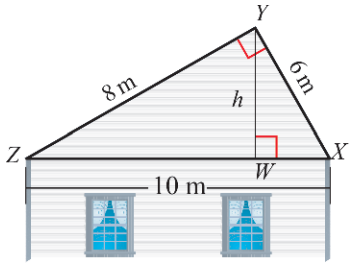
12. ایک طالبِ علم ایک جھنڈے کے مستول کی بلندی معلوم کرنا چاہتا ہے۔ وہ زمین پر ایک چھوٹا آئینہ رکھتا ہے تا کہ وہ جھنڈے کے مستول کے سرے کا عکس دیکھ سکے۔ آئینہ سے اس کا فاصلہ 0.5 میٹر اور آئینہ سے جھنڈے کے مستول کا فاصلہ 3 میٹر ہے۔ اگر اس کی آنکھ سطحِ زمین سے 1.5 میٹر اوپر ہو تو جھنڈے کے مستول کی بلندی معلوم کرو۔

(طالب علم کا قدم، آئینہ اور جھنڈے کے مستول کا قدم ایک ہی خطِ مستقیم پر ہیں)



13. خاکہ میں ایک چھت کی عمودی تراش دکھلائی گئی ہے۔

(i) متشابہ مثلثوں کی نشاندہی کرو۔

(ii) چھت کی بلندی h معلوم کرو۔

مسئلہ 6.6 مسئلہ فیثا غورث (باندھاین کا مسئلہ) [Pythagoras theorem (Bandhayan theorem)]

کسی مثلث قائمۃ الزاویہ میں وتر کا مربع اس کے دوسرے اضلاع کے مربعوں کے حاصلِ جمع کے مساوی ہوتا ہے۔

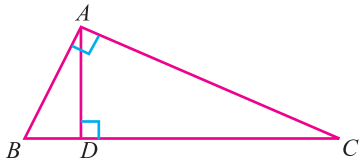


Fig.6.26

دیا گیا ہے : قائمۃ الزاویہ ΔABC میں $\angle A = 90°$

ثابت کرنا ہے : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

تصنیف : $AD \perp BC$ کھینچو

ثبوت مثلث ABC اور مثلث DBA میں $\angle B$ مشترک زاویہ ہے

نیز $\angle BAC = \angle ADB = 90°$

$\therefore \ \Delta ABC \sim \Delta DBA$ (AA اصول زاویہ۔زاویہ اصول)

لہٰذا ان کے نظیری اضلاع میں تناسبیت پائی جاتی ہے

اس طرح $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BA}$

$\therefore \ AB^2 = DB \times BC$ (1)

اس طرح $\Delta ABC \sim \Delta DAC$

لہٰذا $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$

$\therefore \ AC^2 = BC \times DC$ (2)

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$AB^2 + AC^2 = BD \times BC + BC \times DC$$
$$= BC(BD + DC)$$
$$= BC \times BC = BC^2$$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ مسئلہ فیثا غورث ثابت ہوا

برائے ذہن نشینی

مسئلہ فیثا غورث کے دو بنیادی پہلو ہیں۔ایک رقبوں سے متعلق ہے اور دوسرا لمبائیوں سے متعلق ہے۔لہٰذا یہ مسئلہ علمِ ہندسہ اور الجبرا کا ایک بہترین سنگ میل ہے۔مسئلہ فیثا غورث کا برعکس بھی درست ہے۔اس کو پہلے پہل اقلیدس نے ذکر کیا اور ثابت کیا۔

بیان (statement) ذیل میں درج ہے۔(ثبوت بطورِ مشق دیا گیا ہے)

مسئلہ 6.7 **مسئلہ فیثا غورث کا برعکس**

کسی مثلث میں اگر ایک ضلع کا مربع دوسرے اضلاع کے مربعوں کے حاصلِ جمع کے مساوی ہو تو پہلے ضلع کے مقابل کا زاویہ، زاویۂ قائمہ ہے۔

6.4 دائرے اور مماس

ایک خطِ مستقیم جو ایک دائرہ سے تعلق رکھتا ہے ، اور دائرہ کو صرف ایک نقطہ پر مَس کرتا ہے مماس کہلاتا ہے۔علمِ ہندسہ میں دائرہ کا مماس کئی ہندسی تصنیفات اور ثبوت کے مہیّا کرنے میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔اس حصّہ میں ہم دائرے اور مماسوں کی بنیاد پر چند نتائج بیان کریں گے اور ایک اہم مماس۔وتر کے مسئلہ کا ثبوت پیش کریں گے۔اگر ہم ایک سطح پر ایک دائرہ اور خطِ مستقیم پر غور کریں تو اس کے تین ممکنات ہیں۔وہ ایک دوسرے کو قطع نہ کریں، دو دو نقطوں پر قطع کریں یا وہ صرف ایک نقطہ پر ایک دوسرے کو مَس کریں۔ اب درج ذیل خاکوں پر غور کریں۔

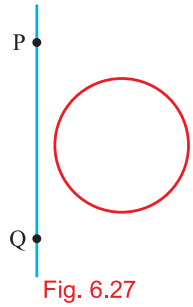


Fig. 6.27

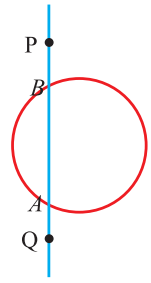


Fig. 6.28

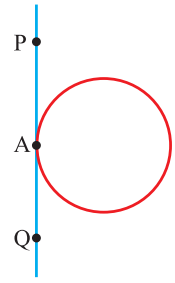


Fig.6.29

خاکہ 6.27 میں دائرہ اور خطِ مستقیم PQ کا کوئی مشترک نقطہ نہیں ہے۔

خاکہ 6.27 میں خطِ مستقیم PQ دائرے کو دو مختلف نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے۔اس صورت میں PQ کو دائرہ کا قاطع (secant) کہا جاتا ہے۔

خاکہ 6.29 میں خطِ مستقیم PQ اور دائرہ کا صرف ایک مشترک نقطہ ہے۔یعنی خطِ مستقیم، دائرہ کو صرف ایک نقطہ پر مَس کرتا ہے۔خطِ مستقیم PQ کو A پر دائرہ کا مماس کہتے ہیں۔

تعریف

ایک خطِ مستقیم جو دائرہ کو صرف ایک نقطہ پر مَس کرتی ہے، دائرہ کا مماس کہلاتی ہے۔اور جس نقطہ پر وہ دائرہ کو مس کرتی ہے، اس نقطہ کو نقطۂ تماس (point of contact) کہتے ہیں۔

دائرے اور مماسوں کی بنیاد پر چند مسئلے (ثبوت کے بغیر)

1. نقطۂ تماس (point of contact) پر دائرہ کے مماس اور نصف قطر عمودی ہوتے ہیں۔
2. دائرہ پر ایک نقطہ سے صرف ایک مماس کھینچا جا سکتا ہے۔ لیکن دائرے کے بیرونی نقطہ سے دائرے پر دو مماس کھینچ سکتے ہیں۔
3. دائرے کے بیرونی نقطہ سے دائرے پر کھینچے ہوئے دو مماسوں کی لمبائیاں مساوی ہوتی ہیں۔
4. اگر دو دائرے ایک دوسرے کو مَس کرتے ہیں تو دائروں کا نقطۂ تماس ، دائروں کے مرکز کو ملانے والے پر ہوتا ہے۔
5. اگر دو دائرے بیرونی جانب مَس کرتے ہیں تو ان کے مرکز کا درمیانی فاصلہ ان کے نصف قطروں کے حاصلِ جمع کے مساوی ہوتا ہے۔
6. اگر دو دائرے اندرونی جانب مَس کرتے ہیں تو ان کے مرکز کا درمیانی فاصلہ ان کے نصف قطروں کے فرق کے مساوی ہوتا ہے۔

مسئلہ 6.8 مماس-وتر کا مسئلہ (Tangent - chord theorem)

اگر مماس کے نقطۂ تماس (دائرے کے) سے ایک وتر (chord) کھینچا جائے تو وتر اور مماس سے بننے والا زاویہ بالترتیب اس کے نظیری متبادل قطعہ (alternate segment) میں بننے والے زاویے کے مساوی ہوتا ہے۔

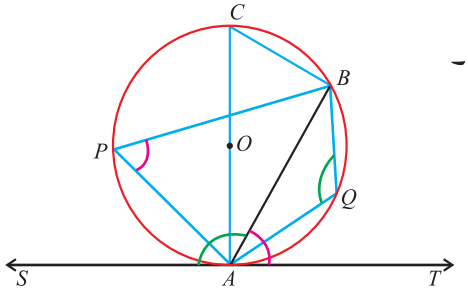


Fig. 6.30

دیا گیا ہے : دائرہ جس کا مرکز $'O'$ ہے۔ A پر مماس ST ، ہے اور وتر AB ہے۔ وتر AB کے مخالف جانب دائرہ پر دو نقاط P اور Q ہیں

ثابت کرنا ہے : (i) $\angle BAT = \angle BPA$ (ii) $\angle BAS = \angle AQB$.

تصنیف : دائرہ کا قطر AC کھینچو۔ B اور C کو ملاؤ۔

ثبوت

بیانات	وجوہات
$\angle ABC = 90^\circ$	نصف دائرہ میں بننے والا زاویہ 90° ہے
$\angle CAB + \angle BCA = 90^\circ$ (1)	ΔABC قائمۃ الزاویہ کے حادہ زاویوں کا مجموعہ
$\angle CAT = 90^\circ$	نقطۂ تماس پر قطر، مماس پر عمودی ہوتا ہے
$\Longrightarrow \angle CAB + \angle BAT = 90^\circ$ (2)	
$\angle CAB + \angle BCA = \angle CAB + \angle BAT$	(1) اور (2) سے
$\Longrightarrow \angle BCA = \angle BAT$ (3)	

(4) ایک ہی قطعہ AB پر بننے والے زاویے $\angle BCA = \angle BPA$

(5) (3) اور (4) سے $\angle BAT = \angle BPA$. لہٰذا (i).

مدوّر چار ضلعی کے مقابل کے زاویے یہاں پر $\angle BPA + \angle AQB = 180^\circ$

(6) (5) سے $\Longrightarrow \angle BAT + \angle AQB = 180^\circ$

(7) خطی جوڑی زاویے نیز $\angle BAT + \angle BAS = 180^\circ$

(6) اور (7) سے $\angle BAT + \angle AQB = \angle BAT + \angle BAS$

$\angle BAS = \angle AQB$. لہٰذا (ii).

اس طرح مماس-وتر کا مسئلہ ثابت ہوا۔

مسئلہ 6.9 مماس-وتر کے مسئلہ کا معکوس (Converse of Tangent-Chord Theorem)

ایک دائرہ میں ایک وتر کے ایک حد نقطہ پر ایک خطِ مستقیم کھینچا جائے اس طرح کہ اس سے بننے والا زاویہ اگر متبادلہ قطعہ میں بننے والے زاویے کے مساوی ہو تو وہ خطِ مستقیم دائرہ پر مماس ہوتا ہے۔

تعریف

اگر قطاعِ خط AB پر ایک نقطہ P ہو تو $PA \times PB$ ایک مستطیل کے رقبہ کو ظاہر کرتا ہے جس کے اضلاع PA اور PB ہیں۔

یہ حاصلِ ضرب مستطیل کا رقبہ کہلاتا ہے جو قطاعِ خط AB کے حصّے PA اور PB سے بنتا ہے۔

مسئلہ 6.10

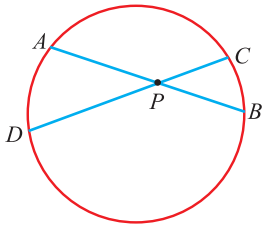


Fig. 6.31

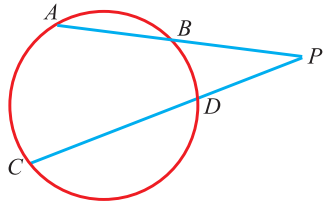


Fig.6.32

اگر کسی دائرے کے دو وتر اندرونی جانب یا بیرونی جانب قطع کریں تو ایک وتر کے حصّوں سے بننے والے مستطیل کا رقبہ دوسرے وتر کے حصّوں سے بننے والے مستطیل کے رقبہ کے مساوی ہوتا ہے۔

نقشہ 6.31. میں دو وتر AB اور CD دائرہ کے اندر P پر قطع کرتے ہیں جس کا مرکز 'O' ہے۔ $PA \times PB = PC \times PD$ ہے۔

نقشہ 6.32. میں دو وتر AB اور CD دائرہ کے باہر P پر قطع کرتے ہیں جس کا مرکز 'O' ہے۔ $PA \times PB = PC \times PD$ ہے

مثال 6.12

فرض کرو نقطہ A پر PQ دائرہ کا مماس ہے اور AB ایک وتر ہے۔ فرض کرو دائرہ پر ایک نقطہ 'C' اس طرح ہے کہ $\angle BAC = 54^\circ$ اور $\angle BAQ = 62^\circ$ ہے۔ $\angle ABC$ معلوم کرو

حل : چونکہ A پر PQ ایک مماس ہےاور AB ایک وتر ہے۔اس لئے

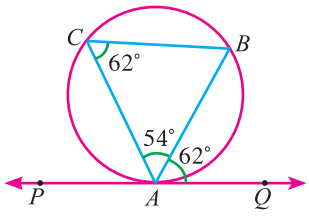


Fig. 6.33

$\angle BAQ = \angle ACB = 62^\circ.$ (مماس۔وتر کا مسئلہ)

Also, $\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ.$

(ایک مثلث کے تمام زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے)

نیز $\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ACB)$

$= 180^\circ - (54^\circ + 62^\circ) = 64^\circ.$

مثال 6.13 ذیل کے ہر خاکہ میں x کی قیمت معلوم کرو

(i)

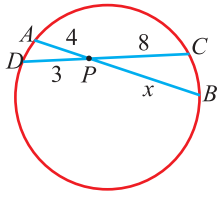


Fig 6.34

(ii)

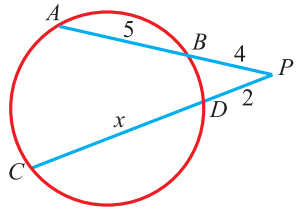


Fig. 6.35

(i) ہمیں معلوم ہے کہ $PA \,.\, PB = PC \,.\, PD$

$$PB = \frac{PCPD}{PA}$$

$$x = \frac{8 \times 3}{4} = 6.$$

(ii) ہمیں معلوم ہے کہ $PC \,.\, PD = PA.\, PB$

$(2+x)\,2 = 9 \times 4$

لہٰذا $x + 2 = 18$, $x = 16.$

مثال 6.14 شکل میں مرکز 'O' کے دائرہ پر بیرونی نقطہ P سے دو مماس PA اور PB کھینچے گئے ہیں۔اگر E پر دائرہ کا مماس CD ہو اور $AP = 15$ cm ہوتو ΔPCD کا احاطہ معلوم کرو

حل : ہم جانتے ہیں کہ بیرونی نقطہ سے دائرے پر مماسوں کا طول مساوی ہوتا ہے

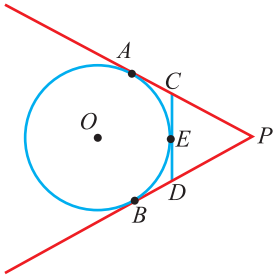


Fig. 6.36

$\therefore CA = CE, \quad DB = DE$ and $PA = PB.$

$\therefore$ ΔPCD کا احاطہ $= PC + CD + DP$

$= PC + CE + ED + DP$

$= PC + CA + DB + DP$

$= PA + PB = 2\,PA \qquad (PB = PA)$

لہٰذا مثلث PCD کا احاطہ $= 2 \times 15 = 30$ cm.

مثال 6.15

$ABCD$ ایک چار ضلعی اس طرح سے ہے کہ اس کے تمام اضلاع ایک دائرہ کو مَس کرتے ہیں۔اگر $AB = 6$ cm ، $BC = 6.5$ cm اور $CD = 7$ cm ہوتو AD کا طول معلوم کرو۔

حل : فرض کرو کہ نقاط P ، Q ، R اور S دائرہ پر چار ضلعی کو مَس کرتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ بیرونی نقطہ سے دائرہ پر مماسوں کی لمبائیاں مساوی ہوتی ہیں۔

چنانچہ ہمارے پاس ہے $AP = AS$, $BP = BQ$, $CR = CQ$, $DR = DS$.

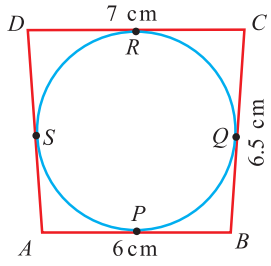


Fig. 6.37

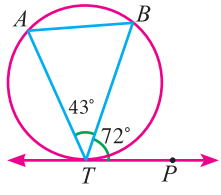
لہٰذا $AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS$

$\Longrightarrow AB + CD = AD + BC.$

$\Longrightarrow AD = AB + CD - BC = 6 + 7 - 6.5 = 6.5$

لہٰذا $AD = 6.5$ cm.

مشق 6.3



1. خاکہ میں TP دائرہ کا مماس ہے۔ A اور B دائرہ پر دو نقاط ہیں۔
اگر $\angle BTP = 72°$ اور $\angle ATB = 43°$ ہو تو $\angle ABT$ معلوم کرو۔
2. AB اور CD دائرہ کے دو وتر ہیں جو ایک دوسرے کو اندرونی جانب P پر قطع کرتے ہیں۔
(i) اگر $CP = 4$ cm ، $AP = 8$ cm ، $PB = 2$ cm ہو تو PD معلوم کرو۔
(ii) اگر $AP = 12$ cm ، $AB = 15$ cm ، $CP = PD$ ہو تو CD معلوم کرو۔
3. AB اور CD دائرہ کے دو وتر ہیں جو ایک دوسرے کو بیرونی جانب P پر قطع کرتے ہیں۔
(i) اگر $AB = 4$ cm ، $BP = 5$ cm ، $PD = 3$ cm ہو تو CD معلوم کرو۔
(ii) اگر $BP = 3$ cm ، $CP = 6$ cm ، $CD = 2$ cm ہو تو AB معلوم کرو۔
4. ایک دائرہ ΔABC کے ضلع BC کو P پر مَس کرتا ہے اور دراز کردہ AB اور AC کو بالترتیب Q اور R پر مَس کرتا ہے
ثابت کرو کہ : $AQ = AR = ½$ (ΔABC کا احاطہ)
5. اگر ایک متوازی الاضلاع کے تمام اضلاع ایک دائرہ کو مَس کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ وہ متوازی الاضلاع ایک معین ہوگا۔
6. ایک تالاب میں ایک کنول پانی کی سطح سے 20 cm اوپر ہے اور اس ڈنڈی کا کچھ حصّہ پانی کی سطح کے نیچے ہے۔ ہوا کے جھونکے سے ڈنڈی جھولنے لگتی ہے اور اس کے اصلی مقام سے 40 cm دور پانی کو چھوتی ہے۔ شروع میں ڈنڈی کا کتنا حصّہ پانی کی سطح سے نیچے تھا؟
7. ایک مستطیل $ABCD$ کے اندرونی جانب نقطہ 'O' کو ہر ایک راس A، B ، C اور D سے ملایا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ
$OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$

مشق 6.4

صحیح جواب کا انتخاب کرو :

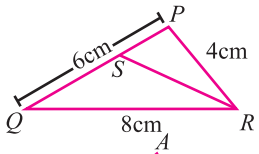
1. ایک خطِ مستقیم ΔABC کے اضلاع AB اور AC کو بالترتیب D اور E پر قطع کرتی ہے اور وہ BC کے متوازی ہے تب $\frac{AE}{AC} =$

(A) $\frac{AD}{DB}$ (B) $\frac{AD}{AB}$ (C) $\frac{DE}{BC}$ (D) $\frac{AD}{EC}$

.2 ΔABC میں $DE \parallel BC$ جو AB کو D اور E پر ملتا ہے اگر $AD = 3$ cm ، $DB = 2$ cm اور $AE = 2.7$ cm ہوتو AC مساوی ہے

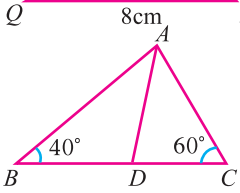
(A) 6.5 cm (B) 4.5 cm (C) 3.5 cm (D) 5.5 cm

.3 ΔPQR میں $\angle R$ کا ناصف RS ہے۔اگر $PQ = 6$ cm ، $QR = 8$ cm ، $RP = 4$ cm ہوتو PS مساوی ہے



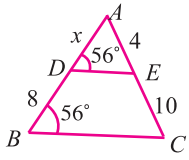
(A) 2 cm (B) 4 cm (C) 3 cm (D) 6 cm

.4 شکل میں اگر $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ ، $\angle B = 40^\circ$ اور $\angle C = 60^\circ$ ہوتو $\angle BAD =$



(A) 30° (B) 50° (C) 80° (D) 40°

.5 شکل میں x کی قیمت مساوی ہے

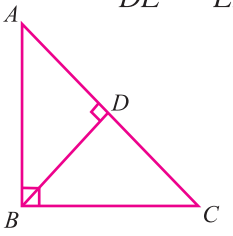


(A) $4 \cdot 2$ (B) $3 \cdot 2$ (C) $0 \cdot 8$ (D) $0 \cdot 4$

.6 مثلث ABC اور DEF میں $\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ ہوتو

(A) $\frac{AB}{DE} = \frac{CA}{EF}$ (B) $\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{FD}$ (C) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ (D) $\frac{CA}{FD} = \frac{AB}{EF}$

.7 دیئے ہوئے نقشہ کی مدد سے غلط عبارت کی نشاندہی کرو



(A) $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (B) $\Delta ABD \sim \Delta ABC$

(C) $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (D) $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

.8 اگر 12 m لمبی عمودی لکڑی کا سایہ زمین پر 8 m پڑتا ہے۔اسی وقت ایک مینار کے سایہ کی لمبائی 40 m ہوتو مینار کی اونچائی

(A) 40 m (B) 50 m (C) 75 m (D) 60 m

.9 دو متشابہ مثلثوں کے اضلاع کی نسبت 2 : 3 ہوتو ان کے رقبوں کی نسبت

(A) 9:4 (B) 4:9 (C) 2:3 (D) 3:2

.10 مثلث ABC اور DEF متشابہ ہیں۔اگر ان کے رقبے بالترتیب $100\ cm^2$ اور $49\ cm^2$ ہوتو اور $BC = 8.2$ cm ہوتو ، $EF =$

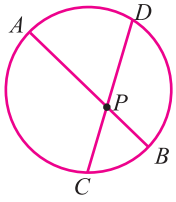
(A) 5.47 cm (B) 5.74 cm (C) 6.47 cm (D) 6.74 cm

.11 دو متشابہ مثلثوں کے احاطے 24 cm اور 18 cm ہیں۔اگر پہلے مثلث کا ایک ضلع 8 cm ہوتو دوسرے مثلث کے نظیری ضلع کی لمبائی

(A) 4 cm (B) 3 cm (C) 9 cm (D) 6 cm

.12 ایک دائرہ کے دو وتر AB اور CD ہیں، جن کو دراز کرنے پر نقطہ P پر اس طرح ملتے ہیں کہ
$AB = 5$ cm ، $AP = 8$ cm اور $CD = 4$ cm ہو تو، PD =

(A) 12 cm (B) 5cm (C) 6 cm (D) 4 cm

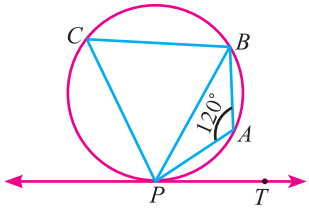


.13 متصلہ شکل میں وتر AB اور CD نقطہ P پر قطع کرتے ہیں اگر $AB = 16$ cm ،
$PD = 8$ cm ، $PC = 6$ cm اور $AP > PB$ ہو تو $AP =$

(A) 8 cm (B) 4 cm (C) 12 cm (D) 6 cm

.14 ایک دائرہ کے مرکز O سے ایک نقطہ P ، 26 سمر دور ہے۔ P سے دائرے پر مماس PT کی لمبائی 10 سمر ہے تو OT مساوی ہے

(A) 36 cm (B) 20 cm (C) 18 cm (D) 24 cm

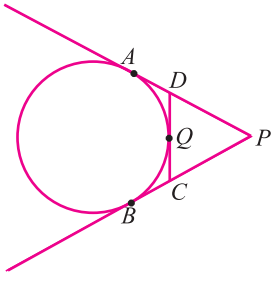


.15 نقشہ میں اگر $\angle PAB = 120°$ ہو تو ، $\angle BPT =$

(A) 120° (B) 30° (C) 40° (D) 60°.

.16 اگر بیرونی نقطہ P سے مرکز 'O' رکھنے والے دائرہ پر مماس PA اور PB
ایک دوسرے سے زاویہ مائل $40°$ ہو تو $\angle POA =$

(A) 70° (B) 80° (C) 50° (D) 60°.



.17 نقشہ میں بیرونی نقطہ P سے PA اور PB دائرے پر مماس ہیں۔
نیز Q پر CD ایک مماس ہے۔ اگر $PA = 8$ cm
اور $CQ = 3$ cm ہو تو PC مساوی ہے

A) 11 cm (B) 5 cm (C) 24 cm (D) 38 cm

.18 ΔABC قائمۃ الزاویہ ہے جہاں $\angle B = 90°$ اور $BD \perp AC$, اگر $BD = 8$ cm ، $AD = 4$ cm ہو تو $CD =$

(A) 24 cm (B) 16 cm (C) 32 cm (D) 8 cm

.19 دو متشابہ مثلثوں کے رقبے $16\ cm^2$ اور $36\ cm^2$ ہیں۔ اگر پہلے مثلث کا ارتفاع 3 cm ہو تو دوسرے مثلث کا نظیری ارتفاع

(A) 6.5 cm (B) 6 cm (C) 4 cm (D) 4.5 cm

.20 دو مثلث ΔABC اور ΔDEF کے احاطے بالترتیب 36 cm اور 24 cm ہیں۔ اگر $DE = 10$ cm ہو تو AB

(A) 12 cm (B) 20 cm (C) 15 cm (D) 18 cm

7

علمِ مثلث

(TRIGONOMETRY)

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry – J.F. Herbart

- تمہید
- تماثِلات
- بُلندیاں اور فاصلے

7.1 تمہید :

علمِ مثلث کو سب سے پہلے قوس اور وتروں کے درمیانی تعلق کے اظہار کے لئے استعمال کیا جاتا تھا۔ پندرھویں صدی کے بعد علمِ مثلث کو استعمال کر کے مثلث کے اندر کے زاویوں اور ضلعوں کی پیمائش کے لئے استعمال کیا گیا۔ علم مثلث کی تخلیق کا سہرا دوسری صدی ق.م. کے یونان کے ریاضی دان ہپارکس کے سر جاتا ہے۔ علم مثلث کے معنی مثلث کی پیمائش کے ہیں۔ بارتھولوماس پِٹس کس نے اسے علم مثلث کا نام دیا (1561-1613) ۔

نویں جماعت میں علمِ مثلث کی نسبتوں، اور ان کے آپسی تعلق اور علم مثلث کی جدول کو استعمال کرتے ہوئے ان کی پیمائش کس طرح کی جاتی ہے، اس کے بارے میں معلومات حاصل کی تھیں۔

اس باب میں ہم علم مثلث کی تماثلات، علم مثلث کی نسبتوں کو استعمال کرتے ہوئے پہاڑوں، عمارتوں کی بلندی اور فاصلوں کو حقیقی معنوں میں پیمائش کئے بغیر پیمائش کرنا سیکھیں گے۔

ہپّارکس
(190 - 120 B. C)
یونان

انہوں نے علم مثلث، علم مثلث کی جدولوں اور کروی علم مثلث کے کئی مسئلوں کو فروغ دیا۔ ان کے شمسی اور قمری مسئلوں سے انہوں نے سب سے پہلے سورج گرہن کی پیشین گوئی کے قابل اعتبار طریقہ کو بتلایا۔

انہوں نے کئی فلکیاتی آلے ایجاد کئے جن کے ذریعہ کئی زمانے تک فلکی اجسام کا برہنہ آنکھوں سے مشاہدہ کیا جاتا تھا۔

7.2 علمِ مثلث کے تماثلات (Trigonometric Identities)

ہمیں معلوم ہے کہ مساوات اسی وقت تماثل کہلائے گی جب اس مساوات کے تمام متغیرات اس مساوات کی شرط پوری کرتے ہوں۔ مثال کے طور پر مساوات $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ایک حقیقی تماثل ہے کیوں کہ اس میں a اور b کی تمام قیمتیں حقیقی ہیں۔

اسی طرح ایک مساوات جس میں مثلث کے زاویوں کی حقیقی نسبتیں ہوں تو اُسے علم مثلث کے تماثل کہیں گے۔ مثال کے طور پر

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 - (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 4\sin\theta\cos\theta$$

ایک علم مثلث کی تماثل ہے جس میں θ کی تمام قیمتیں حقیقی ہوں گی۔

مساوات $(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 1$ علم مثلث کی تماثل نہیں رکھتی کیونکہ جب $\theta = 0°$ ہوتو یہ درست نہیں ہے۔اور
اگر $\theta = 45°$ ہوتو $(\sin 45° + \cos 45°)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \neq 1$

اس حصّے میں علم مثلث کے تماثلات اور مساوات واضح ہوں گے اور متغیر کی قیمتیں معنی خیز سمجھے جائیں گے۔

ہم تین ضروری متماثلوں کو لیں، جو فیثا غورثی تماثلات کہلائیں گے، اور ان کو بعض دیگر تماثلوں کو حاصل کرنے کے لئے استعمال کریں گے۔

ایک مثلث قائمۃ الزاویہ ABC میں، ہمیں حاصل ہوگا۔

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad (1)$$

(1) کی ہر ایک رقم کو AC^2 سے تقسیم کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

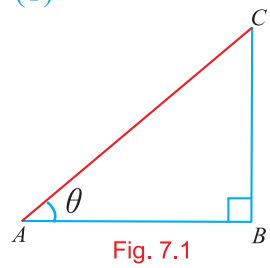


Fig. 7.1

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} \qquad (AC \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$$

یعنی $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

فرض کریں کہ $\angle A = \theta$ ہوتو $0° < \theta < 90°$ کی تمام قیمتوں کے لئے

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad .....(2)$$

$\cos^2 0° + \sin^2 0° = 1$ اور $\cos^2 90° + \sin^2 90° = 1$ مساوی ہیں،اس لئے مساوات (2) صحیح ہے۔

θ کی تمام قیمتوں کے لئے اس طرح کہ $0° \leq \theta \leq 90°$

مساوات (1) کو AB^2 سے تقسیم کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \qquad (\because) AB \neq 0$$

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \implies 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta. \qquad (3)$$

$\tan\theta$ اور $\sec\theta$ میں $\theta=90°$ غیر واضح ہے، θ کی تمام قیمتوں کے لئے تماثل (3) درست ہے اس طرح کہ $0° < \theta < 90°$

مساوات (1) کو BC^2 سے تقسیم کرنے پر ہمیں

$$\leq \quad \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \qquad (\because)\ BC \neq 0$$

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \implies \cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta. \qquad (4)$$

$\cot\theta$ اور $\operatorname{cosec}\theta$ میں $\theta = 0°$ غیر واضح ہیں، تماثل (4)، θ کی تمام قیمتوں کے لئے اس طرح کہ $0° \leq \theta \leq 90°$ درست ہے۔

(2) سے (4) تک کی تماثلات نیچے دی ہوئی ہیں۔

	تماثل	مساوی شکلیں
(i)	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ (or) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
(ii)	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ (or) $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
(iii)	$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$	$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ (or) $\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$

برائے ذہن نشینی

ہم نے یہ ثابت کیا ہے کہ درج بالا تماثلات θ کے ایک زاویہ حادہ کے لئے ہیں۔اور یہ تماثلات علم مثلث کے تمام معنی خیز θ کے زاویوں کے لئے درست ہیں۔اس باب میں ہم صرف زاویہ حادّہ کے بارے میں بحث کریں گے۔

عام طور پر علم مثلث کے افعال کے ذریعے علم مثلث کی تماثلات کو حل کرنے کا کوئی عام طریقہ نہیں ہے۔

(i) تماثلات کو اچھی طرح سمجھ کر ہمیں کونسا حل حاصل کرنا ہے،اس کے مطابق مناسب عمل کرنا چاہئے۔

(ii) سب سے پہلے پیچیدہ حصے کو مختصر کرنے کی کوشش کرنا چاہئے کیونکہ ایسا کرنا آسان ہے یا مختصر طریقہ کو پھیلانا چاہئے۔

(iii) اگر دونوں طرف پیچیدہ حصے ہوں تو ہر ایک کو آزادانہ طور پر ان تماثلات کو الگ الگ مختصر کرنا چاہئے۔

(iv) عبارتوں کو جمع کرنا ہو تو کسروں کو الجبریائی طریقہ سے جمع کریں۔

(v) اگر ضرورت پڑے تو sine اور cosine کی معادلوں کو استعمال کر کے انہیں مختصر کرنا چاہئے۔

(vi) اگر تماثلات میں رقمیں $\tan^2\theta$ ، $\cot^2\theta$ ، $\text{cosec}^2\theta$ ، $\sec^2\theta$ ہو تو اس کو ان کی دیگر معادلوں کو استعمال کر کے آسانی سے حل کر سکتے ہیں۔

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ اور $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta.$

مثال 7.1

ثابت کرو کہ متماثل $\dfrac{\sin\theta}{\text{cosec}\,\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1$

حل :

یہاں پر

$$\frac{\sin\theta}{\text{cosec}\,\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin\theta}{\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)} + \frac{\cos\theta}{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

مثال 7.2

ثابت کرو کہ متماثل $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$

Solution

حل : فرض کریں کہ

Consider $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)} \times \frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}}$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1^2-\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \qquad (1-\cos^2\theta = \sin^2\theta)$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta\ .$$

مثال 7.3

ثابت کرو کہ متماثل $[\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) - \sin(90^\circ-\theta)][\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta][\tan\theta + \cot\theta] = 1$

حل : یہاں پر

$$[\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) - \sin(90^\circ-\theta)][\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta][\tan\theta + \cot\theta]$$

$$= (\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) \qquad \because \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) = \sec\theta,\ \because \sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right) = 1$$

مثال 7.4

ثابت کرو کہ $\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

حل : ہم اس طرح فرض کریں کہ

$$\frac{\tan\theta + \sec\theta \quad 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta \quad 1} \qquad (\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \qquad (a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)[1 - (\sec\theta - \tan\theta)]}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)(\tan\theta - \sec\theta + 1)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \tan\theta + \sec\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

مثال 7.5

ثابت کرو کہ تماثل $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\tan\theta+\cot\theta.$

حل : یہاں پر

$$\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan\theta}{1-\frac{1}{\tan\theta}}+\frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}=\frac{\tan\theta}{\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta}}+\frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1}{\tan\theta(1-\tan\theta)}=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1}{(-\tan\theta)(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}-\frac{1}{(\tan\theta)(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{1}{(\tan\theta-1)}\left(\tan^2\theta-\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{(\tan\theta-1)}\ \frac{(\tan^3\theta-1)}{\tan\theta}$$

$$=\frac{(\tan\theta-1)(\tan^2\theta+\tan\theta+1^2)}{(\tan\theta-1)\tan\theta}\qquad(\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2))$$

$$=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta+1}{\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta}+\frac{\tan\theta}{\tan\theta}+\frac{1}{\tan\theta}=\tan\theta+1+\cot\theta$$

$$=1+\tan\theta+\cot\theta.$$

مثال 7.6

ثابت کرو کہ تماثل

$$(\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2=7+\tan^2\theta+\cot^2\theta\ .$$

حل : فرض کریں کہ

$$(\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2$$

$$=\sin^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta+2\sin\theta\operatorname{cosec}\theta+\cos^2\theta+\sec^2\theta+2\cos\theta\sec\theta$$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta+\sec^2\theta+2\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}+2\cos\theta\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=1+(1+\cot^2\theta)+(1+\tan^2\theta)+2+2$$

$$=7+\tan^2\theta+\cot^2\theta.$$

مثال 7.7

ثابت کیجئے کہ تماثل $(\sin^6\theta + \cos^6\theta) = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

حل : یہاں پر

$$\sin^6\theta + \cos^6\theta$$

$$= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3$$

$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$(a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b))$$

$$= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta. \qquad (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

مثال 7.8

ثابت کیجئے کہ تماثل $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta.$

حل : یہاں پر

$$\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$$

$$= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)}\right) \qquad (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$= (\tan\theta)\left(\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\right) = \tan\theta.$$

مثال 7.9

ثابت کرو کہ تماثل $\dfrac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta.$

حل : ہم فرض کرتے ہیں کہ

$$\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$$

$$= \left(\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\right) \times \left(\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta}\right)$$

$$= \frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{\sec^2\theta - \tan^2\theta}$$

$$= \frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{1} \qquad (\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$$

$$= (\sec\theta - \tan\theta)^2 = \sec^2\theta + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta$$

$$= (1 + \tan^2\theta) + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta \qquad (\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta)$$

$$= 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta.$$

مثال 7.10

ثابت کرو کہ $\dfrac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$.

حل : پہلے ہم اس طرح فرض کریں

$$\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta}$$

$$= \frac{1+\dfrac{1}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta}} = \frac{(\cos\theta+1)}{\cos\theta}(\cos\theta)$$

$$= 1+\cos\theta$$

$$= (1+\cos\theta)\times\frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}.$$

مثال 7.11

ثابت کرو کہ متماثل $(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta) = \dfrac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$

حل : یہاں پر

$$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta\cos\theta \qquad (1)$$

اس کے بعد اس طرح فرض کریں

$$\frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)}$$

$$= \sin\theta\cos\theta \qquad (2)$$

غور کریں

$$\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta}{1}$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$$

(1) اور (2) سے ہمیں یہ حاصل ہوا کہ

$$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta) = \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}.$$

مثال 7.12

اگر $\tan\theta + \sin\theta = m$ $\tan\theta - \sin\theta = n$ اور $m \neq n$; ہوتو ثابت کیجئے کہ $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$

حل : دیا گیا ہے کہ

$$m = \tan\theta + \sin\theta \quad \text{اور} \quad n = \tan\theta - \sin\theta.$$

یہاں پر

$$m^2 - n^2 = (\tan\theta + \sin\theta)^2 - (\tan\theta - \sin\theta)^2$$

$$= \tan^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\tan\theta - (\tan^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\tan\theta)$$

$$= 4\sin\theta\tan\theta \qquad (1)$$

اسی طرح

$$4\sqrt{mn} = 4\sqrt{(\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta)} =$$

$$4\sqrt{\tan^2\theta - \sin^2\theta} = 4\sqrt{\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta\right)}$$

$$= 4\sqrt{\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)}$$

$$= 4\sqrt{\sin^2\theta(\sec^2\theta - 1)} = 4\sqrt{\sin^2\theta\tan^2\theta} \quad (\because \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta)$$

$$= 4\sin\theta\tan\theta. \qquad (2)$$

(1)اور (2) سے ہمیں یہ حاصل ہوا کہ

$$m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}.$$

مثال : 7.13

اگر $\tan^2\alpha = \cos^2\beta - \sin^2\beta$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\beta$

حل : دیا گیا ہے کہ

$$\cos^2\beta - \sin^2\beta = \tan^2\alpha$$

$$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{1} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

کامپوننڈ واور ڈِوائڈ نڈ واصول

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ہوتو $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

کامپوننڈ واور ڈِوائڈ نڈ واصول استعمال کرتے ہوئے

$$\frac{(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta)}{(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - (\cos^2\beta + \sin^2\beta)} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\Longrightarrow \frac{2\cos^2\beta}{-2\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\Longrightarrow -\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

$$\Longrightarrow \tan^2\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

جو ثبوت کو مکمل کرتا ہے۔

نوٹ : اس حساب کو کامپوننڈ واور ڈِوائڈ نڈ واصول استعمال کئے بغیر بھی حل کر سکتے ہیں۔

مشق 7.1

1) ثابت کیجئے کہ درج ذیل مساوات تماثلات ہیں یا نہیں ؟

(i) $\cos^2\theta + \sec^2\theta = 2+\sin\theta$

(ii) $\cot^2\theta + \cos\theta = \sin^2\theta$

2) تماثلات کو ثابت کیجئے۔

(i) $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$

(ii) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

(iii) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

(iv) $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = 1 + \sin\theta$

(v) $\sqrt{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$

(vi) $\dfrac{1+\cos\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)} = \cot\theta$

(vii) $\sec\theta\,(1-\sin\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$

(viii) $\dfrac{\sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta} = 1 - \cos\theta$

3) نیچے دئے گئے تماثلات کو ثابت کیجئے۔

(i) $\dfrac{\sin(90^\circ - \theta)}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\cos(90^\circ - \theta)} = 2\sec\theta$

(ii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta$

(iii) $\dfrac{\sin(90^0 - \theta)}{1-\tan\theta} + \dfrac{\cos(90^0 - \theta)}{1-\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$

(iv) $\dfrac{\tan(90^0 - \theta)}{\operatorname{cosec}\theta + 1} + \dfrac{\operatorname{cosec}\theta + 1}{\cot\theta} = 2\sec\theta.$

(v) $\dfrac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta.$

(vi) $(1+\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)(1+\tan\theta + \sec\theta) = 2$

(vii) $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$

(viii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{\sin\theta\sin(90^0 - \theta)}{2\sin^2(90^0 - \theta) - 1}$

(ix) $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}.$

(x) $\dfrac{\cot^2\theta + \sec^2\theta}{\tan^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta} = (\sin\theta\cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta).$

4. اگر $x = a\sec\theta + b\tan\theta$ اور $y = a\tan\theta + b\sec\theta$ ہو تو ثابت کیجئے کہ $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$

5. اگر $\tan\theta = n\tan\alpha$ اور $\sin\theta = m\sin\alpha$ ہو تو ثابت کیجئے کہ $\cos^2\theta = \dfrac{m^2-1}{n^2-1}$, $n \neq \pm 1$

6. اگر $\sin\theta, \cos\theta$ اور $\tan\theta$ ایک G.P ہیں تو ثابت کیجئے کہ $\cot^6\theta - \cot^2\theta = 1$

7.3 بلندیاں اور فاصلے : (Heights and Distances)

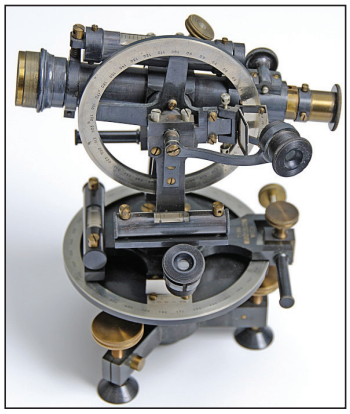


Fig. 7.2

یہ بہت ہی تعجب والی بات ہوگی کہ سیاروں کا درمیانی فاصلہ، ایورسٹ کی پہاڑی کی بلندی، دوری پر موجود دو اجسام کا درمیانی فاصلہ جیسے سورج اور زمین کے درمیانی فاصلہ کی پیائش محسوب کی جاتی ہے، کیا ان کی پیائش کے لئے پیائشی فیتہ استعمال کیا جاتا ہے؟

بیشک! یہ سب ناممکن ہے۔ مگر دلچسپ بات یہ ہے کہ علمِ مثلث کے نسبتوں کی مدد سے ان فاصلوں کی پیائش کی جاسکتی ہے۔ علمِ مثلث کی نسبتوں کو استعمال کرتے ہوئے کسی جزیرے کا محل وقوع کہ کس طول البلد اور عرض البلد میں واقع ہے، اس کی نشان دہی کر سکتے ہیں۔

زاویہ پیما دوربین (theodolite) (خاکہ 7.2) ایک آلہ ہے جو طویل فاصلہ میں موجود اجسام اور مشاہدہ کرنے والے کی آنکھ کے درمیان کے زاویہ کی پیائش کرتا ہے۔ زاویہ پیما دوربین (theodolite) آلہ میں دو درجہ دار پہیے ہوتے ہیں جو ایک دوسرے کے عمود میں ہیں۔ اس میں ایک دوربین بھی ہے جس کی مدد سے متوازی اور عمودی زاویوں کی پیائش کی جاسکتی ہے۔ یہ دو چاک اُفقی اور عمودی زاویوں کی پیائش کے لئے استعمال ہوتے ہیں۔ فاصلہ ناپے جانے والے مقام پر دوربین کو مرکوز کر کے اس میں موجود ایک دوربینی اسکیل کی مدد سے اس جسم کی پیائش کی جاسکتی ہے۔

مثال کے طور پر ہمارے اسکول کے جھنڈے کے مستول کی بلندی کو اس کی پیائش کئے بغیر معلوم کر سکتے ہیں۔

فرض کریں کہ ایک طالب علم میدان میں ایک نقطہ A پر کھڑا ہوا ہے جو مستول سے 10 میٹر کی دوری پر ہے۔ یہ طالب علم مستول کے سرے کو دیکھتے وقت $60°$ زاویہ حاصل کرتا ہے۔ فرض کریں کہ زمین سے اس کی آنکھ کا فاصلہ 1.2 میٹر ہے۔ (خاکہ 7.3 کو دیکھیں)

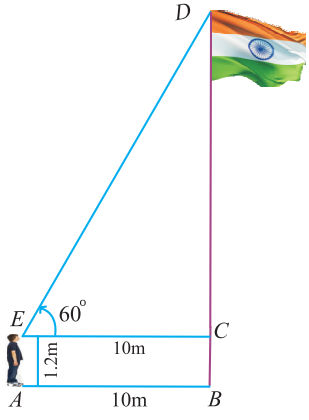


Fig. 7.3

مثلثِ قائمۃ الزاویہ DEC میں

$$\Delta DEC,\ \angle DEC = 60°.$$

یہاں پر

$$\tan 60° = \frac{CD}{EC}$$

لہٰذا

$$\Longrightarrow \quad CD = EC \tan 60°$$

$$CD = 10\sqrt{3} = 10 \times 1.732$$

$$= 17.32 \text{ m}$$

چنانچہ جھنڈے کے مستول کی بلندی

$$BD = BC + CD$$

$$= 1.2 + 17.32 = 18.52 \text{ m}$$

اس طرح ہم علمِ مثلث کی نسبتوں کی مدد سے پیائش کئے بغیر ہی ہمارے اسکول کے جھنڈے کے مستول کی بلندی معلوم کر سکتے ہیں۔

چنانچہ ایک مثلث قائمۃ الزاویہ میں ایک ضلع اور ایک زاویہ معلوم ہو تو مثلث کی نسبتوں کو استعمال کرتے ہوئے ہم مثلث کے دیگر اضلاع معلوم کر سکتے ہیں۔ بلندی اور فاصلہ کی پیائش کے طور پیش آنے والے بعض اصطلاحات کی تعریف ہم کریں گے۔

خطِ بصارت (Line of Sight)

اگر ہم کسی شئے کا مشاہدہ کرتے ہیں تو خط بصارت ہماری آنکھ سے ایک اُفقی خطِ مستقیم ہوگی۔ یہاں پر ہم شئے کو کسی نقطہ پر فرض کرتے ہیں کیونکہ فاصلہ بہت زیادہ ہوتا ہے۔

زاویہ نشیب اور زاویہ فراز (Angle of depression and angle of elevation)

اگر شئے افقی خط سے نیچے ہو تو ہمیں اپنے سر کو جُھکا کر شئے کو دیکھنا پڑتا ہے۔ اس عمل میں ہماری آنکھیں نیچے کی طرف ایک زاویہ بناتے ہوئے حرکت کرتی ہے۔ اس زاویہ کو **زاویہ نشیب** (angle of depression) کہتے ہیں۔ یعنی جب شئے خط بصارت سے نیچے ہو، اس سے بننے والا زاویہ زاویہ نشیب کہلاتا ہے۔ (خاکہ 7.4 ملاحظہ کیجئے)۔

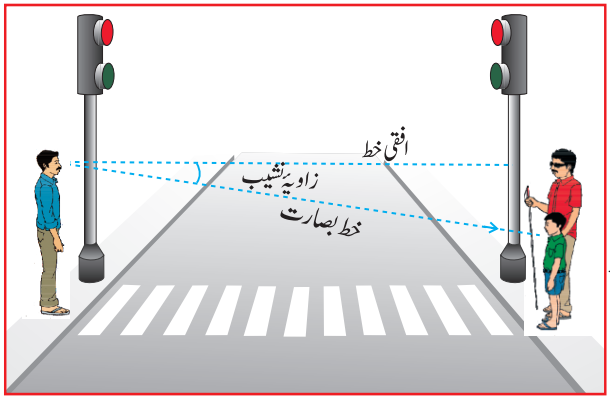


Fig. 7.4

اگر شئے افقی سطح سے اوپر ہو تو ہمیں اپنا سر اُٹھا کر شئے کو دیکھنا پڑتا ہے۔ اس عمل میں ہماری آنکھیں ایک زاویہ (اوپر) کی طرف حرکت کرتی ہیں۔ اس زاویہ کو **زاویہ فراز** (angle of elevation) کہتے ہیں۔ یعنی جب شئے خط بصارت سے اوپر ہو، اس کو دیکھنے پر بننے والا زاویہ، زاویہ نشیب کہلاتا ہے۔ (خاکہ 7.5 ملاحظہ کیجئے)۔

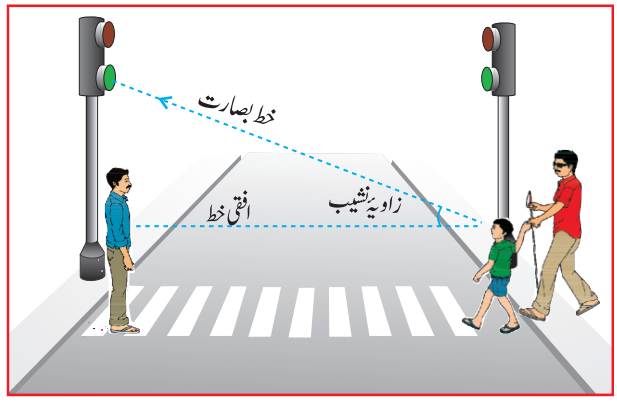


Fig. 7.5

غور کریں

(i) اگر مشاہدہ کرنے والے کی بلندی نہیں دی گئی ہو تو اُسے ایک نقطہ فرض کر لیا جاتا ہے۔

(ii) مشاہدہ کرنے والے سے شئے کا زاویہ فراز، اُس شئے سے مشاہدہ کرنے والے کے زاویہ نشیب کے مساوی ہوتا ہے۔

بلندی اور فاصلوں کے سوالوں کو حل کرنے کے لئے درج ذیل اصول کارآمد ثابت ہوں گے۔

بلندی اور فاصلے سے متعلق حسابات کو حل کرنے میں درج ذیل طریقے اپنانا بہتر ثابت ہوگا۔

(i) دئے گئے سوالات کا بہ غور مطالبہ کریں اور اس کے مطابق خام خاکہ کھینچئے۔

(ii) نقشے کی نشاندہی کیجئے اور ناپ لکھئے۔

(iii) نہ معلوم مقداروں کو نشاندہی اس طرح کریں اگر بلندی کو ناپنا ہو تو h سے ظاہر کریں اور فاصلے کو ناپنا ہو تو x سے ظاہر کریں۔

(iv) علمِ مثلث کی نسبتیں کو پہچانئے، جو مسائل کو حل کرنے میں مددگار ہیں۔

(v) دئے گئے ناپوں کو درج کریں اور نامعلوم ناپ کو حل کریں۔

مندرجۂ ذیل کاروائی یہ سیکھنے میں مددگار ہے کہ شئے کی بلندی کو کس طرح سے ناپ سکتے ہیں؟ ورنہ مشکلات پیش آئیں گی۔

کارروائی

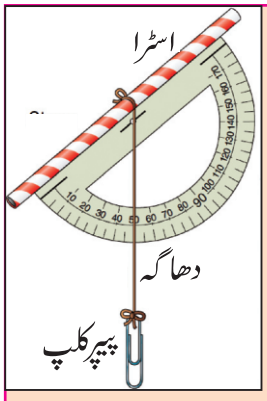


Fig. 7.6

- شربت پینے کا ایک اسٹرا لیں۔اس کے درمیانی حصّے میں ایک دھاگہ باندھیں۔دھاگہ کے دوسری جانب ایک پیپر کلپ باندھیں۔
- چاندے کے قاعدے سے اسٹرا کو اس طرح چپکائیں کہ اس کا درمیانی حصّہ چاندے کے مرکز سے انطباق کرے۔اس بات کو دھیان میں رکھیں کہ دھاگہ آزادانہ طور پر لٹک کر ایک عمودی خط یا شاقولی خط (Plumb line) بنائے۔
- باہر کسی ایسی شئے کو تلاش کریں جو راست طور پر ناپنے پر بہت اونچی ہو، جیسے باسکٹ بال کا کڑا، جھنڈے کا مستول یا مدرسے کی عمارت۔
- اسٹرا کے ذریعے شئے کی اونچائی کو دیکھیں۔دھاگہ اور چاندے کے زاویہ ملنے کے مقام پر بنے زاویہ کو معلوم کریں۔ $90°$ درجے سے کم کی پیمائش کیا ہوا زاویہ، زاویہ فراز تصوّر کرلیں۔ اسے θ قرار دیں۔
- تمہاری آنکھ کی سطح سے لے کر میدان تک کا فاصلہ ناپیں اور تمہارے قدموں سے لے کر شئے کی سطح تک کا فاصلہ ناپیں۔اس ناپ کو y فرض کریں
- تمہاری پیمائشوں کا خاکہ بنائیں۔
- شئے کی بلندی (h) معلوم کرنے کے لئے مندرجۂ ذیل مساوات کا استعمال کریں۔یہاں 'x' تمہاری آنکھ کی سطح سے میدان کی سطح تک کے فاصلہ کو ظاہر کرتا ہے۔ $h = x + y \tan \theta$

مثال 7.14 ایک پتنگ اُڑ رہا ہے جس کے دھاگے کی لمبائی 200 میٹر ہے۔ اگر دھاگہ زمین کے سطح سے زاویہ $30°$ بناتا ہے تو زمین سے پتنگ کتنی بلندی پر ہے معلوم کیجئے۔(یہاں پر فرض کریں کہ دھاگہ خط مستقیم میں ہے)۔

حل : فرض کرو کہ h پتنگ کی بلندی کو ظاہر کرتا ہے۔

نقشے میں AC پتنگ کی ڈوری کو ظاہر کرتا ہے۔

دیا گیا ہے۔ $AC = 200$ میٹر اور $\angle CAB = 30°$

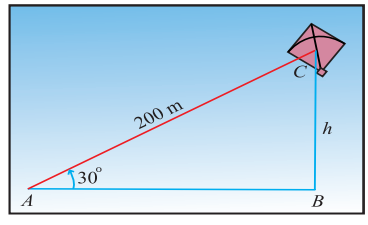


Fig. 7.7

ΔABC میں

$$\sin 30° = \frac{h}{200}$$

$$\Longrightarrow \quad h = 200 \sin 30°$$

$$\therefore \quad h = 200 \times \frac{1}{2} = 100 \text{ m}$$

لہٰذا زمین سے پتنگ کی بلندی 100 میٹر ہے۔

مثال 7.15

ایک سیڑھی دیوار پر جھکائی گئی ہے جو زمین سے $60°$ زاویہ بناتی ہے۔سیڑھی دیوار سے 3.5 میٹر دوری پر ہے۔سیڑھی کی لمبائی معلوم کیجئے۔

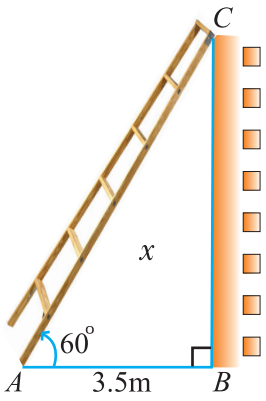


Fig 7.8

حل : فرض کرو AC سیڑھی کو اور B زمین کی سطح کو ظاہر کرتا ہے۔

فرض کرو سیڑھی کی بلندی $AC = x$ میٹر ہے۔

$AB = 3.5$ میٹر اور $\angle CAB = 60°$

ΔCAB میں

$$\cos 60° = \frac{AB}{AC}$$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AB}{\cos 60°}$$

$$\therefore \quad x = 2 \times 3.5 = 7 \text{ m}$$

لہٰذا سیڑھی کی اونچائی 7 میٹر ہے۔

مثال 7.16

سورج کا زاویہ فراز معلوم کیجئے (زمین کی سطح سے زاویہ فراز) جب کسی مستول کے سایہ کی لمبائی 30 میٹر اور مستول کی بلندی $10\sqrt{3}$ میٹر ہے۔

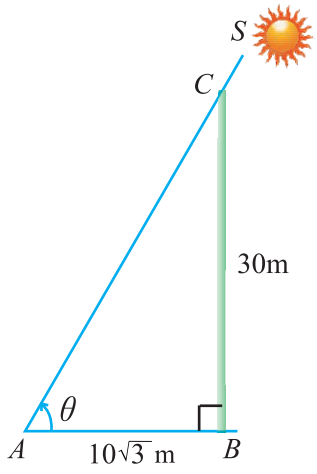


Fig. 7.9

حل : فرض کرو کہ S سورج کا مقام اور BC مستول کی بلندی ہے۔

AB مستول کا سایہ ہے اور سورج کا زاویہ فراز θ ہے۔

$AB = 10\sqrt{3}$ میٹر ؛ $BC = 30$ میٹر

$AB = 10\sqrt{3}$ m and

$BC = 30$ m

ΔCAB میں

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow \quad \tan\theta = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \theta = 60°$$

زمین کی سطح سے سورج کا زاویہ فراز 60° ہے۔

مثال 7.17

ایک مشاہدہ کرنے والا مینار کی بلندی کا زاویہ فراز 30° پاتا ہے۔ مشاہدہ کرنے والا مینار سے $30\sqrt{3}$ میٹر کے فاصلے پر ہے اور اس کی آنکھ کی سطح زمین سے 1.5 میٹر پر ہے۔ تو بتایئے مینار کی بلندی کیا ہوگی؟

حل : فرض کرو کہ BD مینار کی بلندی ہے اور AE زمین کی سطح سے مشاہدہ کرنے والے کے آنکھ کی سطح ہے۔

EC اس طرح بنایئے کہ $AB = EC$ ہو۔

دیا گیا ہے $AB = EC = 30\sqrt{3}$ اور $AE = BC = 1.5\text{m}$

مثلث قائمۃ الزاویہ DEC میں

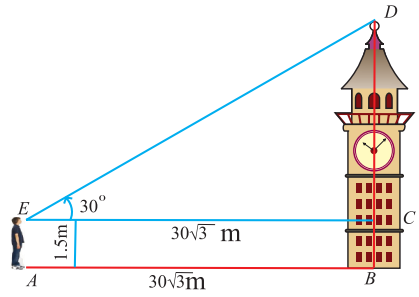
$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{EC}$$

$$\Longrightarrow \quad CD = EC \tan 30^\circ = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad CD = 30 \text{ m}$$

$$BD = BC + CD$$

لہٰذا مینار کی بلندی $= 1.5 + 30 = 31.5$ m.



7.10

مثال 7.18 ایک اونچا درخت تیز ہوا کی وجہ سے گر جاتا ہے۔ درخت کا اوپری حصہ زمین کو چھوتا ہے اور زاویہ 30° بناتا ہے۔ اگر درخت کا اوپری حصہ زمین سے 30 میٹر کی دوری پر ہو تو بتائیے کہ درخت کی بلندی کیا ہوگی؟

حل : فرض کرو کہ C درخت کے ٹوٹنے کا مقام ہے اور نقطہ A سطح زمین پر چھونے والے درخت کا اوپری حصہ ہے۔ اور B نقطہ درخت کا نچلا حصہ ہے۔

$\angle CAB = 30^\circ$ اور $AB = 30$ میٹر

مثلث قائمۃ الزاویہ CAB میں

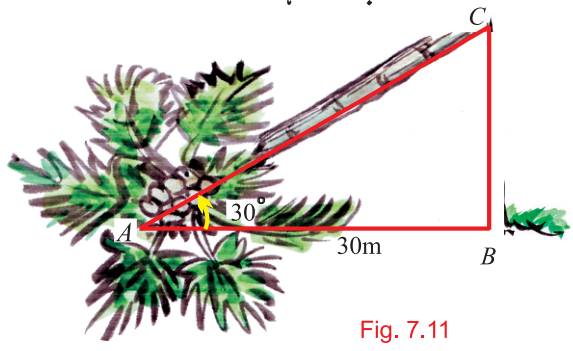


Fig. 7.11

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad BC = AB \tan 30^\circ$$

$$\therefore \quad BC = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ m} \qquad (1)$$

یہاں پر $\cos 30^\circ = \dfrac{AB}{AC}$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AB}{\cos 30^\circ}$$

لہٰذا $AC = \dfrac{30 \times 2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \times 2 = 20\sqrt{3}$ m. (2)

درخت کی بلندی $= BC + AC = 10\sqrt{3} + 20\sqrt{3}$

$= 30\sqrt{3}$m .

مثال 7.19

ایک جیٹ جنگی ہوائی جہاز، زمین سے 3000 میٹر کی بلندی پر اُڑ رہا ہے۔ اُسی لمحے ایک اور جیٹ جنگی ہوائی جہاز اُڑان بھرتا ہے۔ اُن کا زاویۂ فراز مسا ایک ہی مشاہدہ کے نقطے سے بالترتیب 60° اور 45° زاویہ بناتا ہے۔ اُس وقت پر پہلے جہاز سے دوسرے جہاز کا درمیانی فاصلہ کتنا ہوگا ؟ $(\sqrt{3} = 1.732)$

حل : فرض کرو O مشاہدہ کا نقطہ ہے۔

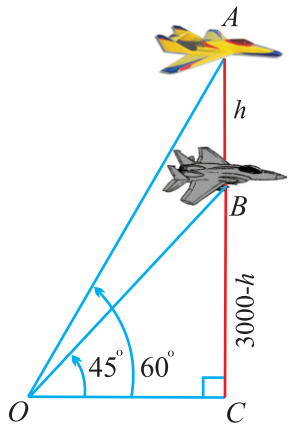


Fig. 7.12

A اور B دو جنگی جہاز ہیں اور C جو کسی وقت پر ٹھیک ایک دوسرے کے اوپر ہیں۔

فرض کریں کہ C زمین میں ایک مقام ہے اس طرح سے کہ $AC = 3000$ m

$\angle AOC = 60°$ اور $\angle BOC = 45°$

فرض کریں کہ اُس وقت پر دونوں جہازوں کا درمیانی فاصلہ h ہے۔

قائمۃ الزاویہ Δ BOC میں $\tan 45° = \frac{BC}{OC}$

$$\Longrightarrow \quad OC = BC \qquad (\because \tan 45° = 1)$$

لہٰذا $OC = 3000 - h$ (1)

قائمۃ الزاویہ Δ AOC میں $\tan 60° = \frac{AC}{OC}$

$$\Longrightarrow \quad OC = \frac{AC}{\tan 60°} = \frac{3000}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3000}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1000\sqrt{3} \quad (2)$$

$3000 - h = 1000\sqrt{3}$ (1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Longrightarrow \quad h = 3000 - 1000 \times 1.732 = 1268\,\text{m}$$

دونوں جہازوں کا درمیانی فاصلہ 1268 میٹر ہے۔

مثال 7.20

ایک پہاڑ سے سطح زمین میں موجود ایک مینار کے قدم کا زاویہ فراز 60° ہے۔ اور پہاڑ کے قدم سے مینار کے اوپری حصے کا زاویہ فراز 30° ہے۔ اگر مینار کی اونچائی 50 میٹر ہے۔ تو پہاڑ کی بلندی معلوم کیجئے۔

حل :

فرض کرو مینار کی اونچائی AD اور پہاڑ کی بلندی BC ہے۔ تو $\angle ABD = 30$, $\angle CAB = 60°$ اور میٹر $AD = 50$ ہے

فرض کریں کہ $BC = h$ میٹر ہے۔

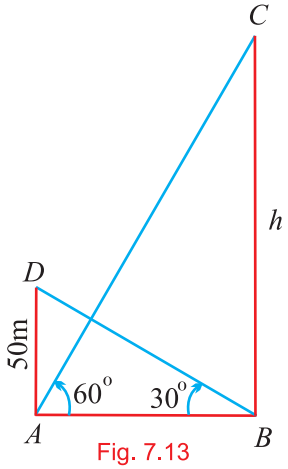


Fig. 7.13

قائمۃ الزاویہ Δ DAB میں

$$\tan 30° = \frac{AD}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{AD}{\tan 30°}$$

$$\therefore \quad AB = 50\sqrt{3}\,\text{m} \qquad (1)$$

قائمۃ الزاویہ Δ CAB میں $\tan 60° = \frac{BC}{AB}$

مساوات (1) استعمال کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\Longrightarrow \quad BC = AB \tan 60°$$

$$h = BC = (50\sqrt{3})\sqrt{3} = 150\,\text{m}$$

لہٰذا پہاڑی اونچائی 150 میٹر ہے۔

مثال 7.21

ایک عمودی دیوار اور ایک مینار سطح زمین پر ہیں۔ مینار کے اوپری حصہ سے دیوار کی اوپری سطح اور دیوار کے نچلے حصہ کا زاویہ نشیب بالترتیب $45°$ اور $60°$ ہے۔ اگر مینار کی بلندی 90 میٹر ہو تو دیوار کی بلندی معلوم کیجیے۔ $(\sqrt{3} = 1.732)$

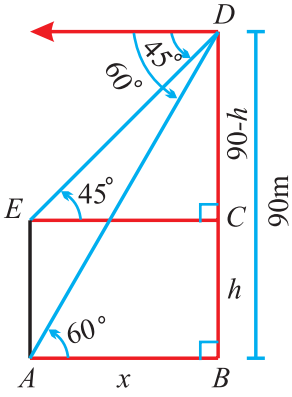


Fig. 7.14

حل : فرض کرو AE دیوار کو ظاہر کرتا ہے اور BD مینار کو۔

EC کو AB سے متوازی اس طرح بنائیں کہ AB = EC ، لہٰذا AE = BC

فرض کریں کہ $AB = x$ میٹر ہے اور $AE = h$ میٹر ہے۔

دیا گیا ہے کہ $BD = 90$ میٹر اور $\angle DEC = 45°$ ، $\angle DAB = 60°$

اب $AE = BC = h$ میٹر

$$CD = BD - BC = 90 - h.$$

قائمۃ الزاویہ ΔDAB میں $\tan 60° = \frac{BD}{AB} = \frac{90}{x}$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{90}{\sqrt{3}} = 30\sqrt{3} \qquad (1)$$

قائمۃ الزاویہ ΔDEC میں $\tan 45° = \frac{DC}{EC} = \frac{90-h}{x}$

لہٰذا $x = 90 - h$ (2)

$90 - h = 30\sqrt{3}$ (1) اور (2) سے ہمیں اس طرح حاصل ہوتا ہے۔

لہٰذا دیوار کی بلندی $h = 90 - 30\sqrt{3} = 38.04$ m.

مثال 7.22

ایک لڑکی ساحل سمندر کے قریب ایک چبوترے پر بنے ایک روشنی کے مینار پر (light house) میں کھڑی ہوئی ہے۔ وہ روشنی کے مینار سے مشرقی جانب دو کشتیوں کو دیکھتی ہے جن کے زاویہ نشیب بالترتیب $30°$ اور $60°$ ہیں۔ دو کشتیوں کا درمیانی فاصلہ 300 میٹر ہے۔ سمندر کے سطح سے روشنی کے مینار کی بلندی معلوم کیجیے۔ (کشتی اور روشنی کے مینار کی بنیاد دونوں خطِ مستقیم میں ہیں)

حل : فرض کرو A اور D روشنی کے مینار کے سطح زمین کو ظاہر کرتا ہے۔ اور B, C کشتی کو ظاہر کرتا ہے۔ اور روشنی کے مینار سے سطح سمندر کا فاصلہ (بلندی) h میٹر ہے۔

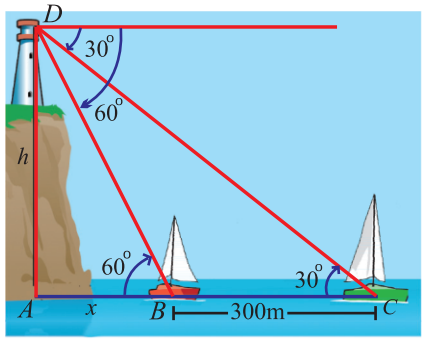


Fig. 7.15

فرض کریں کہ $AB = x$ میٹر ہے۔

دیا گیا ہے $\angle ABD = 60°$ اور $\angle ACD = 30°$

مثلث قائمۃ الزاویہ ABD میں

$$\tan 60° = \frac{AD}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{AD}{\tan 60°}$$

لہٰذا $x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ (1)

مثلث قائمۃ الزاویہ ACD میں ہمارے پاس ہے

$$\tan 30^\circ = \frac{AD}{AC}$$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AD}{\tan 30^\circ} \Longrightarrow x + 300 = \frac{h}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

لہٰذا $x + 300 = h\sqrt{3}$ (2)

(1) $\frac{h}{\sqrt{3}} + 300 = h\sqrt{3}$ اور (2) استعمال کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\Longrightarrow \quad h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}} = 300$$

$\therefore \quad 2h = 300\sqrt{3}$. لہٰذا $h = 150\sqrt{3}$.

لہٰذا سمندر کی سطح سے روشنی کے مینار کی بلندی $150\sqrt{3}$ میٹر ہے۔

مثال 7.23

ایک لڑکا ایک غبارے کو زمین کی سطح سے 88.2 میٹر کی اونچائی پر دیکھتا ہے۔ زمین سے اس کی آنکھ کا فاصلہ 1.2 میٹر ہے۔ غبارے کا زاویۂ فراز اس کی آنکھ سے 60° ہے۔ تھوڑے وقفے کے بعد اسی نقطۂ مشاہدہ پر غبارے کا زاویہ فراز کم ہو کر 30° ہو جاتا ہے۔ اس وقفہ کے دوران غبارے کا طے کردہ فاصلہ معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے A نقطہ مشاہدہ ہے۔ E اور D غبارے کا مقام ہے جب اس کے زاویہ فراز 60° اور 30° ہیں۔

B اور C متوازی خط کے نقاط ہیں اس طرح سے کہ BE = CD

فرض کرو A', B' اور C' میدان پر نقاط ہیں اس طرح سے کہ A'A = B'B = C'C = 1.2 m

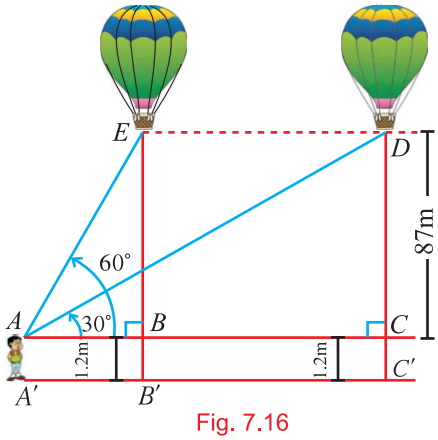


Fig. 7.16

دیا گیا ہے $\angle DAC = 30^\circ$, $\angle EAB = 60^\circ$

C'D = 88.2m اور BB' = CC' = 1.2m

اور BE = CD = 87m

اسی طرح Δ EAB میں ہمارے پاس ہے

$$\tan 60^\circ = \frac{BE}{AB}$$

لہٰذا $AB = \frac{87}{\tan 60^\circ} = \frac{87}{\sqrt{3}} = 29\sqrt{3}$

$\tan 30^\circ = \frac{DC}{AC}$ پھر مثلثِ قائمۃ الزاویہ میں Δ DAC میں ہمارے پاس ہے

لہٰذا $AC = \frac{87}{\tan 30^\circ} = 87\sqrt{3}$.

غبارے کا طے کردہ فاصلہ ہے۔

$$ED = BC = AC - AB$$

$$= 87\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = 58\sqrt{3} \text{ m}.$$

مثال 7.24

ایک عمارت کی چھت پر ایک جھنڈے کا مستول لگا ہوا ہے۔ میدان سے جھنڈے کے مستول کے اوپری حصے اور مستول کے قدم کا زاویہ فراز $60°$ اور $45°$ ہے۔ اگر جھنڈے کے مستول کی بلندی 10 میٹر ہے تو عمارت کی بلندی معلوم کیجئے۔ $(\sqrt{3} = 1.732)$

حل :

فرض کیجئے A نقطہ مشاہدہ ہے اور B عمارت کا قدم ہے۔ BC عمارت کی بلندی ظاہر کرتا ہے اور CD جھنڈے کے مستول کی بلندی ظاہر کرتا ہے۔

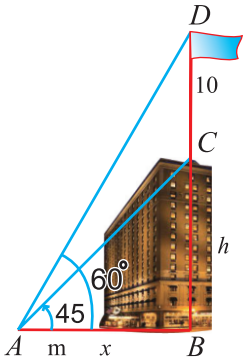


Fig. 7.17

$\angle DAB = 60°$ اور $\angle CAB = 45°$ دیا گیا ہے کہ اور $CD = 10$ m ہے۔

فرض کریں کہ $BC = h$ میٹر اور $AB = x$ میٹر

قائمۃ الزاویہ Δ CAB میں

$$\tan 45° = \frac{BC}{AB}.$$

$$AB = BC \quad \text{i.e.,} \quad x = h \qquad (1)$$

قائمۃ الزاویہ Δ DAB میں

$$\tan 60° = \frac{BD}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{h+10}{\tan 60°} \quad \Longrightarrow x = \frac{h+10}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$h = \frac{h+10}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{3}\,h - h = 10$$

$$\Longrightarrow \quad h = \left(\frac{10}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

$$= 5\,(2.732) = 13.66\,\text{m}$$

لہٰذا عمارت کی بلندی 13.66 میٹر ہے۔

مثال 7.25

ایک شخص آبی جہاز کے ڈیک پر پانی کی سطح سے 14 میٹر کی بلندی پر ہے۔ وہ ایک چٹان کو دیکھتا ہے جس کا زاویہ فراز چٹان کی بلندی پر $60°$ ہے اور زاویہ نشیب چٹان کے قدم پر $30°$ ہے۔ چٹان کی بلندی معلوم کیجئے۔

حل :

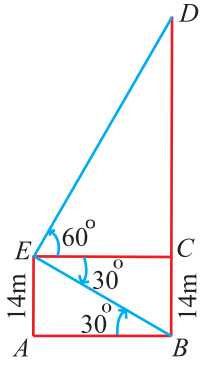


Fig. 7.18

فرض کیجئے BD چٹان کی بلندی ہے

A چٹان کا مقام ہے اور E نقطۂ مشاہدہ اس طرح ہے کہ $AE = 14$m ہے۔

AB کے متوازی EC کو بنائیے۔ اس طرح کہ $AB = EC$

دیا گیا ہے $\angle ABE = 30°$ اور $\angle DEC = 60°$ ہے۔

Δ ABE قائمۃ الزاویہ میں

$$\tan 30° = \frac{AE}{AB}$$

$\therefore \quad AB = \dfrac{AE}{\tan 30^\circ} \implies AB = 14\sqrt{3}$

لہٰذا $\quad EC = 14\sqrt{3} \qquad (\because AB = EC)$

مثلثِ قائمۃ الزاویہ میں Δ DEC $\quad \tan 60^\circ = \dfrac{CD}{EC}$

$\therefore$ CD = $EC \tan 60^\circ \implies CD = (14\sqrt{3})\sqrt{3} = 42$ m

لہٰذا چٹان کی بلندی $\quad BD = BC + CD = 14 + 42 = 56$ m.

مثال 7.26

زمین میں ایک مقام A سے ایک ہوائی جہاز کا زاویہ فراز 60° ہے۔ اُفقی اڑان کے 15 سکنڈ بعد زاویہ فراز 30° میں تبدیل ہوتا ہے۔ اگر ہوائی جہاز 200 میٹر فی سکنڈ کی رفتار سے اڑتا ہے تو ہوائی جہاز کی مستقل اونچائی معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے A نقطہ مشاہدہ ہے۔

E اور D ہوائی جہاز کا ابتدائی مقام کا اور 15 سکنڈ کے بعد کے بالترتیب مقامات ہیں۔

EB اور DC ہوائی جہاز جو اڑ رہا ہے اس کی مستقل بلندی کو ظاہر کرتا ہے

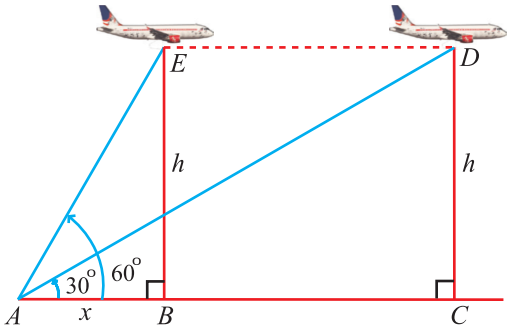


Fig. 7.19

دیا گیا ہے $\angle EAB = 60^\circ \;,\; \angle DAC = 30^\circ$

فرض کریں کہ میٹر BE = CD = h ہے۔

فرض کریں کہ میٹر AB = x ہے۔

15 سکنڈ میں طے کردہ فاصلہ

(طے کردہ فاصلہ = رفتار × وقت)

$ED = 200 \times 15 = 3000$ m

لہٰذا $\quad BC = 3000$ m..

مثلثِ قائمۃ الزاویہ Δ DAC میں

$\tan 30^\circ = \dfrac{CD}{AC}$

$\implies \quad CD = AC \tan 30^\circ$

Thus, $\quad h = (x + 3000)\dfrac{1}{\sqrt{3}} \qquad (1)$

مثلثِ قائمۃ الزاویہ Δ EAB میں $\quad \tan 60^\circ = \dfrac{BE}{AB}$

$\implies \quad BE = AB \tan 60^\circ \implies h = \sqrt{3}\, x \qquad (2)$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\quad \sqrt{3}\, x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x + 3000)$

$\implies \quad 3x = x + 3000 \qquad \implies x = 1500$ m.

لہٰذا (2) سے ہمیں معلوم ہوا کہ $\quad h = 1500\sqrt{3}$ m.

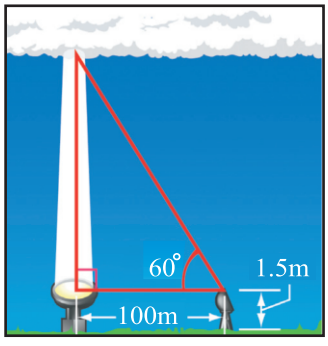
مستقل اونچائی جس پر ہوائی جہاز اڑ رہا ہے $1500\sqrt{3}$ میٹر ہے۔

مشق 7.2

1) ایک لاری کو اتارنے کے لئے ایک سطح مائل رکھا گیا جس کا زاویہ فراز $30°$ ہے۔ سطح مائل زمین کی سطح سے 0.9 میٹر بلند ہو تو سطح مائل کی لمبائی معلوم کیجئے۔

2) ایک لڑکی جس کی اونچائی 150 سمر ہے برقی کھمبے کے سامنے کھڑی ہوئی ہے اور زمین پر اس کا سایہ پڑ رہا ہے جس کی لمبائی $150\sqrt{3}$ سمر ہے۔ برقی کھمبے کے اوپری حصہ کا زاویہ فراز معلوم کیجئے۔

3) دو کیڑے A اور B ایک دوسرے کی آواز کو 2 میٹر کی حد تک سن سکتے ہیں۔ کیڑا A میدان میں دیوار سے ایک میٹر کی دوری پر ہے اور اس کے دوست B کو دیوار پر دیکھ رہا ہے جس کو ایک مکڑی کھانا چاہتی ہے۔ اگر B, A کو آگاہ کرنا چاہتا ہے اور اگر B کا زاویہ فراز A تک $30°$ ہے تو مکڑی اس کو غذا بنائے گی یا نہیں؟ (فرض کریں کہ A آگاہ کرنے پر B بھاگ جائے گا)۔



4) ابر کی چھت (سطح) معلوم کرنے کے لئے ایک مشاہدہ کرنے والا ایک رات اسپاٹ لائٹ سیدھے ابر کی طرف دکھاتا ہے۔ زاویہ پیما دوربین (theodolite) اسپاٹ لائٹ سے 100 میٹر کی دوری پر زمین کی سطح سے 1.5 میٹر کی بلندی پر رکھا گیا ہے۔ اس کی مدد سے ابر کا زاویہ فراز $60°$ معلوم ہوا۔ ابر کی چھت (سطح) کتنی اونچائی پر ہے معلوم کیجئے؟ (خاکہ پر غور کریں۔)

(**نوٹ** : ابر کی چھت ٹھوس ابر کی نچلی تہہ ہے۔ ہوائی اڈے میں حفاظت سے ہوائی جہاز کی اڑان اور زمین میں اترنے کے لئے ابر کی چھت کی اونچائی معلوم کرنا ضروری ہے۔ رات کے وقت ابر کی چھت کی اونچائی معلوم کرنے کے لئے اسپاٹ لائٹ کو سیدھے اوپر ابر کے نچلے حصّے پر مرکوز کیا جاتا ہے)

5) ایک رقاص (Pendulum) جس کی لمبائی 40 سمر ہے ایک مکمل اہتزاز کے دوران اپنے راس سے $60°$ زاویہ بناتا ہے۔ کرّے کے ابتدائی اور آخری مقام کا کم سے کم درمیانی فاصلہ کیا ہوگا ؟

6) دو درخت عمودی طور پر ایک دوسرے کی مخالف سمت میں ہیں۔ ہر درخت پر ایک ایک کوّا A اور B ہر ایک 15 میٹر اور 10 میٹر کی اونچائی پر بیٹھے ہوئے ہیں وہ دونوں زمین میں موجود ایک وڑے (Vadai) کو زاویہ نشیب $45°$ اور $60°$ سے دیکھتے ہیں۔ وہ دونوں وڑے کو حاصل کرنے کے لئے ایک ہی وقت میں اور ایک ہی رفتار میں اڑنا شروع کرتے ہیں تو کون اس میں کامیاب ہوگا ؟
(دو درختوں کی بنیاد (زمین کی سطح) اور وڑے خطِ مستقیم میں ہیں)۔

7) ایک لیمپ کا کھمبا دائری شکل کے پارک کے مرکز میں نصب کیا گیا ہے۔ فرض کیجئے P اور Q پارک کے حد کے دو مقامات ہیں۔ P سے مشاہدہ کرنے پر کھمبے کا اوپری حصہ کا زاویہ فراز $30°$ ہے۔ لیمپ کے کھمبے کا قدم PQ پر $90°$ کا زاویہ بناتا ہے اور PQ=30m ہو تو کھمبے کی اونچائی معلوم کیجئے۔

8) ایک ہیلی کاپٹر 700 میٹر کی بلندی پر اڑ رہا ہے۔ اس میں بیٹھا ایک شخص ندی کے دو مخالف کناروں پر دو اشیاء کو دیکھتا ہے جن کے زاویہ نشیب بالترتیب $30°$ اور $45°$ ہیں۔ ندی کی چوڑائی معلوم کیجئے۔ ($\sqrt{3} = 1.732$ لیں۔)

9) ایک مسطح پر کھڑا ہوا ایک شخص X ، اس سے 100 میٹر کے فاصلے پر اُڑتے ہوئے ایک پرندے کو دیکھتا ہے اور زاویہ فراز $30°$ پاتا ہے۔ دوسرا شخص Y ایک عمارت پر کھڑا ہوا ہے جس کی بلندی 20 میٹر ہے، اُسی پرندے کو $45°$ زاویہ فراز پر مشاہدہ کرتا ہے ۔
اگر X اور Y پرندے کے مخالف سمت میں ہیں تو Y سے پرندہ کا فاصلہ معلوم کیجئے۔

10) ایک طالب علم کلاس روم میں بیٹھے ہوئے تختۂ سیاہ پر بنائی گئی ایک تصویر کو دیکھتا ہے جو اس کی نظر کے اُفق میں 1.5 m کی اونچائی پر ہے۔اس تصویر کا زاویہ فراز $30°$ ہے۔وہ اس تصویر کو واضح نہیں دیکھ سکتا تو وہ ایک خط مستقیم پر حرکت کرتے ہوئے تختہ سیاہ کی طرف آتا ہے اور زاویہ فراز $45°$ پر تصویر کو واضح دیکھتا ہے۔ ہے طالب علم کا طے کردہ فاصلہ معلوم کیجئے۔

11) ایک لڑکا 30 میٹر بلند عمارت کے کچھ فاصلہ پر کھڑا ہوا ہے اور وہ ایک میدان میں کھڑے ہوکر 1.5 میٹر آنکھ کی سطح اونچائی سے عمارت کو دیکھتے وقت زاویہ فراز $30°$ ہے۔جیسے جیسے وہ عمارت کی طرف بڑھتا ہے،اس کا زاویہ فراز $60°$ تک بڑھتا ہے۔اس سے طے کردہ فاصلہ معلوم کیجئے۔

12) 200 قدم کی اونچائی والے لائٹ ہاؤس سے، لائٹ ہاؤس کی نگرانی کرنے والا ایک سامان لانے والی کشتی اور ریس کی کشتی کو ایک ہی خط بصارت میں دیکھتا ہے۔سامان لانے والی کشتی اور ریس کی کشتی کے زاویہ نشیب بالترتیب $45°$ اور $30°$ ہیں۔حفاظت کے لئے دونوں کشتیوں کو کم از کم 300 قدم کی دوری پر ہونا چاہئے اگر وہ دونوں کشتیاں 300 قدم کی دوری سے کم پر ہیں تو دیکھ بھال کرنے والے کو خطرے کی گھنٹی بجانا چاہئے۔ کیا نگرانی کرنے والے کو خطرے کی گھنٹی بجانی پڑے گی ؟

13) ایک لڑکا میدان میں کھڑے ہوئے ایک مستقل اونچائی پر ہوا کے ساتھ متوازی خط میں غبارہ کو حرکت کرتے ہوئے دیکھتا ہے۔لڑکے سے غبارے کا زاویہ فراز $60°$ ہے۔ 2 منٹ کے بعد اسی نقطہ مشاہدہ پر زاویہ فراز کم ہوکر $30°$ ہوجاتا ہے اگر ہوا کی رفتار $29\sqrt{3}$ میٹر فی منٹ ہو تو زمین کی سطح سے غبارے کی بلندی معلوم کیجئے۔

14) ایک سیدھی شاہراہ ایک مینار کے قدم تک بنائی گئی ہے۔ مینار کے اوپر کھڑا ہوا ایک شخص ا ایک وین کو $30°$ زاویہ نشیب سے دیکھتا ہے۔ وین مینار کی طرف ایک ہی رفتار سے بڑھ رہی ہے۔ 6 منٹ کے بعد وین کا زاویہ نشیب $60°$ ہوجاتا ہے۔ وین کو مینار تک پہنچنے کے لئے اور کتنے سکنڈ درکار ہوں گے؟

15) زمین کے مصنوعی سیّارے کا زاویہ فراز، زمین کے دو اسٹیشنوں سے، جو زمین کے ایک ہی طرف میں ہیں، $30°$ اور $60°$ معلوم کرتے ہیں۔زمین کے دو اسٹیشن اور سیارہ عمود میں ہیں اگر زمین کے اسٹیشنوں کا درمیانی فاصلہ 4000 کلومیٹر ہے تو سیارہ اور زمین کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔ ($\sqrt{3} = 1.732$ استعمال کیجئے)

16) 60 میٹر اونچے پہاڑ کی بلندی سے ایک مینار کے اوپری حصہ اور نچلے حصے کے زاویہ نشیب بالترتیب $30°$ اور $60°$ ہیں۔مینار کی بلندی معلوم کیجئے۔ ($\sqrt{3} = 1.732$ استعمال کیجئے)

17) 40 میٹر اونچے مینار کے اوپری حصہ اور نچلے حصہ (قدم) سے، ایک لائٹ ہاؤس کے اوپری حصہ کا زاویہ فراز بالترتیب $30°$ اور $60°$ پائے گئے ہیں۔لائٹ ہاؤس کی اونچائی معلوم کیجئے اور مینار کے قدم سے لائٹ ہاؤس کے اوپری حصہ کا فاصلہ بھی معلوم کیجئے۔

18) کسی جھیل کے قریب 45 میٹر بلند ایک مقام سے ایک ہیلی کاپٹر کو اُڑتے ہوئے دیکھا گیا جو زاویہ فراز $30°$ بناتا ہے۔ اسی وقت اس نقطہ سے اس کے عکس کو پانی میں دیکھنے پر زاویہ نشیب $60°$ بناتا ہے۔ جھیل کی سطح سے ہیلی کاپٹر کا فاصلہ معلوم کیجئے۔

مشق 7.3

Choose the correct answer صحیح جواب منتخب کیجئے۔

(1 $(1-\sin^2\theta)\sec^2\theta =$

(A) 0 (B) 1 (C) $\tan^2\theta$ (D) $\cos^2\theta$

.(2 $(1+\tan^2\theta)\sin^2\theta =$

(A) $\sin^2\theta$ (B) $\cos^2\theta$ (C) $\tan^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$

.(3 $(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta) =$

(A) $\sin^2\theta$ (B) 0 (C) 1 (D) $\tan^2\theta$

.(4 $\sin(90^\circ-\theta)\cos\theta+\cos(90^\circ-\theta)\sin\theta =$

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) –1

.(5 $1-\dfrac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta} =$

(A) $\cos\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\cot\theta$ (D) $\operatorname{cosec}\theta$

.(6 $\cos^4 x-\sin^4 x =$

(A) $2\sin^2 x-1$ (B) $2\cos^2 x-1$ (C) $1+2\sin^2 x$ (D) $1-2\cos^2 x$.

.(7 اگر $\tan\theta=\dfrac{a}{x}$ تو $\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ کی قیمت

(A) $\cos\theta$ (B) $\sin\theta$ (C) $\operatorname{cosec}\theta$ (D) $\sec\theta$

.(8 اگر $x=a\sec\theta$ ، $y=b\tan\theta$ تو $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ کی قیمت

(A) 1 (B) –1 (C) $\tan^2\theta$ (D) $\operatorname{cosec}^2\theta$

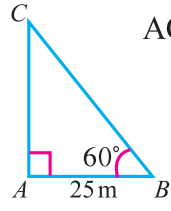
.(9 $\dfrac{\sec\theta}{\cot\theta+\tan\theta} =$

(A) $\cot\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\sin\theta$ (D) $-\cot\theta$

.(10 $\dfrac{\sin(90^\circ-\theta)\sin\theta}{\tan\theta}+\dfrac{\cos(90^\circ-\theta)\cos\theta}{\cot\theta} =$

(A) $\tan\theta$ (B) 1 (C) –1 (D) $\sin\theta$

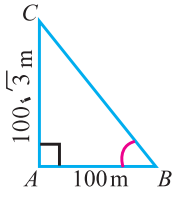
.(11 دیئے گئے نقشے میں AC =



(A) 25 m (B) $25\sqrt{3}$ m

(C) $\dfrac{25}{\sqrt{3}}$ m (D) $25\sqrt{2}$ m

.(12 دیئے گئے نقشے میں $\angle ABC =$



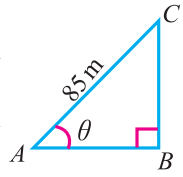
(A) 45° (B) 30°

(C) 60° (D) 50°

13). ایک شخص ایک مینار سے 28.5 m کی دوری پر ہے اس کی آنکھ کی سطح زمین سے 1.5 میٹر کے اوپر ہے۔ مینار کا زاویہ فراز اس کی آنکھ سے 45° ہے تو مینار کی اونچائی کتنی ہے۔

(A) 30 m (B) 27.5 m (C) 28.5 m (D) 27 m

14). دیے گئے نقشے میں اگر $\sin\theta = \frac{15}{17}$ تو BC =



(A) 85 m (B) 65 m

(C) 95 m (D) 75 m

15). $(1+\tan^2\theta)(1-\sin\theta)(1+\sin\theta) =$

(A) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ (B) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

(C) $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ (D) 0

16). $(1+\cot^2\theta)(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) =$

(A) $\tan^2\theta - \sec^2\theta$ (B) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

(C) $\sec^2\theta - \tan^2\theta$ (D) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$

17). $(\cos^2\theta - 1)(\cot^2\theta + 1) + 1 =$

(A) 1 (B) −1 (C) 2 (D) 0

18). $\dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta} =$

(A) $\cos^2\theta$ (B) $\tan^2\theta$ (C) $\sin^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$

19). $\sin^2\theta + \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} =$

(A) $\operatorname{cosec}^2\theta + \cot^2\theta$ (B) $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta$

(C) $\cot^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta$ (D) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

20). $9\tan^2\theta - 9\sec^2\theta =$

(A) 1 (B) 0 (C) 9 (D) −9

کیا تم جانتے ہو؟

پال ایرڈاس (26-03-1913 سے 20-09-1996) ہنگیری ملک کے ریاضی دان تھے۔ ریاضی تاریخ میں سب سے زیادہ تحقیقی مضامین (مقالہ) انہوں نے پیش کئے۔ ان کا موازنہ لیون ہارڈ یولر کے ساتھ کیا جا سکتا ہے۔ انہوں نے اپنے دور حیات میں 1,475 ریاضی مضامین لکھے، جب کہ یولر نے 800 تحقیقی مقالے پیش کئے۔ انہوں نے سماجی کارروائیوں اور روزمرہ کی کارروائیوں نے حساب کو عملی طور پر استعمال کیا۔ ان کے دورِ حیات میں ان کے 511 معاونین (شریک محنت) پائے گئے۔

8

مساحت

(MENSURATION)

Measure what is measurable, and make measurable what is not so
- Galileo Galilie

- تعارف
- سطحی رقبہ اور حجم
  - استوانہ
  - مخروط
  - کرّہ
- مخلوط شکلیں اور غیر متغیر حجمیں

8.1 تعارف

علمِ ہندسہ کا وہ حصّہ جو خطوط کی لمبائیوں، مسطح شکلوں کے احاطہ اور رقبہ، ٹھوس اجسام کے سطحی رقبوں اور حجموں کی پیمائشوں سے تعلق رکھتا ہے مساحت کہلاتا ہے۔ چیزوں کی پیمائش کا عمل بہت ضروری ہے کیونکہ یہ زندگی کے ہر مرحلے میں پیش آتا ہے۔

ابتدائی علمِ ہندسہ میں، سطح، کثیر سطح اور منحنی سطح کے رقبوں (مثال کے طور پر کرّہ) کے بارے میں مطالعہ کیا جاتا ہے۔

''سطحی رقبہ اور حجم'' کی نسبت کو نانو سائنس کی سب سے عظیم تصوّر تسلیم کیا جاتا ہے چونکہ وہ جسامت پر منحصر خواص کو سمجھنے کی بنیاد ہے۔ نانو سائنس (Nano science) میں پیمائش اور ٹکنالوجی امتیازی خصوصیات ہیں۔

اس باب میں ہم یہ سیکھیں گے کہ کس طرح ٹھوس شکلیں جیسے استوانہ، مخروط، کرّہ اور مخلوط شکلوں کا سطحی رقبہ اور حجم معلوم کیا جاتا ہے۔

8.2 سطحی رقبہ (Surface area)

سِسلی کے شہر سئی راکیس (Syracuse) کا باشندہ ارشمیدس یونانی تھا۔ اس نے ثابت کیا کہ ایک کرّہ کا حجم ایک دائرہ کے اندر بنائے جانے والے استوانہ (Circumscribed cylinder) کے حجم کا دو تہائی ہوتا ہے۔ اس کو وہ اپنا سب سے زیادہ اہم کارنامہ شمار کرتے ہیں۔ اس نے جامع طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے خطِ مکافی کے اندر موجود قوس کا رقبہ محسوب کیا۔

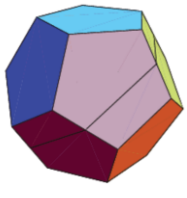


Fig. 8.1

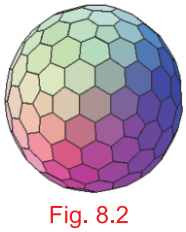


Fig. 8.2

ٹھوس شئے کا بیرونی (سطحی) ظاہر شدہ رقبہ ہی اس شئے کا سطحی رقبہ ہوگا۔ لہٰذا کسی سہ ابعادی شئے کی کل بیرونی سطح کا رقبہ ہی اس شئے کا سطحی رقبہ کہلاتا ہے۔ دی گئی متصل شکلیں بعض ٹھوس اشیاء کے رقبوں کو ظاہر کرتے ہیں۔

ارشمیدس

(287-212 ق.م.)

یونان

ارشمیدس کو قدیم زمانے کے عظیم ترین ریاضی دان کے طور پر یاد کیا جاتا ہے۔ انہوں نے علمِ ہندسہ میں مسطح شکلوں کے رقبے اور منحنی سطحوں کے رقبہ اور حجم کے تعلق سے اہم رول ادا کیا ہے۔

8.2.1 قائم مدوّر استوانہ

اگر ہم کاغذ کے یا کارڈ بورڈ کے مساوی دائرہ نما ٹکڑوں کو عمودی طور پر جوڑتے جائیں تو ہمیں ایک ٹھوس شئے حاصل ہوگی، جس کو ہم **قائم مدوّر استوانہ** کہتے ہیں، کیونکہ وہ قاعدہ کے عمودی طور پر رکھے گئے ہیں۔ غور کیجئے کہ وہ قاعدہ کے عمود میں ہیں اور قاعدہ دائرہ نما ہے۔ (شکل 8.3 پر غور کیجئے)

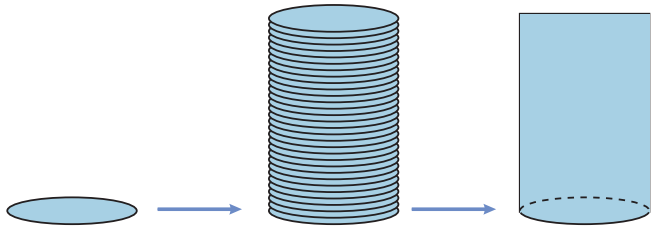


Fig. 8.3

تعریف

اگر کسی مستطیل کو ایک ضلع پر پورے طور پر ایک مرتبہ گھمایا جائے تو اس سے بننے والی ٹھوس شئے قائم مدوّر استوانہ کہلاتی ہے۔

کارروائی

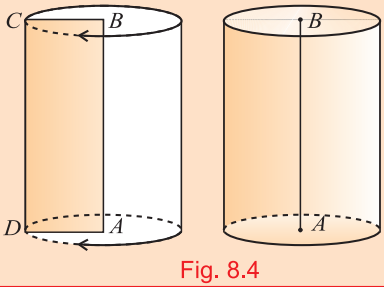


Fig. 8.4

فرض کرو ABCD ایک استوانہ ہے۔ فرض کرو وہ اس کے ایک ضلع AB پر گھومتا ہے اور پورا ایک چکر لگاتا ہے۔ اس چکّر سے ایک قائم مدوّر استوانہ وجود میں آتا ہے جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے۔ AB کو استوانہ کا محور کہا جاتا ہے۔ AB استوانہ کی لمبائی یا اونچائی ہے اور AD یا BC کو نصف قطر کہتے ہیں۔

غور کریں

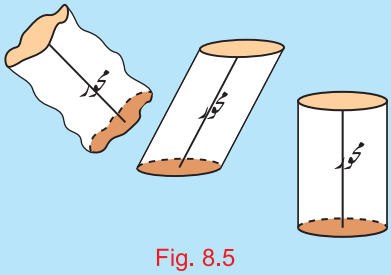


Fig. 8.5

(i) اگر قاعدہ دائرہ نما نہ ہو تو اس استوانہ کو **بیضوی ناقص استوانہ** (Oblique cylinder) کہتے ہیں۔

(ii) اگر قاعدہ دائرہ نما ہو مگر محور کے عمود میں نہ ہو تو اس کو صرف **مدوّر استوانہ** کہیں گے۔

(iii) اگر محور، دائرہ نما قاعدہ کے عمود میں ہو تو اس استوانہ کو **قائم مدوّر استوانہ** کہتے ہیں۔

(i) قائم مدوّر استوانہ کا منحنی سطحی رقبہ

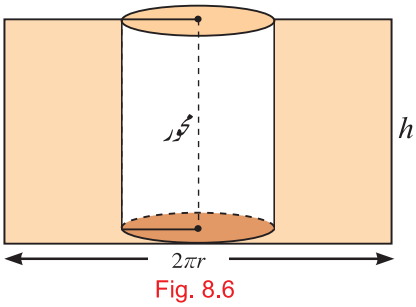


Fig. 8.6

متّصلہ شکل میں قائم مدوّر استوانہ کے اوپری اور نچلی حصّے مدوّر اور ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔ استوانہ کا عمودی سطح منحنی ہے۔ اس کو **منحنی سطح** یا **طرفی سطح** کہتے ہیں۔

استوانہ کا منحنی سطحی رقبہ CSA = قاعدہ کا محیط × اونچائی

$= 2\pi r \times h$

منحنی سطح کا رقبہ CSA $= 2\pi rh$ sq. units.