مشق 9.1

1) 4.2 سمر نصف قطر کا ایک دائرہ کھینچیے۔ اس پر ایک نقطہ لیجئے۔ مرکز کو استعمال کرتے ہوئے مماس بنائیے۔

2) 4.8 سمر نصف قطر کا ایک دائرہ بنائیے۔ اس پر ایک نقطہ لیجئے۔ مماس-وتر کا مسئلہ استعمال کرتے ہوئے مماس تصنیف کیجئے۔

3) 10 سمر قطر کا ایک دائرہ کھینچئے۔ دائرے کے مرکز سے 13 سمر کے فاصلے پر ایک نقطہ P لیجئے۔ اور دائرے کو دو مماسیں PA اور PB کھینچئے۔ مماسوں کا طول ناپئے۔

4) ایک نقطہ سے دو مماسیں بنائیے جو 6 سمر نصف قطر کے ایک دائرے کے مرکز سے 10 سمر کے فاصلے پر ہے۔ مماسوں کے طول کی پیمائش کیجئے۔

5) 3 سمر نصف قطر کے دائرے کے مرکز سے 9 سمر کے فاصلے پر ایک نقطہ لیجئے۔ اور اس نقطہ سے دائرے پر دو مماسیں بنائیے۔

9.3 مثلثوں کی تصنیف :

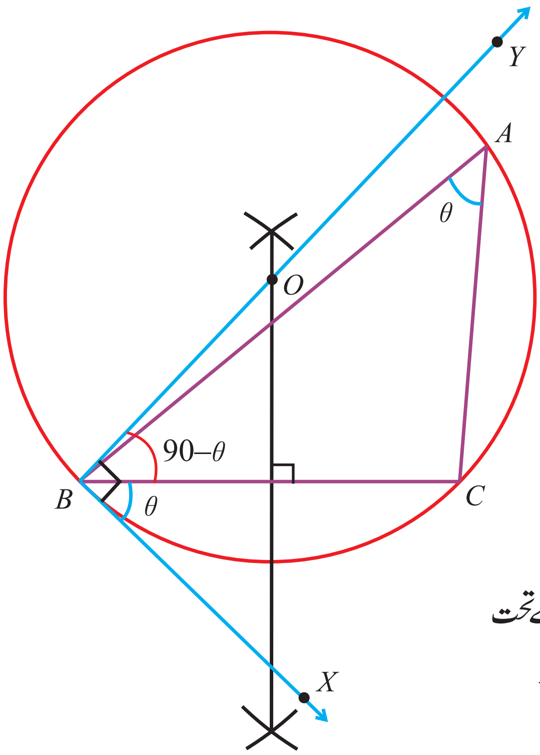
ہم نے ضلعے اور زاویہ کی مدد سے مثلثوں کی تصنیف کے بارے میں پہلے ہی پڑھا ہے۔ اس باب میں ہم مثلثوں کی تصنیف کے بارے میں پڑھیں گے جب اس کا

(i) قاعدہ، عمودی زاویہ اور راس سے بننے والا عمود دیا گیا ہو۔

(ii) قاعدہ، عمودی زاویہ، اور وسطانیہ دیا گیا ہو۔

سب سے پہلے ہم دئے گئے خط اور زاویہ سے دائرہ کا خط قاطع بنانے کا طریقہ سیکھیں گے۔

دئے گئے ایک قطاع خط جس میں ایک زاویہ θ ہو اس سے دائرے کے خط قاطع کی تصنیف



تصنیف :

(i) ایک قطاع خط $\overline{BC}$ کھینچئے۔

(ii) B پر زاویہ $\angle CBX = \theta$ بنائیے۔

(iii) $BY \perp BX$ کھینچئے۔

(iv) BC کا عمودی ناصف کھینچئے جو BY کو O پر قطع کرے۔

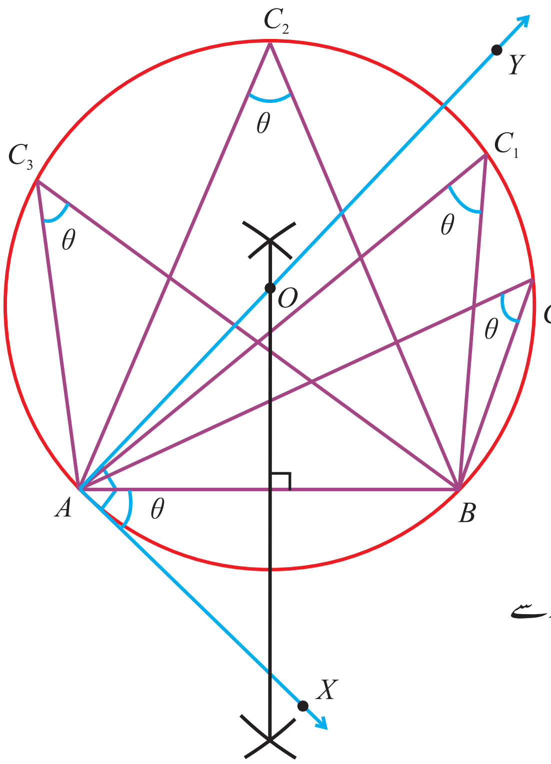
(v) O کو مرکز مان کر OB کو نصف قطر لے کر ایک دائرہ بنائیے۔

(vi) دائرے کے محیط پر کہیں بھی ایک نقطہ A لیجئے۔ مسلۂ مماس-وتر کے تحت قوس کبیر BAC ہی مطلوبہ قطاع خط ہے جس میں θ واقع ہے۔

قاعدہ اور عمودی زاویہ دیا گیا ہو تو اس سے ایک مثلث کی تصنیف :

اگر قاعدہ اور عمودی زاویہ دیا گیا ہو تو مثلث کی تصنیف کے دوران کے مرحلوں کی وضاحت کریں گے۔

تصنیف :



(i) ایک قطاع خط AB کھینچیے۔

(ii) A پر زاویہ $\angle BAX = \theta$ بنائیے۔

(iii) $AY \perp AX$ کھینچیے۔

(iv) AB کا عمودی ناصف کھینچیے جو AY کو "O" پر کاٹے۔

(v) "O" کو مرکز مان کر OA نصف قطر لیکر ایک دائرہ بنائیے۔

(vi) متبادل قطاع خط پر ایک نقطہ C لیجیے۔ AC اور BC کو ملائیے۔

(vii) ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔

اب ہم آسانی کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ دیے گئے قاعدے اور عمودی زاویہ کی مدد سے بنائے گئے مثلثوں میں سے ایک مثلث ΔABC ہے۔

غور کیجیے کہ

$AX \perp AY$ تو $\angle XAY = 90°$

(دائرے کے نصف قطریں) $OB = OA$ ہے۔

AX دائرے کا مماس ہے A اور C دائرے پر کے نقاط ہیں۔

(مماس-وتر کے مسئلہ سے) $\angle BAX = \angle ACB$

برائے ذہن نشینی

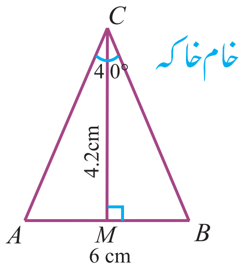
اگر C_1, C_2, C_3,.... دائرے کے نقاط ہیں تو تمام مثلثوں $\Delta ABC_1, \Delta ABC_2, \Delta ABC_3 \ldots$ کے قاعدے اور عمودی زاویے مساوی ہوں گے۔

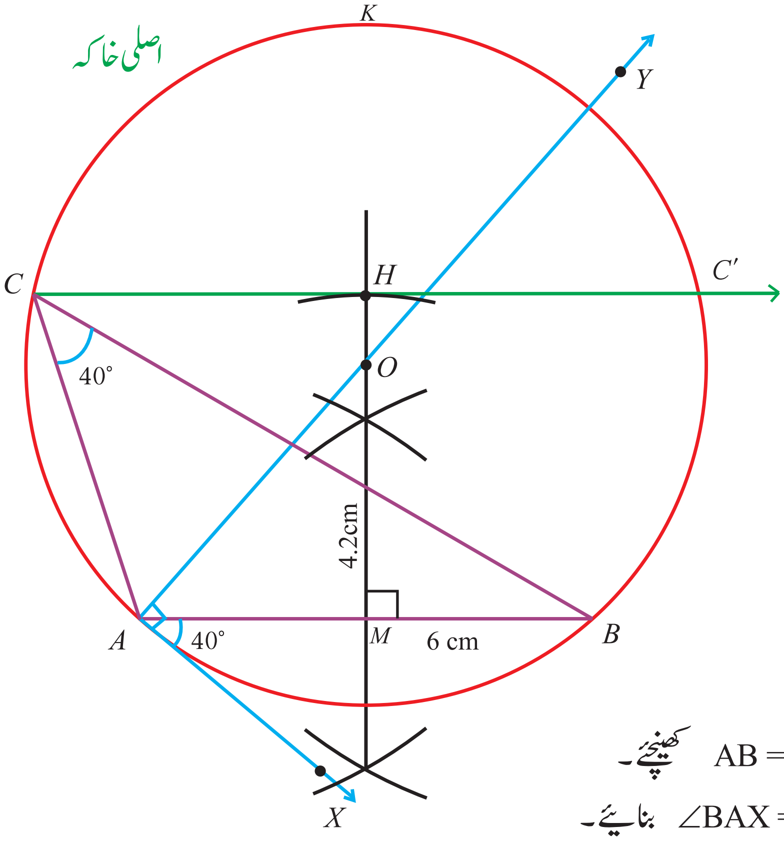
9.3.1 اگر قاعدہ، عمودی زاویہ اور راس سے قاعدے پر ارتفاع دیا گیا ہو تو مثلثوں کی تصنیف

مثال : 9.4

ایک مثلث ABC اس طرح تصنیف کیجیے کہ سمر AB = 6 ، $\angle C = 40^\circ$ اور C سے AB کے ارتفاع کی لمبائی 4.2 سمر ہے۔

دیا گیا ہے : Δ ABC میں $\angle C = 40^\circ$ ؛ سمر AB = 6 سمر C = 4.2 سے AB کے ارتفاع کی لمبائی





تصنیف :

(i) ایک قطاع خط سمر AB = 6 کھینچیے۔

(ii) AX پر زاویہ $\angle BAX = 40^\circ$ بنائیے۔

(iii) $AY \perp AX$ کھینچیے۔

(iv) AB کا عمودی ناصف کھینچیے جو AY کو "O" پر کاٹے اور AB کو M پر کاٹے۔

(v) "O" کو مرکز مان کر OA نصف قطر لیکر ایک دائرہ بنائیے۔

(vi) اس قطاع خط AKB کا عمودی زاویہ 40° ہے۔

(vii) عمودی ناصف MO پر ایک نقطہ "H" اس طرح نشان کیجیے کہ سمر MH = 4.2 ہے۔

(viii) AB کے متوازی *CHC'* کھینچیے، جو دائرے C اور C' پر کاٹے۔

(ix) ΔABC کو مکمل کیجیے جو ایک مطلوبہ مثلثوں میں ایک مثلث ہے۔

برائے ذہن نشینی

Δ ABC' بھی ایک اور مطلوبہ مثلث ہے۔

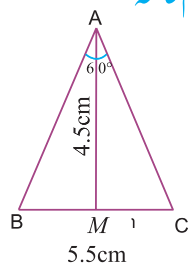
9.3.2 قاعدہ، عمودی زاویہ اور قاعدے پر خطِ وسطی دیا گیا ہو تو مثلث کی تصنیف

مثال 9.5 :

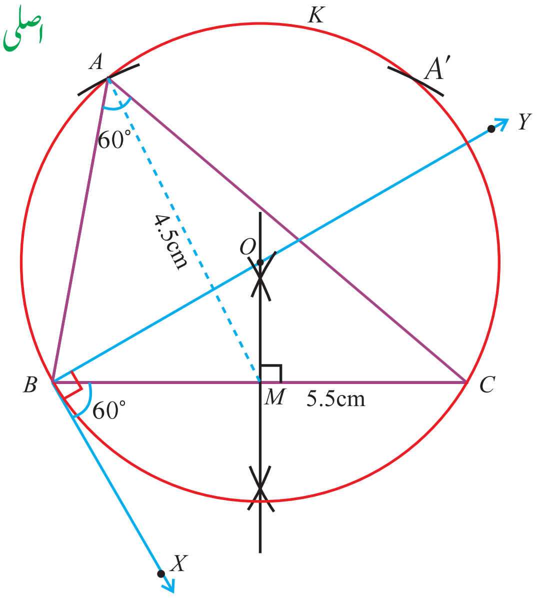
مثلث ABC تصنیف کیجئے، جسمیں $BC = 5.5$ سمر ; $\angle A = 60^\circ$ اور راس سے خطِ وسطی $AM = 4.5$ سمر ہو۔

دیا گیا ہے۔ مثلث ABC میں $AM = 4.5$ سمر خطِ وسطی $\angle A = 60^\circ$ ، $BC = 5.5$ سمر

خام خاکہ



اصلی خاکہ



تصنیف :

(i) ایک قطاع خط $BC = 5.5$ سمر کھینچیے۔

(ii) B پر BX اس طرح بنائیے کہ $\angle CBX = 60^\circ$ ہو۔

(iii) $BX \perp BY$ کھینچیے۔

(iv) BC کا عمودی ناصف کھینچیے جو BY کو 'O' پر اور BC کو M پر کاٹے۔

(v) O کو مرکز مان کر OB نصف قطر لے کر ایک دائرہ بنائیے۔

(vi) قوس کبیر BKC میں 60° زاویہ واقع ہے۔

(vii) M کو مرکز مان کر 4.5 سمر نصف قطر لے کر دائرے پر دو قوسیں A اور A' بنائیے۔

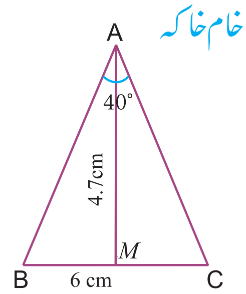
(viii) ΔABC یا $\Delta A'BC$ مطلوبہ مثلث ہے۔

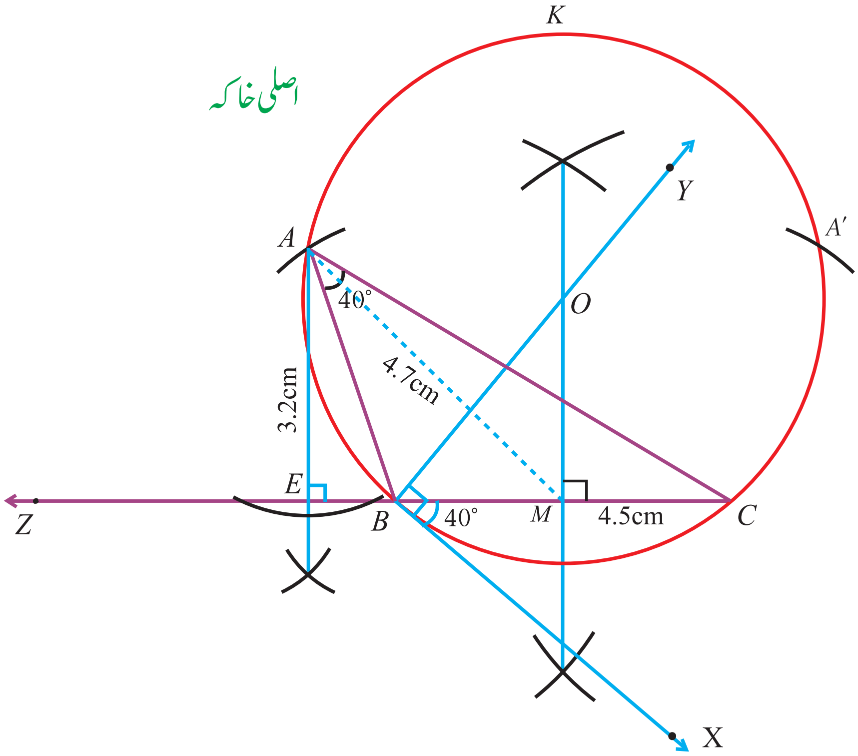
مثال : 9.6

ایک مثلث ABC تصنیف کیجئے جس میں $BC = 4.5$ سمر ، $\angle A = 40°$ اور جس میں A سے BC کا خطِ وسطی 4.7 سمر ہے تو A سے BC کا ارتفاع معلوم کیجئے۔

دیا گیا ہے : مثلث ABC میں $BC = 4.5$ سمر ؛ $\angle A = 40°$ ؛ A سے BC کا خط وسطی $AM = 4.7$ سمر

خام خاکہ





تصنیف :

(i) ایک قطاع خط $BC = 4.5$ سمر کھینچئے۔

(ii) BX پر زاویہ $\angle CBX = 40°$ بنائیے۔

(iii) $BY \perp BX$ کھینچئے۔

(iv) BC کا عمود عا ناصف کھینچئے جو BY کو $'O'$ پر اور BC کو M پر کاٹے۔

(v) O کو مرکز مان کر OB نصف قطر لے کر ایک دائرہ بنائیے۔

(vi) قوس کبیر BKC میں زاویہ $40°$ واقع ہے۔

(vii) M کو مرکز مان کر 4.7 سمر نصف قطر لے کر دائرے پر دو قوسیں کاٹیں جو دائرہ کو A اور A' پر ملیں۔

(viii) ΔABC اور $\Delta A'BC$ کو مکمل کیجئے۔ یہی مطلوبہ مثلث ہے۔

(ix) CB کو CZ تک دراز کیجئے۔

(x) $AE \perp CZ$ کھینچئے۔

(xi) عمود کی لمبائی $AE = 3.2$ سمر ہے۔

مشق 9.2

(1 ایک خط پر ایک دائرے کا قطاع خط بنائیے۔ جس میں $AB = 5.2$ سمر اور $48°$ زاویہ ہو۔

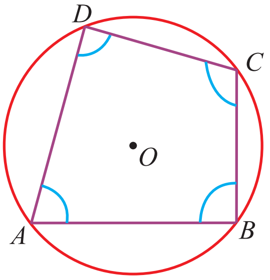
(2 ایک مثلث PQR تصنیف کیجئے جس میں قاعدہ $PQ = 6$ سمر ؛ $\angle R = 60°$ اور R سے PQ کا ارتفاع 4 سمر ہے۔

(3 ایک مثلث PQR تصنیف کیجئے۔ جس میں $PQ = 4$ سمر ; $\angle R = 25°$ اور R سے PQ کا ارتفاع 4.5 سمر ہے۔

(4 ایک مثلث ABC تصنیف کیجئے جس میں قاعدہ $BC = 5$ سمر ؛ $\angle BAC = 40°$ اور A سے وسطی خط BC کی لمبائی 4 سمر ہے۔

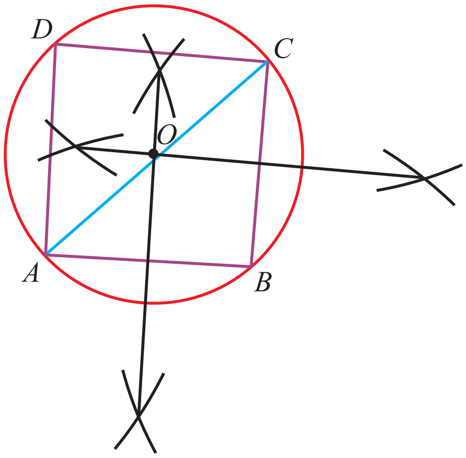
(5 مثلث ABC تصنیف کیجئے جس میں قاعدہ $BC = 5$ سمر ؛ $\angle BAC = 40°$ اور A سے BC تک کے وسطی خط کی لمبائی 6 سمر ہے۔اور A سے عمود کی لمبائی کی پیمائش بھی کیجئے۔

9.4 مدور چار ضلعی (مدور ذوار بعۃ الاضلاع) کی تصنیف



کسی چار ضلعی کے چاروں راس ایک دائرے پر واقع ہوں تو اسے مدور چار ضلعی کہتے ہیں۔ کسی چار ضلعی کے مقابل کے زاویے مکملہ (Supplementary) ہوتے ہیں۔ یعنی مقابل کے زاویوں کا حاصل جمع $180°$ ہوتا ہے۔ لہٰذا کسی مدور چار ضلعی کی تصنیف کے لئے چار مناسب پیمائشیں (پانچ پیمائشوں کی بجائے) کافی ہیں۔

جب درکار پیمائشیں دی گئی ہوں تو ایک مدور چار ضلعی کی تصنیف کے مرحلے بتائے گئے ہیں۔



(i) پہلے ایک خام خاکہ کھینچئے۔ دی گئی پیمائشوں کی مدد سے ΔABC یا ΔABD بنائیے۔

(ii) AB اور BC کے عمودی ناصف کھینچئے۔ جو ایک دوسرے کو نقطہ $'O'$ پر کاٹیں۔ (ΔABC کے کوئی دو ضلعے لے سکتے ہیں)

(iii) O کو مرکز مان کر OA نصف قطر لے کر مثلث ABC کا ایک حائط دائرہ بنائیے۔

(iv) دی گئی پیمائشوں کی مدد سے چوتھا راس D معلوم کیجئے اور AD اور CD کو ملائیے۔

(v) اب $ABCD$ مطلوبہ مدّور چار ضلعی ہے۔

اس باب میں ہم دئے گئے مختلف پیمائشوں کی مدد سے مطلوبہ مدّور چار ضلعیوں کی تصنیف کریں گے۔

(i) تین ضلعے اور ایک وتر　(ii) دو ضلعے اور دو وتر　(iii) تین ضلع اور ایک زاویہ

(iv) دو ضلعے اور دو زاویے　(v) ایک ضلعے اور تین زاویے　(vi) دو ضلعے، ایک زاویے اور ایک متوازی خط۔

قِسم I : اگر تین ضلعے اور ایک وتر دیئے گئے ہوں تو مدور چار ضلعی کی تصنیف

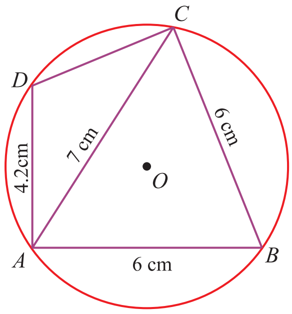
مثال 9.7

ایک مدوّر چار ضلعی $ABCD$ تصنیف کیجئے۔ جس میں $AB = 6$ سمر، $AC = 7$ سمر، $BC = 6$ سمر اور $AD = 4.2$ سمر ہوں۔

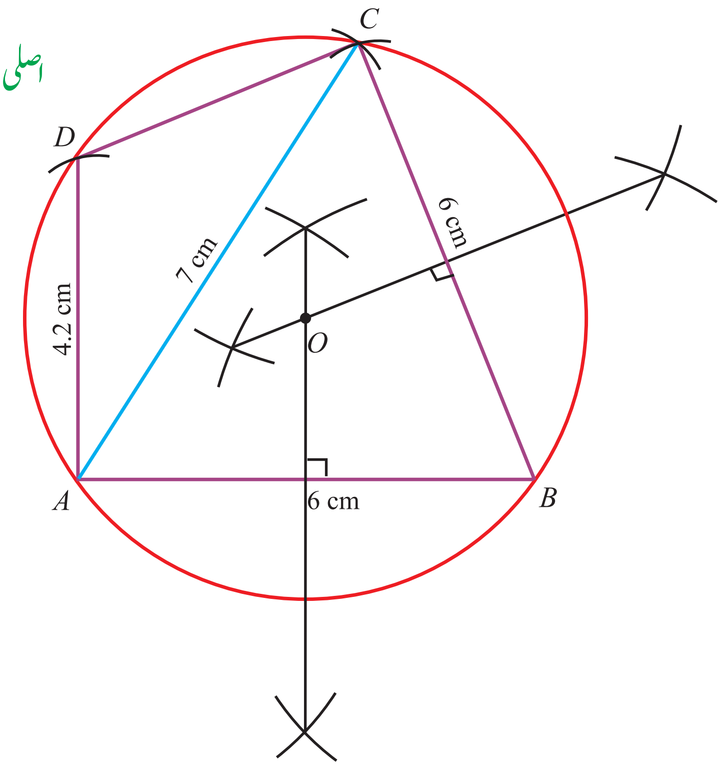
دیا گیا ہے : مدور چار ضلعی $ABCD$ میں $AB = 6$ سمر $AC = 7$ سمر

$BC = 6$ سمر $AD = 4.2$ سمر

خام خاکہ



اصلی خاکہ



تصنیف :

(i) ایک خام خاکہ بنایئے اور اس میں پیمائشیں درج کیجئے۔ ایک قطاع خط $AB=6$ سمر کھینچئے۔

(ii) A کو مرکز مان کر 7 سمر نصف قطر اور B کو مرکز مان کر 6.5 سمر نصف قطر لے کر دو قوسیں کاٹئے۔ دونوں کے ملنے کے مقام کو C نام دیجئے۔

(iii) AB اور AC کا عمودی ناصف کھینچئے جو O پر کاٹیں۔

(iv) O کو مرکز مان کر OA $(OB = OC)$ نصف قطر لے کر مثلث ABC پر ایک حائط دائرہ بنائیں۔

(v) دائرے پر A کو مرکز مان کر 4.2 سمر کا قوس کاٹئے، جو D پر قطع کرے۔

(vi) AD اور CD کو ملایئے۔

اب، $ABCD$ ایک مطلوبہ مدور چار ضلعی ہے۔

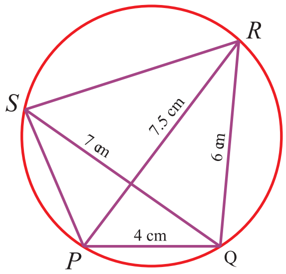
قِسم II : دو ضلعے اور دو وتریں دیئے گئے ہوں تو مدور چار ضلعی کی تصنیف

مثال 9.8 :

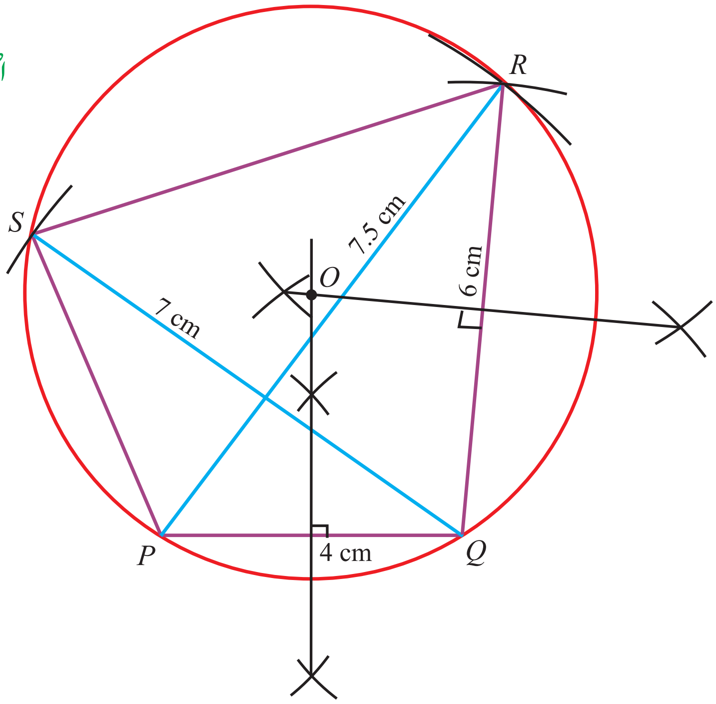
ایک مدور چار ضلعی PQRS تصنیف کیجئے۔ جس میں $PQ = 4$ سمر ، $QR = 6$ سمر ، $PR = 7.5$ سمر اور $QS = 7$ سمر ہوں۔

دیا گیا ہے : $PQ = 4$ سمر ، $QR = 6$ سمر ، $PR = 7.5$ سمر اور $QS = 7$ سمر

خام خاکہ



اصلی خاکہ



تصنیف :

(i) ایک خام خاکہ بنایئے اور اس میں پیمائشیں درج کیجئے۔ ایک قطاع خط $PQ = 4$ سمر کھینچئے۔

(ii) P کو مرکز مان کر 7.5 سمر نصف قطر لے کر ایک قوس کاٹئے۔

(iii) Q کو مرکز مان کر 6 سمر نصف قطر کا ایک اور قوس کاٹئے جو پہلے قوس کو R پر کاٹے۔

(iv) PR اور QR کو ملائیں۔

(v) PQ اور QR کا عمودی ناصف کھینچئے جو ایک دوسرے کو O پر کاٹیں۔

(vi) O کو مرکز مان کر ($OP = OQ = OR$) نصف قطر لے کر مثلث PQR پر حائط دائرہ بنایئے۔

(vii) Q کو مرکز مان کر 7 سمر نصف قطر لے کر ایک قوس کاٹئے جو دائرے کے محیط پر کاٹے۔ اسے S نام دیجئے۔

(viii) PS اور RS کو ملایئے۔

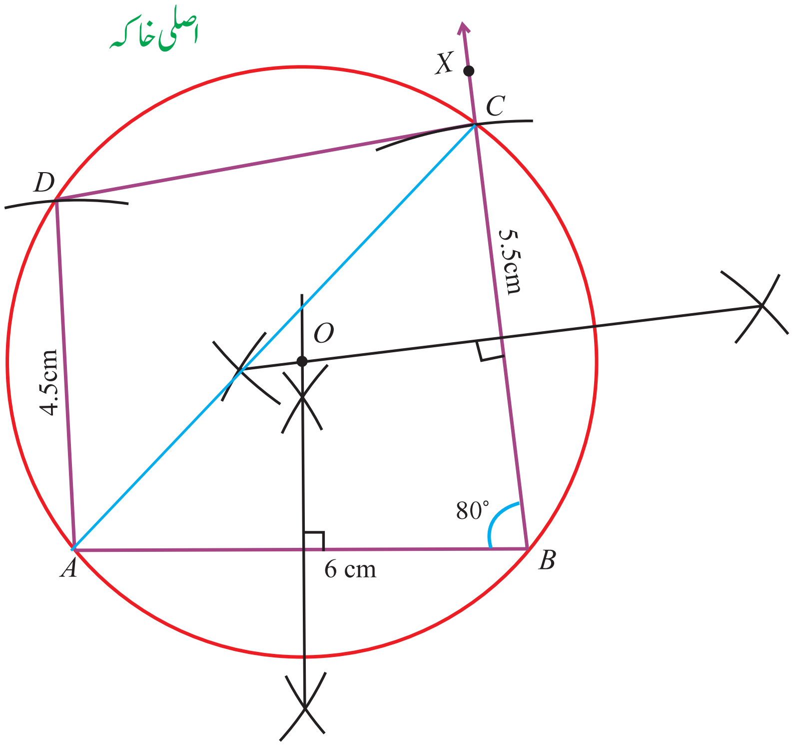
(ix) اب، $PQRS$ مطلوبہ مدور چار ضلعی ہے۔

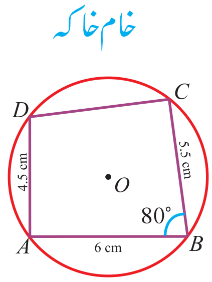
قِسم III : تین ضلعے اور ایک زاویہ دیا گیا ہو تو مدور چار ضلعی کی تصنیف

مثال : 9.9

ایک مدور چار ضلعی $ABCD$ تصنیف کیجئے۔ جس میں $AB = 6$ سمر ، $BC = 5.5$ سمر ، $\angle ABC = 80^\circ$ اور $AD = 4.5$ سمر ہوں۔

دیا گیا ہے : $AB = 6$ سمر ، $BC = 5.5$ سمر ، $\angle ABC = 80^\circ$ اور $AD = 4.5$ سمر





تصنیف :

(i) ایک خام خاکہ بنائیے اور اس میں پیمائشیں درج کیجئے۔ ایک قطاع خط $AB = 6$ سمر کھینچئے۔

(ii) B سے BX اس طرح کھینچئے کہ $\angle ABX = 80^\circ$ ہو۔

(iii) B کو مرکز مان کر 5.5 سمر کا ایک اور قوس کاٹئے جو BX کو C پر کاٹے۔ AC کو ملائیے۔

(iv) AB اور BC کا عمودی ناصف کھینچئے جو ایک دوسرے کو O پر کاٹیں۔

(v) O کو مرکز مان کر $OA(= OB = OC)$ نصف قطر لے کر مثلث ABC پر حائط دائرہ بنائیے۔

(vi) A کو مرکز مان کر 4.5 سمر نصف قطر لے کر ایک قوس کاٹئے جو دائرے کے محیط پر کاٹے۔ اسے D نام دیجئے۔

(vii) AD اور CD کو ملائیے۔

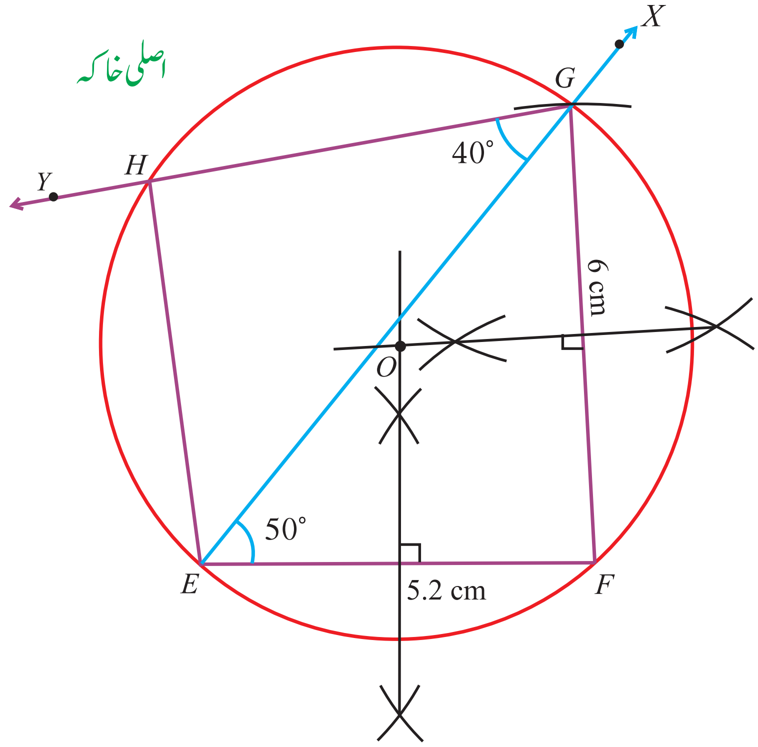
(viii) اب، $ABCD$ مطلوبہ مدور چار ضلعی ہے۔

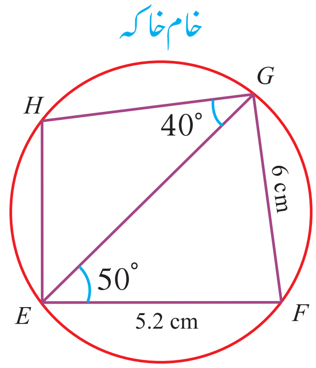
قسم IV : دو ضلعے اور دو زاویے دیے گئے ہوں تو مدور چار ضلعی کی تصنیف

مثال 9.10 :

ایک مدور چار ضلعی EFGH تصنیف کیجئے۔ جس میں $EF = 5.2$ سمر ، $\angle GEF = 50°$ ، $FG = 6$ سمر اور $\angle EGH = 40°$ ہو۔

دیا گیا ہے : $EF = 5.2$ سمر ، $\angle GEF = 50°$ ، $FG = 6$ سمر اور $\angle EGH = 40°$





تصنیف :

(i) ایک خام خاکہ بنائیے اور اس میں پیمائشیں نشان کیجئے۔ $EF = 5.2$ سمر کا قطاع خط کھینچئے۔

(ii) E پر EX اس طرح کھینچئے کہ $\angle FEX = 50°$ ہو۔

(iii) F کو مرکز مان کر 6 سمر نصف قطر کا ایک قوس کاٹئے جو EX کو G پر قطع کرے۔

(iv) FG کو ملائیے۔

(v) EF اور FG کے عمودی ناصف کھینچئے جو ایک دوسرے کو 'O' پر کاٹیں۔

(vi) 'O' کو مرکز مان کر $OE = (OF = OG)$ نصف قطر لے کر ایک حائط دائرہ بنائیے۔

(vii) G پر GY اس طرح کھینچئے کہ $\angle EGY = 40°$ ہو جو دائرہ کو نقطہ H پر قطع کرے۔

(viii) EH کو ملائیے۔

اب، EFGH مطلوبہ مدور چار ضلعی ہے۔

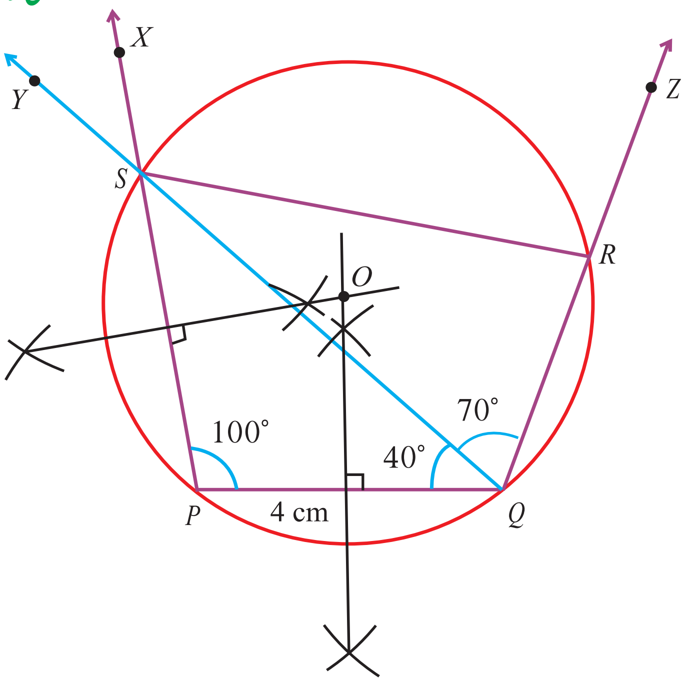
قِسم V : ایک ضلع اور تین زاویے دیئے گئے ہوں تو مدور چار ضلعی کی تصنیف

مثال 9.11 :

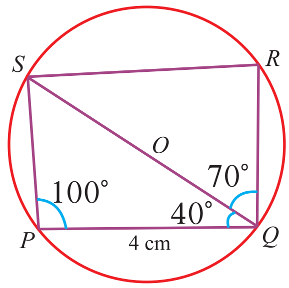
ایک چار ضلعی PQRS تصنیف کیجئے، جس میں PQ = 4 سمر ، $\angle P = 100^\circ$ ، $\angle PQS = 40^\circ$ اور $\angle SQR = 70^\circ$ ہوں۔

دیا گیا ہے : PQ = 4 سمر ، $\angle P = 100^\circ$ ، $\angle PQS = 40^\circ$ اور $\angle SQR = 70^\circ$

اصلی خاکہ



خام خاکہ



تصنیف :

(i) ایک خام خاکہ بنائیے اور اس میں پیمائشیں درج کیجئے۔ 4 سمر کا ایک قطاع خط PQ کھینچئے۔

(ii) P پر PX اس طرح کھینچئے کہ $\angle QPX = 100^\circ$ ہو۔

(iii) Q پر QY اس طرح کھینچئے کہ $\angle PQY = 40^\circ$ ہو۔ QY اور PX کو S پر ملنے دیں۔

(iv) PQ اور PS کے عمودی ناصف کھینچئے۔ جو ایک دوسرے کو O پر کاٹیں۔

(v) O کو مرکز مان کر $(= OQ = OS)$ OP نصف قطر لے کر مثلث PQS پر حائط دائرہ بنائیے۔

(vi) Q پر QZ اس طرح کھینچئے کہ $\angle SQZ = 70^\circ$ ہو اور وہ دائرہ کو R پر کاٹے۔

(vii) RS کو ملائیے۔

اب، PQRS مطلوبہ مدور چار ضلعی ہے۔

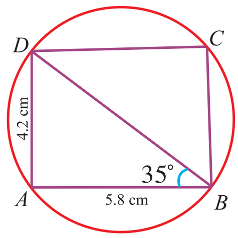
قسم VI : دو ضلعے، ایک زاویہ اور ایک متوازی خط دیا گیا ہو تو مدور چار ضلعی کی تصنیف

مثال 9.12

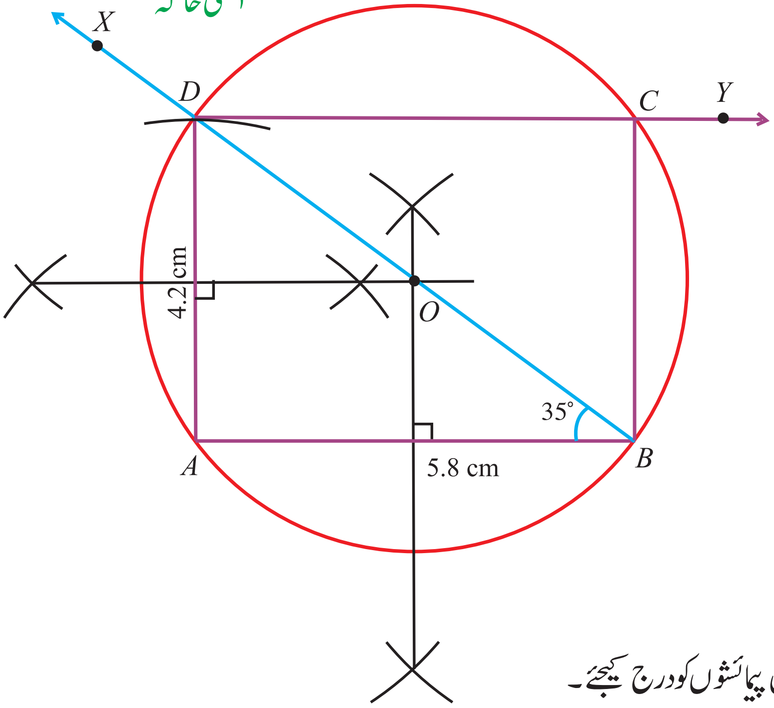
ایک مدور چار ضلعی $ABCD$ تصنیف کیجیے۔ جس میں $AB = 5.8$ سمر ، $\angle ABD = 35°$ ، $AD = 4.2$ سمر اور $AB \parallel CD$

دیا گیا ہے : $AB = 5.8$ سمر ، $\angle ABD = 35°$ ، $AD = 4.2$ سمر اور $AB \parallel CD$

خام خاکہ



اصلی خاکہ



تصنیف :

(i) ایک خام خاکہ کھینچیے اور اس میں پیمائشوں کو درج کیجیے۔
اور $AB = 5.8$ سمر کا ایک قطاع خط کھینچیے۔

(ii) B پر BX اس طرح کھینچیے کہ $\angle ABX = 35°$ ہو۔

(iii) A کو مرکز مان کر 4.2 سمر کا ایک قوس کاٹیے جو BX کو D پر قطع کرے۔

(iv) AB اور AD کے عمودی ناصف کھینچیے جو ایک دوسرے کو O پر قطع کریں۔

(v) $'O'$ کو مرکز مان کر $OA = (OB = OD =)$ نصف قطر لے کر مثلث ABD پر ایک حائط دائرہ بنائیے۔

(vi) DY اس طرح کھینچیے کہ $AB \parallel DY$ (DY متوازی ہے AB کے) دائرے کے اوپر C پر قطع کرے۔
BC کو ملائیے۔

(vii) اب، $ABCD$ مطلوبہ مدور چار ضلعی ہے۔

مشق 9.3

.1 $PQRS$ ایک مدور چارضلعی تصنیف کیجئے۔جس میں $PQ = 6.5$ سمر ، $QR = 5.5$ سمر اور $PR = 7$ سمر ، $PS = 4.5$ سمر ہوں۔

.2 ایک مدور چارضلعی ABCD تصنیف کیجئے۔ جس میں $AB = 6$ سمر ، $AD = 4.8$ سمر ، $BD = 8$ سمر اور $CD = 5.5$ سمر ہوں۔

.3 ایک مدور چارضلعی $PQRS$ تصنیف کیجئے جس میں $PQ = 5.5$ سمر ، $QR = 4.5$ سمر ، $\angle QPR = 45°$ اور $PS = 3$ سمر ہوں۔

.4 ایک مدور چارضلعی $ABCD$ تصنیف کیجئے جس میں $AB = 7$ سمر ، $\angle A = 80°$ ، $AD = 4.5$ سمر اور $BC = 5$ سمر ہوں۔

.5 ایک مدور چارضلعی $KLMN$ تصنیف کیجئے جس میں $KL = 5.5$ سمر ، $KM = 5$ سمر ، $LM = 4.2$ سمر ، $LN = 5.3$ سمر ہوں۔

.6 ایک مدور چارضلعی $EFGH$ تصنیف کیجئے جس میں $EF = 7$ سمر ، $EH = 4.8$ سمر ، $FH = 6.5$ سمر اور $EG = 6.6$ سمر ہوں۔

.7 ایک مدور چارضلعی $ABCD$ تصنیف کیجئے جس میں $AB = 6$ سمر ، $\angle ABC = 70°$ ، $BC = 5$ سمر اور $\angle ACD = 30°$ ہوں۔

.8 ایک مدور چارضلعی $PQRS$ تصنیف کیجئے۔جس میں $PQ = 5$ سمر ، $QR = 4$ سمر ، $\angle QPR = 35°$ ، اور $\angle PRS = 70°$ ہوں۔

.9 ایک مدور چارضلعی $ABCD$ تصنیف کیجئے جس میں $AB = 5.5$ سمر ، $\angle ABC = 50°$ ، $\angle BAC = 60°$ اور $\angle ACD = 30°$ ہوں۔

.10 ایک مدور چارضلعی $ABCD$ تصنیف کیجئے جس میں $AB = 6.5$ سمر ، $\angle ABC = 110°$ ، $BC = 5.5$ سمر اور $AB \parallel CD$ ہوں۔

کیا تم جانتے ہو ؟

1901ء سے آج تک طبیعیات، کیمیاء، نفسیات یا علم طب، ادب اور امن میں بہتر کارنامے انجام دینے والوں کو معزز نوبل انعام سے نوازا جاتا ہے۔ یہ نوبل انعام ایک عالمی ایوارڈ ہے جس کا انتظامیہ ملک سویڈن، اسٹاک ہوم میں واقع نوبل فاؤنڈیشن کرتی ہے۔ حساب کے لئے نوبل انعام نہیں دیا جاتا۔

فیلڈس میڈل ایک انعام ہے جو اُن دو، تین یا چار ریاضی دانوں کو دیا جاتا ہے جن کی عمریں 40 سال سے زیادہ نہ ہوں۔ یہ ایوارڈ چار سال میں ایک مرتبہ عالمی ریاضی یونین (IMU) کے عالمی کانگریس کی میٹنگ میں پیش کیا جاتا ہے۔

فیلڈس میڈل کو عام طور پر علم ریاضی کا نوبل انعام قرار دیا جاتا ہے۔

10

ترسیمات (GRAPHS)

I think, therefore I am

- Rene Descartes

⌘ تعارف/ تمہید
⌘ دودرجی ترسیمات
⌘ مخصوص ترسیمات

10.1 تمہید

ترسیمات وہ خاکے ہیں جو معلومات مہیّا کرتے ہیں۔ترسیمات یہ دِکھاتی ہیں کہ کس طرح دومختلف مقداریں ایک دوسرے سے تعلق رکھتی ہیں۔ جیسے وزن کا تعلق عمر سے ہے۔ بعض اوقات الجبرا کی مدد سے کسی تصویر کو ذہن میں لانا مشکل ہوسکتا ہے۔علامتی عبارتیں اوران کی ترسیمات الجبرائی نمونوں کو سمجھنے کے لئے راہیں کھولتے ہیں۔

زیرغور مسئلوں کو سمجھنے کیلئے طلباء کو چاہیئے کہ ایک مناسب ٹھیک ترسیم کھینچنے کی عادت ڈالیں۔ایک محتاط طریقہ پر بنائی گئی ترسیم نہ صرف مسئلوں کی ہندسوی تشریح کو واضح کرتی ہے بلکہ الجبرائی طور پر کام کے درستگی کی ایک قیمتی جانچ بھی کرتی ہے۔کسی کو یہ نہیں بھولنا چاہیئے کہ ترسیمی نتائج نہ صرف تقریبی قیمتوں کیلئے بہترین ہیں بلکہ ان کی قیمتوں سے کھینچی جانے والی ترسیم کی درستگی کے تناسب میں بھی ہیں۔

10.2 دودرجی ترسیمات (Quadratic graphs)

تعریف

فرض کریں کہ $f : A \to B$ ایک تفاعل ہے۔جس میں A اور B تحتی سٹ ہیں R۔ کے سٹ $\{(x,y) \mid x \in A, y = f(x)\}$ کے اس طرح کی تمام ترتیب وار جوڑیوں کو 'f' کی ترسیم کہتے ہیں۔

x میں ایک کثیر رقتی تفاعل کو ایک ترسیم سے ظاہر کرسکتے ہیں۔پہلے درجے کی کثیر رقتی $y = f(x) = ax + b$ کی ترسیم ایک جھکا ہوا خط (oblique line) ہے جس کا میلان 'a' ہے۔

دوسرے درجے کی کثیر رقتی $a \neq 0$, $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ کی ترسیم ایک ناختتام پزیر غیر خطی منحنی ہے جس کو ہم خط مکافی (Parabola) کے نام سے جانتے ہیں۔

ذیل کی ترسیمات مختلف کثیر رقمیات کوظاہر کرتی ہیں۔

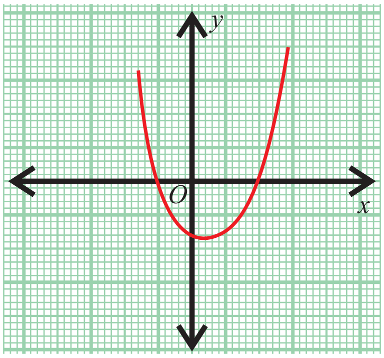
رینی ڈیکارٹے

(1596-1650)

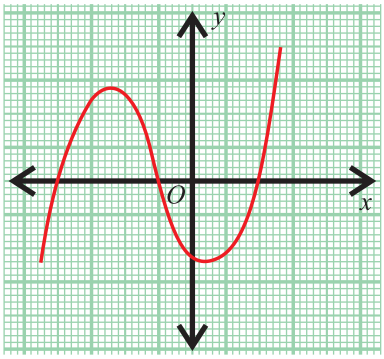
فرانس

رینی ڈیکارٹے جب ہسپتال کے بستر میں تھے،اُس وقت انہوں نے کمرے کے ایک کونے میں ایک مکھی کو بھنبھناتے ہوئے دیکھا اور تبھی انہوں نے کارتیسی مسطح کی تشکیل دی۔

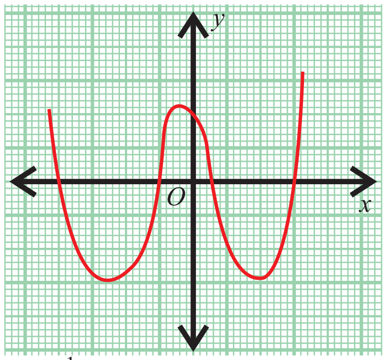
انہوں نے تجزیاتی علم ہندسہ کی تخلیق کی جو محددی محوروں میں مرتسم کرنے کی راہ بنی۔



$y = (x + 1)(x - 2)$,
2 درجی کثیررقمی



$y = (x + 4)(x + 1)(x - 2)$,
3 درجی کثیررقمی



$y = \frac{1}{14}(x + 4)(x + 1)(x - 3)(x - 0.5)$
4 درجی کثیررقمی

نویں جماعت ہم نے سیکھا کہ کس طرح خطی کثیررقمیات کی ترسیمات کھینچی جاتی ہیں اب ہم دودرجی تفاعل $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ جہاں a, b اور c حقیقی مستقل ہیں اور $a \neq 0$، ان کے ترسیمات کی نوعیت پر غور کریں گے۔

فرض کریں کہ $y = ax^2 + bx + c$

کامل مربع کے طریقے سے اوپر کی کثیررقمی کو اس طرح لکھ سکتے ہیں $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

(ایک عبارت کا مربع ہمیشہ مثبت ہوگا) لہٰذا $\frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \geq 0$.

منحنی (خط مکافی) (Parabola) کا راس $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

اگر $a > 0$ ہو تو منحنی اوپر کی جانب کھلی ہوگی، یہ خط $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ کے اوپر یا خط پر ہی ہوگی اور $x = -\frac{b}{2a}$. کے تشاکل میں ہوگی

اگر $a < 0$ ہو تو منحنی نیچے کی جانب کھلی ہوگی، یہ خط $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ کے نیچے یا خط پر ہی ہوگی اور $x = -\frac{b}{2a}$. کے تشاکل میں ہوگی

آیئے دودرجی کثیررقموں کی بعض مثالیں دیکھیں اور جدول کی مدد سے ان کے ترسیموں کی نوعیت کو بھی دیکھیں۔

شمار عدد	کثیررقمی $y = ax^2 + bx + c$	راس	a کی علامت	منحنی کی نوعیت
1	$y = 2x^2$ $a = 2, b = 0, c = 0$	(0, 0)	مثبت	(i) اوپری جانب کھلی ہوگی (ii) $y=0$ کے اوپر یا خط پر ہی ہوگی (iii) $x=0$ کے تشاکل میں ہوگی یعنی y- محور
2	$y = -3x^2$ $a = -3, b = 0, c = 0$	(0, 0)	منفی	(i) نیچے کی جانب کھلی ہوگی (ii) $y=0$ کے نیچے یا خط پر ہی ہوگی (iii) $x=0$ کے تشاکل میں ہوگی یعنی y- محور
3	$y = x^2 - 2x - 3$ $a = 1, b = -2, c = -3$	(1, –4)	مثبت	(i) اوپری جانب کھلی ہوگی (ii) $y=-4$ کے اوپر یا خط پر ہی ہوگی (iii) $x=1$ کے تشاکل ہوگی

دودرجی ترسیم $y = ax^2 + bx + c$ بنانے کے لئے طریقے :

(i) $y = ax^2 + bx + c$ کو استعمال کرتے ہوئے x اور y کی قیمتوں کو لے کر ایک جدول تیار کیجئے۔

(ii) ایک مناسب پیمائش کا انتخاب کیجئے۔

یہ ضروری نہیں کہ جتنی پیمائش x- محور پر لی گئی ہو، اتنی ہی پیمائش y- محور پر بھی لی جائے۔ پیمائش ایسی ہو کہ اس کی مدد سے ممکن حد تک بڑی ترسیم بنائی جائے۔ ترسیم جتنی زیادہ بڑی ہوگی، اس کا نتیجہ اتنا ہی زیادہ ٹھیک ہوگا۔

(iii) چونکہ $y = ax^2 + bx + c$ کی ترسیم میں قطاع خطوط نہیں ہیں، اس لئے ترسیمی کاغذ پر نقاط کو مرتسم کرکے ان نقاط کو ایک ہموار خط کی شکل میں ملائیں۔

مثال 10.1

$y = 2x^2$ کی ترسیم کھینچئے۔

حل :

سب سے پہلے ہم x کیلئے -3 سے 3 تک سالم اعداد کی قیمتیں لیں گے اور ذیل کی جدول تیار کریں گے۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y^2 = 2x$	18	8	2	0	2	8	18

نقاط $(-3, 18), (-2, 8), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 8), (3, 18)$ کو ترسیمی کاغذ پر مرتسم کیجئے۔

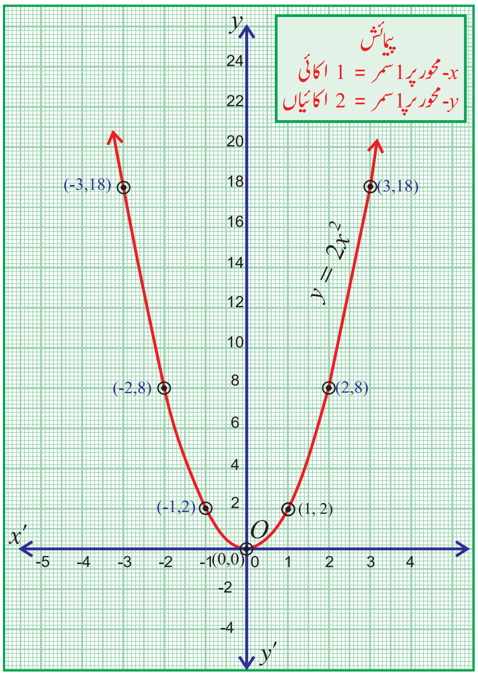


Fig. 10.1

ایک ہموار منحنی سے ان نقاط کو ملائیے۔

غرض اس طرح حاصل ہونے والی ترسیم $y = 2x^2$ کی ترسیم ہے۔

غور کریں :

(i) یہ y- محور پر متشاکل (symmetrical) ہے۔ یعنی y- محور کے بائیں جانب کا حِصّہ y- محور کے دائیں جانب کے حصّے کا مرئی خیال (mirror image) ہے۔

(ii) ترسیم x محور سے نیچے نہیں گزرتی کیونکہ y کی قیمتیں غیر منفی ہیں۔

مثال 10.2

$y = -3x^2$ کی ترسیم کھینچیے

حل :

آیئے ہم x کیلئے -3 سے 3 تک سالم اعداد کی قیمتیں لیں اور درج ذیل جدول تیار کریں۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = -3x^2$	-27	-12	-3	0	-3	-12	-27

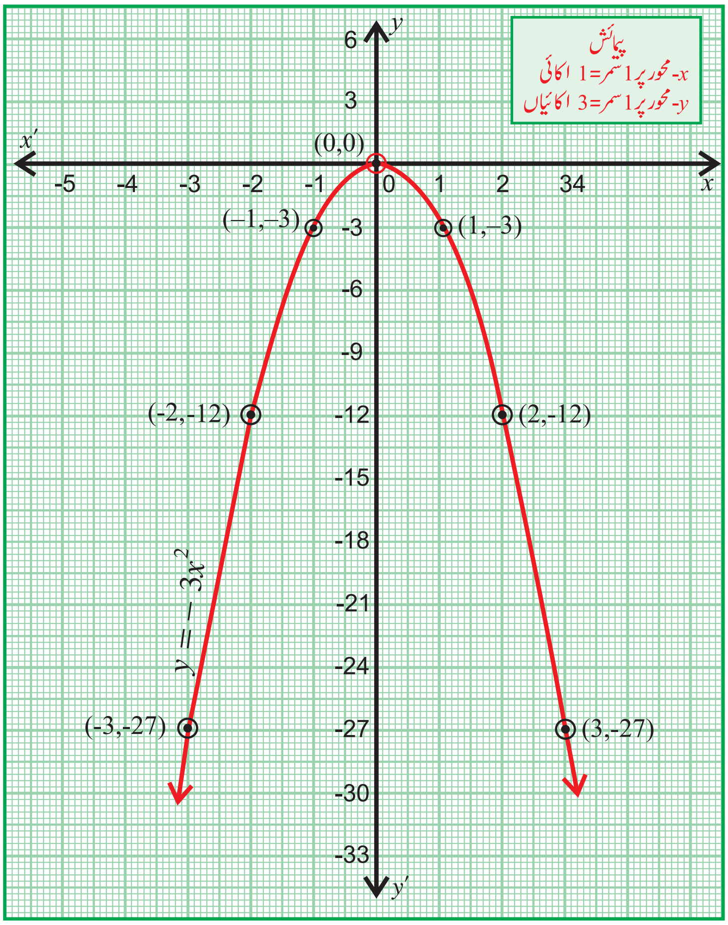


Fig. 10.2

$(-3, -27)$, $(-2, -12)$, $(-1, -3)$, $(0, 0)$, $(1, -3)$, $(2, -12)$, $(3, -27)$ نقاط مرتسم کیجئے۔

ہموار مُنحنی کے ذریعے نقاط کو ملایئے۔

اس طرح حاصل ہونے والی منحنی $y = -3x^2$ کی ترسیم ہے۔

نوٹ :

(i) $y = -3x^2$ کی ترسیم x محور کے اوپر سے نہیں گزرتی ہے کیونکہ y ہمیشہ منفی ہے۔

(ii) ترسیم y-محور پر مُتشاکل ہے۔

10.2.1 دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کو ترسیماً حل کرنا

$ax^2 + bx + c = 0$ دو درجی مساوات کی جذروں کو ترسیما دریافت کرنے کے لئے آیئے ہم $y = ax^2 + bx + c$ کی ترسیم کھینچیں۔ مطلوبہ مساوات کے جذر نقطۂ تقاطع کے x محدّد ہیں جو منحنی x محور کو قطاع کرتی ہیں، بشرطیکہ وہ قطاع کریں۔

مثال 10.3

مساوات $x^2 - 2x - 3 = 0$ کو ترسیماً حل کیجئے۔

حل : پہلے $y = x^2 - 2x - 3 = 0$ کی ترسیم کھینچیے۔

اب x کیلئے -3 سے 4 تک سالم اعداد کی قیمتیں لے کر $y = x^2 - 2x - 3 = 0$ کی بالترتیب قیمتیں دریافت کرکے ذیل کی جدول تیار کیجئے۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	9	4	1	0	1	4	9	16
$-2x$	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
y	12	5	0	-3	-4	-3	0	5

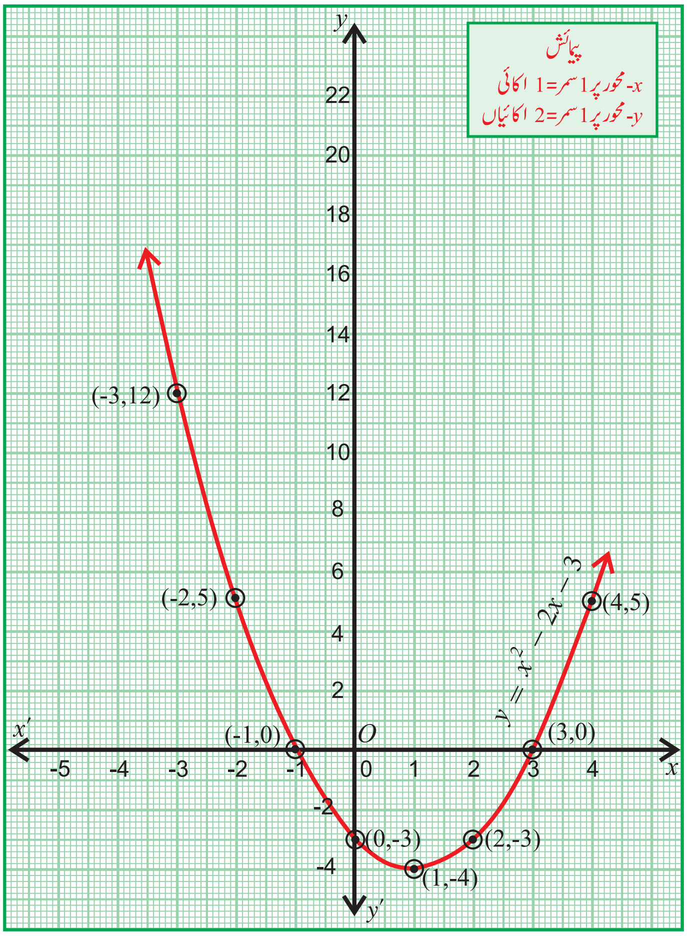


Fig. 10.3

$(-3, 12)$, $(-2, 5)$, $(-1, 0)$, $(0,-3)$, $(1,-4)$, $(2, -3)$, $(3, 0)$, $(4, 5)$ نقاط مرتسم کیجئے اور نقاط کو ایک ہموار منحنی سے ملائیے۔

منحنی x محور کو $(-1, 0)$ اور $(3, 0)$ نقاط پر قطع کرتی ہے۔

مذکورہ بالا نقاط کے x محدّد -1 اور 3 ہیں۔

چنانچہ حل مجموعہ $\{-1, 3\}$ ہے۔

نوٹ :

(i) x محور پر ہمیشہ $y = 0$ ہے۔

(ii) y کی قیمتیں مثبت اور منفی دونوں ہیں۔

غرض منحنی x محور کے نیچے اور اوپر سے گزرتی ہے۔

(iii) چونکہ منحنی $x=1$ پر تشاکل ہے، (اس لئے منحنی y محور پر تشاکل نہیں ہے)۔

مثال 10.4

$2x^2 + x - 6 = 0$ کوترسیماً حل کیجئے۔

حل :

آیئے ہم پہلے ذیل کی جدول تیار کریں۔ x کی -3 سے 3 تک سالم اعداد کی قیمتیں لیکر $y = 2x^2 + x - 6 = 0$ کی بالترتیب قیمتیں دریافت کرتے ہیں۔

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
–6	–6	–6	–6	–6	–6	–6	–6
y	9	0	–5	–6	–3	4	15

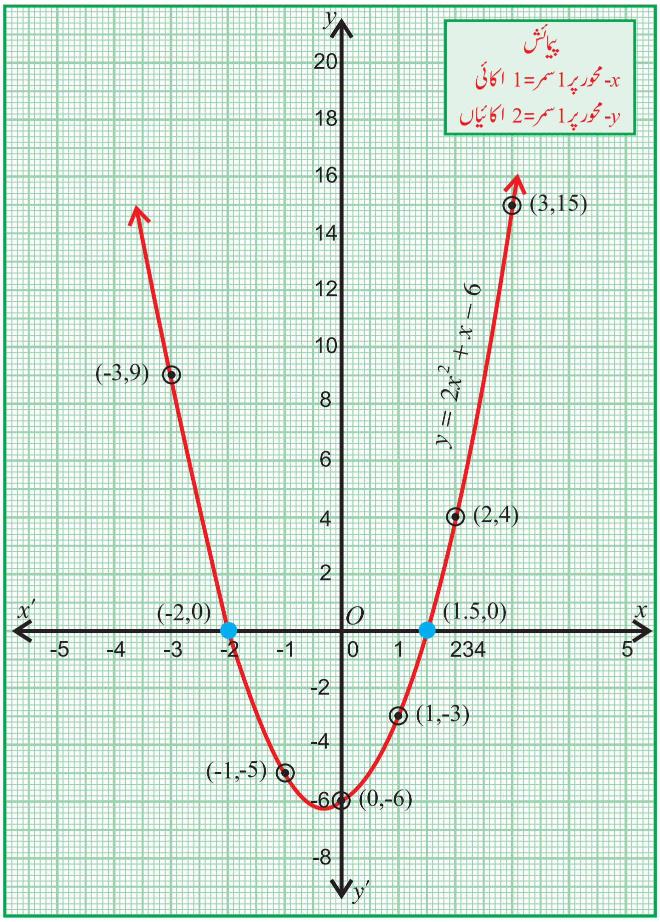


Fig. 10.4

$(-3, 9)$, $(-2, 0)$, $(-1, -5)$, $(0, -6)$, $(1, -3)$, $(2, 4)$ اور $(3, 15)$ نقاط مرتسم کیجئے۔

نقاط کو ایک ہموار منحنی سے ملایئے ۔

غرض حاصل ہونے والی ترسیم $y = 2x^2 + x - 6 = 0$ کی ترسیم ہے۔

منحنی x- محور کو نقاط $(-2, 0)$ اور $(1.5, 0)$ پر قطع کرتی ہے۔

چنانچہ حل کا مجموعہ ہے $\{-2, 1.5\}$

برائے ذہن نشینی

$2x^2 + x - 6 = 0$ کوترسیماً حل کرنے کے لئے ہم اس طرح عمل کریں گے۔

(i) $y = 2x^2$ کی ترسیم بنایئے۔

(ii) $y = 6 - x$ کی ترسیم بنایئے۔

(iii) ان دونوں ترسیموں کا نقطہ تقاطع $2x^2 + x - 6 = 0$ کا حل ہوگا۔

مثال 10.5

$y = 2x^2$ کی ترسیم کھینچئے۔اس کی مدد سے $2x^2 + x - 6 = 0$ کو حل کیجئے۔

حل :

آیئے پہلے ہم $y = 2x^2$ کی ترسیم بنائیں۔ذیل کی جدول تیار کریں۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y^2 = 2x$	18	8	2	0	2	8	18

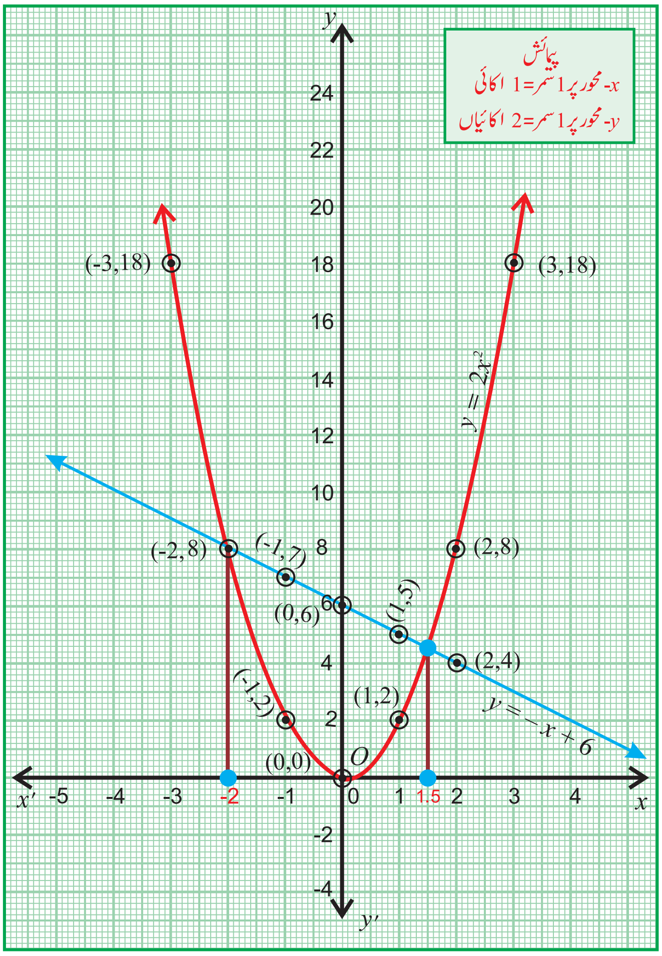


Fig. 10.5

$(-3, 18)$, $(-2, 8)$, $(-1, 2)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 8)$, $(3, 18)$ نقاط مرتسم کریں۔

نقاط کو ہموار منحنی کے ذریعے ایک ترسیم کھینچیں۔

$2x^2 + x - 6 = 0$ کے جذور دریافت کرنے کے لئے دو مساوات کو حل کیجئے۔ $y = 2x^2$ اور $2x^2 + x - 6 = 0$

اب $2x^2 + x - 6 = 0$

$\Rightarrow y + x - 6 = 0$ چونکہ $y = 2x^2$ ہے۔

لہٰذا $y = -x + 6$ ہے۔

چنانچہ $2x^2 + x - 6 = 0$ کے جذور کچھ اور نہیں بلکہ $y = 2x^2$ اور $y = -x + 6$ کے نقطۂ تقاطع کے x محدد ہیں۔

اب خطِ مستقیم $y = -x + 6$ کیلئے درج ذیل جدول تیار کریں۔

x	-1	0	1	2
$y = -x + 6$	7	6	5	4

مذکورہ بالا نقاط کو ملا کر خطِ مستقیم کھینچئے۔خطِ مستقیم اور خط مکافی کے نقطۂ تقاطع $(-2, 8)$ اور $(1.5, 4.5)$ ہیں۔

ان نقاط کے x محدد -2 اور 4.5 ہیں۔

غرض مساوات $2x^2 + x - 6 = 0$ کے جذور کا حل مجموعہ $\{-2, 1.5\}$ ہے۔

مثال 10.6

$y = x^2 + 3x + 2$ کی ترسیم کھینچئے اور اسے استعمال کرتے ہوئے مساوات $x^2 + 2x + 4 = 0$ کو حل کیجئے۔

حل :

آیئے پہلے ہم $y = x^2 + 3x + 2$ کی جدول بنائیں۔

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9
$3x$	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9
2	2	2	2	2	2	2	2	2
y	6	2	0	0	2	6	12	20

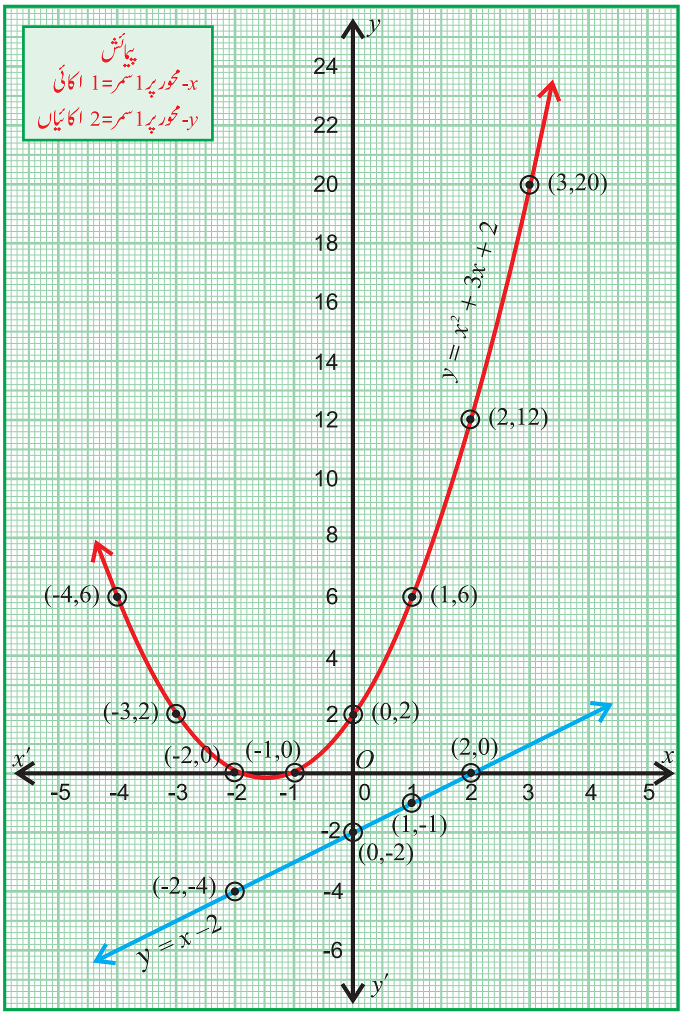


Fig. 10.6

$(-4, 6)$, $(-3, 2)$, $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 6)$, $(2, 12)$, $(3, 20)$ نقاط کو مرتسم کیجئے۔

اب نقاط کو ایک ہموار منحنی سے ملایئے۔اس طرح حاصل ہونے والی منحنی $y = x^2 + 3x + 2$ کی ترسیم ہے۔

اب $x^2 + 2x + 4 = 0$

$\Longrightarrow \quad x^2 + 3x + 2 - x + 2 = 0$

$\Longrightarrow \quad y = x - 2 \qquad \because\ y = x^2 + 3x + 2$

چنانچہ $x^2 + 2x + 4 = 0$ کے جذور $y = x - 2$ اور $y = x^2 + 3x + 2$ کے نقطۂ تقاطع سے حاصل ہوتے ہیں ۔

آیئے ہم $y = x - 2$ خطِ مستقیم کی ترسیم کھینچیں۔

اب $y = x - 2$ خط کیلئے جدول تیار کریں۔

x	-2	0	1	2
$y = x - 2$	-4	-2	-1	0

خطِ مستقیم $y = x - 2$, منحنی $y = x^2 + 3x + 2$ کو قطع نہیں کرتی ہے۔

چنانچہ $x^2 + 2x + 4 = 0$ کے جذور حقیقی نہیں ہیں۔

مشق 10.1

(1 ذیل کے تفاعلات کی ترسیمات کھینچیے۔

(i) $y^2 = 3x$

(ii) $y^2 = -4x$

(iii) $y = (x+2)(x+4)$

(iv) $y = 2x^2 - x + 3$

(2 ذیل کی مساوات کو ترسیماً حل کیجیے۔

(i) $x^2 - 4 = 0$

(ii) $x^2 - 3x - 10 = 0$

(iii) $(x-5)(x-1) = 0$

(iv) $(2x+1)(x-3) = 0$

(3 $y = x^2$ کی ترسیم کھینچیے۔اسکی مدد سے $x^2 - 4x - 5 = 0$ کو حل کیجیے۔

(4 $y = x^2 + 2x - 3$ ترسیم کھینچیے اسکی مدد سے $x^2 - x - 6 = 0$ کے جذور دریافت کیجیے۔

(5 $y = 2x^2 + x - 6$ ترسیم کھینچیے اسکی مدد سے $2x^2 + x - 10 = 0$ کو حل کیجیے۔

(6 $y = x^2 - x - 8$ ترسیم کھینچیے اسکی مدد سے $x^2 - 2x - 15 = 0$ کے جذور دریافت کیجیے۔

(7 $y = x^2 + x - 12$ ترسیم کھینچیے اسکی مدد سے $x^2 + 2x + 2 = 0$ کو حل کیجیے۔

10.3 چند مخصوص ترسیمات: (Some special graphs)

اس قطعہ میں ہم معلوم کریں گے کہ ترسیمات کس طرح کھینچی جاتی ہیں جب متغیرات اس طرح ہوں۔

(i) راست تغیر (Direct variation) (ii) بلا راست تغیر (Indirect variation)

اگر، x,y کے راست تناسب میں ہو تو بعض مثبت k کی قیمتوں کے لئے ہمیں $y = kx$ حاصل ہوتا ہے۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں متغیرات ، راست تغیر میں ہیں اوران کی ترسیم ایک خطِ مستقیم ہے۔

اگر، x,y کے معکوس تناسب میں ہو تو بعض مثبت k کی قیمتوں کے لئے ہمیں $y = \frac{k}{x}$ حاصل ہوتا ہے۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں متغیرات، بلا راست تغیر میں ہیں اوراس کی ترسیم ایک ہموار منحنی ہے۔اِس کو مستطیلی ہذلولی (Rectangular Hyperbola) کہا جاتا ہے۔(ایک مستطیلی ہذلولی کی مساوات $xy = k\ ,\ k>0$ کی شکل میں ہوگی)۔

مثال 10.7

ذیل کی جدول کیلئے ترسیم کھینچیے اور تغیّر کی پہچان کیجیے۔

x	2	3	5	8	10
y	8	12	20	32	40

چنانچہ جب $x = 4$ ہو تو y کی قیمت دریافت کیجیے۔

حل :

جدول سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ جیسے جیسے x بڑھتا ہے y بھی بڑھتا ہے۔ چنانچہ یہ راست تغیر میں ہے۔

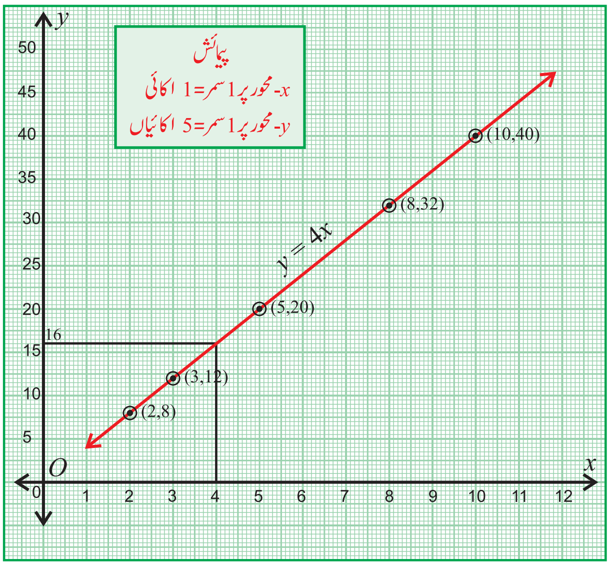


Fig. 10.7

فرض کرو کہ $y = kx$

$\frac{y}{x} = k \implies$ جہاں k تناسبیت کا مستقل (constant of proportionality) ہے۔

دی گئی قیمتوں سے ہمیں

$$k = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \cdots = \frac{40}{10}. \quad \therefore k = 4$$

تعلق $y = 4x$ ایک خطِ مستقیم ترسیم ہے۔

(2,8), (3,12), (5,20),(8,32),(10,40)

نقاط کو مرتسم کیجیے اور ان نقاط کو ملا کر ایک خطِ مستقیم حاصل کیجیے۔

واضح ہے کہ جب $x = 4$ ہے تو $y = 4x = 16$ ہے۔

مثال 10.8

ایک سائیکل چلانے والا مقام A سے مقام B کو ایک ہی راستے سے ایک مستقل رفتار سے مختلف دِنوں میں سفر کرتا ہے۔ ذیل کی جدول اُس کے سفر کی رفتار اور اُس فاصلہ کو طے کرنے کے لئے بالترتیب لیا گیا وقت ظاہر کرتی ہے۔

رفتار کلومیٹر فی گھنٹہ میں x	2	4	6	10	12
وقت گھنٹوں میں y	60	30	20	12	10

رفتار ۔ وقت کی ترسیم کھینچئے اور اس کو استعمال کرکے دریافت کیجئے۔

(i) اگر وہ 5 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے سفر کرے تو اس سے لئے گئے گھنٹوں کی تعداد

(ii) اگر اُس فاصلہ کو 40 گھنٹوں میں طے کرنا ہو تو اُسکو کتنی رفتار سے سفر کرنا چاہئے۔

حل :

جدول سے ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے جیسے x میں اضافہ ہوتا ہے y گھٹتا ہے۔ اس طرح کے تغیر کو بلا راست تغیر کہتے ہیں۔

یہاں پر $xy = 120$ ہے۔

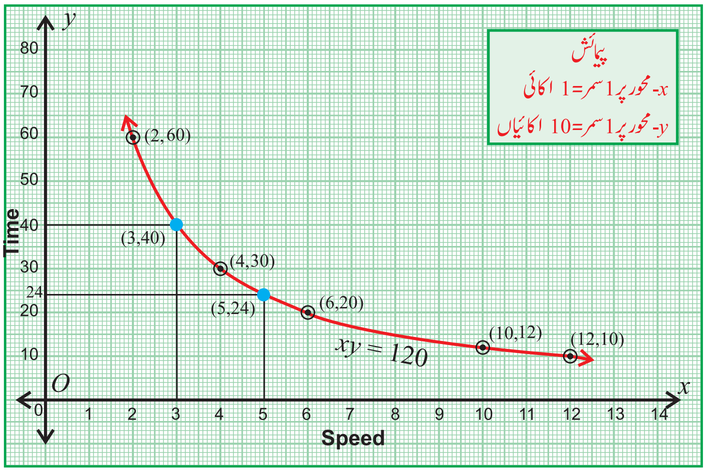


Fig. 10.8

غرض $y = \frac{120}{x}$

نقاط (2, 60) , (4, 30) , (6, 20) , (10, 12), (12,10) کو مرتسم کیجیے۔

ان نقاط کو ایک ہموار منحنی سے ملائیے۔

ترسیم سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

(i) 5 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے سفر طے کرنے کے لئے درکار گھنٹوں کی تعداد 24 ہے۔

(ii) 40 گھنٹوں میں فاصلہ طے کرنے کے لئے درکار رفتار 3 کلومیٹر / گھنٹہ ہے۔

مثال 10.9

ایک بنک بزرگ شہریوں (senior citizen) کی جمع کردہ رقم پر 10% سادہ سود دیتی ہے۔ جمع کردہ رقم اور ایک سال میں اس کے حاصل کردہ سود کے درمیان تعلق کی ترسیم کھینچیے۔ چنانچہ دریافت کیجئے:

(i) ₹ 650 کی جمع شُدہ رقم کا سود۔ (ii) ₹ 45 سود حاصل کرنے کیلئے جمع شُدہ رقم۔

حل :

آیئے ہم ذیل کی جدول تیار کریں۔

جمع شُدہ رقم ₹ x	100	200	300	400	500	600	700
حاصل کردہ سود ₹ y	10	20	30	40	50	60	70

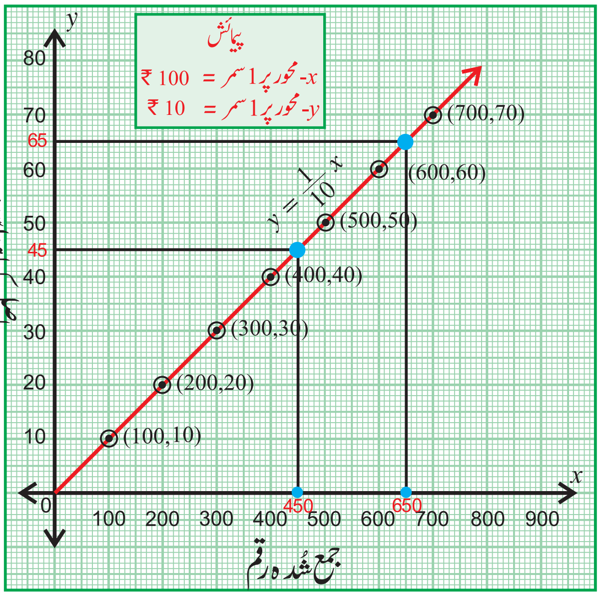


Fig. 10.9

ظاہر ہے $y = \frac{1}{10}x$ اور ترسیم ایک خطِ مستقیم ہے۔

جدول میں دیئے گئے نقاط کی مدد سے ترسیم کھینچیے۔

ترسیم سے ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ

(i) ₹ 650 جمع شدہ رقم پر سود ₹ 65

(ii) ₹ 45 سود حاصل کرنے کیلئے ₹ 450 جمع کرنے ہوں گے۔

مشق 10.2

1) ایک بس 40 کلومیٹر / گھنٹہ کی رفتار سے سفر کرتی ہے۔ فاصلہ وقت کا ضابطہ لکھئے اور اسکی ترسیم کھینچئے۔ چنانچہ 3 گھنٹوں میں طے کیا گیا فاصلہ دریافت کیجئے۔

2) ذیل کی جدول خریدی ہوئی نوٹ بکوں کی قیمت اور تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔

نوٹ بکوں کی تعداد x	2	4	6	8	10	12
قیمت ₹ y	30	60	90	120	150	180

ترسیم کھینچئے اور (i) سات نوٹ بکوں کی قیمت دریافت کیجئے۔ (ii) 165 ₹ میں کتنے نوٹ بکس خریدے جاسکتے ہیں؟

3)

x	1	3	5	7	8
y	2	6	10	14	16

مذکورہ بالا جدول کی ترسیم کھینچئے اور دریافت کیجئے۔

(i) اگر x=4 ہو تو y کی قیمت معلوم کیجئے۔ (ii) اگر y = 12 ہو تو x کی قیمت معلوم کیجئے۔

4) ایک لیٹر دودھ کی قیمت 15 ₹ ہے۔ مقدار اور قیمت کے درمیان تعلق معلوم کرتے ہوئے ترسیم کھینچئے اور دریافت کیجئے

(i) تناسبیت کا مستقل (proportionality constant)

(ii) 3 لیٹر دودھ کی قیمت

5) $xy = 20, x, y > 0$ کی ترسیم کھینچئے۔ ترسیم کو استعمال کرکے اگر $x = 5$ ہو تو y کی قیمت دریافت کیجئے، اور اگر y = 10 ہو تو x کی قیمت دریافت کیجئے۔

6) جدول میں دی گئی معطیات کیلئے ترسیم کھینچئے اور معلوم کیجئے کہ 12 مزدور اُس کام کو کتنے دنوں میں مکمل کرسکتے ہیں۔

مزدوروں کی تعداد x	3	4	6	8	9	16
دنوں کی تعداد y	96	72	48	36	32	18

غور کئے جانے والے اقوال :

1۔ علم ریاضی میں سوال کے حل کرنے سے زیادہ سوال بنانے کا فن اہمیت رکھتا ہے۔ **جارج کینٹر۔**

2۔ علم ریاضی کو دیگر علوم سائنس کی بہ نسبت اتنا بلند مقام اس لئے حاصل ہے کہ اس کے قوانین مستحکم اور غیر تنازعہ والے ہیں۔ جب کہ علوم سائنس کے بعض قوانین پر بحث بھی کی جاتی ہے اور اس میں نئے حقائق اور ایجادات، پرانے قوانین کو رد کرنے کا خوف بھی رہتا ہے۔ **البرٹ آئن سٹائن**

11

شماریات

STATISTICS

It is easy to lie with statistics. It is hard to tell the truth without it
-Andrejs Dunkels

- تعارف
- انتشار کی پیمائش
  - وسعت
  - اختلاف
  - معیاری انحراف
- اختلاف کا ضریب

کارل پیرسن
(1857-1936)
انگلستان

انگلستان کے شماریات دان کارل پیئرسن ، جدید شماریات کے بانی ہیں۔ انہوں نے حسابی شماریات کو منظم بنایا۔ انہوں نے کے نظریہ کا تعارف کروایا جسے طبیعیات سے لیا گیا تھا۔

ان کی تصنیف ''سائنس کی گرامر'' میں انہوں نے بعض ایسے حقائق کو پیش کیا، جو آگے چل کر البرٹ آئنسٹائن اور دیگر سائنس دانوں کے نظریوں کی بنیاد بنے۔

11.1 تعارف

کراکسٹن اور کوڈن کے مطابق شماریات سے مراد عددی معطیات کا جمع کرنا، پیش کرنا، تجزیہ کرنا اور ان کا سمجھنا ہے۔ پروفیسر فشر کا کہنا ہے کہ شماریات علم ریاضی کا ایک ضروری اور اہم شعبہ ہے، اور علم ریاضی کی طرح مشاہداتی معطیات میں بھی استعمال ہوتا ہے۔

پروفیسر ہورلیس سیکرسٹ نے شماریات کو یوں بیان کیا ہے۔

''شماریات سے ہماری مراد وہ حقیقی مجموعے ہیں، جو عدد میں ظاہر کرنے کے لئے درستگی کے مناسب معیار کے مطابق اندازہ لگانے کے لئے پہلے سے متعین کئے گئے مقاصد کو ترسیمی طریقہ سے جمع کرنے کے لئے اور ایک دوسرے کے تعلق سے مقام رکھنے کے لئے جملہ واقعات کو کثیر وجوہات کی بنا پر نشاندہی کی حد تک متاثر کرتے ہیں۔

شماریات کا لفظ پہلی مرتبہ جے۔ یف۔ بیرون (J.F.Baron) نے اپنی تصنیف (Elements of Universal Erudiation) میں استعمال کیا۔ موجودہ دور میں شماریات معطیات کے جمع کرنے اور انہیں نقشہ اور ترسیم کے ذریعہ پیش کرنے تک ہی محدود نہیں ہے، بلکہ مشاہداتی معطیات سے متعلق بنیادی نتائج اخذ کرنا، جیسے وسیع دائرے پر محیط ہے۔

مرکزی رجحان کی پیمائش مثلاً اوسط، وسطانیہ، اور طرز سے متعلق ہم پہلے ہی پڑھ چکے ہیں۔ ان سے ہمیں مرکزی حصے کے پھیلاؤ سے متعلق معطیات یا مشاہدات پر متوجہ ہونے کا خیال ملتا ہے۔

مرکزی رجحان کی پیمائش، پھیلاؤ سے متعلق ایک مکمل خیال پیش نہیں کرتے۔ مثال کے طور پر ذیل کے دو سلسلوں پر غور کیجئے۔

(i) 82, 74, 89, 95 اور (ii) 120, 62, 28,130 دونوں پھیلاؤ کا ایک ہی اوسط 85 ہے۔ پہلے سلسلے میں اعداد اوسط سے زیادہ قریب ہیں، جب کہ دوسرے سلسلے میں اعداد اوسط 85 سے وسیع طور پر منتشر ہیں۔

غرض مرکزی رجحان کی پیمائشیں ہمیں غلط رہنمائی بھی کرسکتی ہیں۔ ہمیں ایک ایسے پیمائشوں کی ضرورت ہے جو یہ بتا سکیں کہ معطیات اوسط کے اردگرد کس طرح منتشر ہوتے ہیں۔

11.2۔ انتشار کے ناپ (Measures of Dispersion)

انتشار کے ناپ معطیات (Data) کے پھیلاؤ کی تقسیم سے متعلق تصور کو پیش کرتے ہیں۔ وسعت (Range)، کورٹیل انحراف (Quartile Deviation) (Q.D)، اوسط انحراف (Mean Deviation) (M.D.) اور معیاری انحراف (S.D) (Standard Deviation) انتشار کے ناپ ہیں۔ آیئے ہم ان میں سے چند کا تفصیلی معائنہ کریں۔

11.2.1۔ وسعت (Range)

وسعت انتشار کی سادہ ترین پیمائش ہے۔ اعداد کے ایک سٹ کی وسعت اس سٹ کی سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی قیمت کا درمیانی فرق ہے۔

سب سے چھوٹی قیمت − سب سے بڑی قیمت = وسعت (Range)

$= L - S$

وسعت کا ضریب اس طرح دیا گیا ہے۔ $\frac{L-S}{L+S}$

مثال 11.1 43, 24, 38, 56, 22, 39, 45 کی وسعت اور ضریب دریافت کیجئے۔

حل : آیئے، ہم دی ہوئی معطیات کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھیں۔ 22, 24, 38, 39, 43, 45, 56

دی گئی معطیات میں سب سے بڑی قیمت $L = 56$ اور سب سے چھوٹی قیمت $S = 22$ ہے۔

وسعت $= L - S$

$= 56 - 22 = 34$

وسعت کا ضریب $= \frac{L-S}{L+S}$

$= \frac{56-22}{56+22} = \frac{34}{78} = 0.436$

مثال 11.2 ایک جماعت میں 13 طلباء کے اوزان 42.5 , 47.5 , 48.6 , 50.5 , 49 , 46.2 , 49.8 , 45.8 , 43.2 , 48 , 44.7, 46.9, 42.4 ہیں۔ وسعت اور وسعت کا ضریب دریافت کیجئے۔

حل : دی گئی معطیات کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھیں

42.4, 42.5, 43.2, 44.7, 45.8, 46.2, 46.9, 47.5, 48, 48.6, 49, 49.8, 50.5

سب سے بڑی قیمت $L = 50.5$ اور سب سے چھوٹی قیمت $S = 42.4$ ہے۔

وسعت $= L - S$

$= 50.5 - 42.4 = 8.1$

وسعت کا ضریب $= \frac{L-S}{L+S} = \frac{50.5-42.4}{50.5+42.4} = \frac{8.1}{92.9}$

$= 0.087$

مثال 11.3

معطیات کے ایک گروہ میں سب سے بڑی قیمت 7.44 ہے۔ اگر وسعت 2.26 ہو تو اس گروہ کی سب سے چھوٹی قیمت دریافت کیجئے۔

حل : سب سے چھوٹی قیمت - سب سے بڑی قیمت = وسعت

$\Rightarrow$ 7.44 – سب سے چھوٹی قیمت = 2.26

چنانچہ سب سے چھوٹی قیمت = 7.44 – 2.26 = 5.18

11.2.2 معیاری انحراف (Standard Deviation)

انتشار کی پیمائش کا بہتر طریقہ یہ ہے کہ انہیں اوسط سے پہلے ہر ایک معطیہ اور اوسط کے درمیان فرق کا مربع کریں۔ انتشار کی اس پیمائش کو اختلاف (Variance) کہتے ہیں۔ اور اختلاف کا مثبت جذر المربع معیاری انحراف (S.D) کہلاتا ہے۔ اختلاف ہمیشہ مثبت ہے۔

لفظ معیاری انحراف کو 1894 میں سب سے پہلے کارل پیرسن نے گاس (Gauss) کے استعمال کردہ لفظ ''غلط اوسط'' (Mean error) کے متبادل کے طور پر استعمال کیا۔

معیاری انحراف کو معطیات کی طرح مساوی اکائیوں میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہاں یہ ظاہر کرنا ہے کہ اوسط سے کتنا اختلاف ہے۔ ایک چھوٹا معیاری انحراف یہ ظاہر کرتا ہے کہ معطیات کو نقاط اوسط سے زیادہ قریب ہوتے ہیں، جب کہ ایک بڑا معیاری انحراف یہ ظاہر کرتا ہے کہ معطیات قیمتوں کی بہت زیادہ حد تک پھیلے ہوئے ہیں۔

ہم پھیلاؤ کے اوسط اور معیاری انحراف کو بالترتیب $\bar{x}$ اور σ سے تعبیر کرتے ہیں۔ معطیات کے انحصار پر ہم معیاری انحراف (معطیات کو صعودی یا نزولی ترتیب دینے کے بعد) مختلف طریقوں سے ذیل کے ضابطوں کے استعمال سے محسوب کرتے ہیں۔

(ثبوت نہیں دئے گئے ہیں)

معطیات	راست طریقہ	حقیقی اوسط کا طریقہ	مفروضہ اوسط کا طریقہ	بتدریج انحراف کا طریقہ
غیر گروہ شدہ	$\sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$ $d = x - \bar{x}$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$ $d = x - A$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c$ $d = \frac{x - A}{c}$
گروہ شدہ		$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \times c$

غور کریں

n اشیاء (اعداد) کے مجموعہ کے لئے ہمارے پاس ہمیشہ ہے

$\sum(x - \bar{x}) = 0$, $\sum x = n\bar{x}$ اور $\sum \bar{x} = n\bar{x}$

(i) راست طریقہ (Direct Method)

اگر دئے گئے معطیات کے مربع آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں تو یہ طریقہ ہم استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال 11.4:

8 طلباء کے ذریعہ ایک مہینے میں پڑھے گئے کتابوں کی تعداد اس طرح ہے۔ 2, 5, 8, 11, 14, 6, 12, 10
ان معطیات کے لئے معیاری انحراف محسوب کیجئے۔

حل:

x	x^2
2	4
5	25
6	36
8	64
10	100
11	121
12	144
14	196
$\sum x=68$	$\sum x^2=690$

n = 8 یہاں معطیات کی تعداد n ہے۔

معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{690}{8} - \left(\frac{68}{8}\right)^2}$

$= \sqrt{86.25 - (8.5)^2}$

$= \sqrt{86.25 - 72.25}$

$= \sqrt{14} \simeq 3.74$

(ii) حقیقی اوسط کا طریقہ

یہ طریقہ اس وقت استعمال کیا جاسکتا ہے جب کہ اوسط ایک کسر نہیں ہے۔

جہاں، $d = x - \overline{x}$ ، $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$ یا $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\overline{x})^2}{n}}$ معیاری انحراف

مثال 11.5

ایک جماعت میں عام معلومات (general knowledge) میں ایک ٹسٹ لیا گیا۔ 40 مارکس سے 6 طلباء کے لئے مارکس 20, 14, 16, 30, 21 اور 25 تھے۔ معطیات کے لئے معیاری انحراف محسوب کیجئے۔

حل :

اب $A.M. = \frac{\sum x}{n} = \frac{20+14+16+30+21+25}{6}$ حسابی اوسط

$\Longrightarrow \overline{x} = \frac{126}{6} = 21.$ آیئے اب ہم جدول تیار کریں۔

x	$d = x - \overline{x}$	d^2
14	−7	49
16	−5	25
20	−1	1
21	0	0
25	4	16
30	9	81
$\sum x = 126$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 172$

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{172}{6}}$

$= \sqrt{28.67}$

لہٰذا $\sigma \simeq 5.36$

(iii) فرضی اوسط کا طریقہ Assumed mean method

جب دی گئی معطیات کا اوسط ایک سالم عدد نہیں ہے۔ ہم فرضی اوسط کا طریقہ استعمال کر کے معیاری انحراف محسوب کرتے ہیں۔ ہم ایک مناسب قیمت اس طرح منتخب کرتے ہیں کہ فرض $x-A$ تمام چھوٹے اعداد ہوں ممکن حد تک سالم اعداد ہوں۔ یہاں A فرضی اوسط ہے جو اوسط سے قریب سمجھا جاتا ہے۔

$d = x-A$ کے استعمال سے ہم انحراف محسوب کرتے ہیں.

اب معیاری انحراف $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}.$$

> **غور کریں**
>
> فرضی اوسط کا طریقہ اور مرحلاتی انحراف کا طریقہ، راست طریقہ کی صرف مختصر شکلیں ہیں۔

مثال 11.6

اعداد 62, 58, 53, 50, 63, 52,55 کا معیاری انحراف محسوب کیجئے۔

حل : آیئے ہم $A=55$ لیں جو کہ فرضی اوسط ہے اور ذیل کی جدول تیار کریں۔

x	$d = x - A$ $= x - 55$	d^2
50	−5	25
52	−3	9
53	−2	4
55	0	0
58	3	9
62	7	49
63	8	64
	$\sum d = 8$	$\sum d^2 = 160$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{160}{7} - \left(\frac{8}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{160}{7} - \frac{64}{49}}$$

$$= \sqrt{\frac{1056}{49}}$$

$$= \frac{32.49}{7}$$

$\therefore$ معیاری انحراف $\sigma \simeq 4.64$

(iv) مرحلاتی انحراف کا طریقہ Step deviation method

جب قیمتیں بڑی ہوں اور ایک مشترک جزو ضربی رکھتی ہوں تو اس وقت اس طریقہ کو استعمال کر کے معیاری انحراف دریافت کر سکتے ہیں۔ ہم ایک مفروضی اوسط A منتخب کرتے ہیں اور $d = \frac{x-A}{c}$ کے استعمال سے d محسوب کرتے ہیں۔ یہاں $x-A$ کی تمام قیمتوں کے لئے c ایک مشترک جزو ضربی ہے۔

ہم یہ ضابطہ استعمال کرتے ہیں۔ $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c.$$

مثال 11.7 ایک حساب کے امتحان میں 10 طلباء کے حاصل کردہ مارکس اس طرح ہیں۔

80, 70, 40, 50, 90, 60, 100, 60, 30, 80 ان کے لئے معیاری انحراف محسوب کیجئے۔

حل :

ہم غور کرتے ہیں کہ تمام مشاہدات کے لئے مشترک جزوِضربی 10 ہے۔ A=70 کو فرضی اوسط لیں۔

یہاں اشیاء کی تعداد $n=10$ ہے۔ $c=10$ لیں، $d=\frac{x-A}{10}$ اور ذیل کی جدول تیار کریں۔

x	$d=\frac{x-70}{10}$	d^2
30	-4	16
40	-3	9
50	-2	4
60	-1	1
60	-1	1
70	0	0
80	1	1
80	1	1
90	2	4
100	3	9
	$\sum d=-4$	$\sum d^2=46$

اب $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}-\left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}\times c$

$$= \sqrt{\frac{46}{10}-\left(\frac{-4}{10}\right)^2}\times 10$$

$$= \sqrt{\frac{46}{10}-\frac{16}{100}}\times 10 = \sqrt{\frac{460-16}{100}}\times 10$$

$\therefore$ معیاری انحراف $\sigma \simeq 21.07$

مذکورہ بالا چار طریقے جیسے راست طریقہ، حقیقی اوسط کا طریقہ، فرضی اوسط کا طریقہ اور مرحلاتی انحراف کا طریقہ، ان میں سے کسی بھی ایک طریقہ سے معطیات کے ذخیرہ کا معیاری انحراف حاصل کر سکتے ہیں.

یکساں معطیات کے لئے جیسے توقع کیا گیا، ویسے طریقے سے σ کے لئے مختلف جوابات نہیں دے سکتے۔ اسی حقیقت کو ذیل کی مثال میں سمجھایا گیا ہے۔ طلباء کو یہ نصیحت دی جاتی ہے کہ وہ ذیل کے طریقوں سے کسی ایک طریقہ کو اپنائیں۔

نتائج : (Results)

(i) ایک سلسلے کا معیاری انحراف نہیں بدلتا ہے اگر ہر معطیہ کے ساتھ ایک ہی مقدار جمع کریں یا خارج کریں۔

(ii) ایک معطیات کے ذخیرہ کی ہر قیمت کو ایک مستقل غیر صفری k سے ضرب یا تقسیم کرنے پر نئے معطیات کا معیاری انحراف بھی k گُنا ضرب یا تقسیم پذیر ہوتا ہے۔

مثال 11.8 3, 5, 6, 7 معطیات کا معیاری انحراف دریافت کیجئے۔ پھر ہر ایک معطیہ کے ساتھ 4 جمع کیجئے اور نیا معیاری انحراف معلوم کیجئے

حل : آیئے ہم دی ہوئی معطیات کی ہر رقم کے ساتھ 4 جمع کریں

اور نئی معطیات 7,9,10,11 حاصل کرلیں۔

A=10 لیجئے

x	$d = x - 10$	d^2
7	– 3	9
9	–1	1
[10]	0	0
11	1	1
	$\Sigma d = -3$	$\Sigma d^2 = 11$

معیاری انحراف $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{11}{4} - \left(\frac{-3}{4}\right)^2}$

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{35}}{4}$

دیے گئے معطیات 3, 5, 6, 7

A=6 لیجئے

x	$d = x - 6$	d^2
3	– 3	9
5	–1	1
[6]	0	0
7	1	1
	$\Sigma d = -3$	$\Sigma d^2 = 11$

معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{11}{4} - \left(\frac{-3}{4}\right)^2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{35}}{4}$

اوپر کی مثال میں ہر رقم کے ساتھ ایک مستقل رقم 4 جمع کرنے پر بھی معیاری انحراف نہیں بدلتا ہے۔

مثال 11.9 40, 42 اور 48 کا معیاری انحراف دریافت کیجئے. اگر ہر ایک قیمت کو 3 سے ضرب دیں تو نیا معیاری انحراف معلوم کیجئے۔

حل :

جب قیمتوں کو 3 سے ضرب دیں تو ہمیں 120, 126, 144

حاصل ہوتا ہے فرضی اوسط A=132 لیجئے۔

x	$d = x - 132$	d^2
120	–12	144
126	– 6	36
144	12	144
	$\Sigma d = -6$	$\Sigma d^2 = 324$

$= \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{324}{3} - \left(\frac{-6}{3}\right)^2}$

معیاری انحراف $\sigma_1 = \sqrt{\frac{312}{3}} = \sqrt{104}$

آیئے ہم دی ہوئی معطیات 40, 42, 48

پر غور کریں اور σ دریافت کریں۔

فرضی اوسط لیں A=44

x	$d = x - 44$	d^2
40	– 4	16
42	– 2	4
48	4	16
	$\Sigma d = -2$	$\Sigma d^2 = 36$

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{36}{3} - \left(\frac{-2}{3}\right)^2}$

معیاری انحراف $\sigma = \frac{\sqrt{104}}{3}$

اوپر کی مثال میں جب ہر ایک قیمت کو 3 سے ضرب دیا گیا تو معیاری انحراف بھی 3 گُنا ہوگیا۔

مثال 11.10

پہلے 'n' طبعی اعداد کے لئے معیاری انحراف کا ضابطہ $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ ثابت کیجئے۔

حل پہلے 'n' طبعی اعداد $1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n$ ہیں۔

ان کا اوسط $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n}$

$$= \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

پہلے n طبعی اعداد کے مربعوں کا حاصل جمع $\sum x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

اب معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{(2n+1)}{3} - \frac{(n+1)}{2}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{2(2n+1)-3(n+1)}{6}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{4n+2-3n-3}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}.$$

$\therefore$ پہلے n طبعی اعداد کا معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

برائے ذہن نشینی

اس بات کو نوٹ کرنے میں دلچسپ معلوم ہوگی کہ

d عام فرق رکھنے والے ایک A.P. کے n متواتر اعداد کا معیاری انحراف $\sigma = d\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

$i, i+1, i+2, \ldots, i+n$ کا معیاری انحراف S.D. $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}, i \in \mathbb{N}$

کسی بھی n متواتر جفت اعداد کا معیاری انحراف $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}, n \in \mathbb{N}$

کسی بھی n متواتر طاق اعداد کا معیاری انحراف $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}, n \in \mathbb{N}$