے مسئلہ کے تحت

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{EA} \qquad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC} \qquad \therefore\ AE = AC$$

ΔACE سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$\angle ACE = \angle AEC$ (AE=AC) (3)

چونکہ متوازی خطوط AD اور CE کا قاطع AC ہے،

$\angle ACE = \angle DAC$ (متبادلہ اندرونی زاویے) (4)

نیز متوازی خطوط AD اور CE کا قاطع BA ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$\angle PAD = \angle AEC$ (نظیری زاویے) (5)

(3) ، (4) اور (5) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$\angle PAD = \angle DAC$

$\angle PAC$ کا ناصف AD ہے۔ لہٰذا $\angle BAC$ کا بیرونی ناصف AD ہے۔

لہٰذا مسئلہ ثابت ہوا۔

مثال 6.1 ΔABC میں $DE \parallel BC$ اور $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$ ہے۔اگر $AE = 3.7$ cm ہوتو EC معلوم کرو

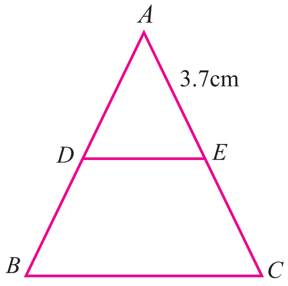


Fig.6.9

حل : ΔABC میں $DE \parallel BC$

$$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{(تھیلس کا مسئلہ)}$$

$$\Longrightarrow \quad EC = \frac{AE \times DB}{AD}$$

لہٰذا $EC = \frac{3.7 \times 3}{2} = 5.55$ cm

مثال 6.2 ΔPQR میں دیا گیا ہے کہ PQ پر ایک نقطہ S ہے، اس طرح کہ $ST \parallel QR$ اور $\frac{PS}{SQ} = \frac{3}{5}$ ہے ۔ اگر $PR = 5.6$ cm ہوتو PT معلوم کرو۔

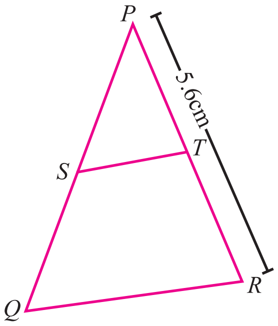


Fig. 6.10

حل : ΔPQR میں $ST \parallel QR$ اور تھیلس کے مسئلہ کے تحت

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR} \qquad (1)$$

فرض کرو $PT = x$ ہے۔ لہٰذا $TR = PR - PT = 5.6 - x$

(1) سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے $PT = TR\left(\frac{PS}{SQ}\right)$

$$x = (5.6 - x)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$5x = 168 - 3x$$

لہٰذا $x = \frac{168}{8} = 2.1$ یعنی PT = 2.1 cm

مثال 6.3 ΔABC میں، خطوط AB اور AC پر بالترتیب نقاط D اور E اس طرح ہیں کہ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ اور $\angle ADE = \angle DEA$ ثابت کرو کہ ΔABC مساوی الساقین ہے۔

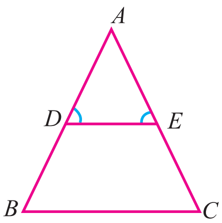


Fig. 6.11

حل :

چونکہ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ہے ، تھیلس کے برعکس مسئلہ کے تحت ، $DE \parallel BC$ ہے

$\therefore \quad \angle ADE = \angle ABC \qquad (1)$

اور $\quad \angle DEA = \angle BCA \qquad (2)$

لیکن دیا گیا ہے $\quad \angle ADE = \angle DEA \qquad (3)$

(1) ، (2) اور (3) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $\angle ABC = \angle BCA$

(اگر مقابلے کے زاویے مساوی ہوں تو مقابل کے اضلاع بھی مساوی ہوتے ہیں) $\because AC = AB$

لہٰذا ΔABC مساوی الساقین ہے۔

مثال 6.4

ΔABC میں اضلاع AB ، BC اور CA پر بالترتیب نقاط D ، E اور F
اس طرح لئے گئے ہیں کہ $DE \parallel AC$ اور $EF \parallel AB$ ہے۔

ثابت کرو کہ $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{FC}$

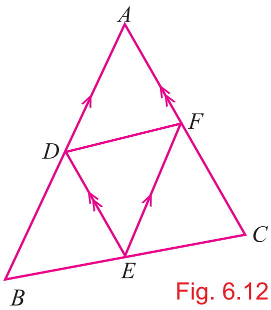


Fig. 6.12

حل :

دیا گیا ہے کہ ΔABC میں $DE \parallel AC$ ہے

$\therefore \quad \dfrac{BD}{DA} = \dfrac{BE}{EC}$ (تھیلس کا مسئلہ) (1)

نیز دیا گیا ہے کہ $EF \parallel AB$

$\therefore \quad \dfrac{BE}{EC} = \dfrac{AF}{FC}$ (تھیلس کا مسئلہ) (2)

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{AF}{FC}$

$\Longrightarrow \quad \dfrac{BD+AD}{AD} = \dfrac{AF+FC}{FC}$ (کمپونڈ واصول)

لہٰذا $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{FC}$.

مثال 6.5

ΔABC میں $\angle A$ کا اندرونی ناصف AD ، ضلع BC کو D پر ملتا ہے۔
اگر $BD = 2.5$ cm ، $AB = 5$ cm اور $AC = 4.2$ cm ہو تو DC معلوم کرو

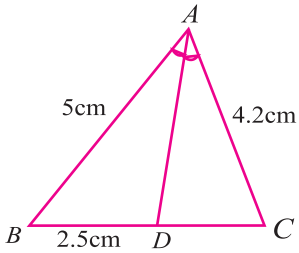


Fig. 6.13

حل : ΔABC میں $\angle A$ کا اندرونی ناصف AD ہے

$\therefore \quad \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (زاویہ کے ناصف کا مسئلہ)

$\Longrightarrow \quad DC = \dfrac{BD \times AC}{AB}$

لہٰذا $\quad DC = \dfrac{2.5 \times 4.2}{5} = 2.1$ cm.

مثال 6.6

ΔABC میں ، $\angle A$ کا بیرونی ناصف AE ہے جو دراز کردہ BC کو E پر ملتا ہے۔
اگر $AB = 10$ cm ، $AC = 6$ cm اور $BC = 12$ cm ہو تو CE دریافت کرو۔

حل : ΔABC میں $\angle A$ کا بیرونی ناصف AE ہے۔ جو دراز کردہ BC کو E پر ملتا ہے
فرض کرو $CE = x$ cm ہے۔ زاویہ کے ناصف کے مسئلہ کے تحت ہمیں حاصل ہوتا ہے

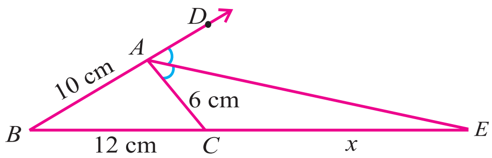


Fig.6.14

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} \quad \Longrightarrow \quad \frac{12+x}{x} = \frac{10}{6}$$

$3(12+x) = 5x$. Thus, $x = 18$.

لہٰذا $CE = 18$ cm.

مثال 6.7 ΔABC کے ضلع BC کا وسطی نقطہ D ہے۔ اگر AB اور AC پر نقاط P اور Q اس طرح ہوں کہ $\angle BDA$ کا ناصف DP اور $\angle ADC$ کا ناصف DQ ہے۔ ثابت کرو کہ $PQ \parallel BC$

حل : ΔABD میں $\angle BDA$ کا ناصف DP ہے

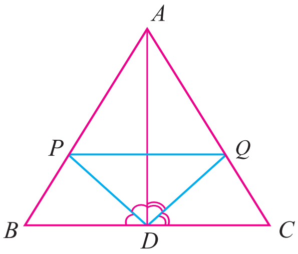


Fig. 6.15

$$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = \frac{AD}{BD} \quad \text{(زاویائی ناصف کا مسئلہ)} \quad (1)$$

ΔADC میں $\angle ADC$ کا ناصف DQ ہے

$$\therefore \quad \frac{AQ}{QC} = \frac{AD}{DC} \quad \text{(زاویائی ناصف کا مسئلہ)} \quad (2)$$

لیکن $BD = DC$ (BC کا وسطی نقطہ D ہے)

اب $(2) \Longrightarrow \dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{AD}{BD}$ $\quad (3)$

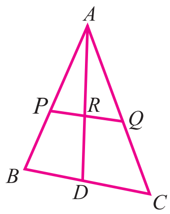
(1) اور (3) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

لہٰذا $PQ \parallel BC$ (تھیلس کے مسئلہ کا برعکس)

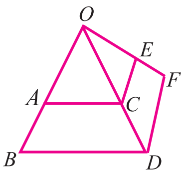
مشق 6.1

1. ΔABC میں D اور E بالترتیب اضلاع AB اور AC پر نقاط اس طرح ہیں کہ $DE \parallel BC$ ۔
(i) اگر $AD = 6$ cm ، $BD = 9$ cm اور $AE = 8$ cm ہو تو AC معلوم کرو
(ii) اگر $AD = 8$ cm ، $AB = 12$ cm اور $AE = 12$ cm ہو تو CE معلوم کرو
(iii) اگر $AD = 4x-3$ cm ، $BD = 3x-1$ cm اور $AE = 8x-7$ cm اور $EC = 5x-3$ ہو تو x کی قیمت معلوم کرو



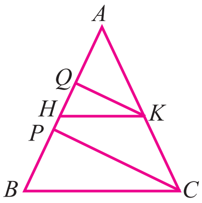
2. خاکہ میں $AP = 3$ cm ، $AR = 4.5$ cm ، $AQ = 6$ cm ، $AB = 5$ cm
اور $AC = 10$ cm ہے۔ AD کا طول معلوم کرو۔

3. ΔAQR میں اضلاع PQ اور PR پر بالترتیب نقاط E اور F ہیں۔
ذیل کی صورتوں میں تصدیق کرو کہ کیا $QR \parallel EF$ ہے؟
(i) $PE = 3.9$ cm ، $EQ = 3$ cm ، $PF = 3.6$ cm اور $FR = 2.4$ cm
(ii) $PE = 4$ cm ، $QE = 4.5$ cm ، $PF = 8$ cm اور $RF = 9$ cm

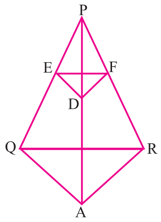


4. خاکہ میں $AC \parallel BD$ اور $CE \parallel DF$ ہے۔
اگر $OA = 12$ cm ، $AB = 9$ cm ، $OC = 8$ cm
اور $EF = 4.5$ cm ہو تو FO معلوم کرو۔

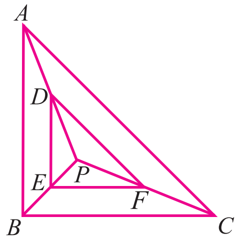
.5 ABCD ایک چارضلعی ہے جس میں AB اور CD متوازی ہیں۔ AB کے متوازی کھینچا ہوا ایک خط AD کو P پر اور BC کو Q پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$



.6 نقشہ میں $QK \parallel PC$ اور $HK \parallel BC$ ہے۔ اگر $AQ = 6$ cm ، $QH = 4$ cm ، $HP = 5$ cm ، $KC = 18$ cm ہو تو AK اور PB معلوم کرو۔



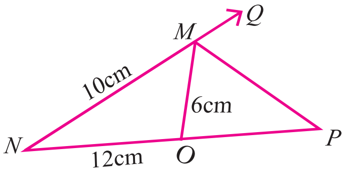
.7 خاکہ میں $AQ \parallel DE$ اور $AR \parallel DF$ ہے۔
ثابت کرو کہ $QR \parallel EF$ ہے۔



.8 نقشہ میں $AB \parallel DE$
اور $AC \parallel DF$ ہے۔
ثابت کرو کہ $BC \parallel EF$۔

.9 ΔABC میں $\angle A$ کا اندرونی ناصف AD ، BC کو D پر ملتا ہے۔
(i) اگر $BD = 2$ cm ، $AB = 5$ cm ، $DC = 3$ cm ہو تو AC معلوم کرو۔
(ii) اگر $AB = 5.6$ cm ، $AC = 6$ cm ، $DC = 3$ cm ہو تو BC معلوم کرو۔
(iii) اگر $AB = x$ ، $AC = x - 2$ ، $BD = x + 2$ اور $DC = x - 1$ ہو تو x معلوم کرو۔

.10 ذیل میں ہر ایک کے لئے جانچ کیجئے کہ ΔABC میں کیا AD ، $\angle A$ کا ناصف ہے
(i) $AB = 4$ cm ، $AC = 6$ cm ، $BD = 1.6$ cm اور $CD = 2.4$ cm
(ii) $AB = 6$ cm ، $AC = 8$ cm ، $BD = 1.5$ cm اور $CD = 3$ cm



.11 ایک ΔMNO میں $\angle M$ کا بیرونی ناصف MP ہے
جو درازکردہ NO کو P پر ملتا ہے۔ اگر $MN = 10$ cm ، $MO = 6$ cm ،
$NO = 12$ cm ہو تو OP معلوم کرو۔

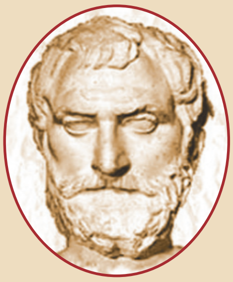
.12 ایک چارضلعی ABCD میں $\angle B$ اور $\angle D$ کے ناصف AC کو E پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

.13 ΔABC میں $\angle A$ کا اندرونی ناصف BC کو D پر ملتا ہے اور $\angle A$ کا بیرونی ناصف درازشدہ BC کو E پر ملتا ہے۔
ثابت کرو کہ $\frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}$.

.14 ABCD ایک چارضلعی ہے جس میں $AB = AD$ ہے۔ اگر AE اور AF ، بالترتیب $\angle BAC$ اور $\angle DAC$ کے اندرونی ناصف ہوں تو ثابت کرو کہ $BD \parallel EF$ ۔

6.3 متشابہ مثلثیں (Similar triangles)

آٹھویں جماعت میں ہم متماثل مثلثوں کے بارے میں وسیع طور پر مطالعہ کر چکے ہیں۔ ہم جان چکے ہیں کہ دو ہندسی شکلیں متماثل ہوتی ہیں اگر ان کی شکل اور جسامت مساوی ہو۔ اس حصّہ میں ہم ان ہندسی شکلوں کے بارے میں مطالعہ کریں گے جن کی شکل یکساں ہوگی مگر یہ ضروری نہیں کہ ان کی جسامت مساوی ہو۔ اس طرح کی ہندسی شکلیں متشابہ کہلاتی ہیں۔

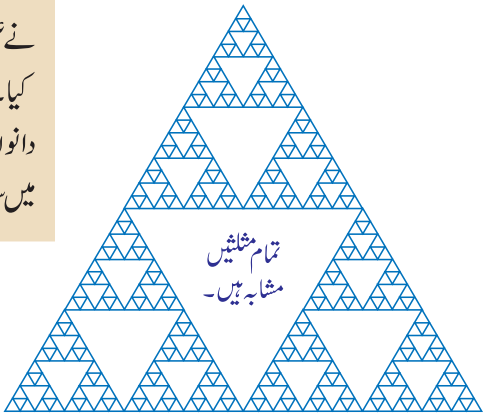


ملٹیس کا تھیلس
(Thales of Miletus)
(624-546 ق.م.) یونان

تھیلس ایک مشہور فلسفی، سائنس دان اور ریاضی دان تھے۔ علمِ ہندسہ میں منطقی نتائج کے استعمال کرنے کا طریقہ انہیں کے سَر جاتا ہے انہوں نے علمِ ہندسہ میں کئی پیش حالتوں کو دریافت کیا۔ ان کا مسئلوں کو کرنے کا طریقہ، کئی ریاضی دانوں کو متوجہ کیا۔ انہوں نے 585 قبلِ مسیح میں سورج گرہن کی پیشین گوئی بھی کی تھی۔

ہم اطراف و اکناف پر نظر ڈالتے ہیں تو ہم بہت سی اشیاء دیکھتے ہیں جن کی شکلیں مساوی ہوتی ہیں مگر ان کی جسامت یکساں یا مختلف ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر ایک درخت کے پتّے تقریباً یکساں شکل کے ہوتے ہیں مگر ان کی جسامت یکساں یا مختلف ہوتی ہے۔ اسی طرح ایک ہی نیگیٹو (negative) سے تیار کی ہوئی تصویریں ایک ہی شکل کی ہوتی ہیں مگر ان کی جسامت (size) مختلف ہوتی ہیں۔ وہ تمام اشیاء جن کی شکل یکساں مگر جسامت مختلف ہوں، **متشابہ اشیاء** کہلاتی ہیں۔

کہا جاتا ہے کہ **تھیلس** نے یونان میں علمِ ہندسہ کا تعارف کرایا۔ انہوں نے اہرام مصر کی اونچائیوں کو، ان کے سایوں (shadows) اور متشابہ مثلثوں کے اصول کی مدد سے دریافت کی۔ اس طرح متشابہ مثلثوں کی مدد سے بلندی اور فاصلہ کو ناپنا ممکن ہوا۔



انہوں نے مشاہدہ کیا کہ مساوی الساقین مثلثوں کے قاعدے کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔ انہوں نے متشابہ مثلثوں اور قائمۃ الزاویہ مثلثوں کے تصوّر کو عملی علمِ ہندسہ میں استعمال کیا یہ حقیقت ہے کہ متماثل مثلثیں متشابہ ہوتے ہیں مگر اس کا برعکس درست نہیں ہے۔ اس حصّہ میں ہم صرف متشابہ مثلثوں پر بحث کریں گے۔ ان کے استعمال سے مسئلوں کا حل نکالیں گے۔ ذیل کی معمولی کارروائی سے ہمیں متشابہ مثلثوں کو ذہن نشین کرنے میں مدد ملے گی۔

کارروائی

- ایک کارڈ بورڈ لیجئے اور اس میں ایک مثلثی سوراخ بنائیے۔
- اس کارڈ بورڈ کو زمین سے تقریباً ایک میٹر اوپر سورج کی روشنی میں رکھئے۔
- اب اس کو زمین کی جانب نیچے لائیے اور زمین پر بننے والے مثلث کے کئی شکلوں کے سلسلے دیکھئے۔
- زمین کے قریب لانے سے خیال چھوٹا ہوتا جاتا ہے اور زمین سے دور لے جانے پر خیال (image) بڑا ہوتا جاتا ہے۔
- آپ دیکھتے ہیں کہ تینوں راس سے بننے والے زاویے ہمیشہ مساوی ہوتے ہیں حالانکہ ان کی جسامت مختلف ہوتی ہے۔

تعریف

دو مثلث متشابہ ہوں گے، اگر

(i) ان کے نظیری زاویے مساوی ہوں

(ii) ان کے نظیری اضلاع کی نسبت میں تناسب پایا جاتا ہو یا

دیگر الفاظ میں یوں کہا جاسکتا ہے کہ ایک مثلث کی تکبیری شکل دوسرا مثلث ہے۔

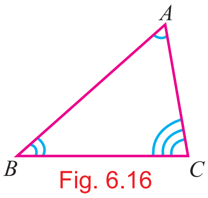


Fig. 6.16

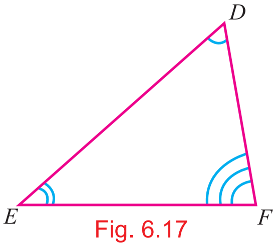


Fig. 6.17

لہٰذا دو مثلثیں ΔABC اور ΔDEF متشابہ ہوں گے اگر

(i) $\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F$ (یا)

(ii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$.

یہاں راسیں A ، B ، اور C راسیں بالترتیب D ، E اور F سے مطابقت رکھتے ہیں۔ ان دو مثلثوں کی متشابہت کو ہم اس طرح لکھتے ہیں :

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ اور اس کو ΔABC متشابہ ہے ΔDEF کے۔ نشان " $\sim$ " کے معنے "کے مشابہ ہے" ہے۔

برائے ذہن نشینی

ΔABC اور ΔDEF کی مشابہت کو علامتی طور پر دوسرے طریقوں سے درست مطابقت استعمال کرتے ہوئے اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔ جیسے $\Delta BCA \sim \Delta EFD$ اور $\Delta CAB \sim \Delta FDE$

6.3.1 مثلثوں کی متشابہت کے اصول

دو مثلثوں کی متشابہت کو ثابت کرنے کے لئے ذیل کے تین اصول کافی ہیں۔

(i) AA (Angle - Angle) زاویہ ۔ زاویہ مشابہت کا اصول

اگر کسی ایک مثلث کے دو زاویے بالترتیب دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے مساوی ہوں تو وہ دونوں مثلث متشابہ ہوں گے۔

برائے ذہن نشینی

اگر ایک مثلث کے دو زاویے بالترتیب دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے مساوی ہوں تو ان کے تیسرے زاویے بھی مساوی ہوں گے۔

لہٰذا AA متشابہت کا اصول کو AAA اصول بھی کہا جاتا ہے۔

(ii) SSS (side - side - side) ضلع ۔ ضلع ۔ ضلع مشابہت کا اصول

دو مثلثوں میں اگر ایک مثلث کے اضلاع ، دوسرے مثلث کے اضلاع کے متناسب ہوں (مساوی نسبت پائی جائے) تو ان کے نظیری زاویے مساوی ہوتے ہیں اور لہٰذا دونوں مثلثیں متشابہ ہوتے ہیں۔

(iii) SAS (side - angle - side) ضلع ۔ زاویہ ۔ ضلع مشابہت کا اصول

ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہو اور ان زاویوں کو بنانے والے نظیری اضلاع متناسب ہوں تو یہ دونوں مثلث متشابہ ہوتے ہیں۔

آیئے اب ہم مثلثوں کی مشابہت پر چند نتائج بغیر ثبوت کے درج کریں۔

(i) دو متشابہ مثلثوں کے رقبوں میں نسبت ان کے نظیری اضلاع کے مربعوں کے مساوی ہوتی ہے

(ii) اگر ایک مثلثِ قائمۃ الزوایہ کے راس سے اس کے وتر پر ایک عمود ڈالا جائے تو عمود کے دونوں جانب بننے والے مثلث پورے مثلث کے متشابہ ہوتے ہیں۔

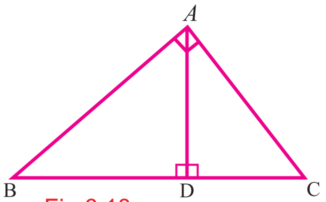


Fig.6.18

یہاں (a) $\Delta DBA \sim \Delta ABC$

(b) $\Delta DAC \sim \Delta ABC$

(c) $\Delta DBA \sim \Delta DAC$

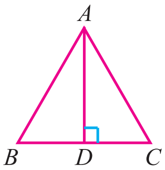


Fig.6.19

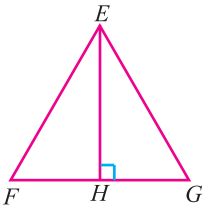


Fig.6.20

(iii) اگر دو مثلث متشابہ ہوں تو ان کے نظیری اضلاع کی نسبت اور ان کے نظیری ارتفاعوں میں مساوی نسبت پائی جاتی ہے۔

یعنی اگر $\Delta ABC \sim \Delta EFG$ ہو تو ، $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{BC}{FG} = \dfrac{CA}{GE} = \dfrac{AD}{EH}$

(iv) اگر دو مثلث متشابہ ہوں تو ان کے نظیری اضلاع کی نسبت ان کے نظیری احاطہ کے مساوی ہوتے ہیں۔

اگر $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ہو تو، $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD} = \dfrac{AB + BC + CA}{DE + EF + FD}$.

مثال 6.8

ΔPQR میں $QR \parallel AB$ ہے۔ اگر AB 3 سمر ہو، PB 2 سمر ہو اور PR 6 سمر ہو تو QR کی لمبائی معلوم کرو۔

حل : دیا گیا ہے کہ AB 3 سمر ہے، PB 2 سمر ہے

اور PR 6 سمر ہے اور $QR \parallel AB$ ہے۔

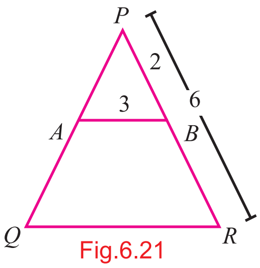


Fig.6.21

ΔPQR اور ΔPAB میں $\angle PAB = \angle PQR$ (نظیری زاویے)

$\angle P$ مشترک ہے $\therefore \ \Delta PAB \sim \Delta PQR$ (AA مشابہت کا اصول)

چونکہ نظیری اضلاع متناسب ہیں۔

$$\frac{AB}{QR} = \frac{PB}{PR}$$

$$QR = \frac{AB \times PR}{PB}$$

$$= \frac{3 \times 6}{2}$$

اس طرح $QR = 9$ cm

مثال 6.9

1.8 میٹر اونچا شخص ایک اہرام (pyramid) کے نزدیک کھڑا ہوا ہے۔ اگر اس شخص کے سایہ کی لمبائی 2.7 m ہے اور اہرام کے سائے کی لمبائی اس وقت 210 m ہو تو اہرام کی اونچائی معلوم کرو۔

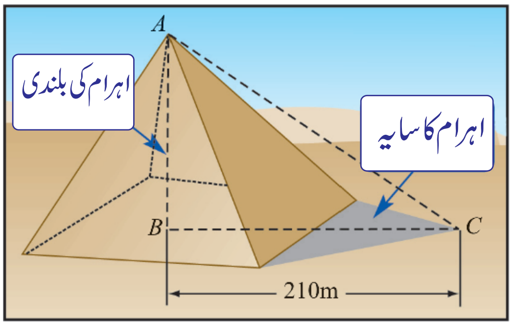


Fig. 6.22

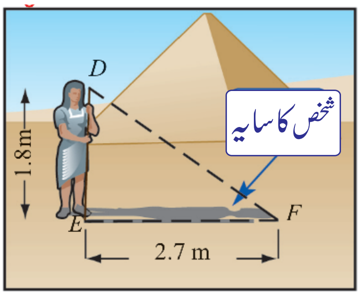


Fig. 6.23

حل :

فرض کرو اہرام کی اونچائی اور شخص کی اونچائی بالترتیب AB اور DE ہیں۔

فرض کرو اہرام اور شخص کے سایوں کی لمبائیاں بالترتیب BC اور CF ہیں۔

ΔABC اور ΔDEF میں

$$\angle ABC = \angle DEF = 90^\circ$$

$$\angle BCA = \angle EFD$$

(ایک مقررہ وقت پر زاویہ فراز مساوی ہوتا ہے)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (AA مشابہت کا اصول)

لہٰذا

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{AB}{1.8} = \frac{210}{2.7} \quad \Longrightarrow AB = \frac{210}{2.7} \times 1.8 = 140.$$

لہٰذا اہرام کی اونچائی 140 m ہے۔

مثال 6.10

ایک شخص آئینہ میں ایک مینار کی چوٹی کو دیکھتا ہے جو مینار سے 87.6 m کے فاصلہ پر ہے۔ آئینہ زمین پر ہے جس کا رخ اوپر کی جانب ہے وہ شخص آئینہ سے 0.4 m دور ہے اور اس کی آنکھوں کا فاصلہ زمین سے 1.5 m ہے۔ مینار کتنا اونچا ہے ؟ (اُس شخص کا قدم، آئینہ اور مینار کا قاعدہ ایک خط مستقیم میں واقع ہے)

حل : فرض کرو AB اور DE بالترتیب آدمی اور مینار کی اونچائی ہے۔

فرض کرو آئینہ میں مینار کا نقطۂ وقوع (Point of incidence) C ہے۔

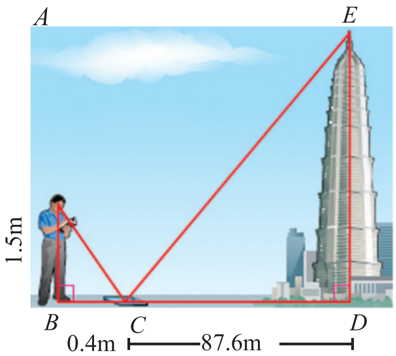


Fig. 6.24

ΔABC اور ΔEDC میں

$$\angle ABC = \angle EDC = 90^\circ$$

$$\angle BCA = \angle DCE$$

(ایک مقررہ وقت میں زاویہ فراز مساوی ہوتا ہے)

(یعنی زاویہ وقوع اور زاویہ انعکاس مساوی ہوتے ہیں)

$\Delta ABC \sim \Delta EDC$ (AA مشابہت کا اصول)

$$\therefore \frac{ED}{AB} = \frac{DC}{BC} \quad \text{(نظیری اضلاع متناسب ہوتے ہیں)}$$

$$ED = \frac{DC}{BC} \times AB = \frac{876}{0.4} \times 1.5 = 328.5$$

لہٰذا مینار کی اونچائی 328.5 میٹر ہے۔

مثال 6.11

ایک کیمرہ کے فلم میں ایک درخت کا خیال کی لمبائی 35 mm ہے۔ فلم اور عدسہ کا فاصلہ 42 mm ہے اور عدسہ سے درخت کا فاصلہ 6 m ہے۔ تصویر لئے گئے درخت کے حصہ کی اونچائی معلوم کرو۔

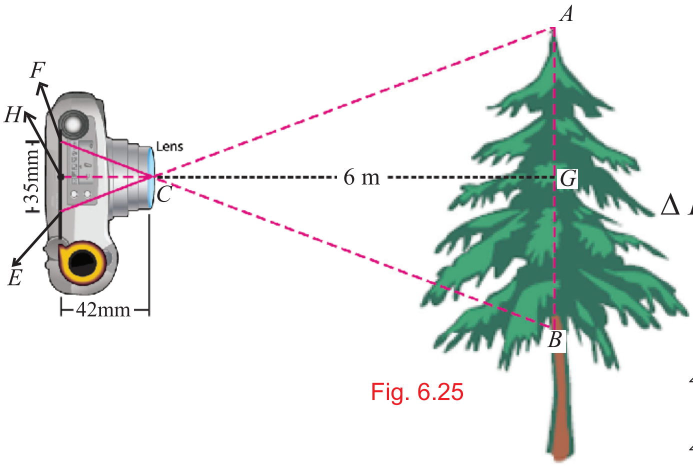


Fig. 6.25

حل : فرض کرو AB اور EF بالترتیب درخت کے حصّہ کی اونچائی اور فلم میں خیال کی اونچائی ہے۔

فرض کرو نقطہ 'C' عدسہ کی نشان دہی کرتا ہے

فرض کرو CG اور CH بالترتیب ΔACB اور ΔFEC کے ارتفاع ہیں۔ صاف ظاہر ہے کہ $AB \parallel FE$

ΔACB اور ΔFEC میں $\angle BAC = \angle FEC$

(عمودی مقابل زاویے) $\angle ECF = \angle ACB$

(AA کی مشابہت کا اصول) $\therefore \ \Delta ACB \sim \Delta ECF$

لہٰذا $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{CG}{CH}$

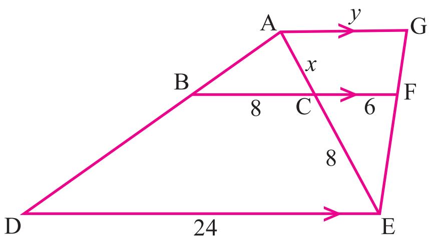
$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{CG}{CH} \times EF = \frac{6 \times 0.035}{0.042} = 5$$

تصویر لئے درخت کے حصے کی اونچائی 5 m ہے۔

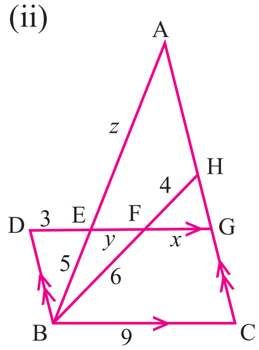
مشق 6.2

1. ذیل میں نامعلوم قیمتیں معلوم کرو۔ تمام لمبائیاں سنٹی میٹر میں دی گئی ہیں (تمام پیائشیں اسکیل کے تحت نہیں ہیں)

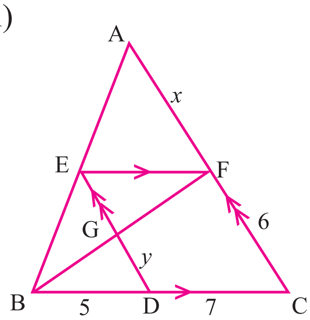
(i)



(ii)

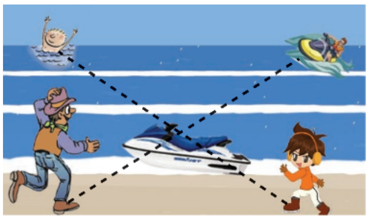


(iii)



2. 1.8 m اونچے ایک شخص کا خیال فلم میں 1.5 cm طول کا ہے۔ اگر فلم کیمرہ کے عدسہ سے 3 cm کے فاصلہ پر ہو تو وہ شخص کیمرے سے کتنے فاصلہ پر ہے ؟

3. 120 cm اونچی ایک لڑکی ایک لیمپ کے کھمبے (lamp post) کے قاعدے سے 0.6 میٹر فی سکنڈ کی رفتار سے دور جارہی ہے۔ اگر لیمپ (چراغ) سطحِ زمین سے 3.6 m اوپر ہو تو 4 سکنڈ کے بعد اس کے سائے کی لمبائی معلوم کرو۔



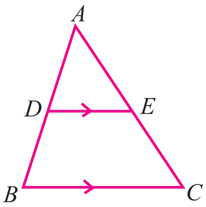
4. ایک لڑکی اپنے باپ کے ساتھ ساحلِ سمندر پر ہے وہ ایک تیراک کو ڈوبتے ہوئے دیکھتی ہے۔ وہ اپنے باپ کو پکارتی ہے جو اس سے 50m مغربی سمت میں ہے۔ اس کا باپ، لڑکی کی بہ نسبت ایک کشتی سے 10 میٹر قریب ہے۔ اگر اس کا باپ کشتی استعمال کرے تو تیراک تک پہنچنے میں 126 m کا فاصلہ طے کرنا پڑے گا۔ اسی وقت وہ لڑکی آبی ناؤ (water craft) پر سوار ایک شخص کو دیکھتی ہے جو کشتی سے 98 m دور ہے۔ وہ شخص تیراک سے مشرقی سمت میں ہے۔ اس شخص کو تیراک کو بچانے کے لئے کتنا فاصلہ طے کرنا ہوگا ؟ (اشارہ: تصویر دیکھئے)

5. ΔABC میں اضلاع AB اور AC پر نقاط بالترتیب P اور Q ہیں۔ اگر $AP = 3$ cm، $PB = 6$ cm، $AQ = 5$ cm اور $QR = 10$ cm ہو تو ثابت کرو کہ $BC = 3\ PQ$

6. ΔABC میں $AB = AC$ اور $BC = 6$ cm۔ ضلع AC پر ایک نقطہ D ہے اس طرح کہ $AD = 5$ cm اور $CD = 4$ cm ہے۔ ثابت کرو کہ $\Delta BCD \sim \Delta ACB$ ہے اور لہٰذا BD معلوم کرو۔

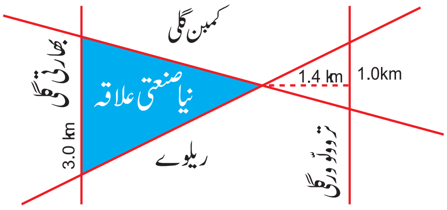
7. ΔABC میں AB اور AC پر نقاط بالترتیب E اور D ہیں اس طرح کہ $BC \parallel DE$ ہے۔ اگر $AB = 3\ AD$ اور ΔABC کا رقبہ $72\ cm^2$ ہو تو چار ضلعی $DBCE$ کا رقبہ معلوم کرو

8. مثلث ABC کے تین اضلاع کے طول 6 cm، 4 cm اور 9 cm ہیں۔ $\Delta PQR \sim \Delta ABC$ ہے۔ ΔPQR کے ایک ضلع کی لمبائی 35 cm ہے۔ ΔPQR کا زیادہ سے زیادہ ممکن احاطہ کتنا ہے ؟

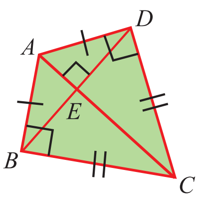


9. خاکہ میں $DE \parallel BC$ اور $\frac{AD}{BD} = \frac{3}{5}$ ہو تو ذیل کی قیمتیں محسوب کیجئے.

(i) $\frac{\Delta ADE \text{ کا رقبہ}}{\Delta ABC \text{ کا رقبہ}}$ (ii) $\frac{\text{مخرف } BCED \text{ کا رقبہ}}{\Delta ABC \text{ کا رقبہ}}$



10. شہر کے بغیر استعمال کئے ہوئے حصّہ کو حکومت ایک نیا صنعتی علاقہ میں ترقی دینا چاہتی ہے۔ دائیں جانب نقشہ میں سیاہ کردہ حصّہ نئے صنعتی علاقہ کی نشاندہی کرتا ہے۔ نئے صنعتی علاقے کا رقبہ معلوم کرو۔



11. ایک لڑکا ہیرے کی شکل کے پتنگ کا ایک ڈیزائن بناتا ہے جیسا کہ خاکہ میں بتلایا گیا ہے جس میں $AE = 16$ cm، $EC = 81$cm وہ ایک آڑی کاڑی BD استعمال کرنا چاہتا ہے۔ اسکی لمبائی کیا ہونی چاہئے ؟