

Name :

Roll No. :

नवीन पाठ्यक्रम / New Syllabus

कुल प्रश्नों की संख्या : 29]
Total No. of Questions : 29]

[कुल मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 11
[Total No. of Printed Pages : 11

O-212204 / 804–A

विषय : गणित
Subject : Mathematics

समय : 3 घण्टे]
Time : 3 hours]

[पूर्णांक : 100
[Maximum Marks : 100

- सामान्य निर्देश** : (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
(ii) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।
- General Instructions** : (i) All questions are compulsory.
(ii) Use of calculator is not permitted.

[2]

निर्देश : (अ) प्रश्न क्रमांक 1 से 4 तक अतिलघु उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 1 अंक निर्धारित है।

Instruction : (A) Question Nos. 1 to 4 are very short answer type questions. Each question carries 1 mark.

प्रश्न-1 सिद्ध कीजिए कि सदिशों $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $-\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ परस्पर लंबवत् हैं। [1]

Show that the vectors $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ and $-\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ are perpendicular to each other.

प्रश्न-2 यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ हो, तो दिखाइए कि $(A')' = A$. [1]

If matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$, then show that $(A')' = A$.

प्रश्न-3 $\int \sin^{-1}(\cos x) dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [1]

Evaluate $\int \sin^{-1}(\cos x) dx$.

प्रश्न-4 अवकल समीकरण की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिए : [1]

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left[y + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}}$$

Find the order and degree of differential equation :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left[y + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}}$$

निर्देश : (ब) प्रश्न क्रमांक 5 से 12 तक लघु उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 2 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (B) Question Nos. 5 to 12 are short answer type questions. Each question carries 2 marks.

प्रश्न-5 सिद्ध कीजिए

$$\tan^{-1} 7 - \tan^{-1} 5 = \tan^{-1} \frac{1}{18} \quad [2]$$

Prove that

$$\tan^{-1} 7 - \tan^{-1} 5 = \tan^{-1} \frac{1}{18}$$

प्रश्न-6 यदि $y = e^{x^3}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

If $y = e^{x^3}$, then find the value of $\frac{dy}{dx}$.

प्रश्न-7 यदि $\begin{vmatrix} 3x & 7 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए। [2]

If $\begin{vmatrix} 3x & 7 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$, then find the value of x .

प्रश्न-8 यदि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ तथा $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ हों, तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

If $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ and $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, then evaluate $P\left(\frac{A}{B}\right)$.

[4]

प्रश्न-9 यदि एक रेखा के दिक् अनुपात $(2, -1, -2)$ हैं, तो इसकी दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए। [2]

If a line has direction ratio $(2, -1, -2)$, then determine its direction cosines.

प्रश्न-10 मान ज्ञात कीजिए

$$\int \frac{\sin(\log x)}{x} dx \quad [2]$$

Find the value of

$$\int \frac{\sin(\log x)}{x} dx$$

प्रश्न-11 $x = 3$ पर फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ के संतत की जाँच कीजिए। [2]

Check the continuity of the function $f(x) = 2x^2 - 1$ at $x = 3$.

प्रश्न-12 अवकल समीकरण को हल कीजिए : [2]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

Solve the differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

निर्देश : (स) प्रश्न क्रमांक 13 से 23 तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक 15, 18 एवं 21 में आंतरिक विकल्प हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (C) Question Nos. 13 to 23 are long answer type questions. Question Nos. 15, 18 and 22 have internal choice. Each question carries 4 marks.

प्रश्न-13 सिद्ध कीजिए

$$\begin{vmatrix} x & x+y & x+2y \\ x+2y & x & x+y \\ x+y & x+2y & x \end{vmatrix} = 9y^2(x+y) \quad [4]$$

Prove that

$$\begin{vmatrix} x & x+y & x+2y \\ x+2y & x & x+y \\ x+y & x+2y & x \end{vmatrix} = 9y^2(x+y)$$

प्रश्न-14 यदि $x = a (\cos t + t \sin t)$ और $y = a (\sin t - t \cos t)$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए। [4]

If $x = a (\cos t + t \sin t)$ and $y = a (\sin t - t \cos t)$, then find $\frac{d^2y}{dx^2}$.

प्रश्न-15 सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकों के समुच्चय Z में $R = \{(a, b) : \text{संख्या } 2, (a - b) \text{ को विभाजित करती है}\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। [4]

Prove that the relation R in set of integers Z given by $R = \{(a, b) : (a - b) \text{ is divisible by number } 2\}$ is an equivalence relation.

[6]

अथवा

OR

यदि $f: R \rightarrow R$ तथा $g: R \rightarrow R$ फलन क्रमशः $f(x) = \cos x$ तथा $g(x) = 3x^2$ द्वारा परिभाषित हैं, तो $g \circ f$ तथा $f \circ g$ ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए $g \circ f \neq f \circ g$.

Find $g \circ f$ and $f \circ g$ if $f: R \rightarrow R$ and $g: R \rightarrow R$ are given by $f(x) = \cos x$ and $g(x) = 3x^2$. Show that $g \circ f \neq f \circ g$.

प्रश्न-16 अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए : [4]

$$(1 + x^2)dy + 2xy dx = \cot x dx \quad (x \neq 0)$$

Find the general solution of the differential equation :

$$(1 + x^2)dy + 2xy dx = \cot x dx \quad (x \neq 0)$$

प्रश्न-17 सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = 4\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k}$ प्रत्येक पर लंब मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। [4]

Find unit vector normal to the vectors $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = 4\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k}$.

प्रश्न-18 एक घन का आयतन 9 सेमी.³/सेकण्ड की दर से बढ़ रहा है। यदि इसके कोर की लम्बाई 10 सेमी. है, तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है? [4]

The volume of a cube is increasing at a rate of 9 cm³/sec. How fast is the surface area increasing when the length of an edge is 10 cm?

[7]

अथवा

OR

अंतराल $[1, 5]$ में $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ द्वारा प्रदत्त फलन के निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम मानों को ज्ञात कीजिए।

Find the absolute maximum and absolute minimum values of a function given by $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ on the interval $[1, 5]$.

प्रश्न-19 मान ज्ञात कीजिए :

[4]

$$\int e^x \left(\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

Evaluate :

$$\int e^x \left(\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

प्रश्न-20 यदि $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ मात्रक सदिश इस प्रकार हैं कि $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$, तो

$\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

[4]

If $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ are unit vectors such that $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$, then find the

value of $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a}$.

प्रश्न-21 दो थैले A और B दिए हैं। थैले A में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं जबकि थैले B में 5 लाल और 6 काली गेंदें हैं। किसी एक थैले से यदृच्छया एक गेंद निकाली गई है, जो कि लाल रंग की है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद थैले B से निकाली गई है ? [4]

Two bags A and B are given. Bag A contains 3 red and 4 black balls while another bag B contains 5 red and 6 black balls. One ball is drawn at random from one of the bags and it is found to be red. Find the probability that it was drawn from bag B .

प्रश्न-22 सिद्ध कीजिए

$$\sin^{-1} \frac{3}{5} - \sin^{-1} \frac{8}{17} = \cos^{-1} \frac{84}{85} \quad [4]$$

Prove that

$$\sin^{-1} \frac{3}{5} - \sin^{-1} \frac{8}{17} = \cos^{-1} \frac{84}{85}$$

अथवा

OR

यदि $\tan^{-1} \frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of x if $\tan^{-1} \frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$.

प्रश्न-23 यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो A या B में से न्यूनतम एक के होने की प्रायिकता $= 1 - P(A') P(B')$ । सिद्ध कीजिए। [4]

If A and B are two independent events, then the probability of occurrence of at least one of A and B is equal to $1 - P(A') P(B')$. Prove.

निर्देश : (द) प्रश्न क्रमांक 24 से 29 तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक 27 एवं 29 में आंतरिक विकल्प का प्रावधान है। प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (D) Question Nos. 24 to 29 are long answer type questions. Question Nos. 27 and 29 have internal choice. Each question carries 6 marks.

प्रश्न-24 आलेखीय विधि द्वारा रेखीय प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत

$$x + 2y \geq 10, 3x + 4y \leq 24, x \geq 0, y \geq 0$$

$Z = 200x + 500y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। [6]

Solve the linear programming problem graphically subject to the constraints

$$x + 2y \geq 10, 3x + 4y \leq 24, x \geq 0, y \geq 0$$

Find the minimum value of $Z = 200x + 500y$.

प्रश्न-25 आव्यूह विधि से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए : [6]

$$x + y + z = 3$$

$$2x - y + z = 2$$

$$x - 2y + 3z = 2$$

Solve the following system of equations by matrix method :

$$x + y + z = 3$$

$$2x - y + z = 2$$

$$x - 2y + 3z = 2$$

प्रश्न-26 $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [6]

Find the value of $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx$.

[10]

प्रश्न-27 रेखाओं $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

[6]

Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \text{ and}$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

अथवा

OR

उस समतल का सदिश तथा कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (5, 2, -4) से जाता है और (2, 3, -1) दिक् अनुपात वाली रेखा पर लंब है।

Find the vector and Cartesian equation of the plane which passes through the point (5, 2, -4) and perpendicular to the line with direction ratio (2, 3, -1).

प्रश्न-28 यदि $y = (\tan^{-1}x)^2$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $(x^2 + 1)^2 y_2 + 2x(x^2 + 1)y_1 = 2$. [6]

If $y = (\tan^{-1}x)^2$, prove that $(x^2 + 1)^2 y_2 + 2x(x^2 + 1)y_1 = 2$.

प्रश्न-29 प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखाओं $x = 0$, $x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [6]

Find the area lying in the first quadrant and bounded by the circle $x^2 + y^2 = 4$ and the lines $x = 0$, $x = 2$.

[11]

अथवा

OR

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area of the region bounded by the ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

.....