ব্যৱসায়িক গণিত
আৰু
পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান

[উচ্চতৰ মাধ্যমিক দ্বিতীয় বাৰ্ষিকৰ পাঠ্যপুথি]

অসম উচ্চতৰ মাধ্যমিক শিক্ষা সংসদ
ৰাষ্ট্ৰীয় শৈক্ষিক গৱেষণা আৰু প্ৰশিক্ষণ পৰিষদৰ পাঠ্যক্ৰম গাঁথনি (২০০৫)ৰ আধাৰত

Byabosaik Ganit Aru Parisankha Bijnan : A textbook of Commerce for H.S. 2nd Year Assamese medium prepared by Assam Higher Secondary Education Council.

প্ৰথম প্ৰকাশ ঃ
এপ্ৰিল, ২০১১ (ব'হাগ, ১৪১৮)
দ্বিতীয় সংস্কৰণ ঃ জুন, ২০১৩
তৃতীয় সংস্কৰণ ঃ জুন, ২০২০
চতুৰ্থ সংস্কৰণ ঃ মে', ২০২২

মূল্য ঃ ১৭০.০০ টকা

পাঠ মুদ্ৰণ ঃ 70 জি এছ এম

বেটুপাত ঃ 150 জি এছ এম

অসম উচ্চতৰ মাধ্যমিক শিক্ষা সংসদৰ সচিবৰ দ্বাৰা প্ৰকাশিত
বামুণীমৈদাম, গুৱাহাটী-৭৮১০২১

মুদ্ৰক ঃ ছান বিম অফছেট
১, শংকৰদেৱ পথ
ৰূপনগৰ, গুৱাহাটী-৩২
e-mail :
sunbeampress.2007@gmail.com

অসম উচ্চতৰ মাধ্যমিক শিক্ষা সংসদৰ হৈ
ষ্টুডেণ্টচ্‌ ষ্ট'ৰচ্‌, **প্ৰকাশক আৰু গ্ৰন্থ-বিক্ৰেতা**
কলেজ হোষ্টেল ৰোড, পাণবজাৰ, গুৱাহাটী-৭৮১০০১

পাঠ্যপুথি প্ৰস্তুতি সমিতি

সদস্যসকল

সীতেশ চন্দ্ৰ চন্দ

অৱসৰপ্ৰাপ্ত অধ্যাপক, গুৱাহাটী বাণিজ্য মহাবিদ্যালয়

প্ৰাণজিৎ কুমাৰ দাস

মুৰব্বী, গণিত বিভাগ, বি.এইচ. কলেজ, হাউলী

অজন্তা মজুমদাৰ

জ্যেষ্ঠ প্ৰবক্তা, গুৱাহাটী বাণিজ্য মহাবিদ্যালয়

ৰুণজুন ফুকন

প্ৰবক্তা, কে.চি. দাস বাণিজ্য মহাবিদ্যালয়, গুৱাহাটী

সুদৰ্শন চৌধুৰী

প্ৰবক্তা, গুৱাহাটী বাণিজ্য মহাবিদ্যালয়

সম্পাদক তথা সদস্য সমন্বয়ক

সীতেশ চন্দ্ৰ চন্দ

ভূমিকা

বৰ্তমানৰ গোলকীয় যুগৰ পৰিপ্ৰেক্ষিতত পৃথিৱীৰ প্ৰতিখন দেশে প্ৰতিদিনে ইখনে আনখনৰ লগত বিভিন্ন ক্ষেত্ৰত জড়িত হৈ পৰিছে। এই সম্পৰ্ক কেৱল বাণিজ্যৰ ক্ষেত্ৰখনতেই সীমাবদ্ধ হৈ থকা নাই, বিজ্ঞান, গৱেষণা আৰু সভ্যতাৰ আন আন দিশলৈও সম্প্ৰসাৰিত হৈছে। ইয়াৰ ফলশ্ৰুতিত সমগ্ৰ বিশ্বখনেই এখনি গোলকীয় গাঁৱত পৰিণত হৈছে আৰু সমগ্ৰ মানৱ সমাজৰ ভৱিষ্যত এক উমৈহতীয়া বিষয় হৈ পৰিছে।

শিক্ষাৰ ক্ষেত্ৰত এই গোলকীয় যুগৰ প্ৰভাৱ সুদূৰ-প্ৰসাৰী। জ্ঞানৰ সীমাৰেখাত ৰৈ যোৱা খালী অংশবোৰ পূৰ্ণ কৰাৰ লগতে এই জ্ঞানৰ প্ৰসাৰৰ গতি অব্যাহত ৰখাৰ বাবে হেঁচাও আহি পৰিছে। নিত্য নতুন অধ্যয়নৰ ক্ষেত্ৰত মল কৰাৰ প্ৰয়োজনীয়তাৰ স্বাৰ্থত শৈক্ষিক অনুষ্ঠানবোৰে পাঠ্যক্ৰমৰ সমীক্ষণ কৰাৰ ব্যৱস্থাও ল'বলগীয়া হৈছে। ৰাষ্ট্ৰীয় শৈক্ষিক গৱেষণা তথা প্ৰশিক্ষণ পৰিষদ তথা বিশ্ববিদ্যালয় অনুদান আয়োগৰ লেখীয়া গৱেষণা প্ৰতিষ্ঠানবোৰত নতুন পাঠ্যক্ৰম আৰু পাঠ্যসূচী প্ৰৱৰ্তন কৰিবৰ বাবে অবিৰতভাৱে প্ৰয়াস আৰম্ভ হৈছে। এনে প্ৰচেষ্টাই জ্ঞানৰ উন্মেষ ঘটোৱাৰ লগতে ছাত্ৰ সমাজৰ শৈক্ষিক মান উন্নত কৰাত সহায় কৰিব।

অৰ্থনীতিৰ বিশ্বায়ন, তথ্য-প্ৰযুক্তিৰ নিত্য নতুন উদ্ভাৱন আৰু উৎপাদন প্ৰক্ৰিয়াত নতুন প্ৰযুক্তি ব্যৱহাৰৰ পৰিপ্ৰেক্ষিতত ৰাষ্ট্ৰীয় শৈক্ষিক গৱেষণা তথা প্ৰশিক্ষণ পৰিষদে ২০০৫ বৰ্ষত প্ৰথম শ্ৰেণীৰ পৰা দ্বাদশ শ্ৰেণীলৈ নতুন ৰাষ্ট্ৰীয় পাঠ্যক্ৰমৰ গাঁথনি (National Curriculum Framework 2005 or NCF-2005) প্ৰস্তুত কৰি উলিয়াইছে। এই গাঁথনিৰ জৰিয়তে উন্নয়নৰ বিষয় আৰু আন আন সামাজিক প্ৰসংগসমূহ সামৰি ৰাজ্যসমূহৰ পাঠ্যক্ৰম, পাঠ্যসূচী, শিক্ষণ-শিকন সামগ্ৰী আৰু শিক্ষকৰ অভিযোজিত আদান-প্ৰদান কৌশলৰ বাবে অৰ্হতা বৃদ্ধি কৰিবলৈ যত্ন কৰা হৈছে। ৰাষ্ট্ৰীয় শৈক্ষিক গৱেষণা তথা প্ৰশিক্ষণ পৰিষদে পাঠ্যসূচী প্ৰস্তুত কৰাৰ উপৰিও পাঠ্যক্ৰমৰ লগত ৰজিতা খুৱাই পাঠ্যপুথিৰ লেখীয়া মুদ্ৰণ আৰু অন্যান্য অমুদ্ৰণ (Non-printing) শিক্ষণ-শিকন সামগ্ৰী (Material) প্ৰস্তুত কৰি উলিয়াইছে। অসম উচ্চতৰ মাধ্যমিক শিক্ষা সংসদেও বিভিন্ন দিশ বিবেচনা কৰি এই সুবিধা গ্ৰহণ কৰিবলৈ আগবাঢ়িছে।

উচ্চতৰ মাধ্যমিক খণ্ডৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকললৈ গুণগত শিক্ষা আগবঢ়োৱাৰ লগতে যুগৰ প্ৰয়োজনীয়তা পূৰাবলৈ শিক্ষা সংসদে সময়ে সময়ে ইয়াৰ পাঠ্যক্ৰম আৰু পাঠ্যসূচী সংশোধন কৰি আহিছে। সৰ্বভাৰতীয় পাঠ্যক্ৰমৰ লগত সহ-অৱস্থান হোৱাকৈ ৰাষ্ট্ৰীয় শৈক্ষিক গৱেষণা তথা প্ৰশিক্ষণ পৰিষদে প্ৰস্তুত কৰি উলিওৱা ৰাষ্ট্ৰীয় পাঠ্যক্ৰমৰ গাঁথনি (NCF-2005)ৰ অসম উচ্চতৰ মাধ্যমিক শিক্ষা সংসদে যথেষ্ট পৰ্যালোচনাৰ অন্তত শেহতীয়াকৈ পাঠ্যক্ৰমৰ সংশোধন কৰিছে। এই ক্ষেত্ৰত ১২টা ঐচ্ছিক বিষয় আৰু মূল ইংৰাজী বিষয়ৰ পাঠ্যসূচী আৰু পাঠ্যপুথি সংসদে গ্ৰহণ কৰিছে। ইংৰাজী মাধ্যমৰ

পাঠ্যপুথিসমূহ অসমীয়া আৰু বাংলা মাধ্যমৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ চাহিদা পূৰাবলৈ বিশেষজ্ঞ ব্যক্তিৰ দ্বাৰা অনুবাদ কৰোৱা হৈছে। এই ছেগতে অনুবাদক তথা সম্পাদনা সমিতিৰ সদস্য তথা সমন্বয়সকলক অৰিহণাৰ বাবে শলাগ যাচিছোঁ। অক্ষৰ বিন্যাস, আৰ্হি পাঠক আৰু ছপাশালৰ কৰ্মীসকলক পাঠ্যপুথি ছপাৰ উপযোগী কৰি প্ৰস্তুত কৰি দিয়াৰ বাবে ধন্যবাদ জনাইছোঁ। ছাত্ৰ সমাজৰ হিত সাধন কৰিলে আমাৰ এই কাৰ্যই সফলতাৰ মুখ দেখিব। বিজ্ঞজনৰ পৰা গঠনমূলক দিহা-পৰামৰ্শ আগ্ৰহেৰে আশা কৰিলোঁ যাতে পৰৱৰ্তী তাঙৰণসমূহ উন্নত ৰূপত আগবঢ়াব পৰা যায়।

সচিব
অসম উচ্চতৰ মাধ্যমিক শিক্ষা সংসদ
বামুণীমৈদাম, গুৱাহাটী-২১

ভাৰতীয় সংবিধান
(Constitution of India)
প্ৰস্তাৱনা
(The Preamble)

আমি ভাৰতৰ জনগণে ভাৰতক এখন সাৰ্বভৌম সমাজবাদী ধৰ্মনিৰপেক্ষ লোকতান্ত্ৰিক গণৰাজ্যৰূপে গঠন কৰিবলৈ, তথা ইয়াৰ সকলো নাগৰিকৰ বাবে, সামাজিক, অৰ্থনৈতিক আৰু ৰাজনৈতিক ন্যায়, চিন্তা, অভিব্যক্তি, বিশ্বাস, ধৰ্ম আৰু উপাসনাৰ স্বাধীনতা, প্ৰতিষ্ঠা আৰু সুযোগৰ সমতা লাভ কৰিবলৈ আৰু তেওঁলোকৰ সকলোৰে মাজত ব্যক্তিৰ মৰ্যদা তথা জাতীয় ঐক্য আৰু সংহতি সুনিশ্চিতকাৰী ভ্ৰাতৃভাৱ বৃদ্ধি কৰিবলৈ নিষ্ঠা সহকাৰে সংকল্প কৰি— আমাৰ এই সংবিধান সভাত আজি ১৯৪৯ চনৰ নৱেম্বৰ মাহৰ ষষ্ঠবিংশদিৱসত এই সংবিধান গ্ৰহণ কৰিছোঁ, অধিনিয়মিত কৰিছোঁ আৰু নিজকে অৰ্পণ কৰিছোঁ।

সূচীপত্ৰ

 ~~Blank~~

প্ৰথম অধ্যায়

সৰল সুত আৰু চক্ৰবৃদ্ধি সুত, বাৰ্ষিকী

ভূমিকা ঃ

কোনো ব্যক্তিক ধাৰলৈ দিয়া টকাৰ ওপৰত সুত লোৱা কথাষাৰ নতুন নহয়। বিভিন্ন পৰিস্থিতিত বা অৱস্থাত সুত শব্দটোৰ ব্যৱহাৰ আমি পাই আহিছোঁ। যেনে— কাবুলীৱালা, সদাগৰ অথবা ব্যক্তি বিশেষৰ পৰা মানুহে টকা ধাৰলৈ লয়। আনকি কোনো কাম সমাধা কৰিবলৈ কেতিয়াবা চৰকাৰেও বেলেগ ৰাজ্য বা ডাঙৰ ব্যৱসায়ীৰ পৰা টকা ধাৰলৈ ল'ব লগা হয়। ধাৰ দিওঁতাই বিনা স্বাৰ্থত টকা ধাৰলৈ নিদিয়ে। বৰং ধাৰ লওঁতাৰ পৰা ধাৰৰ টকাৰ ওপৰত এটা নিৰ্দিষ্ট সময়লৈ ধাৰ দিওঁতাসকলে ওপৰঞ্চি লাভ অৰ্জন কৰে। এই ওপৰঞ্চি লাভকেই সচৰাচৰ সুত বা সেৱামূল্য বুলি জনা যায়। এই প্ৰসংগত উল্লেখ কৰিব পাৰি যে ধাৰ লোৱা মানুহজনৰো লাভ হয়। কিয়নো ধাৰৰ টকাৰে তেওঁ হাতত লোৱা কোনো কাম সম্পন্ন কৰিব পাৰে আৰু সেই কামখিনি (সম্পত্তি)ৰ পৰা ভৱিষ্যতে তেওঁৰ লাভ হয়। প্ৰথমতে আমি সৰল সুত সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

সৰল সুত

মূলধন (আচল), সুতমূল আৰু সুতৰ হাৰ ঃ

মানুহ এজনৰ হাতত থকা টকা-পইচা বা ধাৰলৈ লোৱা টকাৰ পৰিমাণকেই মূলধন বা আচল বুলি কোৱা হয়।

খটুওৱা মূলধন আৰু সুতৰ যোগফলকেই সুদাচল বুলি জনা যায়।

$\therefore$ সুতমূল = আচল বা মূলধন + সুত।

মূলধনৰ ওপৰত এটা নিৰ্দিষ্ট হাৰত এটা নিৰ্দিষ্ট সময়লৈকে সুত গণনা কৰা হয়। সুতৰ হাৰ সাধাৰণতে শতকৰা হিচাপত প্ৰকাশ কৰা হয়। যেনে— সুতৰ হাৰ শতকৰা বছৰি 5 ভাগ অৰ্থাৎ সুতৰ হাৰ 5%।

সুতৰ হাৰ 5% কথাষাৰৰ অৰ্থ হ'ল— 100 টকা মূলধনৰ 1 বছৰত সুত 5 টকা।

টোকা ঃ

1. **সুতৰ হাৰ নিৰ্ধাৰণ ঃ** ধাৰলৈ লোৱা টকা বা জমা দিয়া টকা, সময় আৰু দায়িত্ব বা আশংকা বহনৰ ধৰণৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে।
2. সৰল সুতৰ ক্ষেত্ৰত মূলধন নিৰ্দিষ্ট সময়লৈ স্থিৰ থাকে আৰু প্ৰতি বছৰে একেটা মূলধনৰ ওপৰত সুত গণনা কৰা হয়।
3. লিপিয়াৰ বছৰত মুঠ দিনৰ সংখ্যা = 366, ফেব্ৰুৱাৰী মাহ 29 দিনত হয়। যিটো বছৰ 4-ৰে বিভাজ্য হয় তাক লিপিয়াৰ বছৰ বোলা হয়। যেনে— 2000 চনটো লিপিয়াৰ।
   4-ৰে বিভাজ্য নোহোৱা বছৰত 365 দিন হয়।
   এটা বছৰত 52 সপ্তাহ হয়।

4. সুত বুলিলে সৰল সুতকেই বুজায়।
5. এটা তাৰিখৰ পৰা অইন এটা তাৰিখলৈ দিন গণনা কৰাৰ সময়ত মূৰৰ দিন দুটাৰ এটা লোৱা হয়। যেনে— কোনো এটা বছৰৰ 15 মাৰ্চৰ পৰা 18 জুনলৈ দিনৰ সংখ্যা—

$$= \underset{\text{মাৰ্চ}}{\underset{\downarrow}{16}} + \underset{\text{এপ্ৰিল}}{\underset{\downarrow}{30}} + \underset{\text{মে'}}{\underset{\downarrow}{31}} + \underset{\text{জুন}}{\underset{\downarrow}{18}}$$
$$= 95$$

সৰল সুতত ব্যৱহাৰ হোৱা কেইটামান প্ৰতীক চিন ঃ

1. P = মূলধন বা আচল।
2. I বা S.I. = সৰলসুত।
3. A = সুতমূল
4. n = বছৰৰ সংখ্যা (মূলধন যিমান বছৰলৈ খটুওৱা হৈছে)।
5. r% = সুতৰ শতকৰা হাৰ।

সৰল সুতৰ সূত্ৰবোৰ ঃ

1. $I = \dfrac{P.r.n}{100}$
2. $P = \dfrac{100I}{rn}$
3. $r = \dfrac{100I}{P.n}$
4. $n = \dfrac{100I}{Pr}$
5. $A = P + I = P + \dfrac{Prn}{100} = P\left(1 + \dfrac{rn}{100}\right)$

টোকা ঃ

1. ওপৰৰ সূত্ৰবোৰত 'n' প্ৰতীকটো বছৰত ধৰা হৈছে। সময় মাহত থাকিলে, মাহৰ সংখ্যাক 12ৰে হৰণ কৰি ল'বা। সময় দিনত থাকিলে, দিনৰ সংখ্যাক 365ৰে হৰণ কৰি ল'বা। সময় সপ্তাহত থাকিলে, সপ্তাহৰ সংখ্যাক 52ৰে হৰণ কৰি ল'বা।
2. সুতৰ হাৰ $3\frac{1}{2}\% = \dfrac{3\frac{1}{2}}{100} = \dfrac{7}{200} = 0.035$

আগতে উল্লেখ কৰা সূত্ৰকেইটাৰ ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

মূলধন বা আচল নিৰ্ধাৰণ ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ বছৰি 6% সুতৰ হাৰত কি পৰিমাণৰ মূলধন 4 বছৰত সুতেমূলে 620 টকা হ'ব?

সমাধান ঃ ইয়াত, A = 620 টকা, n = 4 বছৰ, সুতৰ হাৰ অৰ্থাৎ r = বছৰি 6%, P = ?

আমি জানো, $A = P\left(1+\frac{rn}{100}\right)$

$$\Rightarrow 620 = P\left(1+\frac{6\times 4}{100}\right) = P.\frac{124}{100}$$

$$\therefore P = \frac{620\times 100}{124} \text{ টকা} = 500 \text{ টকা}$$

এতেকে, নিৰ্ণেয় মূলধনৰ পৰিমাণ = 500 টকা।

উদাহৰণ 2 ঃ 5 মাহ আগতে ধাৰলৈ লোৱা টকা পৰিশোধ কৰিবলৈ 529.75 টকা আদায় দিব বুলি মানুহ এজনে মান্তি হ'ল। যদি সুতৰ হাৰ বছৰি $4\frac{1}{2}\%$ হয়, তেন্তে ধাৰলৈ লোৱা টকাৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত, A = 529.75 টকা, n = 5 মাহ = $\frac{5}{12}$ বছৰ

r = বছৰি $4\frac{1}{2}\%$, P = ?

আমি জানো, $A = P\left(1+\frac{rn}{100}\right)$

$$\Rightarrow 529.75 = P\left(1+\frac{\frac{9}{2}.\frac{5}{12}}{100}\right) = P.\frac{2445}{2400}$$

$$\therefore P = \frac{529.75\times 2400}{2445} = \frac{52975\times 24}{2445} = 520 \text{ টকা}$$

এতেকে, ধাৰলৈ লোৱা টকাৰ পৰিমাণ = 520 টকা।

উদাহৰণ 3 ঃ কোনো এক সৰল সুতৰ হাৰত 1706 টকা 20 বছৰত সুতেমূলে 3412 টকা হ'লে কি পৰিমাণৰ মূলধন একে হাৰত 6 বছৰত 5200 টকা হ'ব?

সমাধান ঃ ইয়াত, P = 1706 টকা, A = 3412 টকা, n = 20 বছৰ।

ধৰা হ'ল সুতৰ হাৰ বছৰি r%।

এতিয়া, I = A – P = (3412 – 1706) টকা = 1706 টকা

আমি জানো, $I = \frac{P.r.n}{100}$

$\Rightarrow \quad 1706 = \frac{1706 \times r \times 20}{100}$

$\therefore \quad r = 5\%$

আকৌ, $A_1 = P_1\left(1+\frac{rn}{100}\right)$

$\Rightarrow \quad 5200 = P_1\left(1+\frac{5\times 6}{100}\right)$

$\therefore \quad P_1 = \frac{5200\times 100}{130}$ টকা

$= 4,000$ টকা

[য'ত সুদাচল A_1 (ধৰা হ'ল) = 5200 টকা
আচল = P_1 (ধৰা হ'ল)
সুতৰ হাৰ আগৰ দৰে]

$\therefore$ নিৰ্ণেয় মূলধনৰ পৰিমাণ = 4,000 টকা।

সুতৰ হাৰ, সময় আৰু সুত নিৰ্ধাৰণ ঃ

উদাহৰণ 4 ঃ কোনো এক মূলধনৰ 8 বছৰৰ সুত মূলধনৰ $\frac{2}{5}$ হ'লে, সুতৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল মূলধনৰ পৰিমাণ 100 টকা।

প্ৰশ্নমতে, সুত = 100 টকাৰ $\frac{2}{5}$ = 40 টকা, ইয়াত n = 8 বছৰ

ধৰা হ'ল, সুতৰ হাৰ বছৰি r%।

এতিয়া, $I = \frac{Pr.n}{100}$

$\Rightarrow \quad 40 = \frac{100\times r\times 8}{100}$

$\therefore \quad r = 5\%$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সুতৰ হাৰ বছৰি 5%।

উদাহৰণ 5 ঃ সৰল সুতত কোনো মূলধন 20 বছৰত দুগুণ হ'লে, কেই বছৰৰ মূৰত তিনিগুণ হ'ব?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল মূলধনৰ পৰিমাণ 100 টকা আৰু সুতৰ হাৰ বছৰি r%

ইয়াত, n = 20 বছৰ, A = 200 টকা

আমি জানো, $A = P\left(1+\frac{rn}{100}\right)$

$\Rightarrow 200 = 100\left(1+\frac{r.20}{100}\right) \;\therefore\; r = 5\%$

আকৌ, প্ৰশ্নমতে, A = 300 টকা, r = 5%, n = ?

আমি জানো, $A = P\left(1+\frac{rn}{100}\right)$

$\Rightarrow 300 = 100\left(1+\frac{5n}{100}\right)$

$\therefore$ n = 40 বছৰ

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সময় = 40 বছৰ।

উদাহৰণ 6 ঃ 31 ডিচেম্বৰত এজন মানুহে 500 টকা 8 মাহৰ বাবে বেংকৰ পৰা ধাৰ লয়। 5 মাহ পিছত তেওঁ 372 টকা আদায় দিয়ে আৰু বাকী টকা সুতসহ 31 আগষ্টত আদায় দিয়ে। যদি বাকী থকা টকাৰ পৰিমাণ 137.61 টকা হয়, তেন্তে বেংকৰ সুতৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, সুতৰ হাৰ বছৰি r%

মুঠ সুতৰ পৰিমাণ = 500 টকাৰ 5 মাহৰ সুত + (500 – 372) অৰ্থাৎ 128 টকাৰ 3 মাহৰ সুত

$= \left(\frac{500\times r\times 5}{12\times 100}+\frac{128\times r\times 3}{12\times 100}\right)$

$= \frac{2884r}{1200}$

মানুহজনে মুঠ আদায় দিয়া টকাৰ পৰিমাণ = (372 + 137.61) টকা
= 509.61 টকা

আদায় দিয়া মুঠ সুতৰ পৰিমাণ = (509.61 – 500) টকা = 9.61 টকা

এতেকে, $9.61 = \frac{2884r}{1200} \;\therefore\; r = 4\%$ (প্ৰায়)

নিৰ্ণেয় বছৰি সুতৰ হাৰ = 4% (প্ৰায়)

উদাহৰণ 7 ঃ 2003 চনৰ 15 জুলাইৰ পৰা 26 ছেপ্টেম্বৰলৈ 5600 টকাৰ বছৰি 12% সুতৰ হাৰত সুতৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত, P = 5600 টকা, r = 12%,

n = 15 জুলাইৰ পৰা 26 ছেপ্টেম্বৰলৈ দিনৰ সংখ্যা = 16 + 31 + 26 = 73

এতিয়া, $I = \frac{P.rn}{100} = \frac{5600\times 12\times 73}{365\times 100} = 134.40$ টকা

নিৰ্ণেয় সুতৰ পৰিমাণ = 134.40 টকা।

উদাহৰণ 8 ঃ কোনো এক সুতৰ হাৰত কোনো মূলধন 3 বছৰত সুতেমূলে 560 টকা আৰু 5 বছৰত সুতেমূলে 600 টকা হ'লে মূলধন আৰু সুতৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ 5 বছৰৰ সুদাচল = 600 টকা
3 বছৰৰ সুদাচল = 560 টকা

$\therefore$ 2 বছৰৰ সুত = 40 টকা
আৰু 3 বছৰৰ সুত = 60 টকা

এতিয়া, I = A – P

$\Rightarrow$ 60 = 560 – P $\therefore$ P = 500 টকা

আকৌ, $I = \frac{P.rn}{100}$

$\Rightarrow 60 = \frac{500 \times r \times 3}{100}$ $\therefore$ r = 4%, য'ত সুতৰ হাৰ বছৰি r%

$\therefore$ নিৰ্ণেয় মূলধন = 500 টকা

আৰু সুতৰ হাৰ বছৰি = 4%

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 9 ঃ এজন মানুহে 100 টকা পাৰ্থক্যৰ দুবিধ মূলধন একেসময়ত ক্ৰমে বছৰি শতকৰা 5 ভাগ আৰু বছৰি শতকৰা $6\frac{1}{4}$ ভাগ সৰল সুতৰ হাৰত ধাৰলৈ ল'লে। 5 বছৰ পিছত সুতসহ টকাখিনি পৰিশোধ কৰিলে। যদি প্ৰতিবিধ ধাৰৰ টকাৰ বাবে সমপৰিমাণৰ টকা আদায় দিয়া হয় তেন্তে প্ৰত্যেক বিধ ধাৰৰ টকাৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, 5% সুতৰ হাৰত প্ৰথমবিধ ধাৰৰ টকাৰ পৰিমাণ আছিল x টকা।

$\therefore$ $6\frac{1}{4}$% সুতৰ হাৰত দ্বিতীয়বিধ ধাৰৰ টকাৰ পৰিমাণ হ'ব $(x - 100)$ টকা।

এতিয়া, প্ৰথমবিধ মূলধনৰ সুদাচল $= x\left(1+\frac{5\times 5}{100}\right)$

$= \frac{5x}{4}$ টকা

দ্বিতীয় বিধ মূলধনৰ সুদাচল $= (x - 100)\left(1+\frac{\frac{25}{4}\times 5}{100}\right)$

$= (x - 100) \times \frac{21}{16}$ টকা

[$\because$ দ্বিতীয় বিধ ধাৰৰ টকাৰ সুতৰ হাৰ প্ৰথমবিধ ধাৰৰ টকাৰ সুতৰ হাৰতকৈ বেছি আৰু একে সময়ত দুয়োবিধৰ সুদাচল একেই হয়]

প্ৰশ্নমতে, $\frac{21}{16}(x-100) = \frac{5x}{4}$

$\Rightarrow \frac{21}{4}(x-100) = 5x$

$\Rightarrow 21x - 20x = 2100 \therefore x = 2100$ টকা

$\therefore$ 5% সুতৰ হাৰত ধাৰৰ টকাৰ পৰিমাণ = 2100 টকা

আৰু $6\frac{1}{4}\%$ সুতৰ হাৰত ধাৰৰ টকাৰ পৰিমাণ = (2100 – 100) টকা = 2000 টকা।

উদাহৰণ 10 ঃ অৰুণে বেলেগ বেলেগ বেংকত মুঠতে 15000 টকা জমা থ'লে। বেংকৰ সুতৰ হাৰ ক্ৰমে বছৰি 3% আৰু বছৰি $2\frac{1}{2}\%$। এবছৰৰ মূৰত তেওঁ মুঠতে 432.75 টকা সুত হিচাপে পালে। কি কি পৰিমাণৰ মূলধন বেংক দুটাত জমা থোৱা হৈছিল?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, 3% সুতৰ হাৰত x টকা জমা থোৱা হৈছিল।

$\therefore$ $2\frac{1}{2}\%$ সুতৰ হাৰত জমা থোৱা টকাৰ পৰিমাণ = $(15000 - x)$ টকা

এবছৰত মুঠ সুতৰ পৰিমাণ = $\left[\frac{x \times 3 \times 1}{100} + \frac{(15000 - x) \times \frac{5}{2} \times 1}{100}\right]$ টকা

$\Rightarrow 432.75 = \frac{1}{100}\left[3x + \frac{5(15000 - x)}{2}\right]$ টকা

$\Rightarrow \frac{4375}{100} = \frac{1}{100} \cdot \frac{x + 75000}{2}$

$\therefore x = 11,550$ টকা (সৰল কৰাৰ পিছত)

$\therefore$ 3% সুতৰ হাৰত জমা থোৱা টকাৰ পৰিমাণ = 11,550 টকা

$2\frac{1}{2}\%$ সুতৰ হাৰত জমা থোৱা টকাৰ পৰিমাণ = (15000 – 11,550) টকা

= 3,450 টকা

উদাহৰণ 11 ঃ পুতুলে কোনো সৰল সুতৰ হাৰত 7500 টকা 2 বছৰৰ কাৰণে ধাৰলৈ ল'লে আৰু আগতকৈ 1% বেছি সুতৰ হাৰত 6000 টকা 1 বছৰৰ কাৰণে ধাৰলৈ ল'লে। দুয়োবিধ ধাৰৰ টকাৰ সুতৰ বাবদ তেওঁ মুঠতে 2580 টকা আদায় দিলে। দুয়োবিধ সুতৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, 7500 টকাৰ ক্ষেত্ৰত সুতৰ হাৰ আছিল বছৰি r%।

$\therefore$ 6000 টকাৰ ক্ষেত্ৰত সুতৰ হাৰ হ'ব বছৰি $(r + 1)\%$

এতিয়া, দুয়োবিধ ধাৰ টকাৰ মুঠ সুত $= \frac{7500 \times r \times 2}{100} + \frac{600(r+1) \times 1}{100}$ টকা

$= 150r + 60\,(r + 1)$ টকা

প্ৰশ্নমতে, $150r + 60(r + 1) = 2580$

$\therefore\ r = 12\%$

এতেকে, সুতৰ হাৰ দুটা ক্ৰমে 12% আৰু 13%।

উদাহৰণ 12 ঃ যদি একেই সুতৰ হাৰত 3 বছৰত 1800 টকাৰ সুত 1650 টকাৰ সুততকৈ 45 টকা বেছি হয়, তেন্তে সুতৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, সুতৰ হাৰ বছৰি r%।

প্ৰশ্নমতে, $\dfrac{1800 \times r \times 3}{100} - \dfrac{1650 \times r \times 3}{100} = 45$

সমাধা কৰি পাওঁ $r = 10\%$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সুতৰ হাৰ = 10%

উদাহৰণ 13 ঃ বছৰি 14.5% সুতৰ হাৰত কোনো মূলধনৰ 3 বছৰ আৰু $4\frac{1}{2}$ বছৰৰ সুতৰ অন্তৰ 696 টকা হ'লে, মূলধন নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, মূলধনৰ পৰিমাণ 100 টকা

প্ৰশ্নমতে, সুতৰ পাৰ্থক্য = $\left(\dfrac{100 \times 29 \times 9}{2 \times 100 \times 2} - \dfrac{100 \times 29 \times 3}{2 \times 100}\right)$ টকা = $\dfrac{87}{4}$ টকা

পাৰ্থক্য (টকাত)	মূলধনৰ পৰিমাণ (টকাত)
$\frac{87}{4}$	100
696	x

$\therefore\ x = 100 \times \dfrac{2}{87} \times 696 = 1600$ টকা

$\therefore$ নিৰ্ণেয় মূলধন = 1600 টকা

উদাহৰণ 14 ঃ এজন মানুহে 6400 টকা ধাৰলৈ ল'লে। 2 বছৰ 3 মাহ পিছত তেওঁ 6136 টকা নগদ আদায় দিলে আৰু লগতে এখন চাইকেলও দি ঋণমুক্ত হ'ল। যদি সুতৰ হাৰ বছৰি $3\frac{1}{2}\%$ হয় তেন্তে চাইকেলখনৰ মূল্য নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত, P = 6400 টকা, সময় = 2 বছৰ 3 মাহ = $2\dfrac{3}{12} = \dfrac{9}{4}$ বছৰ, $r = \dfrac{7}{2}\%$

এতিয়া, $A = P\left(1 + \dfrac{rn}{100}\right) \quad = 6400\left(1 + \dfrac{\frac{7}{2} \times \frac{9}{4}}{100}\right)$

= 6904 টকা = সুদাচল

এতেকে চাইকেলখনৰ মূল্য (6904 – 6136) টকা = 768 টকা।

উদাহৰণ 15 ঃ মানুহ এজনে 10 বছৰৰ আৰু 16 বছৰৰ পুতেক দুজনৰ কাৰণে 1,30,000 টকা এৰি থৈ গ'ল, যাতে প্ৰত্যেকৰে বয়স 18 বছৰ হ'লে সমপৰিমাণৰ টকা দুয়োজনেই পায়। যদি সুতৰ হাৰ বছৰি $12\frac{1}{2}\%$ হয় তেন্তে ডাঙৰ ল'ৰাজনে প্ৰথমতে কিমান টকা পাইছিল?

সমাধান ঃ 2 বছৰ পিছত ডাঙৰ পুতেকজনৰ বয়স 18 বছৰ হ'ব।
8 বছৰ পিছত সৰু পুতেকজনৰ বয়স 18 বছৰ হ'ব।
ধৰা হ'ল, প্ৰথমতে ডাঙৰ পুতেকজনে x টকা পাইছিল।
$\therefore$ প্ৰথমতে সৰু পুতেকজনে $(130000 - x)$ টকা পাইছিল।

এতিয়া, 2 বছৰ পিছত ডাঙৰ পুতেকজনৰ টকাৰ সুদাচল $= x\left(1+\frac{25\times 2}{2\times 100}\right)$ টকা $= \frac{5x}{4}$ টকা

8 বছৰ পিছত সৰু পুতেকজনৰ টকাৰ সুদাচল $= (130000-x)\left\{1+\frac{25\times 8}{2\times 100}\right\}$

$= (130000-x) \times 2$ টকা

প্ৰশ্নমতে, $\frac{5x}{4} = 2(130000-x)$

$\therefore$ $x = 80,000$ টকা (সমাধান কৰি)

এতেকে, প্ৰথমতে ডাঙৰ পুতেকজনে 80,000 টকা পাইছিল।

অনুশীলনী

1. সুনীলে বছৰি 7.5% সুতৰ হাৰত 7500 টকা $2\frac{1}{2}$ বছৰৰ কাৰণে ধাৰলৈ ল'লে। নিৰ্ধাৰিত সময়ৰ শেষত তেওঁ কিমান টকা আদায় দিব লাগিব?
   উত্তৰ ঃ 10218.75 টকা।
2. 1200 টকা 2 বছৰৰ কাৰণে সৰল সুতত ধাৰলৈ দিয়া হ'ল। ধাৰ দিওঁতাই 1536 টকা পালে। সুতৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰা।
   উত্তৰ ঃ 14%
3. কিমান সময়ৰ মূৰত 5000 টকাৰ বছৰি $5\frac{1}{2}\%$ সুতৰ হাৰত 1100 টকা সুত হ'ব?
   উত্তৰ ঃ 4 বছৰ।
4. কোনো এক নিৰ্দিষ্ট সময়ত 1200 টকা বছৰি 10% সুতৰ হাৰত 1560 টকা হয়। কি পৰিমাণৰ মূলধন বছৰি 8% সুতৰ হাৰত একে সময়ত 2232 টকা হ'ব নিৰ্ণয় কৰা।
   উত্তৰ ঃ 1800 টকা।

5. এজন মানুহে 10,000 টকাৰ কিছু অংশ বছৰি 12% সুতৰ হাৰত $2\frac{1}{2}$ বছৰৰ কাৰণে আৰু বাকী অংশ বছৰি 12.5% সুতৰ হাৰত 2 বছৰৰ কাৰণে নিয়োগ কৰি মুঠতে 2700 টকা সুত হিচাপে পালে। প্ৰত্যেক ক্ষেত্ৰতেই নিয়োজিত মূলধনৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰা।
উত্তৰ ঃ 4000 টকা, 6000 টকা।

6. এজন মানুহে বছৰি 2% সুতৰ হাৰত কোনো এটা বছৰৰ 20 এপ্ৰিলত কোনো এটা কোম্পানীত 5000 টকা বিনিয়োগ কৰিলে। 15 মে'ত তেওঁ 3000 টকা উঠাই ল'লে আৰু 6 জুনত 4000 টকা কোম্পানীত জমা দিলে। 30 জুন তাৰিখত তেওঁ কিমান সুত পাব?
উত্তৰ ঃ 17.21 টকা (প্ৰায়)।

7. কোনো মূলধন 2 বছৰত সুতেমূলে 4720 টকা আৰু $3\frac{1}{2}$ বছৰত 5260 টকা হ'লে মূলধন আৰু সুতৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰা।
উত্তৰ ঃ 4000 টকা, 9%

8. এজন মানুহে বছৰি 6% আৰু বছৰি 5% সুতৰ হাৰত ক্ৰমে 250 টকা আৰু 350 টকা ধাৰলৈ ল'লে আৰু দুয়োটা ধাৰৰ টকা প্ৰত্যেকৰে সুতমূল 730 টকা হ'লেহে আদায় দিয়া হ'ব বুলি চুক্তিবদ্ধ হ'ল। ধাৰৰ টকা কিমান বছৰলৈ চলিব?
উত্তৰ ঃ 4 বছৰ।

9. বেংক A আৰু বেংক B-ত সুতৰ হাৰৰ অনুপাত 5 : 4। এজন মানুহে তেওঁৰ টকাখিনি বেংক দুটাত এনেদৰে খটুৱাব খোজে যে প্ৰত্যেকটো বেংকৰ পৰা সমপৰিমাণৰ ছয়মাহিলী সুত পাব পাৰে। বেংক A আৰু বেংক B-ত কি অনুপাতত টকাখিনি তেওঁ খটুৱাব?
উত্তৰ ঃ 4 : 5

10. 1680 টকা $7\frac{1}{2}$ বছৰত সুতেমূলে 2352 টকা হয়। একেই সুতৰ হাৰত কিমান বছৰৰ মূৰত 1350 টকা সুতেমূলে 1782 টকা হ'ব?
উত্তৰ ঃ 6 বছৰ।

11. কি সুতৰ হাৰত 1500 টকাৰ 5 বছৰৰ সুত 3125 টকাৰ বছৰি 4% সুতৰ হাৰত 3 বছৰৰ সুতৰ সমান হ'ব?
উত্তৰ ঃ 5%

12. অমিত আৰু বিপিনে একে সময়তে একে হাৰত প্ৰত্যেকে 800 টকা ক্ৰমে 3 বছৰ আৰু 6 বছৰৰ কাৰণে ধাৰলৈ ল'লে। অমিতে 1052 টকা আদায় দি ঋণমুক্ত হ'ল। বিপিনে কিমান টকা আদায় দিলে ঋণমুক্ত হ'ব পাৰিব?
উত্তৰ ঃ 1304 টকা।

চক্ৰবৃদ্ধি সুত

সৰল সুত আৰু চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ পাৰ্থক্য ঃ

সৰল সুতৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰতি বছৰে প্ৰাথমিক মূলধনৰ ওপৰত সুত গণনা কৰা হয় আৰু প্ৰতি বছৰৰ সুত মূলধনৰ লগত যোগ নহয় অৰ্থাৎ নিৰ্দিষ্ট সময়লৈকে মূলধন একেটাই থাকে।

আনহাতে, চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰতি বছৰ (পৰ্ব)ৰ মূৰে মূৰে মূলধনৰ পৰিৱৰ্তন হয়, কিয়নো প্ৰতি পৰ্বৰ সুত মূলধনৰ লগত যোগ হৈ নতুন মূলধন সৃষ্টি কৰে আৰু পৰৱৰ্তী পৰ্বৰ সুত নতুন মূলধনৰ ওপৰত গণনা কৰা হয়। চক্ৰবৃদ্ধি সুত সাধাৰণতে বছৰৰ মূৰত গণনা কৰা হয়। বিনিয়োগকাৰীৰ সুবিধাৰ কাৰণে সুত ছমাহৰ মূৰত নাইবা তিনিমাহৰ মূৰত নাইবা এমাহৰ মূৰত দিয়া হয়।

সুত বছৰেকীয়া আদায় দিয়া হ'লে কোনো মূলধনৰ এবছৰত সৰল সুত আৰু চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ মাজত কোনো পাৰ্থক্য নাথাকে। দ্বিতীয় বছৰৰ শেষৰ পৰা পাৰ্থক্য আৰম্ভ হয়, কিয়নো প্ৰথম বছৰৰ শেষত সুত মূলধনৰ লগত যোগ হৈ নতুন মূলধন সৃষ্টি হয় আৰু এই নতুন মূলধনৰ ওপৰত দ্বিতীয় বছৰৰ কাৰণে সুত গণনা কৰা হয়। সেয়েহে দ্বিতীয় বছৰৰ চক্ৰবৃদ্ধি সুত প্ৰথম বছৰৰ সৰল সুততকৈ বেছি হয়।

চক্ৰবৃদ্ধি সুত গণনাৰ সাধাৰণ পদ্ধতি ঃ

এই পদ্ধতিটো এটা উদাহৰণেৰে ব্যাখ্যা কৰা হ'ল—

উদাহৰণ ঃ বছৰি 5% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত 500 টকাৰ 3 বছৰৰ চক্ৰবৃদ্ধি সুত নিৰ্ণয় কৰা, সুত প্ৰতি বছৰৰ মূৰে মূৰে দিয়া হয়।

সমাধান ঃ প্ৰাথমিক মূলধন = 500 টকা

প্ৰথম বছৰৰ সুত = 25 টকা (500 টকাৰ 5% = 25 টকা)

দ্বিতীয় বছৰৰ আৰম্ভণিত মূলধন = 525 টকা

দ্বিতীয় বছৰৰ সুত = 26.25 টকা (525 টকাৰ 5% = 26.25 টকা)

তৃতীয় বছৰৰ আৰম্ভণিত মূলধন = 551.25 টকা

তৃতীয় বছৰৰ সুত = 27.5625 টকা (551.25 টকাৰ 5% = 27.5625 টকা)

তৃতীয় বছৰৰ শেষত সবৃদ্ধিমূল = 578.8125 টকা

$\therefore$ নিৰ্ণেয় চক্ৰবৃদ্ধি সুত = সবৃদ্ধিমূল – মূলধন = (578.8125 – 500) টকা

= 78.81 টকা (প্ৰায়)

টোকা ঃ

1. গণনা কাৰ্য চতুৰ্থ দশমিক স্থানলৈ কৰিবা।
2. বছৰৰ সংখ্যা বেছি হ'লে আৰু সুতৰ হাৰ ভগ্নাংশত থাকিলে ওপৰৰ পদ্ধতিত গণনা কাৰ্য টান হয়। সেয়েহে লগাৰিথম পদ্ধতি অৱলম্বন কৰা সুবিধাজনক।

চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ সূত্ৰ ঃ

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, মূলধন P টকা, বছৰৰ সংখ্যা 'n', সুতৰ হাৰ বছৰি r% (সুত বছৰৰ মূৰে মূৰে দিয়া হয়) আৰু n বছৰৰ অন্তত সবৃদ্ধিমূল A টকা।

ধৰা হ'ল, i = 1 টকাৰ 1 বছৰৰ সুত = $\frac{r}{100}$ অৰ্থাৎ, $i = \frac{r}{100}$

প্ৰাথমিক মূলধন = P টকা

প্ৰথম বছৰৰ সুত = P. i টকা

দ্বিতীয় বছৰৰ আৰম্ভণিত মূলধন = $(P + Pi) = P(1 + i)$ = প্ৰথম বছৰৰ শেষত সবৃদ্ধিমূল

দ্বিতীয় বছৰৰ সুত $= P(1 + i).i$

$= P(1 + i) + P(1 + i).i$

$= P(1 + i)(1 + i)$

তৃতীয় বছৰৰ আৰম্ভণিত মূলধন = $P(1 + i)^2$ = দ্বিতীয় বছৰৰ শেষত সবৃদ্ধিমূল ইত্যাদি।

$\therefore$ n বছৰৰ অন্তত সবৃদ্ধিমূল = $P(1 + i)^n$

অৰ্থাৎ, $\boxed{A = P(1 + i)^n}$ .... (1)

সুত বছৰৰ মূৰে মূৰে দিয়া হ'লে (1) নং সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ হয়।

সুত ছমাহৰ মূৰে মূৰে দিয়া হ'লে সূত্ৰটো হ'ব

$$= A = P(1 + \frac{i}{2})^{2n} \quad .... (2)$$

সুত তিনি মাহৰ মূৰে মূৰে দিয়া হ'লে সূত্ৰটো হ'ব

$$= A = P(1 + \frac{i}{4})^{4n} \quad .... (3)$$

সুত মাহৰ মূৰে মূৰে দিয়া হ'লে সূত্ৰটো হ'ব—

$$= A = P(1 + \frac{i}{12})^{12n} \quad .... (4)$$

টোকা ঃ যদি সুতৰ হাৰ বিভিন্ন বছৰ (পৰ্ব)ৰ কাৰণে বেলেগ বেলেগ হয়, তেন্তে—

1. প্ৰথম 1 বছৰৰ কাৰণে সুতৰ হাৰ বছৰি r_1% হ'লে

   প্ৰথম বছৰৰ মূৰত সবৃদ্ধিমূল = $\left(1+\frac{r_1}{100}\right)$

   দ্বিতীয় বছৰৰ সুতৰ হাৰ বছৰি r_2% হ'লে

2. বছৰৰ মূৰত সবৃদ্ধিমূল = $P\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\left(1+\frac{r_2}{100}\right)$

   তৃতীয় বছৰৰ সুতৰ হাৰ বছৰি r_3% হ'লে

   3 বছৰৰ মূৰত সবৃদ্ধিমূল = $P\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\left(1+\frac{r_2}{100}\right)\left(1+\frac{r_3}{100}\right)$ ইত্যাদি।

সুতৰ কাৰ্যকৰী হাৰ (Effecitve rate of interest) ঃ

সুতৰ হাৰ বছৰি 5% হ'লে আৰু সুত বছৰেকীয়া আদায় দিয়া হ'লে, 100 টকা মূলধনৰ 1 বছৰৰ সুত 5 টকা হয় আৰু 1 বছৰৰ শেষত সবৃদ্ধিমূল 105 টকা হয়।

আকৌ সুত ছমাহৰ মূৰে মূৰে আদায় দিয়া হ'লে প্ৰথম ছমাহৰ পিছত মূলধন 102.50 টকা হ'ব আৰু দ্বিতীয় ছমাহত সুত 2.56 টকা হ'ব আৰু 1 বছৰৰ মূৰত সবৃদ্ধিমূল হ'ব (102.50 + 2.56) টকা = 105.06 টকা

$\therefore$ বছৰি শতকৰা সুতৰ হাৰ (কাৰ্যকৰী হাৰ) হ'ব (105.06 – 100) টকা = 5.06

অৰ্থাৎ, কাৰ্যকৰী সুতৰ হাৰ 5.06%

টোকা ঃ

5% সুত সাধাৰণ (Nominal rate or Flat rate) হাৰ হ'ব আৰু 5.06% সুত প্ৰকৃত হাৰ বা কাৰ্যকৰী হাৰ (True rate or Effective rate) হ'ব।

কাৰ্যকৰী সুতৰ হাৰৰ সূত্ৰ ঃ

কাৰ্যকৰী সুতৰ হাৰ = $100\left\{\left(1+\frac{i}{p}\right)^p-1\right\}$

য'ত i = 1 টকাৰ 1 বছৰৰ সুত

p = সুতৰ পৰ্বৰ সংখ্যা (No. of interest period)

অবচয় বা অৰক্ষয় (Depreciation) ঃ

সময়ৰ লগে লগে কোনো বস্তু একে ধৰণে নাথাকে। ইয়াৰ অৰক্ষয় অনিবাৰ্য। এই স্বাভাৱিক নিয়মৰ প্ৰভাৱ বিভিন্ন বস্তুৰ ওপৰত বিভিন্ন ধৰণে কাৰ্যকৰী হয়। যেনে— কল-কব্জা, মেচিন, মটৰগাড়ী, টিভি, ফ্ৰীজ, বৈদ্যুতিক পাংখা ইত্যাদিৰ মূল্য সময়ৰ লগে লগে হ্ৰাসপ্ৰাপ্ত হয়। মূল্য কমি যোৱাৰ কাৰণ— অবিচ্ছিন্নভাৱে এইবিলাকৰ ব্যৱহাৰ অথবা প্ৰাকৃতিক কোনো ঘটনা নাইবা অবৈজ্ঞানিক প্ৰতিৰোধ ব্যৱস্থা ইত্যাদি।

বস্তুৰ মূল্যৰ আপেক্ষিকভাৱে (সময়ৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি) হ্ৰাস পোৱাৰ প্ৰৱণতাকেই অপচয় বা অৰক্ষয় বুলি কোৱা হয়।

অৰক্ষয়ৰ হাৰ সাধাৰণতে শতকৰা হিচাপত প্ৰকাশ কৰা হয়।

অৰক্ষয়ৰ ক্ষেত্ৰত বস্তুৰ প্ৰাথমিক মূল্য প্ৰতি বছৰে এটা নিৰ্দিষ্ট হাৰত নিৰ্দিষ্ট পৰিমাণে হ্ৰাস পাই থাকে। অৰ্থাৎ প্ৰথম বছৰৰ শেষত হ্ৰাস পোৱা মূল্যক দ্বিতীয় বছৰৰ আৰম্ভণিত মূল্য হিচাপে বিবেচনা কৰা হয়। এইদৰে বস্তুৰ মূল্য প্ৰতি বছৰৰ মূৰে মূৰে হ্ৰাস পাই থাকে। শেষত, নিৰ্দিষ্ট সময়ৰ পিছত বস্তুটোৰ যি মূল্য পোৱা যায় তাকেই ভঙা মূল্য বা অবচয় মূল্য (scrap value) বুলি জনা যায়।

এই প্ৰসংগত উল্লেখ কৰিব পাৰি যে চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ ক্ষেত্ৰত সুত প্ৰতি বছৰে মূলধনৰ লগত যোগ হৈ মূলধন বাঢ়ি গৈ থাকে।

আনহাতে অবক্ষয়ৰ ক্ষেত্ৰত বস্তুৰ মূল্য প্ৰতি বছৰে কমি গৈ থাকে। সেয়েহে অবচয়ৰ সূত্ৰটো তলত দিয়া ধৰণে দিব পাৰি—

$A = P(1 - i)^n$, য'ত A = ভঙামূল্য,

P = বস্তুৰ প্ৰাথমিক মূল্য

i = 1 টকাৰ 1 বছৰত অবচয়

$= \frac{r}{100}$, r % হ'ল অবচয়ৰ হাৰ

n = বছৰৰ সংখ্যা (পৰ্বৰ সংখ্যা)

এতিয়া আমি ওপৰৰ সূত্ৰকেইটা ব্যৱহাৰ কৰি কেইটামান উদাহৰণ আলোচনা কৰিম।

চক্ৰবৃদ্ধি সুত নিৰ্ণয় ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ বছৰি $3\frac{1}{2}\%$ চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত (সুত বছৰৰ মূৰে মূৰে দিয়া হয়) 2500 টকাৰ 4 বছৰৰ চক্ৰবৃদ্ধি সুত নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত, P = Rs. 2500, n = 4 বছৰ, $r = 3\frac{1}{2}\%$ $i = \frac{3\frac{1}{2}\%}{100} = 0.035$

C.I = ?

আমি জানো, $A = P(1 + i)^n = 2500\ (1 + 0.035)^4 = 2500\ (1.035)^4$

উভয় পক্ষত ল'গ লৈ পাওঁ—

$\log A = \log 2500 + 4\log 1.035 = 3.3979 + 4 \times 0.0149$
$= 3.4575$

$\therefore$ A = এণ্টিল'গ 3.4575 = Rs. 2867

এতিয়া, C.I = A – P = (2867 – 2500) টকা = 367 টকা

টোকা ঃ

সুত প্ৰদান কৰাৰ ধৰণ উল্লেখ নাথাকিলে সুত বছৰৰ মূৰে মূৰে দিয়া হৈছে বুলি ধৰিবা।

উদাহৰণ 2 ঃ 800 টকাৰ 2 বছৰৰ চক্ৰবৃদ্ধি সুত নিৰ্ণয় কৰা যদি প্ৰথম বছৰৰ সুতৰ হাৰ বছৰি 5% আৰু দ্বিতীয় বছৰৰ সুতৰ হাৰ বছৰি 6% (সুত ছমাহৰ মূৰে মূৰে দিয়া হয়)

সমাধান ঃ ইয়াত, প্ৰথম বছৰৰ শেষত সবৃদ্ধিমূল = $800\ (1.025)^{2\times1}$
= 840.50 টকা

$\therefore$ প্ৰথম বছৰৰ চক্ৰবৃদ্ধি সুত = (840.50 – 800) টকা
= 40.50 টকা

দ্বিতীয় বছৰৰ শেষত সবৃদ্ধিমূল = $840.50\ (1.03)^{2\times1}$
= 891.69 টকা (প্ৰায়)

$\therefore$ দ্বিতীয় বছৰৰ চক্ৰবৃদ্ধি সুত = (891.69 – 840.50) টকা
= 51.19 টকা

এতেকে, 2 বছৰৰ চক্ৰবৃদ্ধি সুত = (40.50 + 51.19) টকা = 91.69 টকা

সবৃদ্ধিমূল নিৰ্ধাৰণ ঃ

উদাহৰণ 3 ঃ বছৰি 5% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত 1000 টকাৰ 4 বছৰৰ সবৃদ্ধিমূল আৰু চক্ৰবৃদ্ধি সুত নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত, P = 1000 টকা, n = 4 বছৰ, $i = \frac{5}{100} = 0.05$, A = ?, CI = ?

আমি জানো, $A = P(1 + i)^n = 1000(1.05)^4$

উভয়পক্ষত ল'গ লৈ পাওঁ—

$\log A = \log 1000 + 4\log 1.05 = 3 + 4 \times 0.0212 = 3.0848$

$\therefore$ A = এণ্টিল'গ 3.0848 = 1215 টকা

এতিয়া, C.I = চক্ৰবৃদ্ধি সুত = A – P = (1215 – 1000) টকা = 215 টকা

এতেকে নিৰ্ণেয় সবৃদ্ধিমূল = 1215 টকা আৰু চক্ৰবৃদ্ধি সুত = 215 টকা।

মূলধন বা আচল নিৰ্ধাৰণ ঃ

উদাহৰণ 4 ঃ বছৰি 4% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত 18 বছৰত কি পৰিমাণ মূলধনৰ সবৃদ্ধিমূল 10,000 টকা হ'ব?

সমাধান ঃ ইয়াত, A = 10,000 টকা, n = 18 বছৰ, $i = \frac{4}{100} = 0.04$, P = ?

আমি জানো, $A = P(1 + i)^n$

$\Rightarrow 10000 = P(1.04)^{18}$

উভয়পক্ষত ল'গ লৈ পাওঁ—

$4 = \log P + 18\log 1.04 = \log P + 18 \times 0.0170$

$\Rightarrow \log P = 4 - 0.3060 = 3.694$

$\therefore$ P = এণ্টিল'গ 3.694 = 4943 টকা

$\therefore$ নিৰ্ণেয় মূলধন = 4943 টকা।

উদাহৰণ 5 ঃ বছৰি 5% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত 2 বছৰত কি পৰিমাণ মূলধনৰ সবৃদ্ধিমূল 1401.60 টকা হ'ব? (সুত ছমাহৰ মূৰে মূৰে দিয়া হয়)

সমাধান ঃ আমি জানো, $A = P\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}$

$\Rightarrow 1401.60 = P\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2\times 2} = P(1.025)^4$

উভয় পক্ষত ল'গ লৈ পাওঁ—

$\log 1401.60 = \log P + 4\log 1.025$

$\Rightarrow \log 1402 = \log P + 4 \times 0.0107$

$\Rightarrow 3.1467 = \log P + 0.0428$

$\therefore$ P = এণ্টিল'গ = 3.1039 = 1271 টকা

$\therefore$ নিৰ্ণেয় মূলধন = 1271 টকা।

চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰ নিৰ্ধাৰণ ঃ

উদাহৰণ 6 ঃ কি চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত 6345 টকা 7 বছৰৰ মূৰত 7288 টকা হ'ব?

সমাধান ঃ ইয়াত, P = 6345 টকা, A = 7288 টকা, n = 7 বছৰ, r = ?

আমি জানো, $A = P(1 + i)^n$

$\Rightarrow 7288 = 6345(1 + i)^7$

উভয়পক্ষত ল'গ লৈ পাওঁ—

$\log 7288 = \log 6345 + 7\log(1 + i)$

$\Rightarrow 3.8626 = 3.8024 + 7\log(1 + i)$

$\Rightarrow \log(1 + i) = \dfrac{0.0602}{7} = 0.0086$

$\therefore$ $1 + i$ = এণ্টিল'গ $0.0086 = 1.020 = 1.02$

$\Rightarrow i = 1.02 - 1 = 0.02$

এতিয়া, $i = \dfrac{r}{100}$ $\therefore r = 100i = 100 \times 0.02 = 2\%$

এতেকে নিৰ্ণেয় সুতৰ হাৰ = 2%।

উদাহৰণ 7 ঃ কি চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত কোনো মূলধন 17 বছৰত দুগুণ হ'ব?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, মূলধন 100 টকা অৰ্থাৎ P

প্ৰশ্নমতে, A = 200 টকা, n = 17 বছৰ, r = ? (r হ'ল সুতৰ হাৰ)

আমি জানো যে $A = P(1 + i)^n$

$\Rightarrow 200 = 100(1 + i)^{17}$

$\Rightarrow 2 = (1 + i)^{17}$

উভয় পক্ষত ল'গ লৈ পাওঁ—

$\log^2 = 17\log(1 + i)$

$\Rightarrow 0.3010 = 17\log(1 + i)$

$\therefore \log(1 + i) = \dfrac{0.3010}{17} = 0.0177$

$\Rightarrow 1 + i$ = এণ্টিল'গ $0.0177 = 1.042$

$\therefore i = 0.042$

এতিয়া, $i\dfrac{r}{100}$ $\therefore r = 100i = 100 \times 0.042 = 4.2\%$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰ = 4.2%।

উদাহৰণ 8 ঃ কি চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত 15 বছৰত 6000 টকা 10,000 টকা হ'ব? (সুত ছমাহৰ মূৰে মূৰে দিয়া হয়)

সমাধান ঃ ইয়াত, P = 6,000 টকা, A = 10,000 টকা, n = 15 বছৰ, r = ? (সুত ছমাহৰ মূৰে মূৰে দিয়া হয়)

আমি জানো, $A = P\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^{2n}$

$$\Rightarrow 10{,}000 = 6000\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2\times 15}$$

$$\Rightarrow 10 = 6\left(1+\frac{i}{2}\right)^{30}$$

উভয় পক্ষত ল’গ লৈ পাওঁ—

$$\log 10 = \log 6 + 30 \times \log\left(1+\frac{i}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 1 = 0.7782 + 30\log\left(1+\frac{i}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{0.2218}{30} = \log\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 0.00074 = \log\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)$$

$\therefore\ 1+\frac{i}{2} =$ এণ্টিলগ 0.0074

$= 1.017$

$\Rightarrow \frac{i}{2} = 0.017 \quad \therefore\ i = .034$

এতিয়া, $r = 100i = 100 \times 0.034 = 3.4\%$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সুতৰ হাৰ = 3.4%।

সময় নিৰ্ধাৰণ ঃ

উদাহৰণ 9 ঃ বছৰি 5% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত (সুত ছমাহৰ মূৰে মূৰে দিয়া হয়) কেই বছৰৰ মূৰত কোনো মূলধন দুগুণ হ’ব?

সমাধান ঃ ধৰা হ’ল, মূলধন 100 টকা, ইয়াত, $i = \frac{5}{100} = 0.05$,

প্ৰশ্নমতে, A = Rs. 200, n = ? (ধৰা হ’ল নিৰ্ণেয় বছৰ = n)

আমি জানো, $A = P\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}$

$$\Rightarrow 200 = 100\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2n}$$

$$\Rightarrow 2 = (1.025)^{2n}$$

উভয় পক্ষত ল’গ লৈ পাওঁ—

$\log^2 = 2n\log.1.025 = 2n \times 0.0107$

$\Rightarrow\ 0.3010 = 0.0214 \times n$

$\therefore\ n = \dfrac{0.3010}{0.0214} = 14.2$ বছৰ (প্ৰায়)

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সময় = 14.2 বছৰ (প্ৰায়)।

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 10 ঃ বছৰি 5% সুতৰ হাৰত কোনো মূলধনৰ 2 বছৰৰ সৰল সুত আৰু চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ পাৰ্থক্য 27.50 টকা হ'লে মূলধন নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, মূলধন 100 টকা

2 বছৰৰ সৰল সুত = 10 টকা (5% সুতৰ হাৰত)

ইয়াত, $i = \dfrac{5}{100} = 0.05,\ n = 2$ বছৰ

এতিয়া, $A = P(1 + i)^n = 100(1.05)^2 = 110.25$ টকা

$\therefore$ চক্ৰবৃদ্ধি সুত = A – P = (110.25 – 100) টকা

= 10.25 টকা

চক্ৰবৃদ্ধি সুত আৰু সৰল সুতৰ অন্তৰ = (10.25 – 10) টকা

= 0.25 টকা

অন্তৰ (টকাত)	মূলধন (টকাত)
0.25	100
27.50	x

$\therefore\ x = 100 \times \dfrac{27.50}{0.25} = 11{,}000$ টকা

$\therefore$ নিৰ্ণেয় মূলধন = 11,000 টকা।

উদাহৰণ 11 ঃ কোনো মূলধনৰ কোনো এক সুতৰ হাৰত 2 বছৰত সৰল সুত আৰু চক্ৰবৃদ্ধি সুত যথাক্ৰমে 90 টকা আৰু 93 টকা হ'লে সুতৰ হাৰ আৰু মূলধন নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ 1 বছৰৰ সৰল সুত = 45 টকা আৰু সৰল সুত আৰু চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ পাৰ্থক্য = 3 টকা

$\therefore$ 45 টকাৰ 1 বছৰৰ সুত = 3 টকা

$\therefore$ 100 টকাৰ 1 বছৰৰ সুত = $\dfrac{3}{45} \times 100 = 6\dfrac{2}{3}$ টকা

$\therefore$ সুতৰ হাৰ = $6\dfrac{2}{3}\%$।

আকৌ, $I = \dfrac{P.rn}{100}$

$$\Rightarrow\ 90 = \frac{P.\frac{20}{3} \times 2}{100}$$

$\therefore$ P = 675 টকা

এতেকে, মূলধন = 675 টকা আৰু সুতৰ হাৰ = $6\frac{2}{3}\%$ টকা।

উদাহৰণ 12 ঃ সৰল সুতৰ হাৰত কোনো মূলধন $12\frac{1}{2}$ বছৰত দুগুণ হ'লে কিমান বছৰৰ মূৰত একেই চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত আগৰ মূলধন দুগুণ হ'ব?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, মূলধন 100 টকা = P আৰু সুতৰ হাৰ বছৰি r%

প্ৰশ্নমতে, সুদাচল = 200 টকা, $n = \frac{25}{2}$ বছৰ

এতিয়া, I = A – P = (200 – 100) টকা = 100 টকা

আমি জানো, I = $\frac{\text{P.r.n}}{100}$

$$\Rightarrow\ 100 = \frac{100 \times r \times \frac{25}{2}}{100} \quad \therefore\ r = 8\%$$

আকৌ, P = 100 টকা, A = 200 টকা, r = 8%, n = ?

$$\therefore\ i = \frac{8}{100} = 0.08$$

এতিয়া, $A = P(1 + i)^n$

$\Rightarrow 200 = 100(1.08)^n$

$\Rightarrow 2 = (1.08)^n$

উভয়পক্ষত ল'গ লৈ পাওঁ—

$\log^2 = n\log 1.08$

$\Rightarrow 0.3010 = n \times 0.0334$

$\therefore\ n = \frac{3010}{334} = 9$ বছৰ (প্ৰায়)

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সময় = 9 বছৰ (প্ৰায়)।

উদাহৰণ 13 ঃ বছৰি 10% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত কোনো মূলধনৰ 3 বছৰৰ চক্ৰবৃদ্ধি সুত 993 টকা হ'লে একেই হাৰত একেই মূলধনৰ একেই সময়ৰ সৰল সুত কিমান হ'ব?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, মূলধন P টকা

প্ৰশ্নমতে, $P(1.10)^3 - P = 993$

$\Rightarrow P\{(1.1)^3 - 1\} = 993$

$\therefore\ P = \dfrac{993000}{331} = 3000$ টকা

এতেকে, মূলধন = 3000 টকা

আকৌ, $I = \dfrac{P.r.n}{100} = \dfrac{3000 \times 10 \times 3}{100}$ টকা = 900 টকা

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সৰল সুত = 900 টকা।

উদাহৰণ 14 ঃ বছৰি 4% সুতৰ হাৰত কোনো মূলধনৰ দ্বিতীয় বছৰৰ চক্ৰবৃদ্ধি সুত 25 টকা হ'লে তৃতীয় বছৰৰ চক্ৰবৃদ্ধি সুত কিমান?

সমাধান ঃ

ধৰা হ'ল, মূলধন	=	100 টকা	
প্ৰথম বছৰৰ সুত	=	4 টকা	
দ্বিতীয় বছৰৰ আৰম্ভণিত মূলধন	=	104 টকা	
দ্বিতীয় বছৰৰ সুত	=	4.16 টকা	(104 টকাৰ 4%)
তৃতীয় বছৰৰ আৰম্ভণিত মূলধন	=	108.16 টকা	
তৃতীয় বছৰৰ সুত	=	4.3264 টকা	(108.16 টকাৰ 4%)

দ্বিতীয় বছৰৰ চক্ৰবৃদ্ধি সুত (টকাত)	**তৃতীয় বছৰৰ চক্ৰবৃদ্ধি সুত (টকাত)**
4.16	4.3264
25	x

$\therefore\ x = 4.3264 \times \dfrac{25}{4.16} = 26$ টকা

$\therefore$ তৃতীয় বছৰৰ চক্ৰবৃদ্ধি সুত = 26 টকা।

উদাহৰণ 15 ঃ কোনো মূলধন কোনো এক চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত 2 বছৰত সুতেমূলে 8820 টকা আৰু 3 বছৰত 9261 টকা হ'লে মূলধন আৰু সুতৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

3 বছৰৰ শেষত সবৃদ্ধিমূল	= 9261 টকা
2 বছৰৰ শেষত সবৃদ্ধিমূল	= 8820 টকা
$\therefore$ পাৰ্থক্য	= 441 টকা

এতিয়া, 8820 টকাৰ 1 বছৰৰ সুত = 441 টকা

$\therefore$ 100 টকাৰ 1 বছৰৰ সুত = $\dfrac{441 \times 100}{8820}$ টকা = 5 টকা

এতেকে, সুতৰ হাৰ বছৰি = 5%

আকৌ, $A = P(1+i)^n$, $i = \dfrac{5}{100} = 0.05$, $n = 2$ বছৰ

$\Rightarrow 8820 = P(1.05)^2$, য'ত মূলধন P টকা

$$\therefore\ P = \frac{8820}{(1.05)^2} = \frac{88200000}{11025} = 8000 \text{ টকা}$$

এতেকে, নিৰ্ণেয় মূলধন = 8000 টকা আৰু সুতৰ হাৰ বছৰি 5%

উদাহৰণ 16 ঃ বছৰি 4% সৰল সুতৰ হাৰত কিছু পৰিমাণৰ টকা ধাৰলৈ লৈ এজন মানুহে বছৰি 5% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত বিনিয়োগ কৰি 3 বছৰৰ মূৰত 376.25 টকা লাভ কৰিলে। ধাৰলৈ লোৱা টকাৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, ধাৰলৈ লোৱা টকাৰ পৰিমাণ 100 টকা

3 বছৰৰ মূৰত সৰল সুতৰ পৰিমাণ = 12 টকা

100 টকাৰ 3 বছৰৰ 5% হাৰত চক্ৰবৃদ্ধি সুত $= 100(1.05)^3 - 100$

$\simeq$ 15.76 টকা (প্ৰায়)

$\therefore$ লাভৰ পৰিমাণ = (15.76 – 12) টকা = 3.76 টকা

লাভৰ পৰিমাণ (টকাত)	**ধাৰলৈ লোৱা টকাৰ পৰিমাণ (টকাত)**
3.76	100
376.25	x

$$\therefore\ x = 100 \times \frac{376.25}{3.76} \simeq 10{,}000 \text{ টকা (প্ৰায়)}$$

এতেকে, ধাৰলৈ লোৱা টকাৰ পৰিমাণ = 10,000 টকা (প্ৰায়)।

অনুশীলনী

1. বছৰি $4\frac{1}{2}\%$ চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত কি পৰিমাণৰ মূলধন 12 বছৰত সুতেমূলে 1000 টকা হ'ব?

   উত্তৰ ঃ 589.90 টকা।

2. বছৰি 12% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত কি পৰিমাণৰ মূলধন 5 বছৰত সুতেমূলে 2149 টকা হ'ব? (সুত ছমাহৰ মূৰে মূৰে দিয়া হয়)

   উত্তৰ ঃ 1200 টকা।

3. বছৰি 3% সুতৰ হাৰত কোনো মূলধনৰ 5 বছৰত সৰল সুত আৰু চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ পাৰ্থক্য 46.80 টকা হ'লে, মূলধন নিৰ্ণয় কৰা।

   উত্তৰ ঃ 5200 টকা।

4. যদি কোনো এখন চহৰৰ জনসংখ্যা বছৰৰ শেষত বছৰৰ আদিতে থকা জনসংখ্যাৰ 2% বৃদ্ধি পায় তেন্তে কিমান বছৰৰ মূৰত জনসংখ্যাৰ মুঠ বৃদ্ধি 40% হ'ব?

   উত্তৰ ঃ 17 বছৰ।

5. প্ৰবীণে ধাৰ দিওঁতাৰ পৰা 6000 টকা ধাৰলৈ লৈ 4 বছৰলৈকে কোনো পৰিমাণৰ টকা আদায় দিব

নোৱাৰিলে। ফলত ধাৰ দিওঁতাই বৰ্তমানে তেওঁৰ পৰা 7500 টকা দাবী কৰিলে। বছৰি শতকৰা চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰ কিমান আছিল?

উত্তৰ ঃ 5.7%

6. কোনো মূলধনৰ বছৰি 5% সুতৰ হাৰত 3 বছৰৰ চক্ৰবৃদ্ধি সুত 158 টকা। একেই মূলধনৰ 6% সুতৰ হাৰত 2 বছৰৰ চক্ৰবৃদ্ধি সুত নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 124 টকা।

7. কোনো মূলধনৰ কোনো এক সুতৰ হাৰত 2 বছৰৰ চক্ৰবৃদ্ধি সুত আৰু সৰল সুত ক্ৰমে 920.25 টকা আৰু 900 টকা হ'লে মূলধন আৰু সুতৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 10,000 টকা আৰু $4\frac{1}{2}\%$ ।

8. কোনো মূলধন কোনো এক চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত 2 বছৰৰ মূৰত 10816 টকা আৰু 3 বছৰৰ মূৰত 11248.64 টকা হ'লে মূলধন আৰু সুতৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 10,000 টকা আৰু 4%।

9. এজন মানুহে তেওঁৰ 9, 12 আৰু 15 বছৰৰ তিনিজন ল'ৰাৰ কাৰণে 18,000 টকা বেংকত এনেদৰে জমা থ'লে যে প্ৰত্যেকে যেতিয়া 25 বছৰৰ হ'ব বেংকৰ পৰা সমপৰিমাণৰ টকা পাব। যদি চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰ বছৰি $3\frac{1}{2}\%$ হয় তেন্তে নিৰ্ধাৰিত সময়ৰ শেষত প্ৰত্যেকে কিমান টকা পাইছিল?

উত্তৰ ঃ 9,341 টকা।

10. এটা মেচিনৰ মূল্য বছৰৰ শেষত বছৰৰ আদিতে থকা মূল্যৰ 10% হ্ৰাস পায়। মেচিনটো 5810 টকাত কিনা হৈছিল আৰু ইয়াৰ ভঙা মূল্য 2250 টকা পোৱা গ'ল। মেচিনটো কেই বছৰ ব্যৱহাৰ কৰা হৈছিল তাকেই নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 9 বছৰ (প্ৰায়)।

11. এটা মেচিনৰ মূল্য প্ৰথম 2 বছৰত বছৰি 10% হাৰত হ্ৰাস পায় আৰু তাৰ 3 বছৰত বছৰি 7% হাৰত হ্ৰাস পায় (অবচয় হ্ৰাস পোৱা মূল্যৰ ওপৰত গণনা কৰা হয়)। প্ৰথমতে মেচিনটোৰ মূল্য আছিল 10,000 টকা। অবচয়ৰ কাৰ্যকৰী হাৰ নিৰ্ণয় কৰা আৰু পঞ্চম বছৰৰ শেষত ইয়াৰ অবচয় মূল্যও নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 6.968% আৰু 3484 টকা।

12. বছৰি 4% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত 1000 টকাৰ 2 বছৰৰ সৰল সুত আৰু চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ পাৰ্থক্য নিৰ্ণয় কৰা (চক্ৰবৃদ্ধি সুত তিনি মাহৰ মূৰে মূৰে দিয়া হয়)।

উত্তৰ ঃ 2 টকা।

13. কিমান বছৰৰ মূৰত 3495 টকা বছৰি 6% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত 4680 টকা হ'ব?

উত্তৰ ঃ 5 বছৰ (প্ৰায়)।

বাৰ্ষিকী

ভূমিকা ঃ

মটৰগাড়ী, বাইক, কম্পিউটাৰ, মাটি-বাৰী, ফ্ৰীজ ইত্যাদি বস্তুবোৰৰ মূল্য বেছি হোৱাৰ বাবে সাধাৰণ মানুহ এজনে নগদ মূল্যত ক্ৰয় কৰিব নোৱাৰে। এই কথাষাৰ ব্যৱসায়ীসকলৰ অজ্ঞাত নহয়। সেয়েহে সাধাৰণ মানুহে যাতে মূল্যৱান বস্তুবোৰ সহজতে কিনিব পাৰে সেই উদ্দেশ্যে ব্যৱসায়ীসকলে বিভিন্ন আঁচনি আগবঢ়ায়। এই আঁচনিত বস্তুৰ নগদ মূল্য আদায় নিদি সহজ কিস্তিৰ বিনিময়ত বস্তুবোৰ ল'ব পৰা যায়। কিস্তিত বস্তু ক্ৰয় কৰিলে গ্ৰাহকসকলৰ বেছি অসুবিধা নহয় আৰু আঁচনিবোৰৰ প্ৰতি স্বাভাৱিকতেই আকৃষ্ট হয়। ফলত ব্যৱসায়ীজনেও লাভৱান হয়, কিয়নো মূল্যৱান বস্তুবোৰ তেওঁ সহজতেই বিক্ৰী কৰিব পাৰে। কোনো কোনো ক্ষেত্ৰত ক্ৰয় কৰা বস্তুৰ পৰা গ্ৰাহকজনে আৰ্জিব পাৰে আৰু কিস্তি দিয়াত তেওঁৰ সুবিধা হয়।

এটা নিৰ্দিষ্ট সময়ৰ মূৰে মূৰে আদায় দিয়া কিস্তিবোৰে এটা বাৰ্ষিকীৰ সৃষ্টি কৰে।

বাৰ্ষিকীৰ সংজ্ঞা ঃ

এটা নিৰ্দিষ্ট সময়লৈকে সমপৰিমাণৰ বছৰেকীয়া কিস্তিমালাক বাৰ্ষিকী বোলে। গ্ৰাহকৰ সুবিধাৰ বাবে বছৰেকীয়া কিস্তিক কেইবাটাও অংশত ভগাব পাৰি। যেনে— ছমহীয়া কিস্তি, তিনিমহীয়া কিস্তি, মাহিলী কিস্তি ইত্যাদি।

বাৰ্ষিকীৰ ক্ষেত্ৰত কিস্তিৰ ধন সমমূল্যৰ হয় আৰু চক্ৰবৃদ্ধি সুত গণনা কৰা হয়।

বাৰ্ষিকীক কেইবাটাও ভাগত বিভক্ত কৰা হয়, যেনে—

1. নিশ্চিত বাৰ্ষিকী, 2. চিৰস্থায়ী বাৰ্ষিকী আৰু 3. অনিশ্চিত বাৰ্ষিকী।

যেতিয়া এটা বাৰ্ষিকীৰ কিস্তিৰ ধন এটা নিৰ্দিষ্ট সময়লৈকে আদায় দি থকা হয় তেতিয়া সেই বাৰ্ষিকীক নিশ্চিত বাৰ্ষিকী বোলা হয়।

যদি বাৰ্ষিকীৰ কিস্তি চিৰকাল দি থাকিবলগীয়া হয় তেন্তে বাৰ্ষিকীটোক চিৰস্থায়ী বাৰ্ষিকী বোলা হয়। নিগম কৰ, মাটিৰ কৰ ইত্যাদি এই বাৰ্ষিকীৰ অন্তৰ্গত। আনহাতে, অনিশ্চিত বাৰ্ষিকীৰ ক্ষেত্ৰত বাৰ্ষিকীৰ টকা কোনো ঘটনা নঘটালৈকে (যেনে বাৰ্ষিকী গ্ৰাহকৰ মৃত্যু, ছোৱালীৰ বিয়া, ল'ৰা-ছোৱালীৰ শিক্ষান্ত পৰ্যন্ত ইত্যাদি) আদায় দি থকা হয়।

আকৌ নিশ্চিত বাৰ্ষিকী তিনিটা ভাগত বিভক্ত। যেনে— 1. প্ৰত্যক্ষ বাৰ্ষিকী, 2. দেয় বাৰ্ষিকী, 3. স্থগিত বা বিলম্বিত বাৰ্ষিকী।

1. প্ৰত্যক্ষ বাৰ্ষিকীৰ ক্ষেত্ৰত, কিস্তিৰ ধন প্ৰতি বছৰ (পৰ্ব)ৰ মূৰে মূৰে আদায় দিয়া হয়।
2. দেয় বাৰ্ষিকীৰ ক্ষেত্ৰত কিস্তিৰ ধন প্ৰতি বছৰ বা পৰ্বৰ আৰম্ভণিতে দিব লাগে।
3. যিটো বাৰ্ষিকীৰ কিস্তি এটা নিৰ্দিষ্ট সময় পৰ্যন্ত স্থগিত থাকে আৰু তাৰ পিছৰ পৰা আৰম্ভ হৈ এটা

নিৰ্দিষ্ট সময় পৰ্যন্ত কিস্তিৰ ধন আদায় দি থকা হয় তেনে বাৰ্ষিকীক বিলম্বিত বাৰ্ষিকী বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে— এটা বাৰ্ষিকীৰ কিস্তি m-বছৰলৈ স্থগিত ৰাখি প্ৰথম কিস্তি $(m + 1)$ বছৰৰ মূৰত আৰম্ভ হৈ n বছৰলৈ আদায় দিয়া হ'ল— উক্ত বাৰ্ষিকীক স্থগিত বাৰ্ষিকী বোলা হয়।

আনহাতে বাৰ্ষিকীৰ কিস্তি m বছৰলৈ স্থগিত ৰাখি প্ৰথম কিস্তি $(m + 1)$ বছৰৰ মূৰত আৰম্ভ হৈ চিৰকালৰ বাবে আদায় দি থকা হ'লে তেনে বাৰ্ষিকীক বিলম্বিত চিৰস্থায়ী বাৰ্ষিকী বোলা হয়।

ঋণশোধক পুঁজি ঃ

ভৱিষ্যতে কোনো দেনা পৰিশোধ কৰিবলৈ বা এটা নিৰ্দিষ্ট সময়ৰ মূৰত সা-সম্পত্তি কিনিবলৈ বা কোনো যন্ত্ৰপাতি সলনি কৰিবলৈ নিৰ্দিষ্ট সময়ৰ মূৰে মূৰে চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত নিৰ্দিষ্ট পৰিমাণৰ টকা বেংকত নিৰ্দিষ্ট সময়লৈ জমা দি থাকি যি পুঁজি গঠন কৰা হয়, তাক ঋণশোধক পুঁজি বোলে।

বাৰ্ষিকীৰ বৰ্তমান মূল্য ঃ

কোনো বাৰ্ষিকীৰ কিস্তিবোৰৰ প্ৰত্যেকৰেই একোটা নিৰ্দিষ্ট পৰিমাণৰ বৰ্তমান মূল্য আছে। এই বৰ্তমান মূল্যবোৰৰ সমষ্টিকেই বাৰ্ষিকীৰ বৰ্তমান মূল্য বোলা হয়।

বাৰ্ষিকীৰ সবৃদ্ধিমূল ঃ

বাৰ্ষিকীৰ কিস্তিবোৰৰ প্ৰত্যেকৰেই একোটা বেলেগ বেলেগ সবৃদ্ধিমূল হ'ব আৰু সুতমূলবোৰৰ সমষ্টিকেই বাৰ্ষিকীটোৰ সবৃদ্ধিমূল বোলা হয়।

বাৰ্ষিকীৰ ক্ষেত্ৰত তলৰ প্ৰতীকসমূহ ব্যৱহাৰ কৰা হ'ব।

P = কিস্তিৰ ধন বা মূল্য

V = বাৰ্ষিকীৰ বৰ্তমান মূল্য

M = বাৰ্ষিকীৰ সবৃদ্ধিমূল।

i = 1 টকাৰ 1 বছৰৰ সুত, সুতৰ হাৰ বছৰি r% অৰ্থাৎ, $i = \frac{r}{100}$

n = বছৰৰ সংখ্যা।

কেইটামান পৰিভাষা ঃ

বাৰ্ষিকী	= Annuity
নিশ্চিত বাৰ্ষিকী	= Annuity certain
চিৰস্থায়ী বাৰ্ষিকী	= Perpetuity or Perpetual annuity
অনিশ্চিত বাৰ্ষিকী	= Annuity Contingent
প্ৰত্যক্ষ বাৰ্ষিকী	= Annuity immediate
দেয় বাৰ্ষিকী	= Annuity due
স্থগিত বা বিলম্বিত বাৰ্ষিকী	= Deferred annuity
বিলম্বিত চিৰস্থায়ী বাৰ্ষিকী	= Deferred perpetuity

টোকা ঃ

1. শোধন সময় (Payment time) বা কিস্তিৰ সময়
2. বিশেষভাৱে উল্লেখ নাথাকিলে বাৰ্ষিকীয়ে প্ৰত্যক্ষ বাৰ্ষিকী বুজায় আৰু শোধন সময় দিয়া নাথাকিলে বছৰৰ মূৰত কিস্তি দিয়া হয় বুলি ধৰা হ'ব।

   বাৰ্ষিকীৰ সূত্ৰকেইটা প্ৰমাণ কৰাৰ আগতে গুণোত্তৰ শ্ৰেণী (Geometric Progression বা GP)ৰ ধাৰণা থকা উচিত।

গুণোত্তৰ শ্ৰেণী কাক বোলে?

যি শ্ৰেণীৰ দুটা ক্ৰমিক পদৰ অনুপাত সদায় একে হয় সেই শ্ৰেণীটোক গুণোত্তৰ শ্ৰেণী বোলা হয় আৰু অনুপাতটোক সাধাৰণ অনুপাত (Common Ratio বা CR) বোলে।

গুণোত্তৰ শ্ৰেণীৰ সাধাৰণ আকাৰ এনেধৰণৰ— $- a, ar, ar^2, \ldots\ldots\ldots ar^{n-1}$

যেনে—

(1) 3, 9, 27, 81 ...... এটা গুণোত্তৰ শ্ৰেণী। ইয়াৰ প্ৰথম পদ = 3 আৰু সাধাৰণ অনুপাত

$$= \frac{9}{2} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = 3 \text{ ইত্যাদি}$$

(2) 81, 27, 9, 3 ....শ্ৰেণীৰ সাধাৰণ অনুপাত

$$= \frac{27}{81} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} \text{ ইত্যাদি}$$

যদি গুণোত্তৰ শ্ৰেণীৰ প্ৰথম পদ 'a', সাধাৰণ অনুপাত r হয় তেন্তে $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}$ শ্ৰেণীটোৰ n-তম পদ $t_n = ar^{n-1}$

আৰু শ্ৰেণীটোৰ n টা পদৰ সমষ্টি $s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r<1 = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, r>1$

[ওপৰৰ ফলাফল দুটা মন কৰিবা।]

n বছৰলৈ অনাদায়ী বাৰ্ষিকীৰ সবৃদ্ধিমূল ঃ

ধৰা হ'ল, প্ৰতিটো বছৰেকীয়া কিস্তিৰ পৰিমাণ A টকা

সুতৰ হাৰ বছৰি $r\%$, $i = \frac{r}{100}$

ধৰা হ'ল, বাৰ্ষিকীটো n বছৰলৈ অনাদায়ী হৈ আছে।

বছৰৰ শেষত দিবলগীয়া প্ৰথম কিস্তিটোৱে (n – 1) বছৰলৈ সুত আৰ্জিব, একেদৰে দ্বিতীয় কিস্তিটোৱে (n – 2) বছৰলৈ সুত আৰ্জিব আৰু শেষৰ কিস্তিৰ পৰা কোনো সুত পোৱা নাযায়।

$\therefore$ প্ৰথম কিস্তিৰ সবৃদ্ধিমূল হ'ব $= A(1 + i)^{n-1}$

দ্বিতীয় কিস্তিৰ সবৃদ্ধিমূল হ'ব $= A(1 + i)^{n-2}$

শেষৰ কিস্তিৰ সবৃদ্ধিমূল হ'ব $= A$

এতিয়া, M = ওপৰৰ সবৃদ্ধিমূলবোৰৰ সমষ্টি = বাৰ্ষিকীটোৰ সবৃদ্ধিমূল

$= A(1 + i)^{n-1} + A(1 + i)^{n-2} + ... + A(1 + i)^2 + A(1 + i) + A$

$= A[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + ... + A(1 + i)^{n-1}]$ [শ্ৰেণীটো ওলোটাকৈ লিখি]

তৃতীয় বন্ধনীত থকা শ্ৰেণীটো এটা গুণোত্তৰ শ্ৰেণী আৰু ইয়াৰ প্ৰথম পদ = 1, সাধাৰণ অনুপাত $= (1 + i) > 1$

$$\therefore\ M = A\frac{1\{(1+i)^n - 1}{1+i-1} = \frac{A}{i}\left\{(1+i)^n - 1\right\} \text{ .... } (1)$$

টোকা ঃ

(1) নং সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ হ'ব যদিহে কিস্তিৰ ধন বছৰৰ শেষত আদায় দিয়া হয়। (1) নং সূত্ৰটো ঋণশোধক পুঁজি নিৰ্ধাৰণতো ব্যৱহাৰ হ'ব।

দেয় বাৰ্ষিকীৰ ক্ষেত্ৰত, সবৃদ্ধিমূলৰ সূত্ৰটো হ'ল—

$$M = (1+i).\frac{A}{i}\left\{(1+i)^n - 1\right\} \text{ .... } (2)$$

প্ৰত্যক্ষ বাৰ্ষিকীৰ বৰ্তমান মূল্যৰ সূত্ৰ ঃ

ধৰা হ'ল, বছৰৰ মূৰত দিবলগীয়া কিস্তিৰ পৰিমাণ A টকা, বছৰৰ সংখ্যা = n,

সুতৰ হাৰ বছৰি r%, $i = \frac{r}{100} = 1$ টকাৰ 1 বছৰৰ সুত।

এতিয়া, প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ... nতম কিস্তিৰ বৰ্তমান মূল্য হ'ব ক্ৰমে—

$$\frac{A}{1+i}, \frac{A}{(1+i)^2}, \frac{A}{(1+i)^3}, ..., \frac{A}{(1+i)^n}$$

এতেকে,

V = বৰ্তমান মূল্যৰ সমষ্টি = বাৰ্ষিকীৰ বৰ্তমান মূল্য

$$= \frac{A}{(1+i)} + \frac{A}{(1+i)^2} + ... + \frac{A}{(1+i)^n}$$

$$= \frac{A}{(1+i)}\left[1 + \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right]$$

$\because A = P_1(1 + i)^1$, $\therefore = \frac{A}{(1+i)^1}$

P_1 = প্ৰথম কিস্তিৰ বৰ্তমান মূল্য

$A = P_2(1 + i)^2$ $\therefore$ $P_2 = \frac{A}{(1+i)^2}$ ইত্যাদি

P_2 = দ্বিতীয় কিস্তিৰ বৰ্তমান মূল্য

তৃতীয় বন্ধনীত থকা শ্ৰেণীটো এটা গুণোত্তৰ শ্ৰেণী আৰু ইয়াৰ প্ৰথম পদ = 1, সাধাৰণ অনুপাত

$$= \frac{1}{(1+i)} < 1$$

$$\therefore V = \frac{A}{(1+i)}\left[\frac{1\{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{1-\frac{1}{(1+i)}}\right]$$

$$\therefore V = \frac{A}{i}\left[1-\frac{1}{(1+i)^n}\right] \text{ .... (3) (সৰল কৰাৰ পিছত)}$$

অথবা, $$V = \frac{A}{i}\left[1-(1+i)^{-n}\right] \text{ .... (4)}$$

চিৰস্থায়ী বাৰ্ষিকীৰ বৰ্তমান মূল্য ঃ

সূত্ৰটো হ'ব $V = \frac{A}{i}\{1-0\}$ $\because$ (3)নং সূত্ৰৰ পৰা পাওঁ— $\frac{1}{(1+i)^n} \to 0$, যদি $n \to \alpha$ হয়

অৰ্থাৎ, $V = \frac{A}{i}$ .... (5)

দেয় বাৰ্ষিকীৰ বৰ্তমান মূল্যৰ সূত্ৰ ঃ

সূত্ৰটো হ'ব ঃ $V = \frac{A}{i}(1+i)\left[1-(1+i)^{-n}\right]$ [প্ৰমাণ দিয়া নহ'ল]

বিলম্বিত বাৰ্ষিকীৰ বৰ্তমান মূল্য ঃ

(m বছৰৰ কাৰণে স্থগিত থাকি n বছৰলৈ চলি থকা)

যিহেতু m বছৰৰ কাৰণে কিস্তিৰ ধন স্থগিত থাকে, আৰু প্ৰথম কিস্তি (m + 1) বছৰৰ অন্তত দিয়া হয়, দ্বিতীয় কিস্তি (m + 2) বছৰৰ অন্তত দিয়া হয়, ... ইত্যাদি,

এতিয়া, (m + 1) বছৰৰ শেষত প্ৰথম কিস্তিৰ বৰ্তমান মূল্য = $\frac{A}{(1+i)^{m+1}}$

[য'ত প্ৰতি কিস্তিৰ পৰিমাণ A টকা $i = 1$ টকাৰ 1 বছৰৰ সুত = $\frac{r}{100}$ সুতৰ হাৰ বছৰি r%]

(m + 2) বছৰৰ শেষত দ্বিতীয় কিস্তিৰ বৰ্তমান মূল্য = $\frac{A}{(1+i)^{m+2}}$ ইত্যাদি

$\therefore$ V = সকলো কিস্তিৰ বৰ্তমান মূল্যৰ সমষ্টি = বাৰ্ষিকীৰ বৰ্তমান মূল্য

$$= \frac{A}{(1+i)^{m+1}} + \frac{A}{(1+i)^{m+2}} + \ldots + \frac{A}{(1+i)^{m+n}}$$

অৰ্থাৎ, $\mathrm{V} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{i}} \cdot \frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}-1}{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{m+n}}}$ .... (6) [গুণোত্তৰ শ্ৰেণীৰ ব্যৱহাৰ আৰু সৰল কৰাৰ পিছত]

বিলম্বিত চিৰস্থায়ী বাৰ্ষিকীৰ বৰ্তমান মূল্য ঃ

সূত্ৰটো হ'ব— $V = \frac{A.}{i}\frac{1}{(1+i)^m}$ [প্ৰমাণ দিয়া নহ'ল]

বিলম্বিত বাৰ্ষিকীৰ সবৃদ্ধিমূলৰ সূত্ৰ ঃ

সূত্ৰটো হ'ব— $M = \frac{A}{i}.\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^m}\right]$ [প্ৰমাণ দিয়া নহ'ল]

টোকা ঃ

1. ওপৰত আলোচনা কৰা বাৰ্ষিকীৰ সকলো সূত্ৰবোৰ প্ৰযোজ্য হ'ব যদিহে কিস্তিৰ ধন বছৰি আদায় দিয়া হয়।
2. কিস্তিবোৰ ছমহীয়া, তিনিমহীয়া অথবা মাহিলী আদায় দিয়া হ'লে সূত্ৰকেইটাত n-ৰ সলনি ক্ৰমে $2n$, $4n$ আৰু $12n$ হ'ব আৰু i-ৰ সলনি ক্ৰমে $\frac{i}{2}, \frac{i}{4}$ আৰু $\frac{i}{12}$ হ'ব।
(ওপৰৰ টোকা দুটা বিশেষকৈ মন কৰিবলগীয়া)
3. 500 টকীয়া বাৰ্ষিকী বুলিলে কিস্তিৰ ধন 500 টকা বুজায়, অৰ্থাৎ A = 500 টকা।

সবৃদ্ধিমূল আৰু বৰ্তমান মূল্যৰ কেইটামান উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ বছৰি $4\frac{1}{2}\%$ চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত 100 টকীয়া বাৰ্ষিকীৰ 20 বছৰৰ সবৃদ্ধিমূল নিৰ্ণয় কৰা।
($\log 10.45 = 1.0191163$ আৰু $\log 0.024117 = \bar{2}.3823260$)

সমাধান ঃ ইয়াত, কিস্তিৰ মান অৰ্থাৎ A = 100 টকা, $i = \frac{4\frac{1}{2}}{100} = 0.045$ $n = 20$, $M = ?$

মন কৰিবলগীয়া ঃ (কিস্তিৰ ধন কিদৰে আদায় দিয়া হৈছে উল্লেখ নথকাত বছৰৰ মূৰত আদায় দিয়া হৈছে বুলি ধৰি লোৱা হ'ল, অৰ্থাৎ সংশ্লিষ্ট অংকটোত প্ৰত্যক্ষ বাৰ্ষিকীৰ সবৃদ্ধিমূল নিৰ্ণয় কৰিব লাগে)

এতিয়া, $M = \frac{A}{i}\left\{(1+i)^n - 1\right\}$

$$= \frac{100}{0.045}\left\{(1.045)^{20} - 1\right\} \ ...... \ (1)$$

(1) নং সমীকৰণৰ পৰা পাওঁ —

$$M = \frac{100}{0.045} \times 1.4117$$

$= 3137.12$ টকা

অৰ্থাৎ, নিৰ্ণেয় সবৃদ্ধিমূল = 3137.12 টকা।

ধৰা হ'ল,

$x = (1.045)^{20}$

$\therefore \log^x = 20\log 1.045$

$= 20 \times 0.0191163$

$= 0.3823260$

$\therefore x=$এণ্টিল'গ 0.3823260

$= 2.4117$

[প্ৰদত্ত তথ্যৰ ব্যৱহাৰ কিদৰে কৰা হৈছে মন কৰিবা, লগাৰিথমৰ বিষয়ে প্ৰথমতে অধ্যয়ন কৰা]

উদাহৰণ 2 ঃ বছৰি 8% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত 800 টকীয়া বাৰ্ষিকী তিনিমহীয়া কিস্তিত আদায় দিয়া হ'লে 3 বছৰৰ সবৃদ্ধিমূল কিমান?

সমাধান ঃ ইয়াত, A = 800 টকা, $i = \frac{8}{100} = 0.08$ (সুত তিনি মাহৰ মূৰে মূৰে দিয়া হয়)

$n = 3$ বছৰ, $M = ?$

এতিয়া, $M = \dfrac{A}{\frac{i}{4}}\left\{\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n} - 1\right\}$

$$= \frac{800}{0.02}\left\{(1.02)^{4\times 3} - 1\right\}$$

$$= \frac{80000}{2}\left\{(1.02)^{12} - 1\right\} \ ...... \ (1)$$

(1)ৰ পৰা পাওঁ

$M = 40000 \times 0.269$

$= 10,760$ টকা

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সবৃদ্ধিমূল = 10,760 টকা

ধৰা হ'ল,

$x = (1.02)^{12}$

$\therefore \log x = 12\log 1.02$

$= 12 \times 0.0086$

$= 0.1032$

$\therefore x =$ এণ্টিল'গ 0.1032

$= 1.269$

উদাহৰণ 3 ঃ এজন মানুহে 60 বছৰ বয়সত অৱসৰ লয় আৰু তেওঁৰ নিয়োজকে ছমহীয়া কিস্তিত বছৰত 12000 টকা তেওঁক পেন্সন দিয়ে। যদি মানুহজনৰ অৱসৰৰ পিছত জীৱিত থকাৰ প্ৰত্যাশা 13 বছৰ বুলি ধৰা হয়, তেনেহ'লে বছৰি 4% হাৰ সুতত (ছমাহৰ মূৰে মূৰে সুত কাটিলে) পেন্সনৰ সমুদায় টকাৰ বৰ্তমান মূল্য কিমান হ'ব?

সমাধান ঃ ইয়াত ছমহীয়া কিস্তিৰ পৰিমাণ 6000 টকা = A

$i = \frac{4}{100} = 0.04, n = 13$ বছৰ V = ?

এতিয়া, $V = \dfrac{A}{\frac{i}{2}}\left\{1 - \left(1+\frac{i}{2}\right)^{-2n}\right\}$

$= \frac{6000}{0.02}\left\{1-(1.02)^{-26}\right\}$

$= 300000\{1 - (1.02)^{-26}\}$ .... (1)

ধৰা হ'ল,

$x = (1.02)^{-26}$

$\therefore \log x = -26\log 1.02$

$= -26 \times 0.0086$

$= -0.2236$

$= -1 + 1 - 0.2236$

$= \bar{1}.7764$

$\therefore x =$ এণ্টিল'গ $\bar{1}.7764$

$= 0.5975$

(1) ৰ পৰা পাওঁ—

V $= 300000(1 - 0.5975)$

$= 300000 \times 0.6025$

$= 1,80,750$ টকা

$\therefore$ পেন্সনৰ সমুদায় টকাৰ বৰ্তমান মূল্য = 1,80,750 টকা।

উদাহৰণ 4 ঃ বছৰি $3\frac{1}{2}\%$ চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত 4 বছৰৰ বাবে 60 টকীয়া বাৰ্ষিকী ক্ৰয় কৰিবলৈ বৰ্তমানে কিমান টকা লাগিব?

সমাধান ঃ ইয়াত, বাৰ্ষিকীৰ বৰ্তমান মূল্য নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব।

A = 60 টকা, $n = 4$ বছৰ, $i = \frac{3\frac{1}{2}}{100} = 0.035$, V = ?

(বিদ্যাৰ্থীসকলে নিজে কৰিব)

উত্তৰ ঃ 219.77 টকা।

উদাহৰণ 5 ঃ এজন মানুহে 10,000 টকা বছৰি 5% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত বছৰেকীয়া 1000 টকা কিস্তি সুতেমূলে আদায় দিয়াৰ চৰ্তত ধাৰলৈ ল'লে। কিমান বছৰৰ মূৰত তেওঁ ঋণমুক্ত হ'ব?

সমাধান ঃ ইয়াত, V = 10,000 টকা, A = 1000 টকা, $i = \frac{5}{100} = 0.05, n = ?$

(**টোকা ঃ** ধাৰলৈ লোৱা টকা হ'ব বাৰ্ষিকীৰ বৰ্তমান মূল্য)

এতিয়া, V $= \frac{A}{i}\left\{1-(1+i)^{-n}\right\}$

$\Rightarrow 10,000 = \frac{1000}{0.05}\left\{1-(1.05)^{-n}\right\}$

$\Rightarrow 10 \times 0.05 = 1 - (1.05)^{-n}$

$\therefore \quad (1.05)^{-n} = 1 - 0.5 = 0.5$

উভয়পক্ষত ল'গ লৈ পাওঁ—

$-n\log 1.05 = \log 0.5$

$\Rightarrow -n \times 0.0212 = (-1 + 0.6990) = -0.3010$

$\therefore\ n = \dfrac{0.3010}{0.0212} = \dfrac{3010}{212} = 14.2$ বছৰ (প্ৰায়)

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সময় = 14.2 (প্ৰায়)।

উদাহৰণ 6 ঃ বছৰি 5% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত বছৰি 75 টকীয়া বাৰ্ষিকীৰ 15 বছৰৰ কাৰণে (প্ৰথম 7 বছৰ স্থগিত থকা) বৰ্তমান মূল্য কিমান হ'ব?

সমাধান ঃ ইয়াত, $m = 7$, $n = 15$, $A = 75$ টকা, $i = \dfrac{5}{100} = 0.05$

$V = ?$

এতিয়া, $V = \dfrac{A}{i} \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{m+n}}$

$= \dfrac{75}{0.05} \cdot \dfrac{(1.05)^{15} - 1}{(1.05)^{7+15}}$

$\therefore V = \dfrac{7500}{5} \cdot \dfrac{(1.05)^{15} - 1}{(1.05)^{22}}$ ....(1)

ধৰা হ'ল, $x = (1.05)^{15}$

$\therefore\ \log x = 15\log 1.05$

$= 15 \times 0.0212$

$= 0.318$

$\therefore\ x =$ এণ্টিল'গ 0.318

$= 2.08$

ধৰা হ'ল, $y = (1.05)^{22}$

$\therefore\ \log y = 22\log 1.05$

$= 22 \times 0.0212$

$= 0.4664$

$\therefore\ y =$ এণ্টিল'গ 0.4664

$= 2.927$

(1) ৰ পৰা পাওঁ—

$V = 1500 \cdot \dfrac{1.08}{2.927}$

= 553 টকা (গণনা কৰাৰ পিছত)

$\therefore$ নিৰ্ণেয় বৰ্তমান মূল্য = 553 টকা

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 7 ঃ বছৰি 5% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত এজন মানুহে প্ৰতি বছৰৰ মূৰে মূৰে 1200 টকা বেংকত জমা থয়। 15 বছৰৰ মূৰত তেওঁৰ নামত কিমান টকা জমা হ'ব?

সমাধান ঃ সংকেত ঃ A = 1200 টকা, $i = 0.05$, $n = 15$, $M = ?$

(নিজে চেষ্টা কৰা)

উত্তৰ ঃ 25,920 টকা।

উদাহৰণ 8 ঃ এটা কম্পিউটাৰৰ মূল্য 1,00,000 টকা আৰু কম্পিউটাৰটো 20 বছৰলৈ চলিব বুলি ধৰা হ'ল। 20 বছৰৰ পিছত কম্পিউটাৰটোৰ মূল্য বৰ্তমান মূলতকৈ 20% বৃদ্ধি পাব বুলি প্ৰত্যাশা কৰা হ'ল। 20 বছৰ পিছত কম্পিউটাৰটো সলনি কৰাৰ বাবে বৰ্তমানে প্ৰতি বছৰে কিমান টকাকৈ জমা কৰিব লাগিব? (সুতৰ হাৰ বছৰি 5%)

সমাধান ঃ ইয়াত, M = 100000 টকা + 100000 টকাৰ 20% = 1,20,000 টকা

$i=\frac{5}{100}=0.05, n=20$

সূত্ৰ ঃ $M=\frac{A}{i}\left\{(1+i)^n-1\right\}$

(নিজে চেষ্টা কৰা)

উত্তৰ ঃ 3625.38 টকা।

উদাহৰণ 9 ঃ এজন মানুহে 100000 টকা মূল্যৰ গাড়ী এটা কিস্তিৰ বিনিময়ত কিনিবলৈ ইচ্ছা কৰিলে। কিনিবৰ দিনা 60,000 টকা আদায় দিলে আৰু বাকী টকা 20টা বছৰেকৌয়া কিস্তিৰ বিনিময়ত আদায় দিয়াৰ চৰ্তত মান্তি হ'ল। বছৰি 5% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত, বছৰেকীয়া কিস্তিৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰা। $[(1.05)^{-20}=0.3767]$

সমাধান ঃ সংকেত ঃ ইয়াত V = (100000 – 60000) টকা = 40,000 টকা

$n=20,\ i=0.05,\ A=?$

সূত্ৰ ঃ $V=\frac{A}{i}\left\{1-(1+i)^{-n}\right\}$

(নিজে চেষ্টা কৰা)

উত্তৰ ঃ 3,208.73 টকা।

উদাহৰণ 10 ঃ কোম্পানীৰ মেচিন এটাৰ দাম 52,000 টকা আৰু ইয়াৰ জীৱন কাল 25 বছৰ বুলি ধৰা হ'ল। 25 বছৰৰ মূৰত মেচিনটো সলনি কৰাৰ বাবে ঋণ শোধক পুঁজি গঠনৰ সিদ্ধান্ত লোৱা হ'ল। যদি মেচিনটোৰ ভঙা মূল্য 2500 টকা আৰু নতুন মেচিনৰ দাম আগতকৈ 25% বৃদ্ধি পায় তেন্তে লাভৰ পৰা বছৰি কিমান টকা বেংকত জমা থ'ব লাগিব যদি বছৰি সুতৰ হাৰ 3.5% হয়?

সমাধান ঃ সংকেত ঃ ইয়াত, M = (52000 + 52000 ৰ 25%) টকা – 2500 টকা

= 40,000 টকা, $i=0.035,\ n=25,\ A=?$

সূত্ৰ ঃ $M=\frac{A}{i}\left\{(1+i)^n=1\right\}$

উত্তৰ ঃ 1610.82 টকা।

উদাহৰণ 11 ঃ কোম্পানী এটাৰ 10 বছৰ পিছত সা-সঁজুলি কিনিবৰ বাবে 5,00,000 টকা লাগিব বুলি ধৰি ল'লে। ইয়াৰ বাবে বছৰি 35000 টকা বেংকত জমা থ'বলৈ আৰম্ভ কৰিলে। 10 বছৰৰ মূৰত উক্ত টকা খৰচ কৰাৰ পিছতো কিমান টকা ৰাহি হ'ব? (সুতৰ হাৰ বছৰি 8%)

সমাধান ঃ ইয়াত, আশা কৰা খৰচৰ পৰিমাণ = 5,00,000 টকা, $n=10,\ i=0.08$

$A=35,000$ টকা

প্ৰথমতে, 35,000 টকীয়া বাৰ্ষিকীৰ 10 বছৰৰ সবৃদ্ধিমূল নিৰ্ণয় কৰা হ'ব।

এতিয়া, $M = \frac{A}{i}\left\{(1+i)^n - 1\right\}$

$= \frac{35000}{0.08}\left\{(1.08)^{10} - 1\right\}$ .... (1)

ধৰা হ'ল, $x = (1.08)^{10}$

$\therefore \log x = 10\log 1.08$

$= 10 \times 0.0334$

$= 0.334$

$\therefore x =$ এণ্টিল'গ 0.334

$= 2.158$

(1) ৰ পৰা পাওঁ

$M = \frac{35000}{0.08} \times 1.158$

$= 5,06,625$ টকা

এতেকে দেখা গ'ল 5,00,000 টকা খৰচ কৰাৰ পিছতো কোম্পানীৰ 6,625 টকা ৰাহি হ'ব।

অনুশীলনী

1. বছৰি 8% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত 1200 টকীয়া বাৰ্ষিকীৰ 12 বছৰৰ বৰ্তমান মূল্য কিমান?

   উত্তৰ ঃ 9036 টকা।

2. বছৰি 5% চক্ৰবৃদ্ধি হাৰ সুতত 100 টকীয়া প্ৰত্যক্ষ বাৰ্ষিকীৰ সবৃদ্ধিমূল কিমান?

   উত্তৰ ঃ 1258 টকা।

3. বছৰি 3.5% চক্ৰবৃদ্ধি হাৰ সুতত 4 বছৰৰ বাবে চলি থকা 1050 টকাৰ বাৰ্ষিকী এটা ক্ৰয় কৰিবলৈ বৰ্তমানে কিমান টকা লাগিব?

   উত্তৰ ঃ 3846 টকা।

4. বছৰি 5% চক্ৰবৃদ্ধি হাৰ সুতত এজন মানুহে বছৰি 5000 টকা জমা ৰখাৰ সিদ্ধান্ত ল'লে। 15 বছৰৰ পিছত তেওঁৰ কিমান টকা জমা হ'ব?

   উত্তৰ ঃ 1,00,000 টকা।

5. 25 বছৰ পিছত 1,00,000 টকাৰ মেচিন এটা ক্ৰয় কৰাৰ বাবে কোম্পানী এটাই ঋণশোধক পুঁজি গঠনৰ সিদ্ধান্ত ল'লে। বছৰি 3% চক্ৰবৃদ্ধি হাৰ সুতত বছৰি কিমান টকা বেংকত জমা থ'ব লাগিব?

   উত্তৰ ঃ 2,755 টকা।

6. মেচিন এটাৰ বৰ্তমান দাম 97000 টকা আৰু ইয়াৰ জীৱন কাল 12 বছৰ বুলি ধৰা হ'ল। 12 বছৰ পিছত ইয়াৰ ভঙা মূল্য 2000 টকা পোৱা যাব ধৰি আৰু মেচিনটো সলনি কৰাৰ বাবে বছৰি কিমান টকা বেংকত জমা থ'ব লাগিব? (সুতৰ হাৰ বছৰি 5%)

উত্তৰ ঃ 5960 টকা। (প্ৰায়)

7. বছৰি 6% চক্ৰবৃদ্ধি হাৰ সুতত এজন খেতিয়কে 3000 টকা ধাৰলৈ ল'লে আৰু 20 টা বছৰেকীয়া কিস্তিত সুতেমূলে পৰিশোধ কৰিবলৈ মান্তি হ'ল। কিস্তি বছৰৰ শেষত দিয়া হয়। বছৰেকীয়া কিস্তিৰ পৰিমাণ কিমান?

উত্তৰ ঃ 261.57 টকা।

8. 17,000 টকাৰ ছপা মেচিন এটা ক্ৰয় কৰাৰ বাবে মানুহ এজনে বৰ্তমানে 9000 টকা আদায় দি বাদ বাকী টকা 8টা বছৰেকীয়া কিস্তিত সুতেমূলে পৰিশোধ কৰিবলৈ মান্তি হ'ল। যদি চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰ বছৰি $3\frac{1}{2}\%$ হয় তেন্তে বছৰেকীয়া কিস্তিৰ পৰিমাণ কিমান?

উত্তৰ ঃ 1167 টকা (প্ৰায়)।

9. কিস্তিৰ বিনিময়ত মেচিন এটা ক্ৰয় কৰাৰ বাবে বৰ্তমানে 5000 টকা আদায় দি বাদ বাকী টকা 4 টা সমান বছৰেকীয়া কিস্তিত সুতেমূলে আদায় দিয়া হ'ল। বছৰেকীয়া কিস্তিৰ পৰিমাণ 3000 টকা, কিস্তিবোৰ বছৰৰ শেষত দিয়া হয়। যদি চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰ বছৰি 5% হয় তেন্তে মেচিনটোৰ বৰ্তমান নগদ দাম কিমান?

উত্তৰ ঃ 15,644 টকা (প্ৰায়)।

10. এজন মানুহে তেওঁৰ সমুদায় 20,000 টকা বছৰি 5% চক্ৰবৃদ্ধি হাৰ সুতত বেংকত জমা থ'লে আৰু ব্যক্তিগত খৰচৰ বাবে বছৰি 1800 টকা বেংকৰ পৰা উঠাই ল'বলৈ ধৰিলে (1800 টকা প্ৰথম বছৰৰ শেষৰ পৰা তুলিবলৈ ধৰিলে)। প্ৰমাণ কৰা যে 17 তম বছৰ শেষ হোৱাৰ আগতে তেওঁৰ নামত বেংকত কোনো টকা জমা নাথাকে।

11. এজন মানুহে কিছু টকা ধাৰ লৈ ল'লে আৰু তিনি সমান বছৰেকীয়া কিস্তিত সুতেমূলে আদায় দিলে। যদি কিস্তিৰ পৰিমাণ 21,600 টকা হয় আৰু চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰ বছৰি 20% হয় তেন্তে ধাৰলৈ লোৱা টকাৰ পৰিমাণ কিমান আৰু সুতৰ পৰিমাণ কিমান নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 45,511.20 টকা আৰু 19,288.80 টকা।

12. 50,000 টকাৰ মেচিন এটা 10 বছৰ পিছত সলনি কৰিবলৈ বছৰি কিমান টকা বেংকত জমা থ'ব লাগিব? (চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰ বছৰি 8% আৰু 10 বছৰ পিছত মেচিনৰ দাম 20% বৃদ্ধি পাব।)

উত্তৰ ঃ 4,142 টকা।

***

দ্বিতীয় অধ্যায়

বৈখিক অসমতা আৰু তাৰ লেখ

ধৰা হ'ল, a আৰু b দুটা বাস্তৱ সংখ্যা। a, b তকৈ ডাঙৰ হ'ব যদি $a - b$ এটা ধনাত্মক সংখ্যা। অৰ্থাৎ $a > b$ হ'ব যদি $a - b > 0$ হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি $a = 2$, $b = -1$ তেন্তে $a - b = 2 - (-1) = 3 > 0$, গতিকে $a > b$ অৰ্থাৎ $2 > -1$.

একেদৰে a, b তকৈ সৰু হ'ব যদি $a - b$ এটা ঋণাত্মক সংখ্যা অৰ্থাৎ $a < b$ হ'ব যদি $a - b < 0$ হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি $a = -5$, $b = -3$ তেন্তে $a - b = -5 - (-3) = -2 < 0$

$\therefore$ $a < b$ অৰ্থাৎ $-5 < -3$

আকৌ $a \geq b$ ৰ অৰ্থ হ'ল $a = b$ নাইবা $a > b$ আৰু $a \leq b$ ৰ অৰ্থ হ'ল $a = b$ নাইবা $a < b$

দুটা বাস্তৱ সংখ্যা a আৰু b ৰ বাবে $a > b$ হ'লে সংখ্যা ৰেখাৰ ওপৰত a বুজোৱা বিন্দুটো b বুজোৱা বিন্দুটোৰ সোঁপিনে থাকিব আৰু $a < b$ হ'লে a, b ৰ বাওঁপিনে থাকিব।

অসমতা দুই ধৰণৰ হ'ব পাৰে—

(i) পৰম অসমতা (Absolute inequality) আৰু

(ii) চৰ্ত সাপেক্ষ অসমতা (Conditional inequality)

যদি এটা অসমতা চলক ৰাশিৰ সকলো মানৰ বাবে সত্য, তেনেহ'লে সেই অসমতাক 'পৰম অসমতা' বুলি কোৱা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে $x \in R$ ৰ বাবে $x^2 \geq 0$ এটা পৰম অসমতা, কাৰণ x ৰ সকলো বাস্তৱ মানৰ বাবে $x^2 \geq 0$ হয়। কিন্তু $5x > 7$ ৰ লেখীয়া এটা অসমতা চৰ্ত সাপেক্ষ অসমতা কিয়নো $5x > 7$ হ'ব যদিহে $x > \frac{7}{5}$ হয়। গতিকে এই অসমতাটো $\frac{7}{5}$ তকৈ ডাঙৰ বাস্তৱ মানৰ বাবেহে সত্য।

অসমতাৰ কেইটামান ধৰ্ম ঃ

যদি a, b, c তিনিটা বাস্তৱ সংখ্যা, তেন্তে

(i) $a > b$ আৰু $b > c \Rightarrow a > c$

(ii) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

(iii) $a > b$ আৰু $c > 0 \Rightarrow ac > bc$

(iv) $a > b$ আৰু $c < 0 \Rightarrow ac < bc$

প্ৰমাণ ঃ

(i) $a - c = (a - b) + (b - c)$

যিহেতু $a > b$, $b > c$ গতিকে $a - b > 0$, $b - c > 0$

আৰু সেয়েহে $(a - b) + (b - c) > 0$

গতিকে $a - c > 0$

$\therefore a > c$

(ii) $(a + c) - (b + c) = a - b$

$> 0 \quad [\because a > b]$

$\therefore a + c > b + c$

(iii) $ac - bc = (a - b)c$

$> 0 \quad [\because a > b \Rightarrow a - b > 0$

আকৌ $c > 0$ (দিয়া আছে)]

$\therefore ac > bc$

(iv) $ac - bc = (a - b)c$

$< 0 \quad [a > b \Rightarrow a - b > 0$

কিন্তু $c < 0$ (দিয়া আছে)]

$\therefore ac < bc$

বৈখিক ৰাশি, বৈখিক সমীকৰণ আৰু বৈখিক অসমীকৰণ ঃ

$ax + b$ $(a \neq 0)$ আকাৰৰ এটা ৰাশিক এটা চলকযুক্ত **বৈখিক ৰাশি** (linear expression) বুলি কোৱা হয়। তেনেদৰে দুটা চলকযুক্ত 'বৈখিক ৰাশি' এটা হ'ল $ax + by + c$ $(a \neq 0, \text{b} \neq 0)$ আকাৰৰ আৰু তিনিটা চলকযুক্ত **বৈখিক ৰাশি** এটা হ'ল $ax + by + cz + d$ $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0)$ আকাৰৰ।

যেতিয়া এটা বৈখিক ৰাশিক এটা ধ্ৰুৱক (সাধাৰণতে শূন্য) ৰ লগত সমীকৃত কৰা হয়, তেতিয়া তাক এটা **বৈখিক সমীকৰণ** (linear equation) বুলি কোৱা হয়।

x আৰু y দুটা চলকযুক্ত এটা বৈখিক সমীকৰণে সদায় এডাল সৰলৰেখা সূচায়। গতিকে $ax + by + c = 0$ (য'ত a আৰু b উভয়ে একেলগে শূন্য নহয়) সমীকৰণটোৰ লেখ হ'ব এডাল সৰলৰেখা।

$ax + b > 0$ বা $0ax + b < 0$ বা $ax + b \geq 0$ বা $ax + b \leq 0$ $(a \neq 0)$ আকাৰৰ অসমতা এটাক এটা চলকযুক্ত **বৈখিক অসমতা** (বা **বৈখিক অসমীকৰণ**) বুলি কোৱা হয়।

$ax + by + c > 0$ বা $ax + by + c < 0$ বা $ax + by + c \geq 0$ বা $ax + by + c \leq 0$ আকাৰৰ অসমতা (য'ত a আৰু b উভয়ে একেলগে শূন্য নহয়) এটাই হ'ল **দ্বি-চলকযুক্ত বৈখিক অসমতা** (বা 'বৈখিক অসমীকৰণ')।

ৰৈখিক অসমতাৰ লৈখিক উপস্থাপন (Graphical representation of linear ineqalities) ঃ

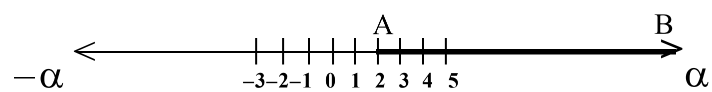
যেতিয়া এটা চলকযুক্ত ৰৈখিক অসমতাৰ লেখ অংকন কৰিব লাগে, আমি সংখ্যা ৰেখা ব্যৱহাৰ কৰোঁ। তলৰ উদাহৰণটোৰে ইয়াক ব্যাখ্যা কৰা হ'ল—

উদাহৰণ 1 ঃ

তলৰ এটা চলকযুক্ত অসমীকৰণবোৰৰ লেখ অংকন কৰা ঃ

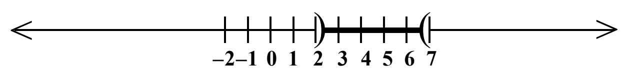
(i) $x \geq 2$ (ii) $2 < x < 7$ (iii) $2x + 1 > 0$

সমাধান ঃ (i) যিহেতু $x \geq 2$, গতিকে x ৰ মান 2 বা 2 তকৈ ডাঙৰ যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যাই হ'ব পাৰে। গতিকে সংখ্যা ৰেখাত 2-ৰ সোঁফালে থকা (2 কে ধৰি) প্ৰতিটো বিন্দুৰে $x \geq 2$ অসমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে।



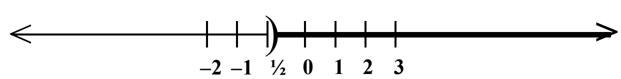
গতিকে নিৰ্ণেয় লেখ হ'ব $\overrightarrow{AB}$ ৰশ্মি (সংখ্যা ৰেখাত দাগ চিহ্নিত অংশ)

(ii) ইয়াত $x > 2$ আৰু $x < 7$; গতিকে সংখ্যা ৰেখাৰ 2 তকৈ ডাঙৰ আৰু 7 তকৈ সৰু প্ৰতিটো বিন্দুৰেই অসমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে। গতিকে প্ৰদত্ত অসমীকৰণৰ লেখ হ'ল সংখ্যা ৰেখাত 2 আৰু 7 বিন্দু দুটা বাদ দি ইয়াৰ মাজৰ দাগ দিয়া অংশ।



(iii) $$2x + 1 > 0$$
$$\Rightarrow \quad 2x > -1$$
$$\Rightarrow \quad x > -\frac{1}{2}$$

গতিকে $-\frac{1}{2}$ তকৈ ডাঙৰ প্ৰতিটো মানেই অসমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে। সেয়েহে প্ৰদত্ত অসমীকৰণটোৰ লেখ হ'ল সংখ্যা ৰেখাত $-\frac{1}{2}$ বিন্দুটো বাদ দি দাগ দিয়া অংশ।

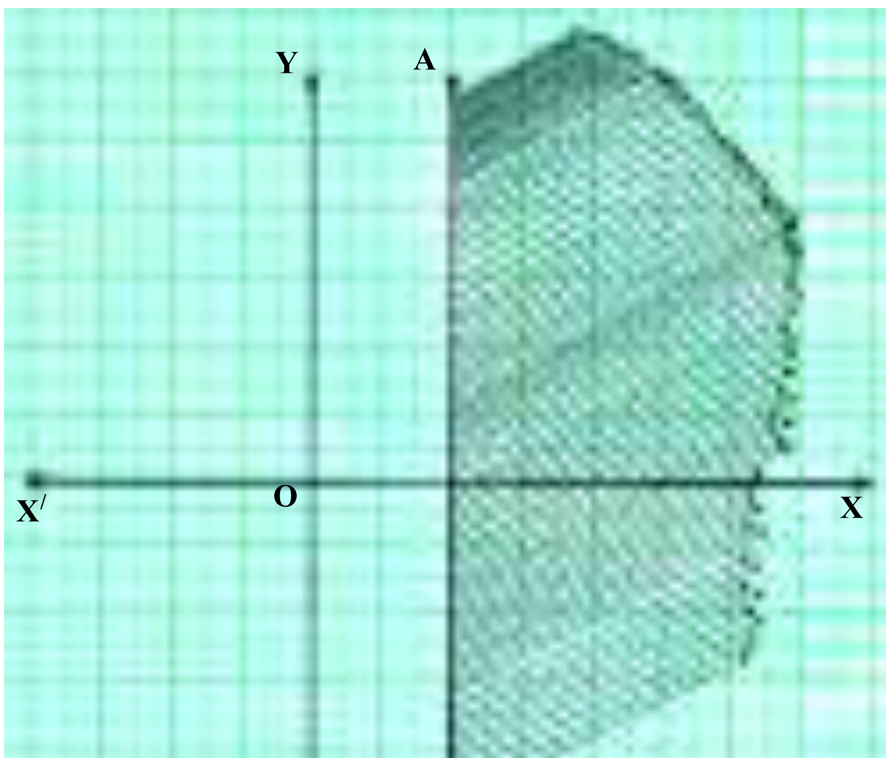


তদুপৰি এটা চলকযুক্ত অসমীকৰণ এটাক আমি দ্বিচলকযুক্ত অসমীকৰণ হিচাপেও বিবেচনা কৰিব পাৰোঁ। উদাহৰণস্বৰূপে যদি আমি $x \geq 2$ অসমীকৰণটোক x আৰু y দ্বিচলকযুক্ত অসমীকৰণ বুলি বিবেচনা কৰোঁ, তেন্তে ই ইয়াকে বুজাব যে $x \geq 2$, আৰু y এ যিকোনো (ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্য) মান ল'ব পাৰোঁ।

উদাহৰণ 2 ঃ স্থানাংক সমতলত (অৰ্থাৎ xy সমতলত) $x \geq 2$ অসমীকৰণৰ লেখ অংকন কৰা।

সমাধান ঃ প্ৰথমে আমি $x = 2$ সমীকৰণটোৰ লেখ অংকন কৰিম। y-অক্ষৰ পৰা 2 একক দূৰত্বত y অক্ষৰ সমান্তৰাল AB ৰেখাই হ'ল $x = 2$ ৰ লেখ। এতিয়া AB ৰেখাই স্থানাংক সমতলক দুটা অংশত বিভক্ত কৰিছে। AB ৰেখাৰ বাওঁপিনে থকা প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $x < 2$ আৰু AB-ৰ সোঁপিনে থকা প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $x > 2$ কিন্তু AB ৰেখাৰ ওপৰত থকা প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $x = 2$

গতিকে $x \geq 2$ অসমীকৰণৰ লেখ হ'ব xy সমতলত AB ৰেখাৰ লগতে AB ৰেখাৰ সোঁপিনে দাগ দিয়া অংশ।

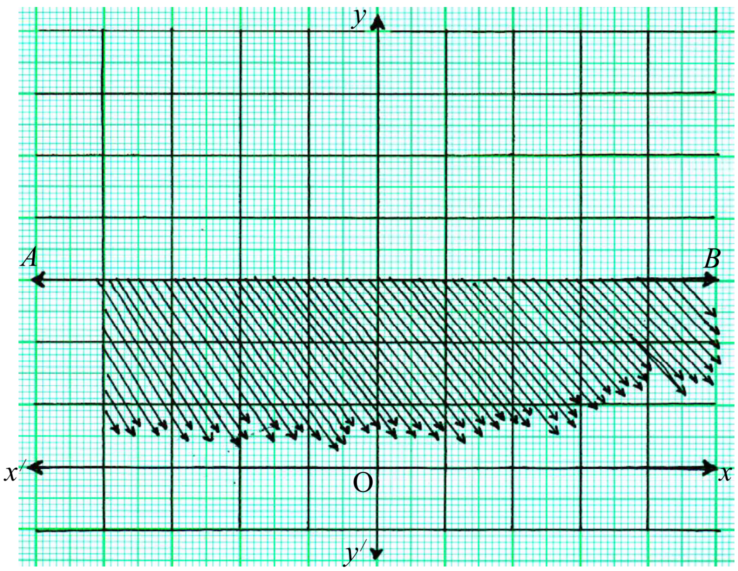


স্কেল ঃ ডাঙৰ বৰ্গৰ এটা বাহু =1 একক

টোকা ঃ $x > 2$-ৰ লেখ হ'ব AB ৰেখাক বাদ দি AB ৰেখাৰ সোঁপিনৰ দাগ দিয়া অংশ।

উদাহৰণ 3 ঃ xy-সমতলত $y < 3$ ৰ লেখ অংকন কৰা।

সমাধান ঃ প্ৰথমতে আমি xy-সমতলত $y = 3$ সমীকৰণৰ লেখ অংকন কৰিম। x-অক্ষৰ পৰা 3 একক দূৰত্বত x-অক্ষৰ সমান্তৰাল AB সৰলৰেখাই হ'ল $y = 3$ সমীকৰণৰ লেখ।



এতিয়া AB ৰেখাৰ ওপৰৰ পিনে, প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $y > 3$ আৰু AB-ৰ তলৰ পিনে প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $y < 3$ কিন্তু AB ৰেখাৰ ওপৰত প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $y = 3$.

গতিকে $y < 3$-ৰ লেখ হ'ব— AB ৰেখাক বাদ দি AB ৰেখাৰ তলৰ ফালে দাগ চিহ্নিত অংশ।

উদাহৰণ 4 ঃ $x > y$ ৰ লেখ অংকন কৰা।

সমাধান ঃ প্ৰথমে আমি $x = y$-ৰ লেখ অংকন কৰিম।

$x = y$ সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰা x আৰু y-ৰ কেইযোৰ মান তলত দিয়া হ'ল—

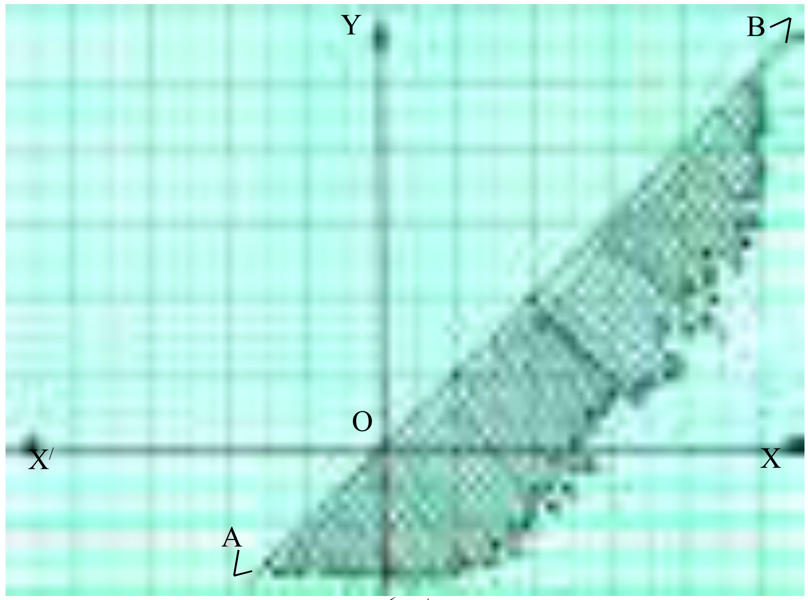
x	0	1	2
y	0	1	2

লেখ কাগজত এই বিন্দুবোৰ বহুৱাই আৰু সেইবোৰ সংযোগ কৰি AB ৰেখাডাল পোৱা হ'ল। AB ৰেখাই হ'ল $x = y$-ৰ লেখ।

এতিয়া AB ৰেখাই xy-সমতলক দুটা অংশত বিভক্ত কৰিছে। চিত্ৰত দাগচিহ্নিত অংশৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $x > y$ কিন্তু আনটো অংশৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $x < y$

গতিকে প্ৰদত্ত অসমীকৰণৰ লেখ হ'ব— AB ৰেখাক বাদ দি চিত্ৰত দেখুওৱা দাগ চিহ্নিত অংশ।

x	0	1	2
y	0	1	2



স্কেল ঃ ডাঙৰ বৰ্গৰ এটা বাহু =1 একক

উদাহৰণ 5 ঃ $x + 3y - 2 < 0$ অসমীকৰণটোৰ লেখ অংকন কৰা।

সমাধান ঃ প্ৰথমে আমি

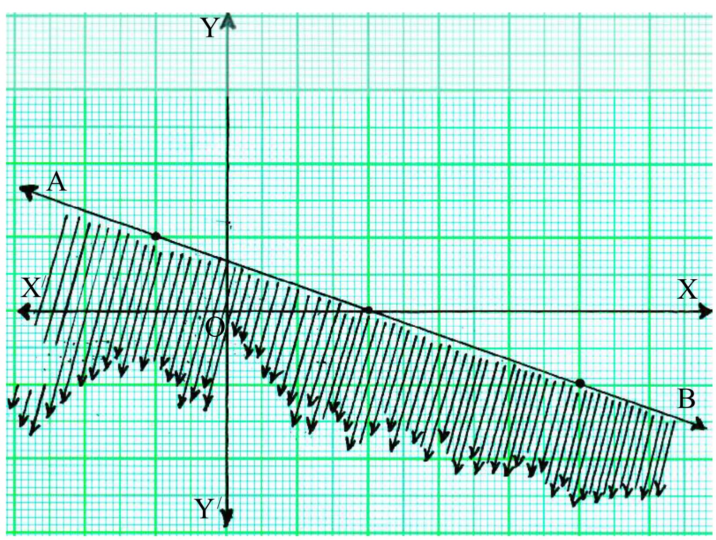
$x + 3y - 2 = 0$ .... (i)

সমীকৰণৰ লেখ অংকন কৰিম।

(i) ৰ পৰা $y = \dfrac{2-x}{3}$

এতিয়া (i) সমীকৰণক সিদ্ধ কৰা x আৰু y-ৰ কেইযোৰমান মান হ'ল—

x	2	– 1	5
y	0	1	–1



স্কেল ঃ ডাঙৰ বৰ্গৰ এটা বাহু = 1 একক

লেখ কাগজত এই বিন্দুবোৰ বহুৱাই আৰু সেইবোৰ সংযোগ কৰি AB ৰেখা পোৰা গ'ল। এই AB ৰেখাই হ'ল (i) সমীকৰণ লেখ।

এতিয়া $x + 3y - 2 < 0 \Rightarrow y < \frac{2-x}{3}$

AB ৰেখাৰ ওপৰৰ অংশত প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $y > \frac{2-x}{3}$ আৰু AB ৰেখাৰ তলৰ অংশত প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $y < \frac{2-x}{3}$ কিন্তু AB ৰেখাৰ ওপৰত প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $y = \frac{2-x}{3}$.

গতিকে প্ৰদত্ত অসমীকৰণৰ লেখ হ'ব AB ৰেখাক বাদ দি AB ৰেখাৰ তলৰ ফালে দাগ দিয়া অংশ।

উদাহৰণ 6 ঃ লেখৰ সহায়ত সমাধান কৰা —

$$3x + y > 6$$
$$2x + 3y - 12 > 0$$

সমাধান ঃ প্ৰথমে আমি $3x + y = 6$ .... (i)

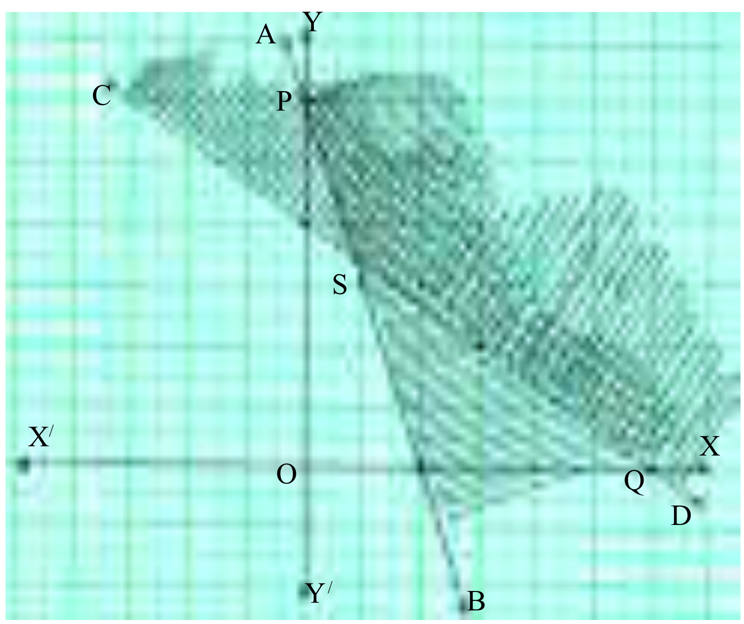
$2x + 3y - 12 = 0$ .... (ii)

সমীকৰণ দুটাৰ লেখ অংকন কৰিম।

(i) ৰ পৰা $y = 6 - 3x$

(i) সমীকৰণ সিদ্ধ কৰা x আৰু y ৰ কেইযোৰমান মান হ'ল—

x	0	2	1	
y	6	0	3	



স্কেল ঃ ডাঙৰ বৰ্গৰ এটা বাহু = 1 একক

এই বিন্দুবোৰ লেখ কাগজত বহুৱাই AB ৰেখাডাল পোৱা গ'ল। এই AB ৰেখাই (i) নং সমীকৰণৰ লেখ।

এতিয়া, $3x + y > 6 \Rightarrow y > 6 - 3x$

AB ৰেখাৰ সোঁফালে প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে $y > 6 - 3x$ গতিকে AB ৰেখাক বাদ দি AB ৰেখাৰ সোঁফালে থকা আটাইবোৰ বিন্দুৰ সমষ্টি হ'ল প্ৰথম অসমীকৰণৰ লেখ।

আকৌ (ii) ৰ পৰা $y = \frac{12-2x}{3}$

(ii) সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰা x, y ৰ কেইযোৰমান মান হ'ল

x	0	6	3
y	4	0	2

এই বিন্দুবোৰ একেখন লেখ কাগজতে (একে স্কেল ব্যৱহাৰ কৰি) বহুৱাই আমি CD ৰেখাডাল পাম আৰু এই CD ৰেখাডালেই (ii) সমীকৰণৰ লেখ।

এতিয়া $2x + 3y - 12 > 0 \Rightarrow y > \frac{12-2x}{3}$ গতিকে দ্বিতীয় অসমীকৰণটোৰ লেখ হ'ল CD ৰেখাক বাদ দি ইয়াৰ ওপৰৰ ফালে থকা অংশৰ আটাইবোৰ বিন্দুৰ সমষ্টি।

দুয়োটা অসমীকৰণৰ লেখৰ সাধাৰণ অংশটো (Common portion) হ'ল মুক্ত ক্ষেত্ৰ APSQD (ৰশ্মি $\overrightarrow{SA}$ আৰু $\overrightarrow{SD}$ বাদ দি)

[চিত্ৰত অথালি-পথালিকৈ দাগ দিয়া অংশটো]

এই সাধাৰণ অংশটোৱে হ'ল প্ৰদত্ত অসমীকৰণ দুটাৰ লৈখিক সমাধান ক্ষেত্ৰ।

অনুশীলনী

1. এটা চলকযুক্ত ৰৈখিক অসমীকৰণৰ সংজ্ঞা লিখা।
2. দ্বি-চলকযুক্ত ৰৈখিক অসমীকৰণৰ সংজ্ঞা লিখা।
3. (i) পৰম অসমতা আৰু (ii) চৰ্ত সাপেক্ষ অসমতা বুলিলে কি বুজা?
4. তলৰ অসমীকৰণবোৰক এটা চলকযুক্ত অসমীকৰণ হিচাপে বিবেচনা কৰি লেখ অংকন কৰা ঃ

   (i) $x > -2$ (ii) $x \le 0$ (iii) $x > 0$ (iv) $|x - 1| < 3$ (v) $3 < x < 8$
5. তলত দিয়া অসমীকৰণবোৰৰ xy-সমতলত লেখ অংকন কৰা ঃ

   (i) $x \ge 5$ (ii) $y < 3$ (iii) $x \ge 0$

(iv) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}>1$ (v) $2x - 4y > 5$ (vi) $x + 2y < 6$

(vii) $2x + 3y > 12$ (viii) $x < y$ (ix) $x + y < 2$

6. তলৰ অসমীকৰণ প্ৰণালীৰ লৈখিক সমাধান কৰা ঃ

(i) $2x + y \geq 12,$ $x + y \geq 7$

(ii) $2x + 5y < 10,$ $x < 2$

(iii) $2x + 3y \geq 18,$ $x + y \geq 8$

(iv) $y \geq 5x,$ $y \leq 0$

(v) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}>6,$ $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\leq 1$

বিন্যাস আৰু দল

উপায় (Choices) **ঃ** ধৰা হ'ল, এটা কোঠাত দুখন দুৱাৰ (A আৰু B) আছে। যদি তুমি কোঠাটোত সোমাব খোজা তেনেহ'লে তুমি A দুৱাৰেৰে নতুবা B দুৱাৰেৰে সোমাব পাৰা। গতিকে কোঠাটোৰ ভিতৰত সোমোৱা কাৰ্যটোৰ বাবে দুটা উপায় আছে।

কোঠাটোৰ ভিতৰত সোমোৱাৰ পিছত, যদি তুমি কোঠাৰ বাহিৰ হৈ ওলাই আহিব লাগে, তেনেহ'লে এই কাৰ্যটোৰ বাবেও দুটা উপায় আছে; তুমি A দুৱাৰখন বা B দুৱাৰখন বাছি ল'ব পাৰা। কোঠাৰ ভিতৰত সোমোৱা আৰু বাহিৰ ওলোৱা কাৰ্য দুটা সম্পন্ন কৰাৰ বাবে উপায় (বা ধৰণ) তলত দিয়া ধৰণে আমি দেখুৱাব পাৰোঁ ঃ

	সোমোৱা	**ওলোৱা**
দুৱাৰৰ নাম ঃ	A	A
	A	B
	B	A
	B	B

গতিকে কোঠাৰ ভিতৰ সোমোৱা আৰু বাহিৰ ওলোৱা কাৰ্য দুটা সম্পন্ন কৰাৰ বাবে মুঠ 4টা উপায় আছে।

কিন্তু যদি এনেকুৱা এটা বাধা থাকে, যে তুমি যিখন দুৱাৰেৰে সোমাবা সেইখন দুৱাৰেৰে ওলাই আহিব নোৱাৰা; তেনেহ'লে তুমি ওলাই অহাৰ উপায় মাত্ৰ এটা হ'ব। গতিকে এই ক্ষেত্ৰত কোঠাৰ ভিতৰ সোমোৱা আৰু বাহিৰ ওলোৱা কাৰ্য দুটা সম্পন্ন কৰাৰ উপায় আমি তলত দিয়াৰ দৰে দেখুৱাব পাৰোঁ—

সোমোৰা	ওলোৰা
A	B
B	A

গতিকে মুঠ উপায় হ'ল 2টা।

তেনেদৰে ধৰা এটা কোঠাত তিনিখন দুৱাৰ আছে— A, B আৰু C। তুমি কোঠাৰ ভিতৰ সোমাবৰ বাবে তিনিটা ভিন্ন উপায় আছে। কোঠাৰ ভিতৰ সোমোৱাৰ পিছত যদি তুমি অন্য এখন দুৱাৰেৰে (ভিতৰ সোমোৱা দুৱাৰখনৰ বাহিৰে) ওলাব বিচৰা তেনে তুমি ওলাই আহিব পাৰা দুই ধৰণে। কোঠাৰ ভিতৰ সোমোৱা আৰু অন্য এখন দুৱাৰেৰে বাহিৰ ওলোৱা কাৰ্য দুটা সম্পন্ন কৰাৰ উপায়বোৰ তলত দেখুওৱা ধৰণে তালিকা কৰিব পাৰোঁ—

সোমোৰা	ওলোৰা
A	B
A	C
B	A
B	C
C	A
C	B

গতিকে দেখা গ'ল এই ক্ষেত্ৰত কোঠাৰ ভিতৰ সোমোৱা আৰু বাহিৰ ওলোৱা কাৰ্য দুটাৰ বাবে মুঠ 6 টা উপায় আছে।

আমি দেখিবলৈ পাইছোঁ যে কোঠাৰ ভিতৰ সোমোৱা কাৰ্যটো সম্পন্ন কৰিব পাৰি 3 টা ভিন্ন উপায়ে আৰু প্ৰতিবাৰ ভিতৰ সোমোৱা কাৰ্যটোৰ বাবে বাহিৰ ওলোৱা কাৰ্যটো সম্পন্ন কৰিব পাৰি দুই ধৰণে। এইদৰে দুয়োটা কাৰ্যই একেলগে সম্পন্ন কৰাৰ উপায় হ'ল — $3 \times 2 = 6$

যদি যিখন দুৱাৰেৰে ভিতৰ সোমোৱা সেই দুৱাৰেৰে বাহিৰ ওলাব নোৱাৰা এই বাধাটো নাথাকে, তেন্তে ভিতৰ সোমোৱা কাৰ্যটো সম্পন্ন কৰিব পাৰি তিনি ধৰণে আৰু প্ৰতিবাৰ ভিতৰ সোমোৱা কাৰ্যটোৰ বাবে বাহিৰ ওলোৱা কাৰ্যটো সম্পন্ন কৰিব পাৰি তিনি ধৰণে, গতিকে দুয়োটা কাৰ্যই একেলগে সম্পন্ন কৰিব পাৰি $3 \times 3 = 9$ ধৰণে।

ওপৰৰ আলোচনাৰ পৰা এইটো স্পষ্ট হ'ল যে ইয়াৰ অন্তৰালত এটা মৌলিক বিধি আছে, যিটো তলত বৰ্ণনা কৰা হ'ল—

বিধি (Principle) ঃ যদি কোনো এটা কাৰ্য 'm' ভিন্ন উপায়ে সম্পন্ন কৰিব পাৰি আৰু যদি এই কাৰ্যটো সম্পন্ন কৰাৰ প্ৰতিবাৰতে অন্য এটা কাৰ্য 'n' ভিন্ন উপায়ে সম্পন্ন কৰিব পাৰি তেনেহ'লে দুয়োটা কাৰ্য একেলগে সম্পন্ন কৰিব পাৰি $m \times n$ ভিন্ন উপায়ে।

এই বিধিটো যিকোনো সংখ্যক কাৰ্যৰ বাবে প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি। সাধাৰণতঃ যদি এটা কাৰ্য m উপায়ে সম্পন্ন কৰিব পাৰি, ইয়াৰ লগতে দ্বিতীয় এটা কাৰ্য n ভিন্ন উপায়ে সম্পন্ন কৰিব পাৰি আৰু ইয়াৰ লগতে

তৃতীয় কাৰ্যটো যদি p ভিন্ন উপায়ে সম্পন্ন কৰিব পাৰি; এনেদৰে সম্পন্ন কৰি গৈ থাকিলে আটাইকেইটা কাৰ্য একেলগে সম্পন্ন কৰিব পাৰি $m \times n \times p \times$ .... ভিন্ন উপায়ে।

বিন্যাস (Permutation) ঃ এটা সসীম সংহতিৰ মৌলবোৰৰ পৰা কেইটামান বা আটাইকেইটা মৌলকে লৈ এটা শাৰীত যিমান ভিন্ন প্ৰকাৰে সজাব পাৰি, এই প্ৰতিটো সজোৱাৰ প্ৰকাৰকেই ‘বিন্যাস’ বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে, তিনিটা আখৰ A, B, C-ৰ পৰা এটা, দুটা বা তিনিটাকৈ লৈ পোৱা বিন্যাসবোৰ তলত দেখুওৱা হ’ল —

এটাকৈ লৈ	দুটাকৈ লৈ	তিনিটাকৈ লৈ
A	AB	ABC
B	BA	ACB
C	AC	BAC
	CA	BCA
	BC	CAB
	CB	CBA

সাংকেতিক চিন (Notation) ঃ ধৰা হ’ল, এটা সংহতিত n টা বস্তু আছে আৰু প্ৰতিটো বিন্যাসত ধৰা r টাকৈ বস্তু ($r \leq n$) আছে; তেনেহ’লে মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যাক ${}^{n}P_{r}$ বা ${}_{n}P_{r}$ বা $P(n, r)$ সংকেতেৰে বুজোৱা হয়। গতিকে ${}^{n}P_{r}$ বা ${}_{n}P_{r}$ বা $P(n, r)$ সংকেতে বুজাব যে— n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা প্ৰতিবাৰতে r টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাস। গতিকে ওপৰৰ উদাহৰণটোও আমি দেখিবলৈ পাইছোঁ যে ${}^{3}P_{1} = 3$, ${}^{3}P_{2} = 6$, ${}^{3}P_{3} = 6$.

ক্ৰমগুণন চিহ্ন (Factorial notation) ঃ প্ৰথম n টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ ক্ৰমিক পূৰণফল (গুণফল)ক $\underline{|n}$ বা $n\,!$ প্ৰতীকটোৰে সূচোৱা হয়। ইয়াক ক্ৰমগুণন n (factorial n) বুলি পঢ়া হয়।

গতিকে $\underline{|n}$ বা $n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots\ldots \times (n-1) \times n$

$$= n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$\underline{|5} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$
$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$\underline{|7} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$$
$$= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

সংজ্ঞাৰ পৰা আমি পাওঁ

$$\underline{|n} = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3.2.1$$
$$= n[(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3.2.1]$$
$$= n\underline{|n-1}$$

একেদৰে, $\underline{|n} = n(n-1)\underline{|n-2}$

$= n(n-1)(n-2)\lfloor\underline{n-3}$ ইত্যাদি।

গতিকে $\lfloor\underline{10} = 10 \times \lfloor\underline{9} = 10 \times 9 \times \lfloor\underline{8} = 10 \times 9 \times 8 \times \lfloor\underline{7}$ ইত্যাদি।

উপপাদ্য ঃ n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা r $(r \leq n)$ টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ল

$$\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}}$$

প্ৰমাণ ঃ n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা r টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা আৰু n টা প্ৰদত্ত বস্তুৰ পৰা r টাকৈ লৈ এটা শাৰীৰ n টা ভিন্ন ঠাইত সজোৱাৰ প্ৰকাৰৰ সংখ্যা একেই।

এতিয়া প্ৰথম ঠাই n টা প্ৰদত্ত বস্তুৰ যিকোনো এটাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। গতিকে প্ৰথম ঠাই n ভিন্ন প্ৰকাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। প্ৰথম ঠাই পূৰ্ণ কৰাৰ পিছত দ্বিতীয় ঠাই বৈ যোৱা $(n-1)$ টা ভিন্ন বস্তুৰ যিকোনো এটাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। গতিকে দ্বিতীয় ঠাই $(n-1)$ প্ৰকাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। তেনেদৰে তৃতীয় ঠাই $(n-2)$ ভিন্ন প্ৰকাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি, ইত্যাদি। এইদৰে ক্ৰমাগত আগবাঢ়িলে, শেষৰ ঠাই (r তম ঠাই)ৰ বাবে আমাৰ হাতত $[n-(r-1)]$ সংখ্যক ভিন্ন বস্তু থাকিব। গতিকে শেষৰ ঠাই $n-(r-1) = n-r+1$ ভিন্ন ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি

এইদৰে r সংখ্যক ঠাই পূৰ্ণ কৰিব পাৰি $n(n-1)(n-2)$ .... $(n-r+1)$ ভিন্ন প্ৰকাৰে।

গতিকে $^{n}P_{r} = n(n-1)(n-2).....(n-r+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)(n-r)....3.2.1}{(n-r)(n-r-1).....3.2.1}$$

$$= \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}}$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

(i) $^{n}P_{r} = n(n-1)(n-2)$....... $(n-r+1)$-ত $r = n$ বহুৱাই আমি পাওঁ

$^{n}P_{n} = n(n-1)(n-2)$....... $1 = \lfloor\underline{n}$

আকৌ (ii) $^{n}P_{r} = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}}$ -ত $r = n$ বহুৱাই আমি পাওঁ

$$^{n}P_{n} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{0}}$$

$\therefore \lfloor\underline{n} = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{0}}$

$\therefore \lfloor\underline{0} = 1$

উদাহৰণ 1 ঃ ${}^5P_3$, ${}^7P_4$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ $${}^5P_3 = \frac{\lfloor 5}{\lfloor 5-3} = \frac{\lfloor 5}{\lfloor 2} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = 60$$

$${}^7P_4 = \frac{\lfloor 7}{\lfloor 7-4} = \frac{\lfloor 7}{\lfloor 3} = \frac{7\times6\times5\times4\times\lfloor 3}{\lfloor 3} = 840$$

উদাহৰণ 2 ঃ 'EQUATION' শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমান ধৰণে সজাব পাৰি?

সমাধান ঃ 'EQUATION' শব্দটোত 8 টা ভিন্ন আখৰ আছে। গতিকে এই আখৰকেইটাক সজোৰাৰ প্ৰকাৰ হ'ব 8 টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা আটাইকেইটাকে লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সমান—

$${}^8P_8 = \lfloor 8$$
$$= 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$$
$$= 40320$$

পুনৰাবৃত্তি ঘটাই বিন্যাস (Permutations with repetition) n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা r টাকৈ ($r \le n$) লৈ পোৱা বিন্যাসৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰিব লাগে যদিহে প্ৰতিটো বস্তুৰেই সৰ্বাধিক r বাৰ পুনৰাবৃত্তি হ'ব পাৰে।

স্পষ্টতঃ নিৰ্ণেয় বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ব n সংখ্যক ভিন্ন বস্তুৰে n সংখ্যক ঠাই পূৰ্ণ কৰাৰ মুঠ প্ৰকাৰ য'ত প্ৰতিটো বস্তুৰেই এটা বিন্যাসত সৰ্বাধিক r বাৰ পুনৰাবৃত্তি হ'ব পাৰে।

প্ৰথম ঠাই n টা বস্তুৰ যিকোনো এটাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি অৰ্থাৎ প্ৰথম ঠাই n ভিন্ন প্ৰকাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। যিহেতু বস্তুবোৰ পুনৰাবৃত্তি হ'ব পাৰে, গতিকে প্ৰথম ঠাই পূৰ্ণ কৰাৰ পিছত দ্বিতীয় ঠাই n টা বস্তুৰ যিকোনো এটাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। অৰ্থাৎ দ্বিতীয় ঠাই n ভিন্ন প্ৰকাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। এনেদৰে r টা ঠাইৰ প্ৰতিটো n ভিন্ন প্ৰকাৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। গতিকে r টা ঠাইৰ আটাইকেইটা পূৰ্ণ কৰাৰ মুঠ প্ৰকাৰ হ'ল—

$n.n.n.$ .... (r বাৰ) $= n^r$

গতিকে নিৰ্ণেয় বিন্যাসৰ সংখ্যা $= n^r$

উদাহৰণ 3 ঃ 6 খন চিঠি 5 টা চিঠি বাকচত কিমান ধৰণে পেলাব পাৰি?

সমাধান ঃ প্ৰথম চিঠিখন 5টা বাকচৰ যিকোনো এটাত সুমুৱাব পাৰি। গতিকে প্ৰথম চিঠিখন 5 ধৰণে সুমুৱাব পাৰিব। প্ৰথম চিঠিখন সোমোৱাৰ পিছত দ্বিতীয় চিঠিখনো 5টা বাকচৰ যিকোনো এটাত সুমুৱাব পাৰি (প্ৰথমে চিঠিখন সোমাৱা বাকচটোতো দ্বিতীয় চিঠিখন সুমুৱাব পাৰি)। এইদৰে 6 খন চিঠিৰ প্ৰতিখনে 5 ধৰণে বাকচত সুমুৱাব পাৰি।

গতিকে 6 খন চিঠি বাকচত সোমোৱাৰ মুঠ ধৰণ

$$= 5\times5\times5\times5\times5\times5$$
$$= 5^6$$
$$= 15625$$

উদাহৰণ 4 ঃ 5 টা পুৰস্কাৰ 4 জন ল'ৰাক কিমান ধৰণে দিব পাৰি, যদিহে প্ৰতিজন ছাত্ৰৰে যিকোনো সংখ্যক পুৰস্কাৰ লাভ কৰাৰ যোগ্যতা থাকে?

সমাধান ঃ প্ৰথম পুৰস্কাৰটো 4 জন ল'ৰাৰ যিকোনো এজনকে দিব পাৰি। গতিকে প্ৰথম পুৰস্কাৰটো 4 টা ভিন্ন ধৰণে দিব পাৰি। প্ৰথম পুৰস্কাৰটো দিয়াৰ পিছত দ্বিতীয় পুৰস্কাৰটোও 4 জন ল'ৰাৰ যিকোনো এজনক দিব পাৰি। অৰ্থাৎ দ্বিতীয় পুৰস্কাৰটোও 4 টা ভিন্ন ধৰণে দিব পাৰি। এইদৰে 5টা পুৰস্কাৰৰ প্ৰতিটোৰে 4টা ভিন্ন ধৰণে দিব পাৰি।

গতিকে পুৰস্কাৰ দিয়াৰ মুঠ ধৰণ $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

$= 4^5$

$= 1024$

বস্তুবোৰৰ আটায়ে ভিন্ন নহয়, এনেকুৱা বস্তুৰ বিন্যাস ঃ

বস্তুবোৰৰ আটায়ে ভিন্ন নহয়, এনেকুৱা n টা বস্তুৰ আটাইকেইটাকে লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

ধৰা হ'ল, $a, b, c,$ .... ইত্যাদি n টা বস্তু আছে।

ধৰা, ইয়াৰে p টা বস্তুৰেই a, q টা বস্তুৰেই b আৰু r টা বস্তুৰেই c আৰু বাকী বস্তুবোৰ ভিন্ন। এই n টা বস্তুৰ আটাইকেইটাকে লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

ধৰা হ'ল, মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা $= x$. যদি আটাইকেইটা a ৰ ঠাইত p টা ভিন্ন বস্তু লোৱা হয়, তেনেহ'লে x সংখ্যক বিন্যাসৰ প্ৰতিটো বিন্যাসতেই এই p সংখ্যক বস্তুক সিহঁতৰ মাজত $\underline{|p}$ ধৰণে সজাব পৰা যাব। গতিকে আদিতে পোৱা x টা বিন্যাসৰ ঠাইত $x.\underline{|p}$ টা বিন্যাস পোৱা যাব।

এই $x.\underline{|p}$ টা বিন্যাসৰ প্ৰতিটোতে q সংখ্যক একে বস্তু b আৰু r সংখ্যক একে বস্তু c থাকিব। যদি q টা একে বস্তু b-ক আমি q টা ভিন্ন বস্তুৰে সলনি কৰোঁ তেন্তে এই q টা বস্তুক সিহঁতৰ মাজত $\underline{|q}$ ধৰণে সজাব পাৰি। গতিকে $x.\underline{|p}$ টা বিন্যাসৰ পৰা আমি $x.\underline{|p}.\underline{|q}$ টা বিন্যাস পাম য'ত প্ৰতিটো বিন্যাসতে r টা একে বস্তু c থাকিব।

আগৰ দৰে এই r টা একে বস্তু c ৰ ঠাইত r টা ভিন্ন বস্তু ল'লে আমি মুঠ বিন্যাস পাম $x.\underline{|p}.\underline{|q}.\underline{|r}$ য'ত প্ৰতিটো বিন্যাসতে nটা ভিন্ন বস্তু থাকিব। কিন্তু nটা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ল $\underline{|n}$

$\therefore\ x.\underline{|p}.\underline{|q}.\underline{|r} = \underline{|n}$

$$\Rightarrow\ x = \frac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}}$$

উদাহৰণ 5 ঃ 'COLLEGE' শব্দটোৰ আখৰবোৰক কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত মুঠ আখৰৰ সংখ্যা = 7

এই 7 টা আখৰৰ ভিতৰত 2 টা L আৰু 2 টা E আছে।

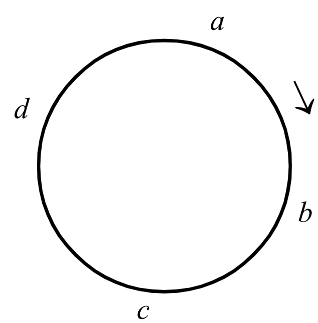
$\therefore$ মুঠ সজোৰাৰ প্ৰকাৰ $= \dfrac{\lfloor\underline{7}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{2}}$

$= \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{2}$

$= 1260$

বৃত্তীয় বিন্যাস (Circular permutations) ঃ

ৰৈখিক বিন্যাসত (অৰ্থাৎ এটা শাৰীত সজোৰা) দুটা প্ৰান্ত বিন্দু (আদি আৰু অন্ত) থাকে কিন্তু বৃত্তীয় বিন্যাসত (অৰ্থাৎ এটা বৃত্তত সজোৰাৰ ক্ষেত্ৰত) আদি আৰু অন্ত নাথাকে। উদাহৰণস্বৰূপে ধৰা হ'ল, 4টা আখৰ a, b, c, d ক এটা বৃত্তত চিত্ৰত দেখুৱাৰ দৰে সজোৰা হ'ল। এই বিন্যাসটোক প্ৰতিটো আখৰৰ পৰা আৰম্ভ কৰি ঘড়ীৰ কাঁটাৰ দিশত আমি তলত উল্লেখ কৰা যিকোনো এক ধৰণে পঢ়িব পাৰোঁ— *abcd, bcda, cdab*



যদি আমি এটা শাৰীত সজাওঁ তেন্তে এই 4 টা ভিন্ন 4 টা বিন্যাস হ'ব, কিন্তু বৃত্তত সজালে এই 4 টা একেটাই বিন্যাস। গতিকে 4 টা ৰৈখিক বিন্যাসৰ ঠাইত আমি এটা বৃত্তীয় বিন্যাস পালোঁ। কিন্তু 4 টা আখৰক মুঠ $\lfloor\underline{4}$ ধৰণে সজাব পাৰি (এটা শাৰীত)

গতিকে 4 টা আখৰক এটা বৃত্তত সজোৰাৰ প্ৰকাৰ $= \dfrac{\lfloor\underline{4}}{4} = \lfloor\underline{3} = \lfloor\underline{4-1}$

n টা ভিন্ন বস্তুৰ আটাইকেইটা লৈ পোৱা বৃত্তীয় বিন্যাসৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

ধৰা হ'ল, n টা ভিন্ন বস্তুক $a_1, a_2 \ldots\ldots, a_n$ আখৰ কেইটাৰে বুজোৰা হ'ল। এটা শাৰীত $a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ldots a_n,\; a_2\, a_3\, a_4 \ldots\ldots a_n\, a_1,\; a_3\, a_4 a_5 \ldots\ldots a_n a_1 a_2,\; \ldots\ldots,\; a_n a_1 a_2 \ldots\ldots a_{n-1}$ হ'ল n টা ভিন্ন বিন্যাস; কিন্তু এটা বৃত্তত এই আটাইকেইটাই একেটা বিন্যাস। এইদৰে এটা শাৰীৰ প্ৰতি n টা বিন্যাসৰ ঠাইত এটা বৃত্তীয় বিন্যাস পোৱা যাব।

গতিকে এটা বৃত্তত সজোৰাৰ মুঠ প্ৰকাৰ $= \dfrac{\lfloor\underline{n}}{n} = \lfloor\underline{n-1}$

উদাহৰণ 6 ঃ এখন ঘূৰণীয়া মেজৰ চাৰিওফালে 7 জন মানুহক কিমান ধৰণে বহুৱাব পাৰি?

সমাধান ঃ যিহেতু এইটো বৃত্তীয় বিন্যাস, গতিকে মুঠ বহিব পৰা উপায় $= \lfloor\underline{7-1}$

$= \lfloor\underline{6}$

$= 720$

উদাহৰণ 7 ঃ 5 জন ল'ৰা আৰু 4 জনী ছোৱালীক এটা বৃত্তত বহুৱাব লাগে। সিহঁতে কিমান ধৰণে বহিব পাৰে?

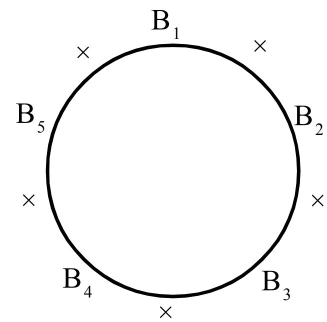
সমাধান ঃ ল'ৰা আৰু ছোৱালীৰ মুঠ সংখ্যা = 5 + 4 = 9

গতিকে 9 জন ল'ৰা-ছোৱালীক এটা বৃত্তত বহুৱাব লাগে।

$\therefore$ সিহঁতে বহিব পৰা মুঠ প্ৰকাৰ = $\lfloor\underline{9-1} = \lfloor\underline{8}$

উদাহৰণ 8 ঃ 5 জন ল'ৰা আৰু 4 জনী ছোৱালীক এটা বৃত্তত কিমান ধৰণে বহুৱাব পাৰি যাতে কোনো দুজনী ছোৱালীয়ে ওচৰা-উচৰিকৈ নবহে?

সমাধান ঃ প্ৰথমে ল'ৰা 5 জনক বহুওৱা হওক। 5 জন ল'ৰাক এটা বৃত্তত $\lfloor\underline{5-1} = \lfloor\underline{4}$ ধৰণে বহুৱাব পাৰি। যিহেতু কোনো দুজনী ছোৱালীয়ে ওচৰা-উচৰিকৈ নবহে, গতিকে ল'ৰাবোৰে সিহঁতৰ স্থান দখল কৰাৰ পিছত ($\lfloor\underline{4}$ প্ৰকাৰৰ যিকোনো এটা প্ৰকাৰত) ছোৱালী 4 জনীয়ে দুজনকৈ ল'ৰাৰ মাজত থকা মুঠ 5 টা স্থানৰ (চিত্ৰ চোৱা) যিকোনো 4 টা স্থান ল'ব পাৰে। গতিকে ছোৱালী 4 জনীয়ে সিহঁতৰ স্থান ল'ব পাৰে ${}^{5}p_{4}$ ধৰণে।



$\therefore$ ল'ৰা-ছোৱালীবোৰ বহিব পৰা মুঠ প্ৰকাৰ

$$= \lfloor\underline{4} \times {}^{5}p_{4}$$

$$= \lfloor\underline{4} \times \frac{5}{\lfloor\underline{5-4}}$$

$$= \lfloor\underline{4} \times \lfloor\underline{5}$$

$$= 2880$$

উদাহৰণ 9 ঃ 6 টা বিভিন্ন ধৰণৰ মণি এডাল গলপতা (Neeklace)ত কিমান ধৰণে সজাব পাৰি?

সমাধান ঃ ইয়াত আমি 6 টা ভিন্ন বস্তুৰ আটাইকেইটাকে এটা বৃত্তত সজাব লাগে কিন্তু গলপতাৰ ক্ষেত্ৰত ঘড়ীৰ কাঁটাৰ দিশত সজোৱা আৰু ঘড়ীৰ কাঁটাৰ বিপৰীত দিশত সজোৱাৰ মাজত কোনো প্ৰভেদ নাথাকে।

গতিকে সজোৱাৰ মুঠ ধৰণ $= \frac{1}{2}\lfloor\underline{6-1}$

$$= \frac{1}{2} \times \lfloor\underline{5}$$

$$= \frac{1}{2} \times 120$$

$$= 60$$

বাধা আৰোপিত বিন্যাস (Restricted Permutations) **ঃ**

এতিয়া আমি কেইটামান ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ দিব বিচাৰিছোঁ, য'ত বস্তুবোৰ সজোৱাত কিছুমান বাধা আৰোপ কৰা থাকে।

উদাহৰণ 10 ঃ 'DAUGHTER' শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমান ধৰণে সজাব পাৰি যাতে G, T আৰু R এই আখৰকেইটা কেতিয়াও নাহে?

সমাধান ঃ যিহেতু G, T আৰু R এই আখৰ তিনিটা কোনো বিন্যাসতে নাথাকে গতিকে আমি বাকী 5 টা আখৰক সিহঁতৰ মাজত সজাব লাগে।

গতিকে মুঠ সজোৱাৰ প্ৰকাৰ = $\underline{|5}$ = 120

উদাহৰণ 11 ঃ 'DAUGHTER' শব্দটোৰ আখৰ কেইটাৰ পৰা 5 টাকৈ আখৰ লৈ কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি যাতে G, T আৰু R এই আখৰকেইটাই সদায় ক্ৰমানুসৰি প্ৰথম, তৃতীয় আৰু পঞ্চম স্থান অধিকাৰ কৰে?

সমাধান ঃ প্ৰথমে G, T আৰু R এই আখৰ তিনিটা নিৰ্দ্দিষ্ট স্থানত (ক্ৰমানুসৰি প্ৰথম, তৃতীয় আৰু পঞ্চম স্থানত) বহুৱাই লোৱা হ'ল। এতিয়া বাকী দুটা ঠাই (দ্বিতীয় আৰু চতুৰ্থ) বাকী থকা 5 টা আখৰেৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি ${}^5P_2$ ধৰণে।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় মুঠ সজোৱাৰ প্ৰকাৰ = ${}^5P_2 = 20$

উদাহৰণ 12 ঃ এটা শাৰীত থকা 6 খন চকীত 8 জন ল'ৰাক কিমান ধৰণে বহুৱাব পাৰি যাতে তিনিজন বিশেষ ল'ৰা সদায় অন্তৰ্ভুক্ত হয়?

সমাধান ঃ তিনিজন বিশেষ ল'ৰাই 6 খন চকীৰ 3 খন ${}^6P_3$ ধৰণে দখল কৰিব পাৰে। এই তিনিখন চকী পূৰ্ণ হোৱাৰ পিছত বাকী থকা (6 – 3) = 3 খন চকী বাকী (8 – 3) = 5 জন ল'ৰাই ${}^5P_3$ ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰে।

$\therefore$ ল'ৰা 8 জনক বহুৱাওৱাৰ প্ৰকাৰ

$$= {}^6P_3 \times {}^5P_3$$

$$= \frac{\underline{|6}}{\underline{|3}} \times \frac{\underline{|5}}{\underline{|2}}$$

$$= 7200$$

উদাহৰণ 13 ঃ 'TABLE' শব্দটোৰ আখৰ কেইটাৰ পৰা 4 টাকৈ লৈ কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি যাতে BL এই দুটা আখৰ একেলগে আৰু প্ৰদত্ত ক্ৰমত সদায়ে থাকে?

সমাধান ঃ BL আখৰ দুটাক এই ক্ৰমত একেলগে এটা আখৰ বুলি ধৰা হ'ল। এই আখৰ দুটাই 4টা ঠাইৰ দুটা ঠাই অধিকাৰ কৰিব। এতিয়া বাকী 3টা আখৰ (T, A, E) ৰ পৰা 2টা লৈ আমি ${}^3p_2$ ধৰণে সজাব পাৰোঁ। এই প্ৰতিটো বিন্যাসতে 2টাকৈ আখৰ থাকিব। এই দুটা আখৰৰ

মাজত এটা ঠাই আৰু সিহঁতৰ দুয়োফালে দুটা ঠাই মুঠতে 3টা ঠাই *BL* আখৰৰ জোঁটটোৰে 3 ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি।

গতিকে সজোৱাৰ মুঠ প্ৰকাৰ $= 3 \times {}^3p_2$

$= 18$

টোকা ঃ

যদি *BL* আখৰ দুটা সেই ক্ৰমত নাথাকে, তেন্তে সজোৱাৰ প্ৰকাৰ হ'ব$= 3 \times \lfloor\underline{2} \times {}^3p_2 = 36$ (এই ক্ষেত্ৰত *B* আৰু *L* আখৰ দুটাক সিহঁতৰ মাজত ${}^2p_2 = \lfloor\underline{2}$ ধৰণে সজাব পাৰি)।

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

1. প্ৰমাণ কৰা যে ${}^nP_{n-1} = {}^nP_n$

সমাধান ঃ আমি জানো, ${}^nP_r = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}}$

$$\therefore\ {}^nP_{n-1} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-(n-1)}}$$

$$= \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{1}}$$

$$= \lfloor\underline{n}$$

$$= {}^nP_n$$

2. প্ৰমাণ কৰা যে ${}^nP_r = n.{}^{n-1}P_{r-1}$

সমাধান ঃ ${}^nP_r = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}}$

$$= \frac{\mathrm{n}.\lfloor\underline{\mathrm{n}-1}}{\lfloor\underline{(\mathrm{n}-1)-(\mathrm{r}-1)}}$$

$$= \mathrm{n}.\frac{\mathrm{n}-1}{(\mathrm{n}-1)-(\mathrm{r}-1)}$$

$$= \mathrm{n}.\frac{\mathrm{n}-1}{(\mathrm{n}-1)-(\mathrm{r}-1)}$$

3. *n*-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদি

${}^nP_5 : {}^n\mathrm{P}_3 = 2 : 1$

সমাধান ঃ $\dfrac{{}^nP_5}{{}^nP_3} = \dfrac{2}{1}$

$$\Rightarrow {}^nP_5 = 2 \times {}^nP_3$$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-5}} = 2 \times \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor\!\underline{n-3}}{\lfloor\!\underline{n-5}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{(n-3)(n-4)\lfloor\!\underline{(n-5)}}{\lfloor\!\underline{n-5}} = 2$$

$\Rightarrow (n-3)(n-4) = 2\times 1$ [$n-3$ আৰু $n-4$ দুটা ক্ৰমিক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা]

$\Rightarrow n - 3 = 2$

$\Rightarrow n = 5$

4. যদি ${}^{n}P_4 : {}^{n+1}P_4 = 5 : 9$, n ৰ মান উলিওৱা

সমাধান ঃ $\dfrac{{}^{n}P_4}{{}^{n+1}P_4} = \dfrac{5}{9}$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\lfloor\!\underline{n}}{\lfloor\!\underline{n-4}}}{\dfrac{\lfloor\!\underline{n+1}}{\lfloor\!\underline{n+1-4}}} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor\!\underline{n}\,\lfloor\!\underline{n-3}}{\lfloor\!\underline{n-4}\,\lfloor\!\underline{n+1}} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor\!\underline{n}\ (n-3)\lfloor\!\underline{n-4}}{\lfloor\!\underline{n-4}\ (n+1)\ \lfloor\!\underline{n}} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{n-3}{n+1} = \frac{5}{9}$$

$\Rightarrow 9n - 27 = 5n + 5$

$\Rightarrow 4n = 32$

$\Rightarrow n = 8$

5. যদি ${}^{n+1}P_3 = 10 \times {}^{n-1}P_2$; n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ${}^{n+1}P_3 = 10 \times {}^{n-1}P_2$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor\!\underline{n+1}}{\lfloor\!\underline{(n+1)-3}} = 10\times\frac{\lfloor\!\underline{n-1}}{\lfloor\!\underline{(n-1)-2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)n\lfloor\!\underline{n-1}}{\lfloor\!\underline{n-2}} = 10\times\frac{\lfloor\!\underline{n-1}}{\lfloor\!\underline{n-3}}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{(n-2)\lfloor\!\underline{n-3}} = \frac{10}{\lfloor\!\underline{n-3}}$$

$\Rightarrow n(n + 1) = 10(n - 2)$

$\Rightarrow n^2 + n = 10n - 20$

$\Rightarrow n^2 - 9n + 20 = 0$

$\Rightarrow (n-4)(n-5) = 0$

$\Rightarrow n = 4 \text{ or } n = 5$

6. যদি $22 \times {}^{n}P_5 = 7 \times {}^{n+2}P_5$, তেন্তে n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

সমাধান ঃ $22 \times {}^{n}P_5 = 7 \times {}^{n+2}P_5$

$$\Rightarrow 22 \times \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-5}} = 7 \times \frac{\underline{|n+2}}{\underline{|(n+2)-5}}$$

$$\Rightarrow 22 \times \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-5}} = 7 \times \frac{(n+2)(n+1)\underline{|n}}{\underline{|n-3}}$$

$$\Rightarrow \frac{22}{\underline{|n-5}} = \frac{7(n+2)(n+1)}{(n-3)(n-4)\underline{|n-5}}$$

$\Rightarrow 22(n-3)(n-4) = 7(n+2)(n+1)$

$\Rightarrow 22n^2 - 154n + 264 = 7n^2 + 21^n + 14$

$\Rightarrow 15n^2 - 175n + 250 = 0$

$\Rightarrow 3n^2 - 35n + 50 = 0$

$\Rightarrow (n-10)(3n-5) = 0$

$$\Rightarrow n = 10 \text{ or } n = \frac{3}{5}$$

কিন্তু n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, গতিকে $n = \frac{3}{5}$ হ'ব নোৱাৰে।

$\therefore n = 10$

7. প্ৰমাণ কৰা যে ${}^{2n}P_n = 2^n\{1.3.5. \ldots\ldots(2n-1)\}$

সমাধান ঃ ${}^{2n}P_n = \dfrac{\underline{|2n}}{\underline{|2n-n}}$

$$= \frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}}$$

$$= \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots\ldots4.3.2.1}{\underline{|n}}$$

$$= \frac{\{2n(2n-2)(2n-4)\ldots\ldots4.2\}\{(2n-1)(2n-3)\ldots.3.1\}}{\underline{|n}}$$

$$= \frac{2^n\{n(n-1)(n-2).....2.1\}\{(2n-1)(2n-3).....3.1\}}{\underline{|n}}$$

$$= \frac{2^n \underline{|n}\{1.3.5......(2n-3)(2n-1)\}}{\underline{|n}}$$

$$= 2^n\{1.\ 3.\ 5.\ .....(2n-1)\}$$

8. পুনৰাবৃত্তি নোহোৱাকৈ 0, 1, 2, 3, 4, 5 এই অংককেইটাৰে 100 আৰু 1000 ৰ মাজত থকা কিমান সংখ্যা পাব পাৰি? ইয়াৰে কিমানটা সংখ্যা 5 ৰে বিভাজ্য?

সমাধান ঃ

যিহেতু সংখ্যাবোৰ 100 আৰু 1000 ৰ মাজত থাকে, গতিকে সংখ্যাবোৰ তিনিটা অংক বিশিষ্ট। সংখ্যাটোৰ একক স্থান আৰু দহক স্থানত প্ৰদত্ত 6 টা অংকৰ যিকোনো এটাই বহিব পাৰে (পুনৰাবৃত্তি নোহোৱাকৈ) কিন্তু শতক স্থানত 0 অংকটো বহিব নোৱাৰে।

এতিয়া আমি শতক স্থানৰ পৰা আৰম্ভ কৰিম। শতক স্থানটো 5 ভিন্ন ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি (আমি 1, 2, 3, 4, 5 ৰ যিকোনো এটা অংক বহুৱাব পাৰোঁ) শতক স্থানটো পূৰ্ণ কৰাৰ পিছত বাকী 5 টা অংকৰ যিকোনো এটাৰে দহক স্থানটো 5 ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি। এতিয়া একক স্থানৰ বাবে 4 টা অংক থাকিব, গতিকে একক স্থানটো 4 ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সংখ্যাৰ সংখ্যা $= 5 \times 5 \times 4 = 100$

দ্বিতীয় অংশৰ বাবে 5 ৰে বিভাজ্য সংখ্যাবোৰ 0 নাইবা 5 ৰে শেষ হ'ব লাগিব। এতিয়া 0 ৰে শেষ হোৱা তিনি অংকযুক্ত সংখ্যা ${}^5P_2$ ধৰণে পাব পাৰি ($\because$ একক স্থানত 0 থাকিব, গতিকে বাকী দুটা স্থান বাকী 5 টা অংকেৰে ${}^5P_2$ ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি)। আকৌ 5 ৰে শেষ হোৱা আৰু 0 ৰে আৰম্ভ নোহোৱা তিনি অংকযুক্ত সংখ্যা $4 \times 4 = 16$ ধৰণে পাব পাৰি (যিহেতু একক স্থানত 5 অংকটো বহুওৱা হৈছে আৰু যিহেতু 0 অংকটো শতক স্থানত বহুৱাব নোৱাৰি, গতিকে শতক স্থানটো 1, 2, 3, 4 অংককেইটাৰ যিকোনো এটাৰে 4 ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি আৰু শতক স্থানত এটা অংক লোৱাৰ পিছত বাকী থকা 4 টা অংকৰ যিকোনো এটাৰে দহক স্থানটো 4 ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি)।

$\therefore$ 5 ৰে বিভাজ্য সংখ্যাৰ সংখ্যা

$= {}^5P_2 + 16$

$= 20 + 16$

$= 36$

বিকল্প নিয়ম ঃ

যিহেতু সংখ্যাবোৰ 100 আৰু 1000 ৰ মাজত থাকে, গতিকে সংখ্যাবোৰ তিনিটা অংকযুক্ত হ'ব। প্ৰদত্ত 6 টা অংকেৰে তিনিটা ঠাই পূৰ্ণ কৰিব পাৰি ${}^6P_3$ ধৰণে। কিন্তু এইবোৰৰ ভিতৰত শূন্য অংকটোৰে আৰম্ভ হোৱা সংখ্যাও থাকিব, যিবোৰ তিনি অংকবিশিষ্ট সংখ্যাত নপৰে। এতিয়া 0 অংকটোৰে আৰম্ভ হোৱা সংখ্যা হ'ব

${}^5P_2$ (যিহেতু প্ৰথম ঠাই 0 ৰে পূৰ্ণ কৰা হৈছে, গতিকে বাকী দুটা ঠাই বাকী থকা 5 টা অংকেৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি ${}^5P_2$ ধৰণে)

∴ নিৰ্ণেয় সংখ্যাৰ সংখ্যা $= {}^6P_3 - {}^5P_2 = 120 - 20 = 100$

আকৌ 5 ৰে বিভাজ্য সংখ্যা 0 নাইবা 5 ৰে শেষ হ'ব লাগিব। এতিয়া 0 ৰে শেষ হোৱা তিনিটা অংকৰ সংখ্যা পোৱা যাব ${}^5P_2$ ধৰণে।

আকৌ 5 ৰে শেষ হোৱা তিনিটা অংক থকা সংখ্যা ${}^5P_2$ ধৰণে পাব পাৰি য'ত 0 অংকটোৰে আৰম্ভ হোৱা সংখ্যাও থাকিব।

এতিয়া 5 ৰে শেষ হোৱা আৰু 0 ৰে আৰম্ভ হোৱা তিনিটা অংক বিশিষ্ট সংখ্যা পোৱা যাব 4 ধৰণে (প্ৰথম ঠাইত 0 আৰু শেষৰ ঠাইত 5 বহুওৱাৰ পিছত মাজৰ ঠাইটো বাকী থকা 4 টা অংকেৰে 4 ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি)।

∴ 5 ৰে শেষ হোৱা তিনি অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ

সংখ্যা $= {}^5P_2 - 4 = 20 - 4 = 16$

∴ মুঠ 5 ৰে বিভাজ্য তিনিটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যা

$= {}^5P_2 + 16 = 20 + 16 = 36$

9. ধৰা হ'ল, এখন অনুজ্ঞা ফলকত প্ৰথমে ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ দুটা ভিন্ন আখৰ থাকে আৰু পিছৰ অংশত 4 টা অংক থাকে (প্ৰথম অংকটো অশূন্য)। এনেকুৱা ভিন্ন ধৰণৰ কিমানখন অনুজ্ঞা ফলক বনাব পাৰি?

সমাধান ঃ

ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ 26 টা আখৰেৰে 2 টা ঠাইৰ দুটা ভিন্ন আখৰেৰে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি ${}^{26}P_2$ ধৰণে। এতিয়া 4 টা অংকৰ প্ৰথম অংকটো 0 হ'ব নোৱাৰে। গতিকে প্ৰথম অংকটো 1, 2, 3, ..., 9-ৰ যিকোনো এটা হ'ব পাৰে। অৰ্থাৎ প্ৰথম অংকটো 9 ধৰণে ল'ব পাৰি। এতিয়া যিহেতু অংকৰ পুনৰাবৃত্তি হ'ব পাৰে, গতিকে দ্বিতীয়, তৃতীয় আৰু চতুৰ্থ অংকৰ প্ৰতিটোৰে 0, 1, 2, 3, ..., 9 এই 10 টা অংকৰ যিকোনো এটা হ'ব পাৰে। গতিকে দ্বিতীয়, তৃতীয় আৰু চতুৰ্থ অংক তিনিটাৰ প্ৰতিটোৰে 10 ধৰণে ল'ব পাৰি।

∴ নিৰ্ণেয় ফলকৰ সংখ্যা

$$= {}^{26}P_2 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10$$

$$= \frac{\underline{|26}}{\underline{|24}} \times 9000$$

$$= 26 \times 25 \times 9000$$

$$= 5850000$$

10. 'COMMERCE' শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমান ধৰণে সজাব পাৰি নিৰ্ণয় কৰা যাতে স্বৰবৰ্ণকেইটা কেতিয়াও পৃথক নহয়।

সমাধান ঃ স্বৰবৰ্ণ তিনিটা O, E, E ক একেলগে এটা আখৰ হিচাপে ধৰা হওক। তেতিয়া আমি মুঠ আখৰ পাম 6 টা, ইয়াৰে C দুটা আৰু M দুটা।

$\therefore$ এই 6 টা আখৰক সজোৱাৰ প্ৰকাৰ $= \dfrac{\lfloor\underline{6}}{\lfloor\underline{2}\ \lfloor\underline{2}}$

কিন্তু স্বৰবৰ্ণ তিনিটা O, E, E (যাৰ দুটা একে)ক সিহঁতৰ মাজত সজাব পাৰি $\dfrac{\lfloor\underline{3}}{\lfloor\underline{2}}$ ধৰণে।

$\therefore$ মুঠ সজোৱাৰ প্ৰকাৰ $= \dfrac{\lfloor\underline{6}}{\lfloor\underline{2}\ \lfloor\underline{2}} \times \dfrac{\lfloor\underline{3}}{\lfloor\underline{2}} = 540$

11. এখনৰ ওপৰত এখনকৈ 10 খন উত্তৰ বহী কিমান ধৰণে সজাব পাৰি যাতে আটাইতকৈ বেছি নম্বৰ পোৱা বহীখন আৰু আটাইতকৈ কম নম্বৰ পোৱা বহীখন কেতিয়াও একেলগে নাথাকে?

সমাধান ঃ

প্ৰথমে আমি আটাইতকৈ বেছি নম্বৰ পোৱা বহীখন (ধৰা H) আৰু আটাইতকৈ কম নম্বৰ পোৱা বহীখন (ধৰা L) একেলগে থকা বিন্যাসৰ সংখ্যা নিৰূপণ কৰিম।

এই বহী দুখনক (H আৰু L) এখন বুলি ধৰিলে মুঠ বহী হ'ব 9 খন আৰু এইবোৰক ${}^{9}P_{9}$ ধৰণে সজাব পাৰি। আকৌ H আৰু L বহী দুখনক ${}^{2}P_{2}$ ধৰণে সজাব পাৰি।

$\therefore$ H আৰু L বহী দুখন একেলগে থকাকৈ মুঠ সজোৱাৰ প্ৰকাৰ

$$= {}^{9}P_{2} \times {}^{2}P_{2}$$
$$= \lfloor\underline{9} \times \lfloor\underline{2}$$
$$= 2 \times \lfloor\underline{9}$$

আকৌ কোনো বাধা আৰোপ নকৰাকৈ 10 খন বহীৰ আটাইকেইখনকে সজাব পাৰি ${}^{10}P_{10}$ ধৰণে।

গতিকে নিৰ্দিষ্ট বহী দুখন (H আৰু L) একেলগে নথকাকৈ মুঠ সজোৱাৰ প্ৰকাৰ

$$= {}^{10}P_{10} - 2 \times \lfloor\underline{9}$$
$$= \lfloor\underline{10} - 2 \times \lfloor\underline{9}$$
$$= 10 \times \lfloor\underline{9} - 2 \times \lfloor\underline{9}$$
$$= 8 \times \lfloor\underline{9}$$
$$= 2903040$$

12. 2, 3, 5 এই অংককেইটাৰে কিমানটা সংখ্যা পাব পাৰি যদিহে সংখ্যাবোৰ 5 টাতকৈ বেছি অংকবিশিষ্ট নহয়?

সমাধান ঃ

সংখ্যাবোৰ 1 টা বা 2 টা বা 3 টা বা 4 টা বা 5 টা অংকবিশিষ্ট সংখ্যা হ'ব পাৰে।

এতিয়া এটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যা হ'ব পাৰে 3টা (আমি 2, 3 আৰু 5 ৰ যিকোনো এটা ল'ব পাৰোঁ)।

দুটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত আমি তিনিটা অংকৰে 2 টা ঠাই পূৰাব লাগে য'ত পুনৰাবৃত্তি হ'ব পাৰে। গতিকে 2 টা ঠাইৰ প্ৰতিটো ঠাই 3 ধৰণে পূৰ্ণ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ 2 টা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ সংখ্যা $= 3 \times 3 = 3^2$

একেদৰে তিনিটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ সংখ্যা $= 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

4 টা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ সংখ্যা $= 3^4$

5 টা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ সংখ্যা $= 3^5$

গতিকে মুঠ সংখ্যাৰ সংখ্যা $= 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = 363$

অনুশীলনী

1. বিন্যাস বুলিলে তুমি কি বুজা?
2. মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

   (i) ${}^5P_3$ (ii) ${}^6P_4$ (iii) ${}^4P_2$ (iv) ${}^5P_0$ (v) ${}^6P_6$

   উত্তৰ ঃ (i) 60 (ii) 360 (iii) 12 (iv) 1 (v) 720
3. প্ৰমাণ কৰা যে—

   (i) ${}^nP_{r-1} = {}^{n-1}P_{r-1} + (r-1)\ {}^{n-1}P_{r-2}$

   (ii) ${}^{n-1}P_r = (n-r).\ {}^{n-1}P_{r-1}$

   (iii) ${}^nP_r = (n-r+1).\ {}^nP_{r-1}$

   (iv) ${}^{n+1}P_{r+1} = (n+1).\ {}^nP_r$
4. n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা, যদি

   (i) ${}^nP_3 = 120$

   (ii) ${}^{n+1}P_4 = 4 \times {}^nP_3$

   (iii) ${}^nP_5 = 20 \times {}^nP_3$

   (iv) ${}^nP_5 = 10 \times {}^{n-1}P_4$

   উত্তৰ ঃ (i) 6 (ii) 3 (iii) 8 (iv) 10

5. r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদি

(i) ${}^{11}P_r = 110$

(ii) ${}^{7}P_r = 840$

(iii) ${}^{50}P_{r+2} : {}^{50}P_{r-1} = 720 : 1$

উত্তৰ ঃ (i) 2 (ii) 4 (iii) 41

6. n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদি

(i) ${}^{n}P_3 : {}^{n+2}P_3 = 5 : 12$

উত্তৰ ঃ 7

(ii) ${}^{n+2}P_3 : {}^{n+1}P_2 = 5 : 1$

উত্তৰ ঃ 3

(iii) ${}^{2n+1}P_{n-1} : {}^{2n-1}P_n = 3 : 5$

উত্তৰ ঃ 4

7. যদি ${}^{m+n}P_2 = 56$, ${}^{m-n}P_2 = 12$, তেন্তে m আৰু n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $m = 6$, $n = 2$

8. 3 জন বন্ধুৱে 5 খন বছা বছা কলেজত নাম ভৰ্তি কৰিব বিচাৰে। যদি কোনো দুজন বন্ধুৱে একেখন কলেজত পঢ়িব নিবিচাৰে, তেন্তে তেওঁলোকে কিমান ধৰণে নামভৰ্তি কৰিব পাৰে?

উত্তৰ ঃ 60

9. দুজন যাত্ৰী এখন বাছৰ ভিতৰত সোমাই দেখিলে যে তাত 5 খন আসন খালী হৈ আছে। তেওঁলোকে কিমান ধৰণে আসন গ্ৰহণ কৰিব পাৰে?

উত্তৰ ঃ 20

10. এজন মানুহে তেওঁৰ 4 টা ভোট 5 জন প্ৰাৰ্থীক কিমান ধৰণে দিব পাৰে যদিহে 4 টা ভোটৰ আটাইকেইটা একেজন প্ৰাৰ্থীয়েও পাব পাৰে?

উত্তৰ ঃ 625

11. যদি কোনো অংকই পুনৰাবৃত্তি নহয়, তেনেহ'লে 0, 2, 3, 5, 6, 8 অংককেইটাৰে কিমানটা তিনিটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যা পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 100

12. 2 আৰু 3 এই অংক দুটাৰে 1000 তকৈ সৰু কিমানটা সংখ্যা পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 14

13. 0, 2, 3 অংককেইটাৰে 1000 তকৈ সৰু কিমান সংখ্যা গঠন কৰিব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 81

14. সংখ্যাবোৰত 4 টাতকৈ বেছি অংক নাথাকে, এনেকুৱা সংখ্যা 3 আৰু 4 অংক দুটাৰে কিমানটা পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 30

15. যদি অংকবোৰ পুনৰাবৃত্তি নহয়, তেনেহ'লে 0 ৰ পৰা 9 লৈকে অংককেইটাৰে 4000 আৰু 5000 ৰ মাজত থকা কিমানটা সংখ্যা পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 504

16. যদি অংকবোৰ পুনৰাবৃত্তি নহয়, তেনেহ'লে 0 ৰ পৰা 9 লৈকে অংককেইটাৰে 3000 আৰু 4000 ৰ ভিতৰত থকা কিমানটা যুগ্ম সংখ্যা পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 280

17. 1, 2, 3, 0, 2 অংককেইটাৰ প্রতিটোকে এবাৰকৈ ব্যৱহাৰ কৰি 20000 তকৈ ডাঙৰ কিমানটা সংখ্যা লিখিব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 36

18. যদি প্রতিটো অংক মাত্র এবাৰহে থাকিব পাৰে, তেন্তে 0 ৰ পৰা 5 লৈ অংককেইটাৰে 6 টা অংকযুক্ত কিমানটা অযুক্ত সংখ্যা পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 288

19. যদি অংকবোৰ পুনৰাবৃত্তি হ'ব পাৰে, তেন্তে 0, 1, 2, 3, 4 এই অংককেইটাৰে 1000 আৰু 4000 ৰ মাজত থকা কিমানটা সংখ্যা পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 375

20. 4 খন বিভিন্ন কিতাপ 5 জন ল'ৰাক কিমান প্রকাৰে দিব পাৰি যদি

(i) কোনো এজন ল'ৰাই এখনতকৈ বেছি কিতাপ পাব নোৱাৰে?

(ii) এজন ল'ৰাই এখনতকৈ বেছি কিতাপো পাব পাৰে?

উত্তৰ ঃ (i) 120, (ii) 625

21. 8 খন পৰীক্ষাৰ বহী কিমান ধৰণে সজাব পাৰি— যাতে আটাইতকৈ ভাল আৰু আটাইতকৈ বেয়া বহী দুখন সদায় একেলগে থাকে?

উত্তৰ ঃ 10080

22. 5 জন ল'ৰা আৰু 3 জনী ছোৱালীক কিমান প্রকাৰে সজাব পাৰি যাতে কোনো দুজনী ছোৱালীয়ে একেলগে নবহে?

উত্তৰ ঃ 14400

23. এখন ঘূৰণীয়া মেজৰ চাৰিওফালে 9 জন ভদ্রলোক আৰু 9 জনী ভদ্রমহিলা কিমান প্রকাৰে বহিব পাৰে যাতে কোনো দুজন ভদ্রলোকে ওচৰা-উচৰিকৈ নবহে?

উত্তৰ ঃ $\underline{\lvert 8} \times \underline{\lvert 9}$

24. 15 জন ডাক্তৰ আৰু 12 জন ইঞ্জিনীয়াৰে এটা শাৰীত কিমান প্ৰকাৰে বহিব পাৰে যাতে কোনো দুজন ইঞ্জিনীয়াৰে ক্ৰমিক আসন দখল নকৰে?

উত্তৰ ঃ $\frac{\underline{|15} \times \underline{|16}}{\underline{|4}}$

25. আলমাৰিৰ এটা খাপত 16 খন বিভিন্ন কিতাপ কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি নিৰ্ণয় কৰা যাতে দুখন নিৰ্দিষ্ট কিতাপ একেলগে নাথাকে?

উত্তৰ ঃ $14 \times \underline{|15}$

26. VOLUME শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি যাতে L আৰু M আখৰ দুটা সদায় যুগ্ম স্থানত থাকে।

উত্তৰ ঃ 144

27. ENGLISH শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি যাতে স্বৰবৰ্ণকেইটা মাত্ৰ অযুগ্ম স্থানতহে থাকে?

উত্তৰ ঃ 1440

28. 'EXAMINATION' শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমান ধৰণে সজাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 4989600

29 'EXAMINATION' শব্দটোৰ আখৰবোৰ আটাইকেইটাকে লৈ কিমান ধৰণে সজাব পাৰি যাতে EXM এই আখৰকেইটা প্ৰদত্ত ক্ৰমত সদায় একেলগে থাকে?

উত্তৰ ঃ 45360

30 'MATHEMATICS' শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি যাতে স্বৰবৰ্ণকেইটা কেতিয়াও পৃথক নহয়?

উত্তৰ ঃ 120960

31. BANANA শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি যাতে দুটা কেতিয়াও ওচৰা-উচৰিকৈ নাথাকে?

উত্তৰ ঃ 40

32. Accountancy ৰ 3 খন ভিন্ন কিতাপ, Management ৰ 3 খন, Mathematicsৰ 2 খন, আৰু Statisticsৰ 2 খন ভিন্ন কিতাপ আছে। এই কিতাপবোৰ এটা থাকত কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰি যাতে একে বিষয়ৰ কিতাপসমূহ পৃথক নহয়?

উত্তৰ ঃ 3456

দল বা জোঁট (Combinations)

এটা সসীম সংহতিৰ মৌলবোৰৰ পৰা কেইটামান বা আটাইকেইটা মৌলকে লৈ পোৱা ভিন্ন গোট বা বাছনি বা থূপবোৰৰ প্ৰতিটোকে একোট T 'দল বা জোঁট' (Combination) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল, আমাৰ হাতত তিনিটা বস্তু আছে— A, B, C। তেনেহ'লে এই তিনিটা বস্তুৰ পৰা এবাৰত এটাকৈ, দুটাকৈ বা তিনিটাকৈ লৈ পোৱা দল বা জোঁটবোৰ তলত দেখুওৱা হ'ল—

এবাৰত এটাকৈ	**এবাৰত দুটাকৈ**	**এবাৰত তিনিটাকৈ**
A	AB	ABC
B	AC	
C	BC	

এইটো মন কৰিবলগীয়া যে দল বা জোঁটৰ ক্ষেত্ৰত বস্তুবোৰ ক্ৰমৰ গুৰুত্ব নাথাকে। উদাহৰণস্বৰূপে AB আৰু BA দুটা বেলেগ বিন্যাস কিন্তু দলৰ ক্ষেত্ৰত এই দুয়োটা একে।

সাংকেতিক চিন (Notation) ঃ

n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা এবাৰত r $(r \le n)$ টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ দল বা জোঁটৰ সংখ্যাক ${}^nC_r$ বা ${}_nC_r$ বা $C.(n, r)$ সংকেতেৰে বুজোৱা হয়।

গতিকে ওপৰৰ উদাহৰণৰ পৰা পাইছোঁ যে ${}^3C_1 = 3$, ${}^3C_2 = 3$ আৰু ${}^3C_3 = 1$

এতিয়া আমি আন এটা উদাহৰণ ল'ম য'ত A, B, C, D এই 4 টা বস্তু আছে। এই চাৰিটা বস্তুৰ পৰা এবাৰত এটাকৈ, দুটাকৈ, তিনিটাকৈ আৰু চাৰিটাকৈ লৈ পোৱা দলবোৰ তলত দেখুওৱাৰ দৰে পাম—

এবাৰত এটাকৈ	**এবাৰত দুটাকৈ**	**এবাৰত তিনিটাকৈ**	**এবাৰত চাৰিটাকৈ**
A	AB	ABC	ABCD
B	AC	ABD	
C	AD	ACD	
D	BC	BCD	
	BD		
	CD		

এইদৰে আমি পালোঁ

${}^4C_1 = 4$, ${}^4C_2 = 6$, ${}^4C_3 = 4$, ${}^4C_4 = 1$

উপপাদ্য ঃ n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা এবাৰত r $(r \le n)$ টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ দলৰ সংখ্যা হ'ল

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r} \text{ অৰ্থাৎ } {}^nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}$$

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা এবাৰত r টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ জোঁটৰ সংখ্যা x অৰ্থাৎ ${}^{n}C_{r} = x$

এতিয়া এই x টা জোঁটৰ প্ৰতিটোতে r টা বস্তু আছে। এই r টা বস্তু সিহঁতৰ মাজত ${}^{r}P_{r} = \lfloor\underline{r}$ ধৰণে সজাব পাৰি। এইদৰে x টা জোঁটৰ প্ৰতিটোৰ পৰা $\lfloor\underline{r}$ টা বিন্যাস পোৱা যাব। গতিকে n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা এবাৰত r টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাস হ'ব $x\lfloor\underline{r}$

$$\therefore\ {}^{n}P_{r} = x\lfloor\underline{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}} = x\lfloor\underline{r}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{n-r}}$$

এইদৰে $${}^{n}C_{r} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{n-r}}$$

অনুসিদ্ধান্ত 1 ঃ

$${}^{n}C_{r} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{n-r}}$$ ত $r = 0$ বহুৱাই পাওঁ

$${}^{n}C_{0} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{0}\,\lfloor\underline{n-0}} = \frac{\lfloor\underline{n}}{1.\lfloor\underline{n}} = 1 \quad (\lfloor\underline{0} = 1)$$

অনুসিদ্ধান্ত 2 ঃ

$${}^{n}C_{r} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{n-r}}$$ ত $r = n$ বহুৱাই পাওঁ

$${}^{n}C_{n} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n}\,\lfloor\underline{n-n}} = \frac{1}{\lfloor\underline{0}} = 1$$

গতিকে $\boxed{{}^{n}C_{n} = {}^{n}C_{0} = 1}$

অনুসিদ্ধান্ত 3 ঃ

$${}^{n}C_{r} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{n-r}}$$ ত r ৰ ঠাইত $n - r$

বহুৱাই পাওঁ

$$ {}^{n}C_{n-r} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}\,\lfloor\underline{n-(n-r)}} $$

$$ = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}\,\lfloor\underline{r}} $$

$$ = {}^{n}C_{r} $$

গতিকে $\boxed{{}^{n}C_{n-r} = {}^{n}C_{r}}$

উদাহৰণস্বৰূপে, ${}^{7}C_{4} = {}^{7}C_{3}$, ${}^{7}C_{5} = {}^{7}C_{2}$ ইত্যাদি।

আমি পাম

$\boxed{{}^{n}C_{r} = {}^{n}C_{s} \Rightarrow r = s \text{ নতুবা } r + s = n}$

এটা প্ৰয়োজনীয় ফল ঃ

$$ {}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_{r} $$

প্ৰমাণ ঃ

$$ {}^{n}C_{r} = {}^{n}C_{r-1} = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{n-r}} + \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r-1}\,\lfloor\underline{n-(r-1)}} $$

$$ = \frac{\lfloor\underline{n}}{r\,\lfloor\underline{r-1}\,\lfloor\underline{n-r}} + \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r-1}\,\lfloor\underline{n-r+1}} $$

$$ = \frac{\lfloor\underline{n}}{r\,\lfloor\underline{r-1}\,\lfloor\underline{n-r}} + \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r-1}\,(n-r+1)\,\lfloor\underline{n-r}} $$

$$ = \frac{\lfloor\underline{\mathrm{n}}}{\lfloor\underline{\mathrm{r}-1}\,\lfloor\underline{\mathrm{n}-\mathrm{r}}}\left[\frac{1}{\mathrm{r}} + \frac{1}{\mathrm{n}-\mathrm{r}+1}\right] $$

$$ = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r-1}\,\lfloor\underline{n-r}} \cdot \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)} $$

$$ = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r-1}\,\lfloor\underline{n-r}} \cdot \frac{n+1}{r(n-r+1)} $$

$$ = \frac{\lfloor\underline{n+1}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{n+1-r}} $$

$$ = {}^{n+1}C_{r} $$

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$^8C_5 + {^8C_4} = {^9C_5}$$

$$^9C_6 + {^9C_5} = {^{10}C_6}$$

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ—

1. মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $^nC_1$ (ii) $^nC_2$ (iii) $^nC_3$

সমাধান ঃ

(i) $^nC_1 = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{1}\,\lfloor\underline{n-1}} = \dfrac{n\lfloor\underline{n-1}}{\lfloor\underline{n-1}} = n$ $\quad (\because \lfloor\underline{1} = 1)$

(ii) $^nC_2 = \dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{2}\lfloor\underline{n-2}} = \dfrac{n(n-1)\ \lfloor\underline{n-2}}{\lfloor\underline{2}\lfloor\underline{n-2}} = \dfrac{n(n-1)}{\lfloor\underline{2}}$

(iii) $^nC_3 = \dfrac{\lfloor\underline{\mathrm{n}}}{\lfloor\underline{3}\lfloor\underline{\mathrm{n}-3}} = \dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)\ (\mathrm{n}-2)\ \lfloor\underline{\mathrm{n}-3}}{\lfloor\underline{3}\lfloor\underline{\mathrm{n}-3}} = \dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)}{\lfloor\underline{3}}$

এইদৰে আমি পাওঁ

$$^nC_1 = n,\ {^nC_2} = \frac{n(n-1)}{\lfloor\underline{2}},\ {^nC_3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor\underline{3}}$$

একেদৰে আমি পাম

$$^nC_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor\underline{4}},\ {^nC_5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{\lfloor\underline{5}}$$

ইত্যাদি।

2. মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $^9C_4$ (ii) $^8C_5$ (iii) $^7C_0$ (iv) $^{25}C_{20}$

সমাধান ঃ

(i) $^9C_4 = \dfrac{\lfloor\underline{9}}{\lfloor\underline{4}\,\lfloor\underline{5}} = \dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} = 126$

(ii) $^8C_5 = \dfrac{\lfloor\underline{8}}{\lfloor\underline{5}\,\lfloor\underline{3}} = \dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$

(iii) $^7C_0 = 1$ $\quad (\because {^nC_0} = 1)$

(iv) $^{25}C_{20} = \dfrac{\underline{|25}}{\underline{|20}\,\underline{|5}} = \dfrac{25\times24\times23\times22\times21}{5\times4\times3\times2\times1} = 53130$

3. n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদি

(i) $^{n}C_{n-2} = 6$ (ii) $^{n}C_7 = {^{n}C_5}$

সমাধান ঃ

(i) $^{n}C_{n-2} = 6$

$$\Rightarrow \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-2}\;\underline{|n-(n-2)}} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} = 6$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 12 = 4\times 3$$

$\Rightarrow n = 4$ ($\because$ n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)

(ii) $^{n}C_7 = {^{n}C_5}$

$\Rightarrow n = 7 + 5 = 12$ ($^{n}C_r = {^{n}C_s} \Rightarrow r = s$ বা $r + s = n$)

4. যদি $^{24}C_{r+3} = {^{24}C_{2r}}$, r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

$^{24}C_{r+3} = {^{24}C_{2r}}$

$\Rightarrow r + 3 = 2r$ বা $r + 3 + 2r = 24$

$\Rightarrow r = 3$ বা $r = 7$

$\therefore$ r ৰ মান 3 নাইবা 7

5. যদি $^{n}P_r = 72$ আৰু $^{n}C_r = 36$, n আৰু r উলিওৱা

সমাধান ঃ

আমি পাওঁ, $^{n}P_r = \underline{|r} \times {^{n}C_r}$

$\Rightarrow 72 = \underline{|r} \times 36$

$\Rightarrow \underline{|r} = 2 = \underline{|2}$

$\Rightarrow r = 2$

আকৌ $^{n}P_r = 72$

$\Rightarrow {^{n}P_2} = 72$

$$\Rightarrow \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-2}} = 72$$

$\Rightarrow n(n-1) = 72 = 9 \times 8$ [$\because n, n-1$ দুটা ক্ৰমিক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা]

$\Rightarrow n = 9$

গতিকে $n = 9$ আৰু $r = 2$

6. যদি ${}^nC_4 : {}^nC_7 = 7 : 2$; nৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ $\dfrac{{}^nC_4}{{}^nC_7} = \dfrac{7}{2}$

$$\Rightarrow \dfrac{\dfrac{\lfloor n}{\lfloor 4 \lfloor n-4}}{\dfrac{\lfloor n}{\lfloor 7 \lfloor n-7}} = \dfrac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \dfrac{\lfloor 7 \; \lfloor n-7}{\lfloor 4 \; \lfloor n-4} = \dfrac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \dfrac{7 \times 6 \times 5}{(n-4)(n-5)(n-6)} = \dfrac{7}{2}$$

$\Rightarrow (n-4)(n-5)(n-6) = 60 = 5 \times 4 \times 3$

$\Rightarrow n - 4 = 5$ [$x - 4, n - 5, n - 6$ তিনিটা ক্ৰমিক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা]

$\Rightarrow n = 9$

7. যদি ${}^{n-1}C_3 : {}^nC_5 = 5 : 8$, তেন্তে n নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ $\dfrac{{}^{n-1}C_3}{{}^nC_5} = \dfrac{5}{8}$

$$\Rightarrow \dfrac{\dfrac{\lfloor n-1}{\lfloor 3 \lfloor n-1-3}}{\dfrac{\lfloor n}{\lfloor 5 \lfloor n-5}} = \dfrac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \dfrac{\lfloor 5 \lfloor n-5 \; \lfloor n-1}{\lfloor 3 \lfloor n-4 \lfloor n} = \dfrac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \dfrac{5 \times 4}{(n-4)n} = \dfrac{5}{8}$$

$\Rightarrow n(n-4) = 32$

$\Rightarrow n^2 - 4n - 32 = 0$

$\Rightarrow (n - 8)\ (n + 4) = 0$

$\Rightarrow n = 8$ বা $n = -4$

কিন্তু n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

$\therefore\ n = 8$

8. প্ৰমাণ কৰা যে

$${}^{n}C_{r} + {}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_{r-2} = {}^{n+1}C_{r}$$

সমাধান ঃ

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= {}^{n}C_{r} + ({}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_{r-2}) \\ &= {}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1}\ [\because {}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_{r}] \\ &= {}^{n+1}C_{r} \\ &= \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

9. এজন ল'ৰাই ${}^{n}P_{r}$ ৰ ঠাইত ${}^{n}C_{r}$ লিখিলে। শুদ্ধ উত্তৰ পাবলৈ তেওঁ পোৱা ফলটোক কি সংখ্যাৰে পূৰণ কৰিব লাগিব?

সমাধান ঃ যিহেতু ${}^{n}P_{r} = {}^{n}C_{r} \times \underline{|r}$, গতিকে শুদ্ধ উত্তৰ পাবলৈ তেওঁ পোৱা ফলটোক $\underline{|r}$ ৰে পূৰণ কৰিব লাগিব।

10. পৰীক্ষাৰ প্ৰশ্নপত্ৰ এখনত 10 টা প্ৰশ্ন আছে আৰু এজন পৰীক্ষাৰ্থীয়ে যিকোনো 6 টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰিব লাগে। এজন পৰীক্ষাৰ্থীয়ে 6 টা প্ৰশ্ন কিমান ধৰণে বাছনি কৰিব পাৰে?

সমাধান ঃ প্ৰশ্ন বাছনিৰ মুঠ প্ৰকাৰ 10 টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা প্ৰতিবাৰত 6 টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ জোঁটৰ সমান

$\therefore$ নিৰ্ণেয় বাছনিৰ সংখ্যা $= {}^{10}C_{6} = \dfrac{\underline{|10}}{\underline{|6}\ \underline{|4}} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$

11. এখন প্ৰশ্নপত্ৰত 10 টা প্ৰশ্ন আছে আৰু এজন পৰীক্ষাৰ্থীয়ে 6 টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰিব লাগে। যদি 1 নং প্ৰশ্নটো বাধ্যতামূলক হয়, তেন্তে পৰীক্ষাৰ্থী এজনে কিমান ধৰণে প্ৰশ্ন বাছনি কৰিব পাৰে?

সমাধান ঃ যিহেতু 1 নং প্ৰশ্নটো বাধ্যতামূলক, গতিকে তেওঁ বাকী 9 টা প্ৰশ্নৰ পৰা 5 টা বাছনি কৰিব লাগে।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় বাছনিৰ সংখ্যা = 9 টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা 5 টাকৈ লৈ পোৱা মুঠ জোঁটৰ সংখ্যা

$= {}^{9}C_{5}$

$= \dfrac{\underline{|9}}{\underline{|5}\ \underline{|4}}$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 126$$

12. এখন স্কুলত 5 জন শিক্ষক আৰু 20 জন ছাত্ৰৰ মাজৰ পৰা 3 জন শিক্ষক আৰু 7 জন ছাত্ৰ সন্নিৱিষ্ট এখন কমিটী গঠন কৰিব লাগে। কমিটীখন কিমান প্ৰকাৰে গঠন কৰিব পাৰি যদি

(i) যিকোনো শিক্ষক আৰু যিকোনো ছাত্ৰকে সন্নিৱিষ্ট কৰিব পাৰি?

(ii) এজন বিশেষ ছাত্ৰক কমিটীত ৰাখিব নোৱাৰি?

(iii) এজন বিশেষ শিক্ষকক কমিটীত ৰাখিবই লাগিব?

সমাধান ঃ (i) যিহেতু শিক্ষক আৰু ছাত্ৰ বাছনিত কোনো ধৰণৰ বাধা নাই, গতিকে 5 জন শিক্ষকৰ পৰা 3 জন আমি ${}^5C_3$ ধৰণে আৰু 20 জন ছাত্ৰৰ পৰা 7 জন আমি ${}^{20}C_7$ ধৰণে বাছনি কৰিব পাৰোঁ।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় বাছনিৰ সংখ্যা $= {}^5C_3 \times {}^{20}C_7$

$$= \frac{\underline{|5}}{\underline{|3}\ \underline{|2}} \times \frac{\underline{|20}}{\underline{|7}\ \underline{|13}}$$

$$= \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}$$

$$= 775200$$

(ii) যিহেতু এজন নিৰ্দিষ্ট ছাত্ৰ কমিটীত থাকিব নোৱাৰে, গতিকে আমি বাকী 19 জন ছাত্ৰৰ পৰা 7 জন বাছনি কৰিব লাগিব আৰু এইটো ${}^{19}C_7$ ধৰণে কৰিব পাৰি।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় বাছনিৰ সংখ্যা $= {}^5C_3 \times {}^{19}C_7$

$$= \frac{\underline{|5}}{\underline{|3}\ \underline{|2}} \times \frac{\underline{|19}}{\underline{|7}\ \underline{|12}}$$

$$= \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}$$

$$= 503880$$

(iii) যিহেতু এজন বিশেষ শিক্ষক কমিটীত থাকিবই লাগিব, গতিকে বাকী 4 জন শিক্ষকৰ পৰা আমি 2 জন বাছনি কৰিব লাগিব আৰু এইটো ${}^4C_2$ ধৰণে কৰিব পাৰি।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় বাছনিৰ সংখ্যা $= {}^4C_2 \times {}^{20}C_7$

$$= \frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\ \underline{|2}} \times \frac{\underline{|20}}{\underline{|7}\ \underline{|13}}$$

$$= 465120$$

13. এখন সমতলত 16 টা বিন্দু আছে, যাৰ কোনো তিনিটাই একে সৰলৰেখাত নাই। এই বিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি কিমান সৰলৰেখা পাব পাৰি নিৰ্ণয় কৰা। এই বিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি কিমানটা ত্ৰিভুজ পাব পাৰি?

সমাধান ঃ যিহেতু কোনো তিনিটা বিন্দুৰে একে সৰলৰেখাত নাই, গতিকে 16 টা বিন্দুৰ যিকোনো দুটা সংযোগ কৰি এডাল সৰলৰেখা পাব পাৰি।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সৰলৰেখাৰ সংখ্যা $= {}^{16}C_2 = \dfrac{16 \times 15}{2} = 120$

আকৌ যিকোনো তিনিটা বিন্দু সংযোগ কৰি আমি এটা ত্ৰিভুজ পাব পাৰোঁ।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় ত্ৰিভুজৰ সংখ্যা $= {}^{16}C_3$

$$= \frac{16 \times 15 \times 14}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= 560$$

14. এখন সমতলত 20 টা বিন্দু আছে যাৰ 5 টা একৰেখীয়। এই বিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি কিমান

(i) ভিন্ন সৰলৰেখা (ii) ভিন্ন ত্ৰিভুজ পাব পাৰি?

সমাধান ঃ যদি 20 টা বিন্দুৰ কোনো তিনিটাই একৰেখীয় নহয়, তেন্তে ইয়াৰ যিকোনো দুটা সংযোগ কৰি এডাল সৰলৰেখা পাব পাৰি অৰ্থাৎ ${}^{20}C_2$ ডাল সৰলৰেখা পাব পাৰি। কিন্তু 20 টা বিন্দুৰ 5 টা একৰেখীয়। সেয়েহে এই 5 টা বিন্দুৰ পৰা পাবলগীয়া ${}^{5}C_2$ ডাল সৰলৰেখাৰ সলনি মাত্ৰ এডাল সৰলৰেখাহে পোৱা যাব।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সৰলৰেখাৰ সংখ্যা $= {}^{20}C_2 - {}^{5}C_2 + 1$

$$= \frac{20 \times 19}{2} - \frac{5 \times 4}{2} + 1$$

$$= 190 - 10 + 1$$

$$= 181$$

(ii) একে ৰেখাত নথকা যিকোনো তিনিটা বিন্দু সংযোগ কৰি এটা ত্ৰিভুজ পাব পাৰি। সেয়েহে যদি 20 টা বিন্দুৰ কোনো তিনিটাই একৰেখীয় নহ'লহেঁতেন, তেনেহ'লে আমি ${}^{20}C_3$ টা ত্ৰিভুজ পালোহেঁতেন। কিন্তু 20 টা বিন্দুৰ 5 টা একৰেখীয়। এই 5 টা বিন্দুৰ পৰা আমি এটাও ত্ৰিভুজ নাপাওঁ। গতিকে আমি ত্ৰিভুজ হেৰুৱালোঁ ${}^{5}C_3$ টা (যদি এই 5 টা বিন্দুৰ কোনো তিনিটাই একৰেখীয় নহ'লহেঁতেন তেন্তে আমি এই 5 টা বিন্দুৰ পৰা ${}^{5}C_3$ টা ত্ৰিভুজ পালোহেঁতেন)।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় ত্ৰিভুজৰ সংখ্যা $= {}^{20}C_3 - {}^{5}C_3$

$$= \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} - \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= 1140 - 10$$

$$= 1130$$

15. এখন সমতলত থকা 20 টা বিন্দুৰ এটা হ'ল A. যদি এই বিন্দুবোৰৰ কোনো তিনিটাই একৰেখীয় নহয়, তেন্তে A-ক এটা শীৰ্ষবিন্দু হিচাপে লৈ পোৱা মুঠ ত্ৰিভুজৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ যিকোনো তিনিটা একৰেখীয় নোহোৱা বিন্দু সংযোগ কৰি এটা ত্ৰিভুজ পাব পাৰি। ইয়াত A বিন্দুটো প্ৰতিটো ত্ৰিভুজৰে এটা শীৰ্ষ হ'ব লাগিব। গতিকে আমি বাকী 19 টা বিন্দুৰ পৰা যিকোনো দুটা বিন্দু বাছনি কৰিব লাগে।

∴ নিৰ্ণেয় ত্ৰিভুজৰ সংখ্যা $= {}^{19}C_2$

$$= \frac{19 \times 18}{2}$$

$$= 171$$

16. 9 জন ইঞ্জিনীয়াৰ আৰু 6 জন ডাক্তৰৰ পৰা 6 জন ইঞ্জিনীয়াৰ আৰু 3 জন ডাক্তৰ সন্নিৱিষ্ট এখন কমিটী কিমান প্ৰকাৰে গঠন কৰিব পাৰি?

সমাধান ঃ 9 জন ইঞ্জিনীয়াৰৰ পৰা 6 জন বাছনি কৰিব পাৰি ${}^{9}C_6$ প্ৰকাৰে। আকৌ 6 জন ডাক্তৰৰ পৰা 3 জন বাছনি কৰিব পাৰি ${}^{6}C_3$ প্ৰকাৰে।

∴ নিৰ্ণেয় কমিটীৰ সংখ্যা $= {}^{9}C_6 \times {}^{6}C_3$

$$= \frac{\lfloor 9}{\lfloor 6 \lfloor 3} \times \frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \lfloor 3}$$

$$= \frac{\lfloor 9}{\lfloor 3 \lfloor 3 \lfloor 3}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{6 \times 6}$$

$$= 1680$$

17. 8 জন ইঞ্জিনীয়াৰ আৰু 5 জন ডাক্তৰৰ পৰা 7 জনীয়া এখন কমিটী গঠন কৰিব লাগে। এই কমিটীখন কিমান প্ৰকাৰে গঠন কৰিব পাৰি যদি

(i) এখন কমিটীত কমেও তিনিজন ইঞ্জিনীয়াৰ থাকে?

(ii) এখন কমিটীত কমেও 2 জন ইঞ্জিনীয়াৰ আৰু এজন ডাক্তৰ থাকে?

সমাধান ঃ (i) কমিটীখন গঠন কৰাৰ সম্ভাব্য প্ৰকাৰ এনে ধৰণৰ ঃ

ইঞ্জিনীয়াৰ	**ডাক্তৰ**	**মুঠ বাছনিৰ সংখ্যা**
3	4	${}^{8}C_3 \times {}^{5}C_4 = 280$
4	3	${}^{8}C_4 \times {}^{5}C_3 = 700$

5	2	${}^8C_5 \times {}^5C_2 = 560$
6	1	${}^8C_6 \times {}^5C_1 = 140$
7	0	${}^8C_7 \times {}^5C_0 = 8$

$\therefore$ মুঠ বাছনিৰ প্ৰকাৰ = 280 + 700 + 560 + 140 + 8 = 1688

(ii) কমিটীখন গঠন কৰাৰ সম্ভাব্য প্ৰকাৰ এনে ধৰণৰ ঃ

ইঞ্জিনীয়াৰ	**ডাক্তৰ**	**বাছনিৰ সংখ্যা**
2	5	${}^8C_2 \times {}^5C_5 = 28$
3	4	${}^8C_3 \times {}^5C_4 = 280$
4	3	${}^8C_4 \times {}^5C_3 = 700$
5	2	${}^8C_5 \times {}^5C_2 = 560$
6	1	${}^8C_6 \times {}^5C_1 = 140$

নিৰ্ণেয় মুঠ বাছনিৰ সংখ্যা = 28 + 280 + 700 + 560 + 140 = 1708

18. শ্ৰীযুত X ৰ 7 জন বন্ধু আছে, তাৰে 3 জন ভদ্ৰলোক আৰু 4 জনী ভদ্ৰমহিলা। আকৌ শ্ৰীমতী X ৰ 7 জন বন্ধু আছে, তাৰে 4 জন ভদ্ৰলোক আৰু 3 জনী ভদ্ৰমহিলা। তেওঁলোকে 3 জনী ভদ্ৰমহিলা আৰু 3 জন ভদ্ৰলোকক ৰাতিৰ আহাৰৰ বাবে এনেদৰে নিমন্ত্ৰণ কৰিব বিচাৰে যাতে শ্ৰীযুত X ৰ 3 জন বন্ধু আৰু শ্ৰীমতী X ৰ 3 জন বন্ধু সন্নিৰিষ্ট হয়। তেওঁলোকে কিমান ধৰণে নিমন্ত্ৰণ কৰিব পাৰে?

সমাধান ঃ

নিমন্ত্ৰণ কৰাৰ সম্ভাব্য প্ৰকাৰ

শ্ৰীযুত X ৰ বন্ধু		শ্ৰীমতী X ৰ বন্ধু		বাছনিৰ সংখ্যা
ভদ্ৰমহিলা	ভদ্ৰলোক	ভদ্ৰমহিলা	ভদ্ৰলোক	
3	–	–	3	${}^4C_3 \times {}^3C_0 \times {}^3C_0 \times {}^4C_3 = 16$
2	1	1	2	${}^4C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4C_2 = 324$
1	2	2	1	${}^4C_1 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^4C_1 = 144$
–	3	3	–	${}^4C_0 \times {}^3C_3 \times {}^3C_3 \times {}^4C_0 = 1$

$\therefore$ নিমন্ত্ৰণ কৰিব পৰা মুঠ প্ৰকাৰ = 16 + 324 + 144 + 1 = 485

অনুশীলনী

1. জোঁট বুলিলে তুমি কি বুজা?
2. মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

   (i) ${}^{10}C_6$ (ii) ${}^{9}C_0$ (iii) ${}^{24}C_{21}$

   (iv) ${}^{10}C_6 + {}^{9}C_5 + {}^{9}C_4$

   উত্তৰ ঃ (i) 210 (ii) 1 (iii) 2024 (iv) 462
3. r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদি

   (i) ${}^{2n}C_r = {}^{2n}C_{r+2}$ (ii) ${}^{8}C_r = {}^{7}C_r$

   (iii) ${}^{25}C_{r+4} = {}^{25}C_{2r-3}$

   উত্তৰ ঃ (i) $n - 1$ (ii) 0 (iii) 7 বা 8
4. n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদি

   (i) ${}^{n}C_3 = {}^{n}C_5$ (ii) ${}^{n}C_{10} = {}^{n}C_{12}$

   (iii) ${}^{n}C_3 : {}^{n-1}C_3 = 4 : 3$ (iv) ${}^{n}C_3 : {}^{n-1}C_4 = 8 : 5$

   (v) ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_2 = 44 : 3$ (vi) ${}^{n}C_3 = 6 \times {}^{n}C_2$

   (vii) ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_2 = 44 : 1$

   উত্তৰ ঃ (i) 8 (ii) 22 (iii) 12 (iv) 8 (v) 6 (vi) 20 (vii) 17
5. যদি ${}^{n}P_r = 336$ আৰু ${}^{n}C_r = 56$, তেন্তে n আৰু r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

   উত্তৰ ঃ 8, 3
6. যদি ${}^{n}P_r = {}^{n}P_{r+1}$ আৰু ${}^{n}C_r = {}^{n}C_{r-1}$, তেন্তে n আৰু r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

   উত্তৰ ঃ 3, 2
7. প্ৰমাণ কৰা যে—

   (i) ${}^{n}C_r + 2.{}^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_{r-2} = {}^{n+2}C_r$

   (ii) ${}^{n-2}C_r + 2.{}^{n-2}C_{r-1} + {}^{n-2}C_{r-2} = {}^{n}C_r$
8. 40 জন ছাত্ৰ থকা এটা শ্ৰেণীৰ পৰা 11 জনীয়া এটা ফুটবল দল বাছনি কৰিব লাগে। এই দলটো কিমান প্ৰকাৰে বাছনি কৰিব পাৰি?

   উত্তৰ ঃ ${}^{40}C_{11}$

9. এজন মানুহে তেওঁৰ 10 জন বন্ধুৰ পৰা যিকোনো সংখ্যক সদস্যক এটা নৈশভোজলৈ কিমান প্ৰকাৰে নিমন্ত্ৰণ কৰিব পাৰে?

উত্তৰ ঃ 1023

10. এখন প্ৰশ্নকাকতত 12 টা প্ৰশ্ন আছে। এজন পৰীক্ষাৰ্থীয়ে 8 টা প্ৰশ্ন কিমান প্ৰকাৰে বাছনি কৰিব পাৰে?

উত্তৰ ঃ 495

11. এখন প্ৰশ্নপত্ৰত 10 টা প্ৰশ্ন আছে। এজন প্ৰাৰ্থীয়ে 6 টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰিব লাগে, কিন্তু 1 নং প্ৰশ্ন আৰু 10 নং প্ৰশ্ন দুটা বাধ্যতামূলক। প্ৰাৰ্থীজনে মুঠতে 6 টা প্ৰশ্ন কিমান প্ৰকাৰে বাছনি কৰিব পাৰে?

উত্তৰ ঃ 70

12. এখন প্ৰশ্নপত্ৰত দুটা শাখাৰ প্ৰতিটোতে 5 টাকৈ মুঠ 10 টা প্ৰশ্ন আছে। প্ৰতিটো শাখাৰ পৰা কমেও দুটাকৈ প্ৰশ্ন লৈ মুঠতে 6 টা প্ৰশ্ন এজন পৰীক্ষাৰ্থীয়ে কিমান প্ৰকাৰে বাছনি কৰিব পাৰে?

উত্তৰ ঃ 200

13. এখন প্ৰশ্নপত্ৰত দুটা শাখাৰ প্ৰতিটো শাখাত 4 টাকৈ প্ৰশ্ন আছে। এজন পৰীক্ষাৰ্থীয়ে মুঠতে 5 টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰিব লাগে কিন্তু তেওঁ কোনো শাখাৰ পৰা 3 টাতকৈ বেছি প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰিব নোৱাৰে। এজন পৰীক্ষাৰ্থীয়ে মুঠতে 5 টা প্ৰশ্ন কিমান প্ৰকাৰে বাছনি কৰিব পাৰে নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 48

14. এখন প্ৰশ্নপত্ৰত দুটা শাখাৰ প্ৰতিটো শাখাত 6 টাকৈ মুঠ 12 টা প্ৰশ্নৰ ভিতৰত এজন প্ৰাৰ্থীয়ে মুঠ 6 টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰিব লাগে। যদি কোনো শাখাৰ পৰা 4 টাতকৈ বেছি প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰিব দিয়া নহয় তেন্তে এজন প্ৰাৰ্থীয়ে কিমান প্ৰকাৰে প্ৰশ্ন বাছনি কৰিব পাৰে?

উত্তৰ ঃ 850

15. দুটা দল A আৰু B-ৰ পৰা এটা ক্ৰিকেট দল গঠন কৰিব লাগে। A দলত 6 জন আৰু B দলত 8 জন খেলুৱৈ আছে। যদি A দলৰ পৰা কমেও 4 জন খেলুৱৈ অন্তৰ্ভুক্ত হ'ব লাগে তেন্তে কিমান প্ৰকাৰে দলটো বাছনি কৰিব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 344

16. এটা ক্ৰিকেট ক্লাবত 30 জন খেলুৱৈ আছে; তাৰে 15 জন বেটছমেন, 12 জন ব'লাৰ আৰু 3 জন উইকেটকীপাৰ। ইয়াৰ পৰা 11 জনীয়া এটা ক্ৰিকেট দল কিমান প্ৰকাৰে গঠন কৰিব পাৰি যাতে দলটোত 6 জন বেটছমেন, 4 জন ব'লাৰ আৰু 1 জন উইকেটকীপাৰ অন্তৰ্ভুক্ত হয়।

উত্তৰ ঃ 7432425

17. 6 জন ভদ্ৰলোক আৰু 4 জনী ভদ্ৰমহিলাৰ পৰা 6 জনীয়া এখন কমিটী গঠন কৰিব লাগে। কমিটীখন কিমান ধৰণে গঠন কৰিব পাৰি যাতে কমেও এজনী ভদ্ৰমহিলা অন্তৰ্ভুক্ত হয়?

উত্তৰ ঃ 209

18. 12 টা বাহুবিশিষ্ট এটা বহুভুজৰ শীৰ্ষবিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি কেইটা ত্ৰিভুজ পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 220

19. এটা বহুভুজৰ 27 ডাল কৰ্ণ আছে। বহুভুজটোৰ বাহুৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 9

20. প্ৰমাণ কৰা যে n টা বাহুবিশিষ্ট বহুভুজ এটাৰ শীৰ্ষবিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি পাব পৰা ত্ৰিভুজৰ সংখ্যা $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ আকৌ প্ৰমাণ কৰা যে বহুভুজটোৰ $\frac{1}{2}n(n-3)$ ডাল কৰ্ণ আছে।

21. ইটোৱে সিটো দলৰ লগত খেলিবলৈ প্ৰতিটো দলত 11 জনকৈ 22 জন খেলুৱৈক দুটা দলত কিমান প্ৰকাৰে বিভক্ত কৰিব পাৰি?

উত্তৰ ঃ $\dfrac{\underline{|22}}{2\ (\underline{|11})^2}$

22. এখন সমতলত 15 টা বিন্দু আছে যাৰ কোনো তিনিটাই একৰেখীয় নহয়।

(i) এই বিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি কেইটা ৰেখাখণ্ড পাব পাৰি?

(ii) এই ৰেখাখণ্ডবোৰে কেইটা ত্ৰিভুজ গঠন কৰিব?

উত্তৰ ঃ (i) 105 (ii) 455

23. এখন সমতলত 18 টা বিন্দু আছে যাৰ মাত্ৰ 5 টা একে ৰেখাত আছে। এই বিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি (i) কেইডাল ভিন্ন সৰলৰেখা, (ii) কেইটা ভিন্ন ত্ৰিভুজ পাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ (i) 144 (ii) 806

24. 3 জন ছাত্ৰৰ মাজত 6 খন কিতাপ কিমান প্ৰকাৰে সমানে ভগাব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 90

25. 2 জন ছাত্ৰৰ মাজত 10 খন কিতাপ কিমান প্ৰকাৰে সমানে ভগাই দিব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 252

26. বন্ধুৰ দল এটাত থকা প্ৰতিজন সদস্যই প্ৰতিজনলৈ নৱবৰ্ষৰ শুভেচ্ছা পত্ৰ প্ৰদান কৰে। যদি তেওঁলোকে ব্যৱহাৰ কৰা পত্ৰৰ সংখ্যা 132 হয়, তেন্তে সেই দলটোত কেইজন বন্ধু আছে?

উত্তৰ ঃ 12

27. এটা ভোজমেলত উপস্থিত থকা প্ৰতিজন সদস্যই আনজনৰ লগত কৰমৰ্দন কৰিলে। যদি মুঠ কৰমৰ্দনৰ সংখ্যা 120 হয়, তেন্তে সেই ভোজমেলত উপস্থিত থকা সদস্যৰ সংখ্যা নিৰূপণ কৰা।

উত্তৰ ঃ 16

28. 7 জন ভদ্ৰলোক আৰু 5 জনী ভদ্ৰমহিলাৰ এটা দলৰ পৰা 4 জন ভদ্ৰলোক আৰু 3 জনী ভদ্ৰমহিলা সন্নিৱিষ্ট এখন কমিটী গঠন কৰিব লাগে। যদি এজনী বিশেষ ভদ্ৰমহিলা L_1-এ আন এজনী বিশেষ ভদ্ৰমহিলা L_2 -ৰ লগত একেলগে অন্তৰ্ভুক্ত হোৱাটো নিবিচাৰে, তেন্তে কমিটীখন কিমান প্ৰকাৰে গঠন কৰিব পাৰি?

উত্তৰ ঃ 245

গণিতীয় আৰেশ তত্ত্ব ঃ

স্বাভাৱিক সংখ্যা জড়িত বহুতো উক্তি বা সূত্ৰ সকলো স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বাবে সত্য বুলি সাব্যস্ত কৰিবলগীয়া হয়। স্বাভাৱিক সংখ্যা জড়িত এটা উক্তি $S(n)$ ৰ ক্ষেত্ৰত যদি আমি $n = 1, 2$ আৰু 3 ৰ বাবে উক্তিটো সত্য প্ৰতিপন্ন কৰি সিদ্ধান্ত লওঁ যে $S(n)$ উক্তিটো $n \mathcal{E} N$ ৰ সকলো মানৰ বাবে সত্য, তেনেহ'লে এই সিদ্ধান্তটো সত্য নহ'বও পাৰে। উদাহৰণ স্বৰূপে তলৰ উক্তিটো বিবেচনা কৰা হওক—

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ...+ n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n-1)(n-2)(n-3)$$

n ৰ মান ক্ৰমে 1, 2 আৰু 3 বহুৱাই আমি পাম যে প্ৰতিবাৰতে বাওঁপক্ষ = সোঁপক্ষ; অৰ্থাৎ $n = 1$, $n = 2$ আৰু $n = 3$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য। যদি আমি এনেদৰে সিদ্ধান্ত গ্ৰহণ কৰোঁ যে যিহেতু $n = 1, 2, 3$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য গতিকে $n \in N$ ৰ সকলো মানৰ বাবে উক্তিটো সত্য, তেনেহ'লে আমাৰ সিদ্ধান্তটো সত্য নহয় কাৰণ যদি $n = 4$ বহুওৱা হয় তেন্তে

বাওঁপক্ষ $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

সোঁপক্ষ $= \frac{4 \times 5 \times 9}{6} + 3 \times 2 \times 1 = 36$

সেয়েহে এনেকুৱা এটা প্ৰণালীবদ্ধ নিয়মৰ আৱশ্যক, যাৰ দ্বাৰা আমি স্বাভাৱিক সংখ্যা n জড়িত এটা উক্তি $n \in N$ ৰ সকলো মানৰ বাবে সত্য বুলি প্ৰতিপন্ন কৰিব পাৰোঁ। এনেকুৱা নিয়মৰ আঁৰত থকা তত্ত্বটোৱে হ'ল **গণিতীয় আৰেশ তত্ত্ব** (Principle of Mathematical induction)।

গণিতীয় আৰেশ তত্ত্বটো তলত দিয়াৰ দৰে উল্লেখ কৰিব পাৰি—

স্বাভাৱিক সংখ্যা n জড়িত এটা উক্তি $P(n)$ ৰ বাবে যদি

(i) $P(1)$ সত্য অৰ্থাৎ $n = 1$ ৰ বাবে $P(n)$ সত্য,

(ii) n ৰ যিকোনো মান k ৰ বাবে,

আমি পাওঁ $P(k)$ সত্য $\Rightarrow P(k+1)$ সত্য অৰ্থাৎ nৰ যিকোনো এটা মান k ৰ বাবে $P(n)$ সত্য হ'লে n ৰ মান $k + 1$ ৰ বাবেও $P(n)$ সত্য হ'ব, তেন্তে $n \in \mathrm{N}$ ৰ সকলো মানৰ বাবে $P(n)$ সত্য হ'ব।

ব্যাখ্যা ঃ

ধৰা হওক, আমি প্ৰমাণ কৰি দেখুৱালোঁ যে

(i) এটা উক্তি $P(n)$, $n = 1$ ৰ বাবে সত্য আৰু

(ii) যদি $n = k$ ৰ বাবে $P(n)$ সত্য তেনেহ'লে $n = k + 1$ ৰ বাবেও $P(n)$ সত্য।

তেনেহ'লে (i) ৰ পৰা $n = 1$ ৰ বাবে $P(n)$ সত্য আৰু (ii) ৰ পৰা যিহেতু $n = 1$ ৰ বাবে $P(n)$ সত্য গতিকে $n = 1+1=2$ ৰ বাবেও $P(n)$ সত্য। আকৌ যিহেতু $n = 2$ ৰ বাবে $P(n)$ সত্য গতিকে $n = 2 + 1 = 3$ ৰ বাবেও সত্য। এনেদৰে গৈ থাকিলে আমি সিদ্ধান্ত ল'ব পাৰোঁ যে $n \in \mathrm{N}$ ৰ সকলো মানৰ বাবে $P(n)$ সত্য।

টোকা ঃ ধৰা হওক, $P(n)$ এটা উক্তি। যদি আমি প্ৰমাণ কৰিব পাৰোঁ যে—

(i) n ৰ এটা নিৰ্দিষ্ট মান m ৰ বাবে $P(n)$ সত্য আৰু

(ii) যিকোনো এটা মান $k \in N$ $(k > m)$ ৰ বাবে $P(k)$ সত্য $\Rightarrow P(k+1)$ সত্য

তেনেহ'লে সকলো $n \geq m \in N$ ৰ বাবে $P(n)$ সত্য হ'ব।

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

1. গণিতীয় আৰেশ তত্ত্বৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}, \; n \in N$$

সমাধান ঃ

যেতিয়া $n = 1$, তেতিয়া বাওঁপক্ষ $= 1$

$$\text{আৰু সোঁপক্ষ} = \frac{1.2}{2} = 1$$

$$\therefore \quad \text{বাওঁপক্ষ} = \text{সোঁপক্ষ}$$

$\therefore$ $n = 1$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য।

ধৰা হ'ল, $n = k$ $(k > 1)$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য।

$$\therefore \; 1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= (k+1)\left[\frac{k}{2}+1\right]$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

গতিকে দেখা গ'ল যে $n = k + 1$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য যদি ই $n = k$ ৰ বাবে সত্য।

$\therefore$ গণিতীয় আৰেশ তত্ত্ব মতে $n \in N$ ৰ সকলো মানৰ বাবে উক্তিটো সত্য

$$\therefore \; 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in N$$

2. যদি $n \in N$, গণিতীয় আৰেশৰ সহায়ত দেখুওৱা যে $a^n - b^n$ ৰাশিটো $a - b$ ৰে বিভাজ্য।

সমাধান ঃ $n = 1$ হ'লে $a^n - b^n = a - b$ যিটো $a - b$ ৰে বিভাজ্য

গতিকে উক্তিটো $n = 1$ ৰ বাবে সত্য।

এতিয়া ধৰা হ'ল, $n = k$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য, অৰ্থাৎ $a^k - b^k$ ৰাশিটো $a - b$ ৰে বিভাজ্য।

গতিকে $a^k - b^k = c\,(a - b)$ য'ত c হ'ল $a^k - b^k$

ক $a - b$ ৰে হৰণ কৰি পোৱা ভাগফল।

এতিয়া,

$$\begin{aligned} a^{k+1} - b^{k+1} &= a(a^k - b^k) + ab^k - b^{k+1} \\ &= ac(a - b) + b^k\,(a - b) \\ &= (a - b)(ac + b^k) \end{aligned}$$

গতিকে দেখা গ'ল যে $a^{k+1} - b^{k+1}$ ৰাশিটো $a - b$ ৰে বিভাজ্য। সেয়েহে প্ৰদত্ত উক্তিটো $n=k+1$ৰ বাবে সত্য যদি ই $n = k$ ৰ বাবে সত্য।

গতিকে গণিতীয় আৰেশ তত্ত্ব মতে $n \in N$ ৰ সকলো মানৰ বাবে উক্তিটো সত্য অৰ্থাৎ $n \in N$ ৰ সকলো মানৰ বাবে $a^n - b^n$ ৰাশিটো $a - b$ ৰে বিভাজ্য।

3. গণিতীয় আৰেশৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে

$n \geq 7$ ৰ বাবে $\underline{|n} > 3^n$

সমাধান ঃ

$n = 7$ হ'লে $\underline{|n} = \underline{|7} = 5040$

আৰু $3^n = 3^7 = 2187$

$\therefore$ $n = 7$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য।

ধৰা হ'ল, $n = k$ ($k > 7$) ৰ বাবে উক্তিটো সত্য।

$\therefore \lfloor k > 3^k$

য'ত $k > 7$

$\Rightarrow (k+1)\lfloor k > (k+1)3^k$

$\Rightarrow \lfloor k+1 > 3.3^k$ [$\because k > 7 \therefore k+1 > 3$]

$\Rightarrow \lfloor k+1 > 3^{k+1}$

গতিকে দেখা গ'ল যে $n = k + 1$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য

যদিহে ই $n = k$ ৰ বাবে সত্য।

$\therefore$ আৰেশ তত্ত্বৰ মতে সকলো $n \geq 7$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য, অৰ্থাৎ

$n \geq 7$ ৰ বাবে $\lfloor n > 3^n$

অনুশীলনী

গণিতীয় আৰেশ তত্ত্বৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে —

1. সকলো $n \in N$ ৰ বাবে প্ৰথম n টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বৰ্গৰ সমষ্টি

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. সকলো $n \in N$ ৰ বাবে $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

3. প্ৰথম n টা অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সমষ্টি n^2

4. প্ৰথম n টা যুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ যোগফল $n(n + 1)$

5. $1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2), n \in N$

6. $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n-1)$, $\forall n\in N$

7. $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$, $\forall n\in N$

8. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+....+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}, n\in N$

9. সকলো $n\in N$ ৰ $x^n - 1$ বাবে ৰাশিটো $x - 1$ ৰে বিভাজ্য।

10. সকলো $n\in N$ ৰ বাবে $9^n + 7$ ৰাশিটো 8 ৰে বিভাজ্য।

11. সকলো $n\in N$ ৰ বাবে $5^{2n} + 3n - 1$ ৰাশিটো 9 ৰে বিভাজ্য।

12. সকলো $n\in N$ ৰ বাবে $2^n > n$

13. সকলো $n \geq 4$ ৰ বাবে $\underline{|n} > 2^n$

14. সকলো $n\in N$ ৰ বাবে $a^{2n} - b^{2n}$ ৰাশিটো $a + b$ ৰে বিভাজ্য।

15. সকলো $n\in N$ ৰ বাবে $5^{2n} - 1$ ৰাশিটো 24 ৰে বিভাজ্য।

দ্বিপদ উপপাদ্য

দুটা পদযুক্ত এটা ৰাশিক **দ্বিপদ ৰাশি** বা দ্বিপদ বুলি কোৱা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে $a + x$, $a + b$, $a+\frac{b}{x}$, $2x + 3$, $x^2 + 7x$ ইত্যাদি হ'ল একো একোটা দ্বিপদ ৰাশি।

এটা দ্বিপদ ৰাশিৰ যিকোনো সূচক বা ঘাতৰ বাবে বিস্তৃতিৰ সাধাৰণ নিয়ম দিব পৰা সূত্ৰটোকে **দ্বিপদ উপপাদ্য** (Binomial theorem) বুলি জনা যায়। আমি ইয়াত কেৱল ধনাত্মক অখণ্ড সূচকৰ বাবে দ্বিপদ উপপাদ্যটোৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

ধনাত্মক অখণ্ড সূচকৰ বাবে দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial theorem for positive integral index) **ঃ**

যদি n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা a আৰু x ৰ বাবে

$$(a + x)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + {}^nC_3a^{x-3}x^3$$

$$+....+{}^nC_ra^{n-r}x^r+.....+{}^nC_nx^n \quad .... (1)$$

প্ৰমাণ ঃ এই উপপাদ্যটো আমি গণিতীয় আৱেশ তত্ত্বৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰিম।

$n = 1$ ৰ বাবে (1) ৰ বাওঁপক্ষ $= (a + x)^1 = a + x$ আৰু সোঁপক্ষ $= {}^1C_0a^1 + {}^1C_1x^1 = a + x$

$\therefore$ $n = 1$ ৰ বাবে (1) উক্তিটো সত্য।

ধৰা হ'ল এই উক্তিটো n ৰ যিকোনো এটা মান m ৰ বাবে সত্য। তেতিয়া

$(a+x)^m = {}^mC_0a^m + {}^mC_1a^{m-1}x + {}^mC_2a^{m-2}x^2 + {}^mC_3a^{m-3}x^3 + \ldots + {}^mC_ra^{m-r}x^r + \ldots + {}^mC_mx^m$

দুয়োপক্ষক $(a + x)$ ৰে পূৰণ কৰি পাওঁ

$(a+x)^{m+1} =$

$$(a+x).\left[{}^mC_0a^m + {}^mC_1a^{m-1}x + {}^mC_2a^{m-2}x^2 + {}^mC_3a^{m-3}x^3 + \ldots + {}^mC_ra^{m-r}x^r + \ldots + {}^mC_mx^m\right]$$

$$= {}^mC_0a^{m+1} + ({}^mC_0 + {}^mC_1)a^mx + ({}^mC_1 + {}^mC_2)a^{m-1}x^2$$
$$+({}^mC_2 + {}^mC_3)a^{m-2}x^3 + \ldots + ({}^mC_{r-1} + {}^mC_r)a^{m+1-r}x^r + \ldots + {}^mC_mx^{m+1}$$

কিন্তু $\quad {}^mC_0 = 1 = {}^{m+1}C_0, {}^mC_m = 1 = {}^{m+1}C_{m+1}$

আকৌ $\quad {}^mC_{r-1} + {}^mC_r = {}^{m+1}C_r$

$\therefore\ {}^mC_0 + {}^mC_1 = {}^{m+1}C_1$

${}^mC_1 + {}^mC_2 = {}^{m+1}C_2$ ইত্যাদি

$$\therefore\ (a+x)^{m+1} = {}^{m+1}C_0a^{m+1} + {}^{m+1}C_1a^mx + {}^{m+1}C_2a^{m-1}x^2$$
$$+{}^{m+1}C_3a^{m-2}x^3 + \ldots + {}^{m+1}C_ra^{m+1-r}x^r + \ldots + {}^{m+1}C_{m+1}x^{m+1}$$

এইদৰে আমি পালোঁ যে যদি $n = m$ ৰ বাবে উক্তিটো সত্য তেন্তে $n = m + 1$ ৰ বাবেও উক্তিটো সত্য। গতিকে গণিতীয় আৰেশ তত্ত্ব মতে $n \in N$ ৰ সকলো মানৰ বাবে উক্তিটো সত্য।

$\therefore$ যদি $n \in N$, তেন্তে

$(a+x)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + {}^nC_3a^{x-3}x^3 + \ldots + {}^nC_ra^{n-r}x^r + \ldots + {}^nC_nx^n$

কেইটামান প্ৰয়োজনীয় ফলাফল ঃ

1. $(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত মুঠ পদৰ সংখ্যা $(n + 1)$ অৰ্থাৎ সূচক n তকৈ এটা বেছি।

2. $(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত প্ৰতিটো পদৰেই a আৰু x ৰ ঘাতৰ সমষ্টি n ৰ সমান।

3. প্ৰথম পদত a ৰ ঘাত n আৰু ইয়াৰ পিছৰ পদবোৰত ক্ৰমানুসৰি এক এককৈ কমি গৈ অৱশেষত শেষ পদটোত শূন্য হয়গৈ। আনহাতে x ৰ ঘাত প্ৰথম পদটোত শূন্য আৰু ই পিছৰ পদবোৰত ক্ৰমানুসৰি এক এককৈ বাঢ়ি গৈ শেষ পদটোত n হয়গৈ।

দুইমূৰৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী পদৰ সহগ ঃ

$(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত প্ৰথমৰ পৰা আৰু শেষৰ পৰা সমান দূৰত্বত থকা পদবোৰৰ দ্বিপদ সহগ সমান।

$(a + x)^n$ৰ বিস্তৃতিত প্ৰথমৰ পৰা $(r + 1)$ তম পদটো হ'ল ${}^nC_r a^{n-r} x^r$ যাৰ সহগ হ'ল ${}^nC_r$ আকৌ শেষৰ পৰা $(r + 1)$ তম পদটো হ'ল আৰম্ভণিৰ পৰা $[(n + 1) - r]$ তম পদটো অৰ্থাৎ $(n - r + 1)$ তম পদটো (আৰম্ভৰ পৰা)।

গতিকে শেষৰ পৰা $(r + 1)$ তম পদ

= আৰম্ভৰ পৰা $(n - r + 1)$ তম পদ

$= {}^nC_{n-r} a^{n-(n-r)} x^{n-r}$

$= {}^nC_{n-r} a^r x^{n-r}$

যাৰ সহগ হ'ল ${}^nC_{n-r}$

কিন্তু আমি জানো যে ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

গতিকে আৰম্ভণিৰ পৰা আৰু শেষৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী পদবোৰৰ সহগ সমান।

$(a + x)^n$ৰ বিস্তৃতিত দ্বিপদ সহগ ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \ldots, {}^nC_n$ এ n ৰ ভিন্ন মানৰ ক্ষেত্ৰত এটা আৰ্হি অনুকৰণ কৰে ঃ

$n = 0$ হ'লে, ${}^0C_0 = 1$

$n = 1$ হ'লে ${}^1C_0 = 1, {}^1C_1 = 1$

$n = 2$ হ'লে ${}^2C_0 = 1, {}^2C_1 = 2, {}^2C_2 = 1$

$n = 3$ হ'লে ${}^3C_0 = 1, {}^3C_1 = 3, {}^3C_2 = 3, {}^3C_3 = 1$

$n = 4$ হ'লে ${}^4C_0 = 1, {}^4C_1 = 4, {}^4C_2 = 6, {}^4C_3 = 4, {}^4C_4 = 1$

$n = 5$ হ'ল ${}^5C_0 = 1, {}^5C_1 = 5, {}^5C_2 = 10, {}^5C_3 = 10, {}^5C_4 = 5, {}^5C_5 = 1$ ইত্যাদি

আমি এই সহগবোৰ তলত দেখুওৱাৰ দৰে এটা ত্ৰিভুজ আকৃতিত সজাব পাৰোঁ, যিটো ত্ৰিভুজক **পাস্কেলৰ** ত্ৰিভুজ (Pascal's triangle) বুলি কোৱা হয়।

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

----

n ৰ বিভিন্ন মানৰ বাবে পোৱা সহগবোৰক ক্ৰমানুসৰি একোটা শাৰীত সজোৱা হৈছে। এইটো দেখা যায় যে প্ৰতিটো শাৰীত দুইমূৰৰ সংখ্যা দুটাৰ প্ৰতিটোৱে 1 আৰু মাজৰ প্ৰতিটো সংখ্যাই ঠিক ওপৰৰ শাৰীৰৰ দুই কাষৰ সংখ্যা দুটাৰ যোগফল।

এই ত্ৰিভুজটোৱে দ্বিপদ বিস্তৃতিত সহগবোৰ নিৰ্ণয় কৰাৰ ক্ষেত্ৰত আমাক এটা সৰল নিয়ম দিয়ে; বিশেষতঃ যেতিয়া n ৰ মান বেছি ডাঙৰ সংখ্যা নহয়।

প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ... শাৰীত থকা সংখ্যাবোৰ হ'ল ক্ৰমে $n = 0, 1, 2, ...$ ৰ বাবে $(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত ক্ৰমিক দ্বিপদ সহগবোৰৰ মান।

মধ্যম পদ (পদবোৰ) ঃ

যদি n যুগ্ম, ধৰা $n = 2m$, তেন্তে $(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত পদৰ সংখ্যা হ'ব $2m + 1$ যিটো অযুগ্ম। সেয়েহে মধ্যম পদটো হ'ব $(m + 1)$ তম পদ যাৰ মান হ'ব

$$^nC_m a^{n-m} x^m = {}^nC_{\frac{n}{2}} a^{n-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}}$$

$$= {}^nC_{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}}$$

আকৌ যদি n অযুগ্ম, ধৰা $n = 2m + 1$, তেন্তে $(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত পদৰ সংখ্যা হ'ব $2m + 2$ যিটো যুগ্ম। সেয়েহে $(m + 1)$ তম আৰু $(m + 2)$ তম পদ দুটাই মধ্যম পদ হ'ব, যাৰ মান হ'ব

$^nC_m a^{n-m} x^m$ আৰু $^nC_{m+1} a^{n-(m+1)} x^{m+1}$

অৰ্থাৎ $^nC_{\frac{n-1}{2}} a^{n-\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}}$ আৰু $^nC_{\frac{n+1}{2}} a^{n-\frac{n+1}{2}} x^{\frac{n+1}{2}}$

অৰ্থাৎ $^nC_{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}}$ আৰু $^nC_{\frac{n+1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n+1}{2}}$

$(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত সাধাৰণ পদ ঃ

$(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত যদি প্ৰথম পদ t_1 ৰে, দ্বিতীয় পদ t_2 ৰে, তৃতীয় পদ t_3 ৰে বুজোৱা হয়, তেন্তে

$t_1 = {}^nC_0 a^n = {}^nC_0 a^{n-0} x^0$

$t_2 = {}^nC_1 a^{n-1} x = {}^nC_1 a^{n-1} x^1$

$t_3 = {}^nC_2 a^{n-2} x^2$

....

....

গতিকে $t_{r+1} = {}^nC_r a^{n-r} x^r$

দেখা যায় $(r + 1)$ তম পদ t_{r+1}ত $r = 0, 1, 2,..., n$ বহুৱাই আমি বিস্তৃতিৰ আটাইবোৰ পদ পাব পাৰোঁ।

$(r + 1)$ তম পদ অৰ্থাৎ $t_{r+1} = {}^nC_r a^{n-r} x^r$ ক $(a + x)^n$ ৰ বিস্তৃতিত **সাধাৰণ পদ** (General term) বুলি কোৱা হয়।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ দ্বিপদ উপপাদ্য

$(a + x)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} x + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + {}^nC_3 a^{x-3} x^3 + ... + {}^nC_r a^{n-r} x^r + ... + {}^nC_n x^n$ অ-ত

(i) যদি আমি x ৰ ঠাইত $(-x)$ লিখোঁ, তেন্তে আমি পাম

$(a - x)^n = {}^nC_0 a^n - {}^nC_1 a^{n-1} x + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 - {}^nC_3 a^{x-3} x^3 + ... + (-1)^r\ {}^nC_r a^{n-r} x^r + ... + (-1)^n\ {}^nC_n x^n$

(ii) যদি $a = 1$ বহুৱাওঁ, তেন্তে আমি পাওঁ

$(1 + x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + {}^nC_3 x^3 + ... + {}^nC_r x^r + ... + {}^nC_n x^n$

(iii) যদি $a = 1$ আৰু x ৰ সলনি $(-x)$ বহুৱাওঁ, তেন্তে আমি পাওঁ

$(1 - x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 - {}^nC_3 x^3 + ... + (-1)^r\ {}^nC_r x^r + ... + (-1)^n\ {}^nC_n x^n$

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

1. দ্বিপদ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি $(2 + x)^7$ ৰ বিস্তৃতি লিখা।

সমাধান ঃ

$$(2 + x)^7 = {}^7C_0.2^7 + {}^7C_1 2^6 x + {}^7C_2 2^5 x^2 + {}^7C_4 2^4 x^3 + {}^7C_3 2^3 x^4 + {}^7C_5 2^2 x^5 + {}^7C_6 2x^6 + {}^7C_7 x^7$$
$$= 2^7 + 7 \times 2^6 x + 21 \times 2^5 x^2 + 35 \times 2^4 x^3 + 35 \times 2^3 x^4 + 21 \times 2^2 x^5 + 7\times 2x^6 + x^7$$
$$= 128 + 448x + 672x^2 + 560x^3 + 280x^4 + 84x^5 + 14x^6 + x^7$$

2. দ্বিপদ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি 103^5 ৰ মান নিৰ্দ্ধপণ কৰা।

সমাধান ঃ

$$103^5 = (100 + 3)^5$$
$$= 100^5 + {}^5C_1\, 100^4 \times 3 + {}^5C_2\, 100^3 \times 3^2 + {}^5C_3\, 100^2 \times 3^3 + {}^5C_4.100 \times 3^4 + {}^5C_5.3^5$$
$$= 10^{10} + 5 \times 10^8 \times 3 + 10 \times 10^6 \times 9 + 10 \times 10^4 \times 27 + 5 \times 10^2 \times 81 + 243$$
$$= 10^{10} + 15 \times 10^8 + 90 \times 10^6 + 270 \times 10^4 + 405 \times 10^2 + 243$$
$$= 11, 59, 27, 40, 743$$

3. $\left(2a - \dfrac{x}{2}\right)^7$ ৰ বিস্তাৰ কৰা।

সমাধান ঃ

$$\left(2a-\frac{x}{2}\right)^7 = (2a)^7 - {}^7C_1(2a)^6\left(\frac{x}{2}\right) + {}^7C_2\ (2a)^5\left(\frac{x}{2}\right)^2 - {}^7C_3\ (2a)^4\left(\frac{x}{2}\right)^3 + {}^7C_4\ (2a)^3$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^4 - {}^7C_5(2a)^2\left(\frac{x}{2}\right)^5 + {}^7C_6(2a)\left(\frac{x}{2}\right)^6 - {}^7C_7\left(\frac{x}{2}\right)^7$$

$$= 128a^7 - 7 \times 2^5a^6x + 21 \times 2^3a^5x^2 - 35 \times 2a^4x^3$$

$$+ 35a^3\ \frac{x^4}{2} - 21a^2\frac{x^5}{2^3} + 7a\frac{x^6}{2^5} - \frac{x^7}{2^7}$$

$$= 128a^7 - 224a^6x + 168a^5x^2 - 70a^4x^3 + \frac{35}{2}a^3x^4 - \frac{21}{8}a^2x^5 + \frac{7}{32}x^6 - \frac{x^7}{128}$$

4. $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^{10}$ ৰ বিস্তৃতিত ৪ম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

8 ম পদ $= t_{7+1}$

$$= {}^{10}C_7(x^2)^{10-7}\left(-\frac{2}{x}\right)^7$$

$$= 120x^6\left(-\frac{128}{x^7}\right)$$

$$= -\frac{15360}{x}$$

5. $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ ৰ বিস্তৃতিত x^5 ৰ সহগ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

ইয়াত $t_{r+1} = {}^{11}C_r x^{11-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r$

$$= (-1)^{r\,11}C_r x^{11-r}\frac{1}{x^{2r}}$$

$$= (-1)^{r\,11}C_r x^{11-3r}$$

যদি এই পদটোত x^5 থাকে, তেন্তে

$11 - 3r = 5$

$\Rightarrow r = 2$

$\therefore$ x^5 যুক্ত পদ $= t_{2+1}$

$\therefore$ x^5 ৰ সহগ $= (-1)^2\, {}^{11}C_2$

$$= \frac{11 \times 10}{2}$$

$$= 55$$

6. $(x - x^2)^{10}$ ৰ বিস্তৃতিত x^{16} ৰ সহগ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত $t_{r+1} = {}^{10}C_r x^{10-r}(-x^2)^r$

$$= (-1)^r\, {}^{10}C_r x^{10-r+2r}$$

$$= (-1)^r\, {}^{10}C_r x^{10+r}$$

এই পদটোত x^{16} থাকিব যদি $10 + r = 16$ অৰ্থাৎ $x = 6$ হয়।

$\therefore$ x^{16} ৰ সহগ $= (-1)^6\, {}^{10}C_6$

$$= \frac{\lfloor 10}{\lfloor 6 \ \lfloor 4}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2}$$

$$= 210$$

7. $(3+\sqrt{5})^5 + (3-\sqrt{5})^5$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

$$(3+\sqrt{5})^5 = 3^5 + {}^5C_1 3^4(\sqrt{5}) + {}^5C_2 + 3^3(\sqrt{5})^2 + {}^5C_3 3^2(\sqrt{5})^3 + {}^5C_4 3(\sqrt{5})^4 + (\sqrt{5})^5$$

আৰু

$$(3-\sqrt{5})^5 = 3^5 - {}^5C_1 3^4(\sqrt{5}) + {}^5C_2 3^3(\sqrt{5})^2 - {}^5C_3 3^2(\sqrt{5})^3 + {}^5C_4 3(\sqrt{5})^4 - (\sqrt{5})^5$$

$$\therefore\ (3+\sqrt{5})^5 + (3-\sqrt{5})^5 = 2\left[3^5 + {}^5C_2 3^3(\sqrt{5})^2 + {}^5C_4 3(\sqrt{5})^4\right]$$

$= 2[243 + 10 \times 27 \times 5 + 5 \times 3 \times 25]$

$= 2[243 + 1350 + 375]$

$= 3936$

8. $\left(2x^2 + \dfrac{1}{3x}\right)^8$ ৰ বিস্তৃতিত x^4 মুক্ত পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

ইয়াত $t_{r+1} = {}^8C_r (2x^2)^{8-r}\left(\dfrac{1}{3x}\right)^r$

$$= {}^8C_r 2^{8-r} x^{16-2r} \frac{1}{3^r x^r}$$

$$= {}^8C_r \frac{2^{8-r}}{3^r} x^{16-3r}$$

এই পদটো x^4 যুক্ত হ'ব যদি $16 - 3r = 4$ বা $x = 4$ হয়।

$\therefore$ x^4 যুক্ত পদটো $= t_{4+1}$

$$= {}^8C_4 \frac{2^{8-4}}{3^4} x^4$$

$$= 70 \times \frac{16}{81} x^4$$

$$= \frac{1120}{81} x^4$$

9. $\left(\dfrac{x^3}{2} - \dfrac{2}{x^2}\right)^{10}$ ৰ বিস্তৃতিত x মুক্ত পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত $t_{r+1} = {}^{10}C_r \left(\dfrac{x^3}{2}\right)^{10-r}\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)^r$

$$= {}^{10}C_r \frac{x^{30-3r}}{2^{10-r}} (-1)^r \frac{2^r}{x^{2r}}$$

$$= (-1)^{r\,10}C_r 2^{r-10-r} x^{30-5r}$$

$$= (-1)^{r\,10}C_r 2^{2r-10} x^{30-5r}$$

এই পদটো x মুক্ত হ'ব যদি $30 - 5r = 0$ অৰ্থাৎ $r = 6$ হয়।

$\therefore$ x মুক্ত পদটো $= (-1)^{6\,10}C_6 2^{2\times6-10}$

$$= {}^{10}C_6 2^2$$

$$= 210 \times 4$$

$$= 840$$

10. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ ৰ বিস্তৃতিত মধ্যম পদ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ বিস্তৃতিটোত $10 + 1 = 11$ টা পদ থাকিব।

$\therefore$ মধ্যম পদ $= 6$ষ্ঠ পদ

$$= t_6$$

$$= t_{5+1}$$

$$= {}^{10}C_5 x^{10-5}\left(-\frac{1}{x}\right)^5$$

$$= -\ {}^{10}C_5$$

11. $\left(\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{2}{x^2}\right)^9$ ৰ বিস্তৃতিত শেষৰ পৰা চতুৰ্থ পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ বিস্তৃতিটোত $9 + 1 = 10$ টা পদ থাকিব। গতিকে শেষৰ পৰা চতুৰ্থ পদটোৱে হ'ল আৰম্ভণিৰ পৰা 7 তম পদ।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় পদ $= t_7$

$$= t_{6+1}$$

$$= {}^9C_6\left(\frac{x^3}{2}\right)^{9-6}\left(\frac{2}{x^2}\right)^6$$

$$= {}^{9}C_{6}\frac{x^{9}}{2^{3}}.\frac{2^{6}}{x^{12}}$$

$$= 84 \times 2^{3}\frac{1}{x^{3}}$$

$$= \frac{672}{x^{3}}$$

12. $(a + b)^{10}$ ৰ দ্বিপদ বিস্তৃতিত $(4r + 5)$ তম পদৰ সহগ $(2r + 1)$ তম পদৰ সহগৰ সমান হ'লে r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

$$t_{4r+5} = {}^{10}C_{4r+4}a^{10-4r-4}b^{4r+4}$$

আৰু $t_{2r+1} = {}^{10}C_{2r}a^{10-2r}b^{2r}$

প্ৰশ্নমতে, ${}^{10}C_{4r+4} = {}^{10}C_{2r}$

$\Rightarrow 4r + 4 = 2r$ বা $4r + 4 + 2r = 10$

$\Rightarrow r = -2$ বা $r = 1$

কিন্তু $r = -2$ হ'ব নোৱাৰে ($r = -2$ হ'লে $4r + 5 = -3$ হ'ব)

গতিকে $r = 1$

অনুশীলনী

1. তলৰ বিস্তৃতিবোৰত পদৰ সংখ্যা লিখা ঃ

(i) $(3x + 5y)^{11}$ (ii) $\left(2x - \frac{2}{x}\right)^7$

(iii) $(1 + 2x + x^2)^8$ (iv) $\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right)^{25}$

উত্তৰ ঃ (i) 12 (ii) 8 (iii) 17 (iv) 26

2. দ্বিপদ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি তলত দিয়াবোৰৰ বিস্তাৰ কৰা ঃ

(i) $(1 + x)^6$ (ii) $\left(2x - \frac{1}{x^5}\right)^7$ (iii) $\left(\mathrm{x}^2 + \frac{1}{\mathrm{x}^2}\right)^8$

(iv) $\left(\frac{2x}{3} - \frac{3}{2x}\right)^6$ (v) $(x + y)^{10} + (x - y)^{10}$ (vi) $(2x + 3y)^5$

উত্তৰ ঃ (i) $1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$

(ii) $128x^7 - 448x + \frac{672}{x^5} - \frac{560}{x^{11}} + \frac{280}{x^{17}} - \frac{84}{x^{23}} + \frac{14}{x^{29}} - \frac{1}{x^{35}}$

(iii) $x^{16} + 8x^{12} + 28x^8 + 56x^4 + 70 + \frac{56}{x^4} + \frac{28}{x^8} + \frac{8}{x^{12}} + \frac{1}{x^{16}}$

(iv) $\frac{64x^6}{729} - \frac{32x^4}{27} + \frac{20x^2}{3} - 20 + \frac{135}{4x^2} - \frac{243}{8x^4} + \frac{729}{64x^6}$

(v) $2x^{10} + 90x^8y^2 + 420x^6y^4 + 420x^4y^6 + 90x^2y^8 + 2y^{10}$

(vi) $32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$

3. দ্বিপদ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) 9^6 (ii) 11^5 (iii) 101^7 (iv) 103^4 (v) 98^6 (vi) 99^5

উত্তৰ ঃ (i) 531441 (ii) 161051 (iii) 107213535210701

(iv) 112550881 (v) 885842380864 (vi) 9509900499

4. $\left(2x+\dfrac{3}{x}\right)^{12}$ ৰ বিস্তৃতিত 6ষ্ঠ পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $24634368x^2$

5. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{17}$ ৰ বিস্তৃতিত ৪তম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ ${}^{17}C_7\dfrac{1}{x^7}$

6. $\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)^{10}$ ৰ বিস্তৃতিত 6ষ্ঠ পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $-\,{}^{10}C_5\times\dfrac{243}{x^{10}}$

7. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{n}$ ৰ বিস্তৃতিত r তম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $(-1)^{r-1}\ {}^{n}C_{r-1}x^{n-2r+2}$

8. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$ ৰ বিস্তৃতিত n তম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n-1\cdot\lfloor n+1}x^2$

9. $(2x-x^2)^{10}$ ৰ বিস্তৃতিত x^{15} ৰ সহগ নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ – 8064

10. $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^{8}$ ৰ বিস্তৃতিত $\dfrac{1}{x}$ ৰ সহগ নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ – 56

11. $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^8$ ৰ বিস্তৃতিত x^2 ৰ সহগ নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 1792

12. $\left(\mathrm{x}+\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}}\right)^{10}$ ৰ বিস্তৃতিত x^4 থকা পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $120a^3x^4$

13. $(x^2 - 3x)^{12}$ ৰ বিস্তৃতিত x^{18} থকা পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $673596x^{18}$

14. $\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)^{13}$ ৰ বিস্তৃতিত a^{-10} থকা পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $-715a^{-10}$

15. $(x - 2y)^{15}$ ত y^7 থকা পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $\frac{\lfloor 15}{\lfloor 7 \cdot \lfloor 8} 2^7 \mathrm{x}^8 \mathrm{y}^7$

16. তলৰ বিস্তৃতিবোৰত মধ্যম পদ (বোৰ) নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12}$ (ii) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^9$ (iii) $\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)^{10}$

(iv) $(a + x)^{21}$ (v) $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^7$ (vi) $(2y + 3x)^8$

উত্তৰ ঃ (i) 924 (ii) $126x,\ \frac{-126}{x}$ (iii) 252

(iv) $352716a^{11}x^{10},\ 352716a^{10}x^{11}$ (v) $35x^6,\ 35x$

(vi) $90720x^4y^4$

17. তলৰ বিস্তৃতিবোৰত x মুক্ত পদ নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{12}$ (ii) $\left(3\mathrm{x}^2 \times \frac{1}{3\mathrm{x}}\right)^9$

(iii) $\left(\sqrt{\dfrac{x}{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2}\right)^{10}$ (iv) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{2m}$ (v) $\left(\dfrac{4x^2}{3}-\dfrac{3}{2x}\right)^{9}$

উত্তৰ ঃ (i) 495 (ii) $\dfrac{28}{9}$ (iii) $\dfrac{5}{12}$

(iv) $(-1)^m \dfrac{\lfloor 2m}{(\lfloor m)^2}$ (v) 2268

18. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{12}$ ৰ বিস্তৃতিত শেষৰ পৰা পঞ্চম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $\dfrac{495}{x^4}$

19. দ্বিপদ বিস্তৃতি $(a + x)^n$ অত 4ৰ্থ আৰু 13 তম পদ দুটাৰ সহগবোৰ সমান হ'লে n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।
উত্তৰ ঃ 15

20. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{k}{x^2}\right)^{10}$ ৰ বিস্তৃতিত ধ্ৰুৱক পদটো 405 হ'লে k ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ ± 3

21. $(x + 1)^{41}$ ৰ বিস্তৃতিত $(2r + 2)$ তম পদৰ সহগৰ লগত $(4r - 1)$ তম পদৰ সহগ সমান হ'লে, r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 7

22. যদি $(1 - x)^{44}$ ৰ বিস্তৃতিত 21তম আৰু 22তম পদ দুটা সমান হয়, তেন্তে x ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $-\dfrac{7}{8}$

23. $\left(a+\dfrac{x}{3}\right)^{9}$ ৰ বিস্তৃতিত x^2 আৰু x^3 ৰ সহগ সমান হ'লে a ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $\dfrac{7}{9}$

24. $(x + y)^{11}$ ৰ বিস্তৃতিত x^6y^5 ৰ সহগ নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ 462

25. প্ৰমাণ কৰা যে $(1 + x)^{m+n}$ ৰ বিস্তৃতিত x^m আৰু x^n ৰ সহগ সমান য'ত $m, n \in N$.

26. $(x + x^2)^8$ ৰ বিস্তৃতিত শেষৰ তিনিটা পদ নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰ ঃ $28x^{14}$, $8x^{15}$, x^{16}

* * *

3.3 মৌলকক্ষ (Matrix)

3.3.1 পাতনি (Introduction) ঃ

প্ৰয়োজন সাপেক্ষে কেতিয়াবা কিছুমান সংখ্যা বা অইন উপাদানক শৃংখলাবদ্ধভাৱে আয়তাকাৰ পদ্ধতিত প্ৰদৰ্শন কৰা হয়। এই ধৰণৰ শৃংখলাবদ্ধ প্ৰদৰ্শনৰ উলম্ব প্ৰদৰ্শনবোৰক স্তম্ভ (column) আৰু অনুভূমিক প্ৰদৰ্শনবোৰক শাৰী (raw) বোলা হয়।

ধৰা হ'ল, আমি তলৰ তথ্যখিনিক এই ধৰণৰ আয়তাকাৰ প্ৰদৰ্শনৰ দ্বাৰা সজাব লাগে— পাপৰিয়ে 10kg চাউল, 5 kg আটা, 3kg চেনি আৰু ৰূপালীয়ে 7kg চাউল, 4kg আটা, 5kg চেনি কিনিলে।

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{ccc}\text{চাউল} & \text{আটা} & \text{চেনি}\end{array} & \\
\begin{array}{c}\text{পাপৰি}\\ \text{ৰূপালী}\end{array} & \begin{pmatrix}10 & 5 & 3\\ 7 & 4 & 5\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\rightarrow \text{প্ৰথম শাৰী}\\ \rightarrow \text{দ্বিতীয় শাৰী}\end{array} \\
 & \begin{array}{ccc}\downarrow & \uparrow & \uparrow\\ \text{প্ৰথম স্তম্ভ} & \text{দ্বিতীয় স্তম্ভ} & \text{তৃতীয় স্তম্ভ}\end{array} &
\end{array}$$

নাইবা

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{cc}\text{পাপৰি} & \text{ৰূপালী}\end{array} & \\
\begin{array}{c}\text{চাউল}\\ \text{আটা}\\ \text{চেনি}\end{array} & \begin{pmatrix}10 & 7\\ 5 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\rightarrow \text{প্ৰথম শাৰী}\\ \rightarrow \text{দ্বিতীয় শাৰী}\\ \rightarrow \text{তৃতীয় শাৰী}\end{array} \\
 & \begin{array}{cc}\uparrow & \uparrow\\ \text{প্ৰথম স্তম্ভ} & \text{দ্বিতীয় স্তম্ভ}\end{array} &
\end{array}$$

এই ধৰণৰ আয়তাকাৰ প্ৰদৰ্শন কিছুমান নিয়ম বা বিধিৰ দ্বাৰা পৰিচালিত কৰিলে তাক মৌলকক্ষ (Matrix) বোলা হয়।

গণিতৰ বিভিন্ন শাখাৰ বাবে মৌলকক্ষৰ জ্ঞান অতিকৈ প্ৰয়োজনীয়। মৌলকক্ষৰ সহায়ত অনেক জটিল গণনা সহজেই সমাধান কৰিব পাৰি। সহ-ৰৈখিক সমীকৰণ সমাধান, গোপন বাৰ্তা প্ৰেৰণ, ব্যৱসায়ত বিক্ৰী সম্পৰ্কীয় বৃহৎ তথ্য অতি সংহতভাৱে প্ৰদৰ্শনৰ ক্ষেত্ৰত মৌলকক্ষৰ বহুলভাৱে ব্যৱহৃত হৈ আহিছে।

এই অধ্যায়ত আমি বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ মৌলকক্ষ আৰু মৌলকক্ষৰ বীজগণিতীয় প্ৰয়োগৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

3.3.2 সূত্ৰ ঃ $m\ n$ সংখ্যক উপাদান বা সংখ্যাক m টা শাৰী আৰু n টা স্তম্ভৰ আকৃতিত ( ) বা [ ] বন্ধনীৰ ভিতৰত সজালে তাক এটা $m \times n$ মাত্ৰাৰ (order) (পঢ়োঁতে m by n বুলি পঢ়া হয়।) মৌলকক্ষ (matrix) বোলে। ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ A, B, C... আদি আখৰেৰে সাধাৰণতে মৌলকক্ষ সূচোৱা হয়।

যিবিলাক উপাদানেৰে মৌলকক্ষটো গঠিত হয়, সেইবোৰক মৌলকক্ষটোৰ মৌল (elements) বোলা হয়।

যদি মৌলকক্ষটোৰ মৌলবোৰ বাস্তৱ সংখ্যা হয় তেনেহ'লে তাক বাস্তৱ সংখ্যাৰ মৌলকক্ষ (matrix over real numbers) বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ

ইয়াত আমি কেৱল বাস্তৱ সংখ্যাৰ মৌলকক্ষৰ কথাহে আলোচনা কৰিম।

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$A = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -8 \end{vmatrix} \text{ এটা } 3 \times 2 \text{ মৌলকক্ষ}$$

$$B = \begin{vmatrix} 8 & -7 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \text{ এটা } 2 \times 3 \text{ মৌলকক্ষ}$$

$$C = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 9 & -10 \\ \sqrt{3} & 5 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \text{ এটা } 3 \times 3 \text{ মৌলকক্ষ}$$

3.3.3 $m \times n$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ ঃ

তলৰ মৌলকক্ষটো এটা $m \times n$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ। ইয়াত m সংখ্যক শাৰী আৰু n সংখ্যক স্তম্ভ আছে।

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots\ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \quad a_{mn} \end{vmatrix}$$

$m \times n$ মাত্ৰা বিশিষ্ট মৌলকক্ষক অতি সংক্ষেপে $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ বুলি লিখা হয়। ইয়াত $1 \leq i \leq m$ আৰু $1 \leq j \leq n$

টোকা ঃ

(i) a_{ij} হ'ল মৌলকক্ষৰ i-তম শাৰী আৰু j-তম স্তম্ভৰ মৌল।

(ii) মন কৰিবলগীয়া কথা যে, ইয়াত শাৰী বুজোৱা সংখ্যাটো প্ৰথমে আৰু স্তম্ভ বুজোৱা সংখ্যাটো তাৰ পিছত লিখা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে যদি

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 4 & 0 & 8 \\ -9 & 7 & -1 \\ -6 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

এটা মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে ইয়াৰ মাত্ৰা হ'ব 4 × 3 আৰু মুঠ মৌলৰ সংখ্যা 4 × 3= 12

ইয়াত
$$\begin{array}{lll} a_{11} = 5 & a_{12} = 6 & a_{13} = -3 \\ a_{31} = 4 & a_{22} = 0 & a_{23} = 8 \\ a_{31} = -9 & a_{32} = 7 & a_{33} = -1 \\ a_{41} = -6 & a_{42} = 2 & a_{43} = -5 \end{array}$$

ব্যাখ্যামূলক উদাহৰণ (Worked out Example) ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ তলৰ তথ্যখিনিয়ে এটা শ্ৰেণীৰ A, B, C তিনিটা শাখাৰ ল'ৰা আৰু ছোৱালীৰ সংখ্যা বুজাইছে।

	ছোৱালী	**ল'ৰা**
A	30	24
B	26	34
C	28	25

এই তথ্যখিনি এটা 3 × 2 মৌলকক্ষৰ দ্বাৰা প্ৰদৰ্শন কৰা। ইয়াৰ তৃতীয় শাৰী আৰু দ্বিতীয় স্তম্ভৰ মৌল কি?

সমাধান ঃ তথ্যখিনি এটা 3 × 2 মৌলকক্ষৰ দ্বাৰা প্ৰদৰ্শন কৰিলে আমি পাওঁ

$$P = \begin{bmatrix} 30 & 24 \\ 26 & 34 \\ 28 & 25 \end{bmatrix}$$

ইয়াৰ তৃতীয় শাৰী আৰু দ্বিতীয় স্তম্ভৰ মৌল হ'ল 25.

উদাহৰণ 2 ঃ এটা মৌলকক্ষৰ মুঠ উপাদানৰ সংখ্যা হ'লে 12, ই কি কি মাত্ৰাবিশিষ্ট হ'ব পাৰে?

সমাধান ঃ আমি জানো যে, এটা মৌলকক্ষ $m \times n$ মাত্ৰাবিশিষ্ট হ'লে ইয়াৰ মৌল সংখ্যা হয় mn. গতিকে 12 টা উপাদান বিশিষ্ট মৌলকক্ষৰ মাত্ৰা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ পোন প্ৰথমে সেইবোৰ স্বাভাৰিক সংখ্যাৰ ক্ৰমিক যোৰ উলিয়াব লাগিব যাৰ সংখ্যা দুটাৰ পূৰণফল 12 হ'ব।

গতিকে সম্ভাব্য ক্ৰমিক যোৰ কেইটা হ'ল— (1, 12), (12, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 4), (4, 3)

গতিকে মৌলকক্ষৰ সম্ভাব্য মাত্ৰাসমূহ হ'ল—

1×12, 12×1, 2×6, 6×2, 3×4 আৰু 4×3

উদাহৰণ 3 ঃ A এটা 2×3 মৌলকক্ষ আৰু ইয়াৰ $a_{ij} = \frac{1}{2}(i^2 - 2_j)$ হ'লে মৌলকক্ষটো সম্পূৰ্ণকৈ লিখা।

সমাধান ঃ A যদি এটা 2×3 মৌলকক্ষ হয় তেনেহ'লে

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

এতিয়া $a_{ij} = \frac{1}{2}(i^2 - 2j)$ $i = 1, 2$

$j = 1, 2, 3$

$$\therefore \quad a_{11} = \frac{1}{2}(1^2 - 2) = -\frac{1}{2}, \quad a_{12} = \frac{1}{2}(1^2 - 4) = -\frac{3}{2},$$

$$a_{13} = \frac{1}{2}(1^2 - 6) = -\frac{5}{2},$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}(2^2 - 2) = 1, \quad a_{22} = \frac{1}{2}(2^2 - 4) = 0,$$

$$a_{23} = \frac{1}{2}(2^2 - 6) = -1$$

$\therefore$ A মৌলকক্ষটো হ'ব—

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ মৌলকক্ষ (Different types of Matrices) ঃ

এতিয়া আমি বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ মৌলকক্ষৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

(i) শাৰী মৌলকক্ষ (Raw Matrix) ঃ যিবিলাক মৌলকক্ষৰ মাত্ৰ এটা শাৰী থাকে তেনেধৰণৰ মৌলকক্ষক শাৰী মৌলকক্ষ বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে, $A = [5 \ -6 \ 2 \ 7]$ এটা 1×4 মাত্ৰাৰ শাৰী মৌলকক্ষ

গতিকে $A = \left[a_{ij}\right]_{1\times n}$ এটা $1 \times n$ মাত্ৰাৰ শাৰী মৌলকক্ষ

(ii) **স্তম্ভ মৌলকক্ষ (Column Matrix) ঃ** যিবিলাক মৌলকক্ষৰ মাত্ৰ এটা স্তম্ভ থাকে, তেনেধৰণৰ মৌলকক্ষক স্তম্ভ মৌলকক্ষ বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}_{4\times 1}$

এটা 4×1 মাত্ৰাৰ স্তম্ভ মৌলকক্ষ

গতিকে $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times 1}$ এটা $m \times 1$ মাত্ৰাৰ স্তম্ভ মৌলকক্ষ।

বৰ্গ মৌলকক্ষ (Square Matrix) ঃ যিবিলাক মৌলকক্ষৰ শাৰী আৰু স্তম্ভৰ সংখ্যা সমান, তেনেধৰণৰ মৌলকক্ষক বৰ্গ মৌলকক্ষ বোলে। গতিকে এটা $m \times n$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ বৰ্গ মৌলকক্ষ হ'ব যদিহে $m = n$ আৰু ইয়াক n মাত্ৰাৰ বৰ্গ মৌলকক্ষ বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ আৰু } \begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & -2 \\ -4 & 3 & -7 \end{bmatrix} \text{ ক্ৰমে}$$

2 আৰু 3 মাত্ৰাৰ বৰ্গ মৌলকক্ষ।

টোকা ঃ

যদি $[a_{ij}]$ এটা n মাত্ৰাৰ বৰ্গ মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে ইয়াৰ $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ এই মৌলকেইটাক বিকৰ্ণ মৌল (diagonal elements) বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

মৌলকক্ষৰ $-3, 1, -9$ হ'ল বিকৰ্ণ মৌল।

(iv) **শূন্য মৌলকক্ষ (Null or Zero Matrix)** ঃ যিবিলাক মৌলকক্ষৰ প্ৰত্যেক মৌলই শূন্য হ'য়, তেনেধৰণৰ মৌলকক্ষক শূন্য মৌলকক্ষ বোলে।

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ হ'ল শূন্য মৌলকক্ষ।

টোকা ঃ

(i) শূন্য মৌলকক্ষ সাধাৰণতে ৰে 0 বুজোৱা হয়। অৱশ্যে 0 টো কি মাত্ৰাৰ শূন্য মৌলকক্ষ সেইটো পৰিস্থিতি চাই বুজিব লাগিব।

(ii) শূন্য মৌলকক্ষ আয়তাকাৰ অথবা বৰ্গাকাৰ হ'ব পাৰে।

(v) **বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ (Diagonal Matrix)** ঃ

এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ $A = (a_{ij})_{n\times n}$-ক বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ বুলি কোৱা হয় যদিহে

$$a_{ij} = 0,\ i \neq j$$
$$\neq 0\ ,\ i = j$$

অৰ্থাৎ ইয়াৰ বিকৰ্ণ মৌলসমূহৰ বাহিৰে অইন মৌলবোৰ শূন্য হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে $A = [7]$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

1, 2 আৰু 3 মাত্ৰাৰ বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ

(vi) **অদিশ মৌলকক্ষ (Scalar Matrix)** ঃ এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ক অদিশ মৌলকক্ষ বোলা হয় যদিহে,

$a_{ij} = 0$, যদি $i \neq j$

$= k$, যদি $i = j$ (k এটা অশূন্য ধ্ৰুৱক)

অৰ্থাৎ ইয়াৰ বিকৰ্ণ মৌলসমূহৰ মান এটা অশূন্য ধ্ৰুৱক k ৰ সমান আৰু অইন মৌলবোৰ শূন্য হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$A = [4]$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

ক্ৰমে 1, 2 আৰু 3 মাত্ৰাৰ অদিশ মৌলকক্ষ।

(vii) **একক মৌলকক্ষ (Unit or Identity Matrix) ঃ**

এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ক একক মৌলকক্ষ কোৱা হয় যদিহে,

$a_{ij} = 1$, যদি $i = j$

$= 0$ যদি $i \neq j$

অৰ্থাৎ ইয়াৰ বিকৰ্ণ মৌলকবোৰৰ মান 1 আৰু অইন মৌলবোৰ শূন্য হয়।

একক মৌলকক্ষক সাধাৰণতে I ৰে বুজোৱা হয়। কিছুমানে n মাত্ৰাৰ একক মৌলকক্ষক I_n ৰেও বুজায়।

উদাহৰণস্বৰূপে $\quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ক্ৰমে 2 আৰু 3 মাত্ৰাৰ একক মৌলকক্ষ।

টোকা ঃ

(i) যদি I_n ব্যৱহাৰ নকৰি I ৰে একক মৌলকক্ষক সূচোৱা হয়, তেনেহ'লে পৰিস্থিতি সাপেক্ষে Iৰ মাত্ৰা কি বুজিব লাগিব।

(ii) প্ৰতিটো একক মৌলকক্ষই এটা অদিশ মৌলকক্ষ। কিন্তু এটা অদিশ মৌলকক্ষ একক মৌলকক্ষ নহয়।

(iii) প্ৰতিটো অদিশ মৌলকক্ষই এটা বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ। কিন্তু এটা বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ অদিশ মৌলকক্ষ নহয়।

(viii) **ত্ৰিভুজাকৃতিৰ মৌলকক্ষ (Triangular Matrix) ঃ**

এটা বৰ্গাকাৰ মৌলকক্ষৰ বিকৰ্ণ মৌলৰ ওপৰৰ বা তলৰ সমূহ মৌল শূন্য হ'লে মৌলকক্ষটোক ত্ৰিভুজাকৃতিৰ মৌলকক্ষ বোলা হয়।

এটা উচ্চ ত্ৰিভুজাকৃতিৰ মৌলকক্ষৰ বিকৰ্ণ মৌলৰ তলৰ মৌলসমূহ শূন্য আৰু নিম্ন ত্ৰিভুজাকৃতিৰ মৌলকক্ষৰ বিকৰ্ণ মৌলৰ ওপৰৰ মৌলসমূহ শূন্য হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

এটা উচ্চ ত্ৰিভুজাকৃতিৰ মৌলকক্ষ

আৰু $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

এটা নিম্ন ত্ৰিভুজাকৃতিৰ মৌলকক্ষ

অপ্ৰতিম আৰু অনপ্ৰতিম মৌলকক্ষ (Singular and Non-singular Matrix) ঃ এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ A ক অপ্ৰতিম মৌলকক্ষ বোলা হয় যদিহে ইয়াৰ নিৰ্ণায়কৰ মান শূন্য হয়, অৰ্থাৎ $|A| = 0$

আনহাতে, $|A| \neq 0$ হ'লে A-ক অনপ্ৰতিম মৌলকক্ষ বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে, $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ এটা অপ্ৰতিম মৌলকক্ষ যিহেতু

$$|A| = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = -12 + 12 = 0$$

আকৌ $|B| = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$ এটা অনপ্ৰতিম

মৌলকক্ষ যিহেতু

$$|B| = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} = -30 - 3 = -33 \neq 0$$

3.3.6 মৌলকক্ষৰ সমতা (Equality of matrices) ঃ দুটা মৌলকক্ষ A আৰু B সমান বুলি কোৱা হয় যদি

(i) দুয়োটাৰে মাত্ৰা একে হয় আৰু

(ii) অনুৰূপ মৌলবোৰ সমান হয়। মৌলকক্ষ দুটা সমান হ'লে আমি A = B লিখো।

উদাহৰণস্বৰূপে,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \text{ আৰু}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ হ'লে}$$

ইয়াত $A \neq B$ কাৰণ দুয়োটাৰে মাত্ৰা একে হ'লেও অনুৰূপ মৌলবোৰ সমান নহয়।

আকৌ $A \neq C$ কাৰণ দুয়োৰে মাত্ৰ একে নহয়।

আনহাতে $\begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ c & d \end{pmatrix}$

হ'লে $a = -2,\ b = 6,\ c = 5,\ d = 4$

উদাহৰণ 4 ঃ যদি $\begin{bmatrix} x+3 & 2z-7 & 3y+1 \\ -8 & a-2 & 0 \\ b+4 & -17 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & -11 \\ -8 & 5 & 2c-4 \\ 2b+5 & -17 & 0 \end{bmatrix}$ হয়

তেনেহ'লে a, b, c, x, y আৰু z ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ যিহেতু মৌলকক্ষ দুটা সমান, দুয়োৰে অনুৰূপ মৌলবোৰ সমান হ'ব লাগিব। অনুৰূপ মৌলবোৰৰ মানৰ তুলনা কৰি আমি পাওঁ—

$$x + z = 0,\quad 2z - 7 = 3,\quad 3y + 1 = -11$$
$$a - 2 = 5,\quad 2c - 4 = 0\quad b + 4 = 2b + 5$$

সমাধান কৰি আমি পাওঁ

$$x = -3,\quad z = 5,\quad y = -4$$
$$a = 7,\quad c = 2,\quad b = -1$$

মৌলকক্ষৰ প্ৰাথমিক প্ৰক্ৰিয়া

এতিয়া আমি মৌলকক্ষৰ যোগ, বিয়োগ, মৌলকক্ষক স্কেলাৰেৰে পূৰণ আৰু দুটা মৌলকক্ষৰ পূৰণ— এই চাৰিবিধ প্ৰাথমিক প্ৰক্ৰিয়াৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

3.3.7 মৌলকক্ষৰ যোগ (Addition of Matrices) ঃ

ধৰা হ'ল, দুজন ব্যৱসায়ী A আৰু B য়ে ইটা, বালি আৰু শিল যোগান ধৰে। A য়ে চৌধুৰী ডাঙৰীয়াক 5 গাড়ী ইটা, 3 গাড়ী বালি, 2 গাড়ী শিল আৰু আহমেদ ডাঙৰীয়াক 3 গাড়ী ইটা, 4 গাড়ী বালি আৰু 3 গাড়ী শিল যোগান ধৰে। আনহাতে ব্যৱসায়ী B য়ে চৌধুৰী ডাঙৰীয়াক 3 গাড়ী ইটা, 4 গাড়ী বালি, 3 গাড়ী শিল আৰু আহমেদ ডাঙৰীয়াক 2 গাড়ী ইটা, 2 গাড়ী বালি, 1 গাড়ী শিল যোগান ধৰে।

ওপৰৰ তথ্যখিনি মৌলকক্ষৰ সহায়ত এনেদৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি—

চৌধুৰী ডাঙৰীয়া

$$\begin{array}{ll} & \text{ব্যৱসায়ী A} \quad \text{ব্যৱসায়ী B} \\ \text{ইটা} & \\ \text{বালি} & \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{শিল} & \end{array}$$

আহমেদ ডাঙৰীয়া

$$\begin{array}{ll} & \text{ব্যৱসায়ী A} \quad \text{ব্যৱসায়ী B} \\ \text{ইটা} & \\ \text{বালি} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{শিল} & \end{array}$$

যদি A আৰু B দুয়োজন ব্যৱসায়ীয়ে যোগান ধৰা মুঠ বস্তুৰ পৰিমাণ জানিবলৈ বিচাৰোঁ, তেনেহ'লে—

ইটা ঃ ব্যৱসায়ী A (5 + 3); ব্যৱসায়ী B(3 + 2)

বালি ঃ ব্যৱসায়ী A(3 + 4); ব্যৱসায়ী B(4 + 2)

শিল ঃ ব্যৱসায়ী A(2 + 3); ব্যৱসায়ী B(3 + 1)

ওপৰোক্ত তথ্যখিনি মৌলকক্ষৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰি পাওঁ

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{ব্যৱসায়ী A} & \text{ব্যৱসায়ী B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ইটা} \\ \text{বালি} \\ \text{শিল} \end{array} & \begin{pmatrix} 5+3 & 3+2 \\ 3+4 & 4+2 \\ 2+3 & 3+1 \end{pmatrix} \end{array}$$

এই নতুন মৌলকক্ষটো হ'ল ওপৰৰ মৌলকক্ষ দুটাৰ যোগফল। গতিকে দেখা গ'ল যে দুটা মৌলকক্ষৰ অনুৰূপ মৌলবোৰ যোগ কৰিলে মৌলকক্ষ দুটাৰ যোগফল পোৱা যায়। কিন্তু দেখা যায় যে মৌলকক্ষ দুটা একে মাত্ৰাৰ হ'ব লাগিব।

গতিকে দেখা গ'ল যে যদি $A = [a_{ij}]$ আৰু $B = [b_{ij}]$ দুটা একে মাত্ৰাৰ (ধৰা হ'ল $m \times n$) মৌলকক্ষ হয় তেনেহ'লে মৌলকক্ষ দুটাৰ যোগফলক A + B ৰে সূচোৱা হয়।

$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$মৌলকক্ষৰ মাত্ৰাও হ'ল $m \times n$

উদাহৰণ 5 ঃ দিয়া আছে যে

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ হয়,}$$

তেনেহ'লে A + B নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ যিহেতু A আৰু B দুয়োটা 3×2 মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ, গতিকে A + B নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি আৰু

$$A + B = \begin{bmatrix} -5+6 & 7+(-1) \\ 4+2 & 2+5 \\ 6+3 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

টোকা ঃ

যদি A আৰু B মৌলকক্ষৰ মাত্ৰা একে নহয়, তেনেক্ষেত্ৰত A + B নিৰ্ণয় কৰিব নোৱাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে যদি

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ আৰু } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2×2 আৰু 2×3 মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ হয়, আমি $A + B$ নিৰ্ণয় কৰিব নোৱাৰোঁ।

3.3.8 মৌলকক্ষক স্কেলাৰেৰে পূৰণ ঃ

ধৰা হ'ল, আহমেদ ডাঙৰীয়াই ব্যৱসায়ী A আৰু B ক প্ৰতিবিধৰ সামগ্ৰী আগতকৈ দুগুণ হিচাবত যোগান ধৰিববলৈ নিৰ্দেশ দিলে। তেনেহ'লে আমি পাওঁ —

$$\begin{array}{ccc} & \text{ব্যৱসায়ী A} & \text{ব্যৱসায়ী B} \\ \text{ইটা} & 2 \times 3 & 2 \times 2 \\ \text{বালি} & 2 \times 4 & 2 \times 2 \\ \text{শিল} & 2 \times 3 & 2 \times 1 \end{array}$$

ওপৰৰ তথ্যখিনি মৌলকক্ষৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰিলে পাওঁ—

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ এই মৌলকক্ষটো}$$

আগৰ মৌলকক্ষৰ প্ৰতিটো মৌলক 2 ৰে পূৰণ কৰি পোৱা গৈছে।

গতিকে যদি $A = [a_{ij}]$ এটা $m \times n$ মাত্ৰাবিশিষ্ট মৌলকক্ষ আৰু k এটা বাস্তৱ সংখ্যা হয়, তেনেহ'লে A মৌলকক্ষৰ প্ৰতিটো মৌলক k ৰে দ্বাৰা পূৰণ কৰি পোৱা মৌলকক্ষক kA-ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয় আৰু ইয়াক A মৌলকক্ষৰ k ৰ দ্বাৰা স্কেলাৰ পূৰণফল বোলা হয়।

টোকা ঃ

মন কৰিবলগীয়া যে kA ৰ মাত্ৰাও
A মৌলকক্ষৰ সৈতে একেই হ'ব।

উদাহৰণ 6 ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ হয়,

তেনেহ'লে 3A নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ দিয়া আছে যে,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ 3A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 27 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3.3.9 মৌলকক্ষৰ যোগাত্মক বিপৰীত ঃ এটা মৌলকক্ষ A ৰ যোগাত্মক বিপৰীতক – A ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়। সংজ্ঞামতে—

$$-A = (-1)A$$

অৰ্থাৎ A মৌলকক্ষৰ প্ৰতিটো মৌলৰে চিন (+, –) সলনি কৰি যিটো মৌলকক্ষ পোৱা যায় সেইটোৱেই হ'ল – A.

উদাহৰণস্বৰূপে যদি $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ হয়,

তেনেহ'লে $-A = (-1)A$

$$= (-1)\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

3.3.10 মৌলকক্ষৰ বিয়োগফল (Subtraction of Matrices) ঃ যদি $A = [a_{ij}]$ আৰু $B = [b_{ij}]$ দুটা একে মাত্ৰা $m \times n$ বিশিষ্ট মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে মৌলকক্ষ দুটাৰ বিয়োগফল A – B ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

সংজ্ঞামতে, $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$ ও এটা $m \times n$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ

অইন ধৰণে ক'বলৈ গ'লে,

$A - B = A + (-1)B$ অৰ্থাৎ A – B হ'ল A আৰু –B মৌলকক্ষৰ যোগফল।

উদাহৰণ 6 ঃযদি $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

আৰু $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

হয়, তেনেহ'লে 3A – 2B মৌলকক্ষ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ দিয়া আছে

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 3A – 2B

$$= 3\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 12 & 6 \\ 3 & 18 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 12 & -8 \\ 10 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15-(-6) & 12-12 & 6-(-8) \\ 3-10 & 18-4 & 0-6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 14 \\ -7 & 14 & -16 \end{bmatrix}$$

উদাহৰণ 7 ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ আৰু $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$

দুটা মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে মৌলকক্ষ X নিৰ্ণয় কৰা যাতে $2A + 3X - 4B = 0$ হয়

সমাধান ঃ দিয়া আছে যে—

$$2A + 3X - 4B = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2X = 4B - 2A$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{1}{3}(4B - 2A) \;\; .... \;\; (1)$$

এতিয়া, $4B - 2A$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ 20 & 4 \\ -24 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 8 & -4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 12 & 8 \\ -34 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ (1) ৰ পৰা

$$X = \frac{1}{3}(4B - 2A)$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 12 & 8 \\ -34 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/3 & -4 \\ 4 & 8/3 \\ -34/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

উদাহৰণ 8 ঃ এজন উৎপাদনকাৰীয়ে তিনিবিধ সামগ্ৰী A, B, C দুখন চহৰ ক্ৰমে গুৱাহাটী আৰু দিল্লীৰ বজাৰত বিক্ৰী কৰে। তেওঁৰ 2008 আৰু 2009 চনৰ বাবে বাৰ্ষিক বিক্ৰী এনে ধৰণৰ—

2008

	A	**B**	**C**
গুৱাহাটী	2,000	8,000	10,000
দিল্লী	20,000	4,000	6,000

2009

	A	**B**	**C**
গুৱাহাটী	1,500	6,500	8,000
দিল্লী	14,000	1,500	6,000

(i) প্ৰতিবিধ সামগ্ৰীৰ বিক্ৰীৰ পৰিমাণ 2008 আৰু 2009 চনৰ বাবে একেলগে নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) 2008 চনৰ তুলনাত 2009 চনত বিক্ৰীৰ পৰিমাণ প্ৰতিবিধ সামগ্ৰীৰ বাবে কিমান কমিছে নিৰ্ণয় কৰা।

(iii) যদি 2008 চনত লাভৰ পৰিমাণ মুঠ বিক্ৰীৰ 30% হয়, তেনেহ'লে দুয়োখন চহৰত লাভৰ পৰিমাণ কিমান হ'ব?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, P আৰু Q মৌলকক্ষই ক্ৰমে 2008 আৰু 2009 চনৰ বাবে বিক্ৰীৰ পৰিমাণ সূচাইছে।

$$\therefore\ P = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2,000 & 8,000 & 10,000 \\ 20,000 & 4,000 & 6,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{গুৱাহাটী} \\ \text{দিল্লী} \end{array}$$

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1,500 & 6,500 & 8,000 \\ 14,000 & 1,500 & 6,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{গুৱাহাটী} \\ \text{দিল্লী} \end{array}$$

(i) 2008 আৰু 2009 চনৰ মুঠ বিক্ৰীৰ পৰিমাণ P + Q

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3,500 & 14,500 & 18,000 \\ 34,000 & 5,500 & 12,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{গুৱাহাটী} \\ \text{দিল্লী} \end{array}$$

(ii) 2008 চনৰ তুলনাত 2009 চনত হ্ৰাস হোৱা বিক্ৰীৰ পৰিমাণ = P – Q

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 500 & 1,500 & 2,000 \\ 6,000 & 2,500 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{গুৱাহাটী} \\ \text{দিল্লী} \end{array}$$

(ii) 2008 চনত দুয়োখন চহৰত প্ৰতিবিধ সামগ্ৰীৰ ক্ষেত্ৰত হোৱা লাভৰ পৰিমাণ

= 30% of P

$$= 0.3 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2,000 & 8,000 & 10,000 \\ 20,000 & 4,000 & 6,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{গুৱাহাটী} \\ \text{দিল্লী} \end{array}$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\
= & \left[\begin{array}{ccc} 600 & 2{,}400 & 3{,}000 \\ 6{,}000 & 1{,}200 & 1{,}800 \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \text{গুৱাহাটী} \\ \text{দিল্লী} \end{array}
$$

$\therefore$ 2008 চনত A, B, C সামগ্ৰীৰ ক্ষেত্ৰত গুৱাহাটী আৰু দিল্লীত হোৱা লাভৰ পৰিমাণ ক্ৰমে— Rs. 600, Rs. 2,400, Rs. 3,000 আৰু Rs. 6,000, Rs. 1,200, Rs. 1,800

3.1.12 মৌলকক্ষৰ পূৰণ (Multiplication of matrices) ঃ

ৰেবা আৰু পম্পিয়ে কলম আৰু বহী কিনিবলৈ একেলগে বজাৰলৈ গ'ল। প্ৰথম দোকানত প্ৰতিটো কলমৰ দাম 16 টকা আৰু প্ৰতিখন বহীৰ দাম 55 টকা। ৰেবাই 3 টা কলম আৰু 8 খন বহী আৰু পম্পিয়ে 6 টা কলম, 12 খন বহী কিনিব খুজিলে প্ৰত্যেকে কিমানকৈ খৰচ কৰিব লাগিব?

দেখা যায় যে ৰেবাই $(6 \times 3 + 55 \times 8) = 458$ টকা আৰু পম্পিয়ে $(6 \times 6 + 55 \times 12) = 696$ টকা খৰচ কৰিব লাগিব

এই তথ্যখিনি মৌলকক্ষৰ দ্বাৰা প্ৰকাশ কৰি পাওঁ—

$$
\begin{array}{c}
\text{আৰশ্যকতা} \\
\begin{array}{cc} \text{কলম} & \text{বহী} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc} 3 & 8 \\ 6 & 12 \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \text{ৰেবা} \\ \text{পম্পি} \end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{প্ৰতিটোৰ} \\
\text{মূল্য (টকা)} \\
\left[\begin{array}{c} 6 \text{ কলম} \\ 55 \text{ বহী} \end{array}\right]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{মুঠ টকাৰ আৰশ্যকতা} \\
\\
\left[\begin{array}{c} 3\times6+8\times55 \\ 6\times6+12\times55 \end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
= \left[\begin{array}{c} 458 \\ 696 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{ৰেবা} \\ \text{পম্পি} \end{array}
$$

আনহাতে অইন এখন দোকানত যদি প্ৰতিটো কলম আৰু প্ৰতিখন বহীৰ মূল্য ক্ৰমে 5 টকা আৰু 50 টকা হয়, তেনেহ'লে—

$$
\begin{array}{c}
\text{আৰশ্যকতা} \\
\begin{array}{cc} \text{কলম} & \text{বহী} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc} 3 & 8 \\ 6 & 12 \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \text{ৰেবা} \\ \text{পম্পি} \end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{প্ৰতিটোৰ} \\
\text{মূল্য (টকা)} \\
\left[\begin{array}{c} 5 \text{ কলম} \\ 50 \text{ বহী} \end{array}\right]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{মুঠ টকাৰ আৰশ্যকতা} \\
\\
\left[\begin{array}{c} 3\times6+8\times50 \\ 6\times5+12\times50 \end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
= \left[\begin{array}{c} 415 \\ 630 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{ৰেবা} \\ \text{পম্পি} \end{array}
$$

ওপৰৰ সমূহ তথ্য মৌলকক্ষৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰি পোৱা যায়—

$$\begin{array}{c} \text{আৰশ্যকতা} \\ \begin{array}{cc} \text{কলম} & \text{বহী} \end{array} \\ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} 3 & 8 \\ 6 & 12 \end{array}\right] \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \text{ৰেবা} \\ \text{পম্পি} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{প্ৰতিটোৰ মূল্য (টকা)} \\ \begin{array}{cc} \text{প্ৰথম দোকান} & \text{দ্বিতীয় দোকান} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 6 & 5 \\ 55 & 50 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{কলম} \\ \text{বহী} \end{array} = \begin{array}{c} \text{মুঠ টকাৰ আৰশ্যকতা} \\ \left[\begin{array}{cc} 3\times6+8\times55 & 3\times5+8\times50 \\ 6\times6+12\times55 & 6\times5+12\times50 \end{array}\right] \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{প্ৰথম দোকান} & \text{দ্বিতীয় দোকান} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 458 & 415 \\ 696 & 630 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{ৰেবা} \\ \text{পম্পি} \end{array}$$

উপৰোক্ত প্ৰক্ৰিয়াই মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ উদাহৰণ সূচায়।

গতিকে দেখা গ'ল যে দুটা মৌলকক্ষ A আৰু B পূৰণ কৰিবলৈ A মৌলকক্ষৰ স্তম্ভৰ সংখ্যা B ৰ শাৰীৰ সংখ্যা সমান হ'ব লাগিব। তদুপৰি AB মৌলকক্ষৰ মৌলসমূহ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ A মৌলকক্ষৰ প্ৰতিটো শাৰী আৰু B মৌলকক্ষৰ প্ৰতিটো স্তম্ভৰ অনুৰূপ মৌলসমূহ পূৰণ কৰি তাৰ যোগফল উলিয়াব লাগিব।

গতিকে দুটা মৌলকক্ষ A আৰু B ৰ পূৰণৰ বাবে উপযোগী হ'ব যদিহে প্ৰথম মৌলকক্ষ A ৰ স্তম্ভৰ সংখ্যা = দ্বিতীয় মৌলকক্ষৰ B শাৰীৰ সংখ্যা।

ধৰা হ'ল, $A = [a_{ij}]$ আৰু $B = [b_{jk}]$ ক্ৰমে $m \times n$ আৰু $n \times p$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ। তেনেহ'লে সিহঁতৰ পূৰণফল $AB = c$ এটা $m \times p$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ হ'ব অৰ্থাৎ $C = [c_{ik}]$

ধৰা হ'ল, আমি AB মৌলকক্ষৰ i-তম শাৰী আৰু k-তম স্তম্ভৰ মৌলটো নিৰ্ণয় কৰিবলৈ বিচাৰিছোঁ।

তেনেহ'লে A মৌলকক্ষৰ i-তম শাৰী = $[a_{i1} \;\; a_{i2} \,......... \, a_{in}]$

আৰু B মৌলকক্ষৰ k-তম স্তম্ভ

$$= \begin{bmatrix} b_1k \\ b_2k \\ .... \\ b_nk \end{bmatrix}$$

লৈ তাৰ অনুৰূপ মৌলবোৰ পূৰণ কৰিম। সমূহ পূৰণফল যোগ কৰি আমি AB = C মৌলকক্ষৰ i-তম শাৰী আৰু k-তম স্তম্ভৰ মৌল C_{ik} নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিম।

$$C_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2} + a_{i3}b_{3k} + \,....\, + a_{in}\mathrm{b}_{nk}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

গতিকে দেখা গ'ল যে

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

$B = \left[b_{jk}\right]_{n\times p}$ দুটা মৌলকক্ষ হ'লে

$$AB = \left[c_{jk}\right]_{m\times p}$$

য'ত $\qquad C_{ik} = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} b_{jk}$

উদাহৰণস্বৰূপে $\qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ $\qquad$ আৰু $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

দুটা মৌলকক্ষ হ'লে সিহঁতৰ পূৰণফল

AB হ'ব এটা 2×3 মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ

কিন্তু BA সম্ভৱপৰ নহয়, কিয়নো B ৰ স্তম্ভৰ সংখ্যা $\neq$ A ৰ শাৰীৰ সংখ্য

এতিয়া $\quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ এটা 2×3

মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ

AB ৰ প্ৰথম শাৰীৰ মৌলসমূহ

$$= \begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 3} \\ 5 \quad 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 7 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\times1+3\times4 & 2\times6+3\times7 & 2\times5+3\times2 \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

AB-ৰ দ্বিতীয় শাৰীৰ মৌলসমূহ

$$= \begin{pmatrix} 2 \quad 3 \\ \boxed{5 \quad 6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 7 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5\times1+6\times4 & 2\times6+3\times7 & 5\times5+6\times2 \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & 33 & 16 \\ 29 & 72 & 37 \end{bmatrix}$$

টোকা ঃ

(i) দুটা মৌলকক্ষ A আৰু B ৰ পূৰণৰ ক্ষেত্ৰত AB বা BA দুয়োটা নিৰ্ণয় কৰা সম্ভৱপৰ নহ'বও পাৰে।

যদি A আৰু B ক্ৰমে $m \times n$ আৰু $k \times l$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে AB আৰু BA দুয়োটা পূৰণফল নিৰ্ণয় কৰা সম্ভৱ হ'ব যদিহে $n = k$ আৰু $m = l$ হয়।

যদি A আৰু B দুয়োটা একে মাত্ৰাৰ বৰ্গ মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে AB আৰু BA দুয়োটা পূৰণফল নিৰ্ণয় কৰাটো সম্ভৱপৰ হ'ব।

(ii) দেখা যায় যে কোনো ক্ষেত্ৰত AB আৰু BA দুয়োটা মৌলকক্ষ নিৰ্ণয় কৰা সম্ভৱপৰ হ'লে AB আৰু BA সমান নহ'বও পাৰে।

উদাহৰণ 9 ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ আৰু $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$ হ'লে AB আৰু BA নিৰ্ণয় কৰা। AB মৌলকক্ষ BA ৰ সমান হ'বনে?

সমাধান ঃ দিয়া আছে যে

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ আৰু } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

ইয়াত AB আৰু BA দুয়োটা পূৰণফল নিৰ্ণয় কৰা সম্ভৱ আৰু AB আৰু BA দুয়োটা 2×2 মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ

এতিয়া $AB = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 15+6 & 20-36 \\ -3+2 & -4-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -16 \\ -1 & -16 \end{bmatrix}$$

আৰু $BA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 15 - 4 & 18+8 \\ 5 + 6 & 6-12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 26 \\ 11 & -6 \end{bmatrix}$$

ইয়াত $AB \neq BA$

টোকা ঃ

(i) ওপৰৰ উদাহৰণৰ পৰা দেখা গ'ল যে AB আৰু BA একে মাত্ৰাৰ হ'লেও $AB \neq BA$

(ii) কিন্তু কোনো ক্ষেত্ৰত AB = BA হ'বও পাৰে। উদাহৰণস্বৰূপে

যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

তেনেহ'লে AB $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

আৰু BA $= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

ইয়াত AB = BA

(iii) কেতিয়াবা দুটা অশূন্য মৌলকক্ষৰ পূৰণফল শূন্য মৌলকক্ষ হ'ব পাৰে।

ধৰা হ'ল, A $= \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

এতিয়া AB $= \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

গতিকে দেখা গ'ল যে দুটা বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ বা $b = 0$

কিন্তু দুটা মৌলকক্ষ A আৰু B ৰ ক্ষেত্ৰত AB = 0 য়ে এইটো নুসূচায় যে A = 0 বা B = 0 হ'ব লাগিব।

3.1.13 মৌলকক্ষৰ পূৰণফলৰ ধৰ্মসমূহ (Properties of Matrix Multiplication) ঃ

1. **সংযোগ বিধি** (Associaive Law) ঃ যিকোনো তিনিটা মৌলকক্ষ A, B আৰু C ৰ ক্ষেত্ৰত (AB) C = A(BC) যদিহে সমান চিনৰ দুয়োপিনে পূৰণফল নিৰ্ণয় সম্ভৱপৰ হয়।
2. **বিতৰণ বিধি** (Distributive Law) ঃ যিকোনো তিনিটা A, B মৌলকক্ষ C আৰু ৰ ক্ষেত্ৰত

   (i) (A + B)C = AC + BC

   (ii) A(B + C) = AB + AC

   যদিহে সমান চিনৰ দুয়োপিনে পূৰণফল নিৰ্ণয় সম্ভৱপৰ হয়।

3. পূৰণ সাপেক্ষ একক মৌলকক্ষ (The existence of a multiplicative Identity)

প্ৰতিটো বৰ্গ মৌলকক্ষ A ৰ ক্ষেত্ৰত, একে মাত্ৰাৰ এটা একক মৌলকক্ষ থাকিব যাৰ বাবে

$$AI = IA = A$$

3.1.14 মৌলকক্ষৰ পৰিৱৰ্ত (Transpose of a Matrix) ঃ

ধৰা হ'ল, A এটা $m \times n$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ। A মৌলকক্ষৰ শাৰীবোৰ স্তম্ভলৈ আৰু স্তম্ভবোৰ শাৰীলৈ পৰিৱৰ্তন কৰি পোৱা মৌলকক্ষক A ৰ পৰিৱৰ্ত বোলা হয়। ইয়াক A' বা A^T ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়। মন কৰিবলগীয়া যে A' ৰ মাত্ৰা হ'ব $n \times m$

যদি $\quad A = (a_{ij})_{m\times n}$

তেনেহ'লে $A' = (b_{ij})_{n\times n}$

য'ত $b_{ij} = a_{ji}$

উদাহৰণস্বৰূপে যদি— $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

তেনেহ'লে $\quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 2}$

মৌলকক্ষৰ পৰিৱৰ্তৰ ধৰ্মসমূহ (Properties of Transpose of a Matrix) ঃ

(i) $(A')' = A$

(ii) $(A + B)' = A' + B'$

(iii) $(AB)' = B'A'$

(iv) যদি k এটা বাস্তৱ সংখ্যা হয়, $(kA)' = kA'$

সমকোণীয় মৌলকক্ষ (Orthogonal Matrix) ঃ

এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ A ক সমকোণীয় মৌলকক্ষ বোলা হয় যদিহে $AA' = A'A = I$ হয়, I হ'ল A ৰ সৈতে একে মাত্ৰাৰ একক মৌলকক্ষ।

3.1.15 প্ৰতিসম মৌলকক্ষ (Symmetric Matrix) ঃ

এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ A ক প্ৰতিসম বোলা হয় যদিহে $A = A'$ হয়।

á¿î ÆÜÁ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ মৌলকক্ষ প্ৰতিসম হ'ব যদিহে সকলো i, j ৰ বাবে

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$\text{উদাহৰণস্বৰূপে, } A = \begin{bmatrix} a & h^{a_{12}} & g^{a_{13}} \\ h & b & fa_{23} \\ {}^{a_{21}}g & f_{a_{32}} & c \end{bmatrix}$$

এটা প্ৰতিসম মৌলকক্ষ

উদাহৰণ 10 ঃ যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

আৰু $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ হয়, তেনেহ'লে

প্ৰমাণ কৰা যে $A(BC) = (AB)C$

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

এতিয়া, $BC = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 15-12 & -3+0 \\ 5+18 & -1+0 \\ -10+6 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 23 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ বাওঁপক্ষ $= A(BC)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 23 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+46-12 & -3-2+6 \\ 12+0-20 & -12+0+10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 37 & 1 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$$

আকৌ $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 \quad +2 \quad -6 & -4+12+6 \\ 12 \quad 0 \quad -10 & -16+0+10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 14 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

সোঁপক্ষ $= (AB)C = \begin{pmatrix} -1 & 14 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -5+42 & 1+0 \\ 10-18 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 1 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$\therefore A(BC) = (AB)C$ প্ৰমাণিত হ'ল

উদাহৰণ 11 ঃ যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ হয়

প্ৰমাণ কৰা যে $A^2 = 0$

সমাধান ঃ

[মন কৰিবলগীয়া যে মৌলকক্ষ A ৰ ক্ষেত্ৰত A^2 মানে ইয়াৰ মৌলসমূহৰ বৰ্গ নুবুজায়। A^2 ৰ অৰ্থ হ'ল A.A]

ইয়াত $A^2 = A.A$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2-3 & 2+4-6 & 3+6-9 \\ 1+2-3 & 2+4-6 & 3+6-9 \\ -1-2+3 & -2-4+6 & -3-6+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\therefore\ A^2 = 0$ প্ৰমাণিত হ'ল।

উদাহৰণ 12 ঃ যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ এটা মৌলকক্ষ হয়, প্ৰমাণ কৰা যে

$$A^3 - 2A^2 + 4A - 18I = 0$$

সমাধান ঃ দিয়া আছে $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore\ A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2+2 & 2+0-1 & 1+6+1 \\ -1+0+6 & -2+0-3 & -1+0+3 \\ 2+1+2 & 4+0-1 & 2-3+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 5 & -5 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

আকৌ $A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 5 & -5 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1-1+16 & 2+0-8 & 1+3+8 \\ 5+5+4 & 10+0-2 & 5-15+2 \\ 5-3+0 & 10+0+0 & 5+9+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & -6 & 12 \\ 14 & 8 & -8 \\ 2 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ বাওঁপক্ষ $= A^3 - 2A^2 + 4A - 18I$

$$= \begin{pmatrix} 16 & -6 & 12 \\ 14 & 8 & -8 \\ 2 & 10 & 14 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 5 & -5 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - 18\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16-2+4+18 & -6-2+8-0 & 12-16+4-0 \\ 14-10-4-0 & 8+10+0-18 & -8-4+12-0 \\ 2-10+8-0 & 10-6-4-0 & 14-0+4-18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

= 0 সোঁপক্ষ

প্ৰমাণিত হ'ল।

উদাহৰণ 13 ঃ দুটা পৰিয়াল X আৰু Y ত ক্ৰমে 3 জন পুৰুষ, 5 গৰাকী মহিলা, 6 টা শিশু আৰু 2 জন পুৰুষ, 2 গৰাকী মহিলা আৰু 3 টা শিশু আছে। প্ৰতিজন পুৰুষ, মহিলা আৰু শিশুৰ বাবে দৈনিক প্ৰ'টিন শ্বেতসাৰৰ পৰিমাণ এনে ধৰণৰ—

প্ৰ'টিন ঃ পুৰুষ ঃ 50gm মহিলা ঃ 40gm; শিশু ঃ 35gm

শ্বেতসাৰ ঃ পুৰুষ 60gm, মহিলা 45gm, শিশু 25gm

দুয়োটা পৰিয়ালত দৈনিক মুঠ কিমান পৰিমাণৰ প্ৰ'টিন আৰু শ্বেতসাৰৰ প্ৰয়োজন নিৰ্ণয় কৰা (মৌলকক্ষৰ সহায় ল'বা)

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, F = পৰিয়ালৰ মৌলকক্ষ

$$= \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{পুৰুষ} \\ \text{মহিলা} \\ \text{শিশু} \end{array}$$

আৰু R = প্ৰয়োজনীয়তা মৌলকক্ষ

$$= \begin{array}{ccc l} \textbf{পুৰুষ} & \textbf{মহিলা} & \textbf{শিশু} & \\ \left[\begin{matrix} 50 \\ 60 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 40 \\ 45 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 35 \\ 25 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \text{প্ৰ'টিন} \\ \text{শ্বেতসাৰ} \end{matrix} \end{array}$$

∴ মুঠ প্ৰয়োজনীয়তাৰ মৌলকক্ষ = RF

$$= \begin{bmatrix} 50 & 40 & 35 \\ 60 & 45 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 150+200+210 & 100+80+105 \\ 180+225+150 & 120+90+75 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 560 & 285 \\ 555 & 285 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{প্ৰ'টিন} \\ \text{শ্বেতসাৰ} \end{array}$$

$\therefore$ x পৰিয়ালৰ মুঠ প্ৰয়োজন

প্ৰ'টিন = 560gm, শ্বেতসাৰ = 555gm

y পৰিয়ালৰ মুঠ প্ৰয়োজন

প্ৰ'টিন = 285gm, শ্বেতসাৰ = 285gm

টোকা ঃ

ইয়াত FR আৰু RF দুয়োটা পূৰণফলেই নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি। FR এটা 3 × 3 মাত্ৰাৰ আৰু RF এটা মাত্ৰাৰ 2×2 মৌলকক্ষ।

কিন্তু আমাক x আৰু y দুটা পৰিয়ালৰ প্ৰ'টিন আৰু শ্বেতসাৰৰ মুঠ পৰিমাণৰ প্ৰয়োজন। সেয়ে RF আমি নিৰ্ণয় কৰিছোঁ কিয়নো RF মৌলকক্ষত মুঠ মৌলৰ পৰিমাণ 2 × 2 = 4

সাৰাংশ (Summary)

* কিছুমান সংখ্যাক শাৰী আৰু স্তম্ভৰ শৃংখলত আয়তকাৰভাৱে সজালে তাকেই মৌলকক্ষ বোলে।
* m শাৰী বিশিষ্ট আৰু n স্তম্ভ বিশিষ্ট মৌলকক্ষক $m \times n$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ বোলে।
* $[a_{ij}]_{m\times 1}$ এটা স্তম্ভ মৌলকক্ষ।
* $[a_{ij}]_{1\times n}$ এটা শাৰী মৌলকক্ষ।
* $m \times n$ মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ এটাক বৰ্গ মৌলকক্ষ বোলা হয় যদিহে $m = n$ হয়
* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ এটা বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ হ'ব যদিহে $i \neq j$ হ'লে $a_{ij} = 0$ হয়
* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ এটা অদিশ মৌলকক্ষ হ'ব যদিহে $i \neq j$ হ'লে $a_{ij} = 0$ হয় আৰু $i = j$ হ'লে $a_{ij} = k$ হয় (ইয়াত k এটা ধ্ৰুৱক ৰাশি)
* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ এটা একক মৌলকক্ষ হ'ব যদিহে $i \neq j$ হ'লে $a_{ij} = 0$ আৰু $i = j$ হ'লে $a_{ij} = 1$ হয়।
* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ এটা শূন্য মৌলকক্ষ হ'ব যদিহে সকলো i, j ৰ বাবে $a_{ij} = 0$ হয়।
* দুটা মৌলকক্ষ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ আৰু $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ সমান হ'ব যদিহে i, j সকলো ৰ বাবে $a_{ij} = b_{ij}$ হয়।
* $kA = k[a_{ij}]_{m\times n} = [k(a_{ij})]_{m\times n}$
* $A + B = B + A$
* $A - B = A + (-1)B$
* যদি $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ আৰু $B = [a_{ij}]_{n\times p}$ দুটা মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে

  $AB = C = [c_{iR}]_{m\times n}$

ইয়াত $C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

* সাধাৰণতে $AB \neq BA$
* $A(BC) = (AB)C$
* $A(B + C) = AB + AC$
* $(A + B)C = AC + BC$
* যদি $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ এটা মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে A' বা A^T

  $= [b_{ij}]_{n\times m}$ য'ত $b_{ij} = a_{ji}$
* A এটা প্ৰতিসম মৌলকক্ষ হ'ব যদিহে $(A')' = A$ হয়
* $(A + B)' = A' + B'$
* $(AB)' = B'A'$
* $(kA)' = kA'$, k এটা বাস্তৱ সংখ্যা

প্ৰশ্নমালা 3.3

1. যদি এটা মৌলকক্ষত 12 টা মৌল থাকে, তেনেহ'লে ইয়াৰ সম্ভাব্য মাত্ৰা কি কি হ'ব পাৰে? আকৌ 5 টা মৌল বিশিষ্ট মৌলকক্ষৰ মাত্ৰা কি কি হ'ব লিখা।

2. তলৰ প্ৰতিটো মৌলকক্ষৰ উল্লেখিত মৌলসমূহ লিখা।

(i) $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ৰ $a_{13,}\ a_{22}$ আৰু a_{32}

(ii) $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ -4 & 9 & 10 & 7 \end{bmatrix}$

ৰ $b_{14,}\ b_{23}$ আৰু b_{34}

3. (i) 2×3 মাত্ৰাৰ এটা মৌলকক্ষ গঠন কৰা যাৰ বাবে

$$a_{ij} = \frac{2i - j}{i^2}$$

(ii) 4×2 মাত্ৰাৰ এটা মৌলকক্ষ গঠন কৰা

যাৰবাবে $a_{ij} = \frac{j^2}{2}$

যদি $\begin{bmatrix} x - y & 2x + z \\ 2x - y & 3z + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ হয়,

x, y, z আৰু w ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা

5. যদি $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 3 \\ -6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

আৰু $B = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ হয়, তেনেহ'লে

(i) 3A + 4B

আৰু (ii) 2A – 3B মৌলকক্ষ নিৰ্ণয় কৰা।

6. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

আৰু $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ হয়

তেনেহ'লে (i) $A + B$

(ii) $3C - A$

(iii) AB

(iv) $C(A + B)$ মৌলকক্ষ উলিওৱা

7. দিয়া আছে $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

হয়, তেনেহ'লে X মৌলকক্ষ নিৰ্ণয় কৰা যাৰ বাবে $3A - 2B + X = 0$ হয়

8. $x\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ হ'লে, x আৰু y ৰ মান কি হ'ব?

9. (i) x আৰু y দুটা মৌলকক্ষ উলিওৱা যাৰ বাবে

$x + y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

আৰু $x - y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ হয়

(ii) যদি $y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

আৰু $2x + y = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ হয়,

মৌলকক্ষ X কি হ'ব উলিওৱা।

10. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{bmatrix}$ আৰু

$(A + B)^2 = A^2 + B^2$ হয়, x আৰু y ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

11. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ আৰু $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ হ'লে

›¶± ßÁ±Îû $(aI + bA)^3 = a^3I + 3a^2bA$

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ আৰু $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

হ'লে দেখুওৱা যে

(i) A.(B.C) = (A.B).C

(ii) (A + B).C = A.C + B.C

13. দেখুওৱা যে $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ মৌলকক্ষই

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc) I = 0$$

সমীকৰণ সিদ্ধ কৰে।

14. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ মৌলকক্ষৰ বাবে

$A^2 - 5A + 6I$ মৌলকক্ষ উলিওৱা

15. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ হয়, দেখুওৱা যে

$A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$ হ'ব

16. যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ আৰু $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

হয়, তেনেহ'লে বাস্তৱ সংখ্যা k ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যাতে $A^2 = kA - 2I$ হয়

17. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ আৰু $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ হ'লে দেখুওৱা যে $(AB)' = B'A'$

18. তিনিটা প্ৰতিষ্ঠান X, Y, Z এ শ্ৰীহাজৰিকাক 30, 25 আৰু 15 ট্ৰাক ইটা আৰু 12, 3 আৰু 7 ট্ৰাক বালি যোগান ধৰে। প্ৰতি ট্ৰাক ইটা আৰু বালিৰ মূল্য ক্ৰমে 5400 টকা আৰু 3000 টকা হ'লে শ্ৰীহাজৰিকাই প্ৰতিটো প্ৰতিষ্ঠানক মুঠ কিমানকৈ আদায় দিয়ে।

19. এখন জিলাত এটা ম'বাইল কোম্পানীৰ 15 টা শাখা কাৰ্যালয় আৰু 45 টা গ্ৰাহক সেৱা কেন্দ্ৰ আছে। প্ৰতিটো শাখা কাৰ্যালয়ত 1 জন বিষয়া, 4 জন সহায়ক, 2 জন কম্পিউটাৰ অপাৰেটৰ আৰু 2 জন পিয়ন থাকে। আনহাতে, প্ৰতিটো গ্ৰাহক সেৱা কেন্দ্ৰত 1 জন সহায়ক, 3 জন কম্পিউটাৰ অপাৰেটৰ আৰু 1 জন পিয়ন থাকে তেওঁলোকৰ মাহিলী দৰমহা এনেধৰণৰ—

পিয়ন ঃ . 2500 টকা; কম্পিউটাৰ অপাৰটেৰ 7200 টকা

সহায়ক ঃ 9500 টকা; বিষয়া ঃ 16,500 টকা

মৌলকক্ষৰ বিভিন্ন প্ৰক্ৰিয়াৰ সহায়ত

(i) প্ৰতিটো শাখা কাৰ্যালয় আৰু গ্ৰাহক সেৱা কেন্দ্ৰৰ মুঠ মাহিলী দৰমহা আৰু

(ii) গোটেই জিলাখনৰ মুঠ মাহিলী দৰমহাৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰমালা 3.3

1. $1 \times 12,\ 12 \times 1,\ 2 \times 6,\ 6 \times 2,\ 3 \times 4,\ 4 \times 3,\ 5 \times 1,\ 1 \times 5$

2. (i) $a_{13} = 0,\ a_{22} = 3,\ a_{32} = 2$

   (ii) $b_{14} = 8,\ b_{23} = -2,\ b_{34} = 7$

3. (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

   (ii) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$

4. $x = 2,\ y = -1,\ z = 1,\ w = 4$

5. (i) $\begin{bmatrix} 9 & 20 & 1 \\ -18 & -6 & 13 \end{bmatrix}$

   (ii) $\begin{bmatrix} 23 & -32 & 12 \\ -12 & 13 & -14 \end{bmatrix}$

6. (i) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 11 & 1 & 9 \\ -5 & 9 & 4 \\ 2 & -5 & 8 \end{vmatrix}$

   (iii) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 19 & -5 & 16 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} 31 & 4 & 11 \\ 33 & 4 & 29 \\ -5 & -6 & -3 \end{vmatrix}$

7. $X = \begin{vmatrix} -16 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$

8. $x = 3,\ y = -4$

9. (i) $X = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ $Y = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

(ii) $X = \begin{vmatrix} -1 & -5/2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

10. $x = 1, y = 4$

14. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ 16. $k = 1$

18. x = Rs. 1, 98, 000
y = Rs. 1, 44, 000
z = Rs. 1, 02, 000

19. (i) শাখা কাৰ্যালয় = Rs. 73,900
গ্ৰাহক সেৱা কেন্দ্ৰ = Rs. 33,600
(ii) Rs. 26,20,500

* * *

তৃতীয় অধ্যায়

সংহতি-তত্ত্ব
(SET THEORY)

3.1.1 পাতনি (Introduction) ঃ

ঊনৈশ শতিকাৰ শেষৰ পিনে জাৰ্মান গণিতজ্ঞ জৰ্জ কেণ্টৰে গণিতত সংহতি তত্ত্ব নামেৰে এটা নতুন ধাৰণাৰ অৱতাৰণা কৰে। সংহতি তত্ত্বক আধুনিক গণিতৰ ভাষা বুলি ক'ব পাৰি। বৰ্তমান সময়ত বিজ্ঞানৰ বিভিন্ন শাখাৰ উপৰিও সমাজবিজ্ঞান, বাণিজ্য শিক্ষা আদি শাখা যিবোৰত গণিতৰ ব্যৱহাৰৰ প্ৰয়োজন সেই সকলোবোৰতে সংহতি তত্ত্বৰ প্ৰাথমিক জ্ঞান অপৰিহাৰ্য হৈ পৰিছে।

3.1.2 সংহতি আৰু ইয়াৰ মৌলৰ ধাৰণ (Concept of Sets and element) ঃ

সংহতি আৰু সংহতিৰ মৌল বা উপাদান (elements) হ'ল এটা ধাৰণা। আমাৰ সহজাত বুদ্ধিৰে এই ধাৰণাসমূহ উপলব্ধি কৰিব লাগিব।

কেণ্টৰ মতে সংহতি হ'ল যিকোনো বস্তুৰ সু-সংজ্ঞাবদ্ধ সংগ্ৰহ (well defined collection) আৰু যিবোৰৰ সংগ্ৰহ সেইবোৰ হ'ল সংহতিটোৰ মৌল বা উপাদান (elements)।

আমি ইয়াত এটা ধাৰণা কৰি ল'ব পাৰোঁ যে সংহতি শব্দটো 'গোট', 'থূপ' বা 'সমষ্টি' শব্দৰ সমাৰ্থক আৰু আনহাতে মৌল শব্দটো বস্তু বা সদস্যৰ সৈতে সমাৰ্থক।

সু-সংজ্ঞাবদ্ধ মানে হ'ল যিকোনো এটা বস্তু দিয়া থাকিলে আমি দৃঢ়তাৰে ক'ব পাৰিব লাগিব যে সেই বস্তুটো সেই শ্ৰেণী বা গোটৰ সদস্য হয় নে নহয়? উদাহৰণস্বৰূপে—

(i) 1 আৰু 20 ৰ মাজত থকা সকলো অযুগ্ম সংখ্যাই এটা সংহতি গঠন কৰিব। কিয়নো আমি স্পষ্টভাৱে ক'ব পাৰোঁ যে 17 এই গোটৰ অন্তৰ্ভুক্ত কিন্তু 8 ইয়াৰ অন্তৰ্ভুক্ত নহয়।

(ii) ভাৰতৰ সকলোবোৰ ভাল ক্ৰিকেট খেলুৱৈৰ সমষ্টি এটা সংহতি নহয়। কাৰণ 'ভাল খেলুৱৈ' শব্দটো সু-সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়।

ঠিক সেইদৰে কটন কলেজত পঢ়ি থকা সকলোবোৰ ধুনীয়া ছোৱালীৰ সমষ্টি এটা সংহতি নহয়, কিন্তু কটন কলেজত পঢ়ি থকা সকলোবোৰ ছোৱালীৰ সমষ্টিয়ে এটা সংহতি গঠন কৰিব।

* এটা সংহতিৰ নাম দিবলৈ আমি ইংৰাজী বৰফলাৰ আখৰ (capital letter) ব্যৱহাৰ কৰোঁ। উদাহৰণস্বৰূপে,

G = গুৱাহাটী বাণিজ্য মহাবিদ্যালয়ৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংহতি

* সংহতিৰ মৌলসমূহ সূচাবলৈ আমি ইংৰাজী সৰুফলাৰ (small letter) আখৰ ব্যৱহাৰ কৰোঁ।
* s সংহতিৰ a এটা মৌল হ'লে ইয়াক $a \in s$ প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয়। আনহাতে যদি b সংহতি s ৰ মৌল নহয়, তাক বুজাবলৈ $b \notin s$ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

  ইয়াত $\in$ (এপচিলেনে) এটা গ্ৰীক বৰ্ণমালাৰ আখৰ।

কিছুমান সংহতিৰ উদাহৰণ (Some examples of set) ঃ

1. ইংৰাজী স্বৰবৰ্ণৰ সংহতিটো পাঁচটা মৌল a, e, i, o, u ৰে গঠিত।
2. প্ৰথম পাঁচটা মৌলিক সংখ্যাৰে গঠিত সংহতিটোৰ মৌলকেইটা হ'ল 2, 3, 5, 7, 11।
3. অসমৰ সকলোবোৰ জিলাৰ সমষ্টিটোৰে এটা সংহতি গঠন কৰে।

3.1.3 সংহতি প্ৰদৰ্শন কৰা পদ্ধতি (Representation of a Set) ঃ

এটা সংহতি প্ৰদৰ্শনৰ বাবে দুটা পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰা হয়—

(i) **তালিকাভুক্তিকৰণৰ পদ্ধতি (Roaster or Tabular Method)** ঃ এই পদ্ধতিত এটা সংহতিৰ মৌলৰ সংখ্যা তাকৰ হ'লে সকলোবোৰ মৌল কুটিল বন্ধনীৰ মাজত { } কমা চিনেৰে বিচ্ছিন্ন কৰি লিখিব পাৰি।

কিন্তু মৌলৰ সংখ্যা সৰহ হ'লে প্ৰথম তিনিটা বা চাৰিটা মৌল লিখি তাৰ পিছত কেইটামান ফুট (·) দিয়া হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে —

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

ইংৰাজী স্বৰবৰ্ণৰ সংহতি

আকৌ ইংৰাজী ব্যঞ্জনবৰ্ণৰ সংহতি

$$N = \{b, c, d, f, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

(ii) সংহতি গঠন পদ্ধতি (Rule or Set Builder Method) ঃ

এই পদ্ধতিত এটা সংহতিৰ মৌলবোৰৰ এটা উমৈহতীয়া ধৰ্ম $P(x)$ৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয় আৰু ইয়াক $\{x \mid P(x)\}$ বা $\{x : P(x)\}$ বুলি লিখা হ'য়।

' **:** ' বা '।' চিনটোৰ অৰ্থ যাতে (Such that) উদাহৰণস্বৰূপে

$G = \{x \mid x$ গুৱাহাটী বাণিজ্য মহাবিদালয়ৰ এজন ছাত্ৰ$\}$

$N = \{x \mid x$ ইংৰাজী ব্যঞ্জন বৰ্ণৰ এটা বৰ্ণ$\}$

টোকা ঃ

(i) সংহতিত একেটা মৌলকে এবাৰতকৈ বেছি লিখা নহয়। কাৰণ সংহতিৰ প্ৰতিটো মৌল পৃথক হ'ব লাগিব। উদাহৰণ স্বৰূপে $P = \{1, 2, 2, 3, 5, 5, 5\}$

সংহতিক $P = \{1, 2, 3, 5\}$ বুলিহে লিখা হয়।

(ii) সংহতিৰ মৌলবোৰ যিকোনো ক্ৰমতে লিখিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে

$V = \{a, e, i, o, u\}$

$= \{e, i, o, u, a\}$

$= \{o, a, u, e, i\}$

(ii) এইটো মনত ৰাখিবলগীয়া কথা যে কোনো সংহতিৰ নাম দিবলৈ ইংৰাজী বৰফলাৰ যিকোনো বৰ্ণ ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি যদিও C, I, N, Q, R, W, Z এই বৰ্ণকেইটা তলত লিখা সংহতিকেইটা সূচাবলৈহে সাধাৰণতে ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

N = স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি

W = পূৰ্ণ সংখ্যাৰ সংহতি

I বা Z = অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি

Q = পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি

R = বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি

C = জটিল সংখ্যাৰ সংহতি

[এই সংখ্যাবোৰৰ বিষয়ে একাদশ শ্ৰেণীৰ পাঠ্যপুথিৰ 'বাস্তৱ সংখ্যা' পাঠত বিস্তৃতভাৱে আলোচনা কৰা হৈছে।]

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ (Worked out Example) ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}\right\}$ সংহতিক সংহতি গঠন পদ্ধতিৰ দ্বাৰা প্ৰকাশ কৰা।

সমাধান ঃ দেখা যায় যে প্ৰতিটো মৌলৰ হৰ (denominator)ৰ মান লব (numerator) তকৈ 1 বেছি আৰু লবসমূহৰ মান 1 ৰ পৰা 9 লৈকে বিস্তৃত।

গতিকে এই সংহতিক,

$$\left\{x : x = \frac{n}{n+1}, n \in 9, n \leq 9\right\}$$

হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 2 ঃ A = $\{x : x \in z, x^2 < 25\}$ সংহতিক তালিকাকৰণ পদ্ধতিত লিখা।

সমাধান ঃ আমি দেখিবলৈ পাওঁ যে 0, ±1, ±2, ±3, ±4 অখণ্ড সংখ্যাৰ বৰ্গৰ মান 25 তকৈ কম।

$\therefore$ A = {– 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4}

3.1.4 বিভিন্ন ধৰণৰ সংহতি (Different types of Sets) ঃ

একমৌল সংহতি (Singleten Set) ঃ যিবোৰ সংহতিত মাত্ৰ এটাহে মৌল থাকে তাক এক মৌল সংহতি বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে —

(i) ভাৰতৰ মহিলা প্ৰধানমন্ত্ৰীৰ সংহতি = {ইন্দিৰা গান্ধী}

(ii) পৃথিৱীৰ স্বাভাৱিক উপগ্ৰহৰ সংহতি = {চন্দ্ৰ}

(iii) যুগ্ম মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি = {2}

ওপৰৰ সকলোবোৰ এক মৌল সংহতি।

সসীম সংহতি (Finite set) ঃ যিবিলাক সংহতিৰ মৌলৰ সংখ্যা গণনা কৰি শেষ কৰিব পাৰি তাক সসীম সংহতি বোলা হয়।

ধৰা হ'ল, A এটা সসীম সংহতি আৰু ইয়াত K সংখ্যক মৌল থাকে তেনেহ'লে ইয়াক বুজাবলৈ n(A) = K ৰে সূচোৱা হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে —

এটা সপ্তাহৰ দিনবোৰৰ সংহতিক যদি D ৰে বুজোৱা হয়, তেনেহ'লে n(D) = 7

অসীম সংহতি (Infinite set) ঃ যিবোৰ সংহতি সসীম নহয় তাক অসীম সংহতি বোলা হয়।

ওপৰত উল্লেখ কৰা N, Z, W, Q, R আৰু C প্ৰত্যেকেই একোটা অসীম সংহতি।

3.1.5 সমতুল্য সংহতি (Equivalent Set) ঃ

দুটা সসীম সংহতি A আৰু B ক সমতুল্য সংহতি বোলা হয়, যদিহে n(A) = n(B) হয় অৰ্থাৎ দুয়োটা সংহতিতে সমান সংখ্যক মৌল থাকে আৰু ইয়াক A ~ B ৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে —

যদি A = $\{a, b, c\}$

B = {1, 2, 3} হয়

ইয়াত n(A) = n(B) = 3

3.1.6 সংহতিৰ সমতা (Equality of Sets) ঃ

দুটা সংহতি A আৰু B ক সমান (equal) বুলি কোৱা হয় যদিহে A ৰ প্ৰতিটো মৌল B ত থাকে আৰু B ৰ প্ৰতিটো মৌলও A ত থাকে আৰু ইয়াক বুজাবলৈ $A = B$ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে—

যদি $A = \{1, 2, 5, 6\}$

$B = \{5, 2, 6, 1\}$

তেনেহ'লে $A = B$

A আৰু B সমান নহ'লে $A \neq B$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

টোকা ঃ যদি $A = B$ হয় তেনেহ'লে $A \sim B$ হ'ব।

আনহাতে $A \sim B$ হ'লে $A = B$ নহ'বও পাৰে।

উদাহৰণ 3ঃ তলৰ কোনবোৰ সংহতি সসীম আৰু কোনেবোৰ অসীম নিৰ্ণয় কৰা

(i) $A = \{x : x \in z$ আৰু $x^2 - 7x + 12 = 0\}$

(ii) $B = \{x : x \in \text{z}$ আৰু x^2 অযুগ্ম সংখ্যা$\}$

(iii) $D = \{x : x \in z$ আৰু $x^2 = 64\}$

(iv) $E = \{x : x \in z$ আৰু $x < 3\}$

সমাধান ঃ

(i) $A = \{x : x \in z$ আৰু $x^2 - 7x + 12 = 0\}$ হ'লে

$A = \{3, 4\}$

$\therefore$ A সসীম সংহতি।

(ii) $B = \{x : x \in \text{z}$ আৰু x^2 অযুগ্ম সংখ্যা$\}$ হ'লে

$B = \{.... -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, ...\}$

$\therefore$ B এটা সসীম সংহতি।

(iii) $D = \{x : x \in z$ আৰু $x^2 = 64\}$ হ'লে

$D = \{-8, 8\}$

$\therefore$ D এটা সসীম সংহতি।

(iv) $E = \{x : x \in z$ আৰু $x < 3\}$ হ'লে

$E = \{.... -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

$\therefore$ E এটা অসীম সংহতি।

উদাহৰণ 4 ঃতলৰ কোনযোৰ সংহতি সমতুল্য আৰু কোনযোৰ সমান নিৰ্ণয় কৰা।

A = {x : x ইংৰাজী ‘flow’ শব্দৰ এটা বৰ্ণ}

B = {x : x ইংৰাজী ‘follow’ শব্দৰ এটা বৰ্ণ}

L = {x : x ইংৰাজী ‘later’ শব্দৰ এটা বৰ্ণ}

M = {x : x ইংৰাজী ‘circle’ শব্দৰ এটা বৰ্ণ}

সমাধান ঃ ইয়াত A = {f, l, o, w}

B = {f, o, l, w}

L = {l, a, t, e, r}

M = {c, i, r, l, e}

$\therefore$ A = B আৰু L ~ M

সংহতিৰ বীজগণিতীয় প্ৰক্ৰিয়া (Operation on Sets) ঃ

বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত যিদৰে যোগ (+), বিয়োগ (–), পূৰণ (×) আৰু হৰণ (÷) চাৰিটা বীজগণিতীয় প্ৰক্ৰিয়া প্ৰয়োগ কৰি দুটা বাস্তৱ সংখ্যা লগ লগাব পাৰি, ঠিক তেনেদৰে দুটা সংহতিৰ ক্ষেত্ৰত মিলন ($\cap$) ছেদন ($\cup$) আৰু অন্তৰ (–) তিনিটা প্ৰক্ৰিয়াৰ দ্বাৰা যিকোনো দুটা সংহতিৰ মৌলসমূহ লগ লগাই এটা নতুন সংহতি গঠন কৰিব পাৰি।

3.1.6.1 দুটা সংহতিৰ মিলন (Union of two sets) ঃ

ধৰা হ'ল, A আৰু B দুটা সংহতি। তেনেহ'লে সংহতি A নাইবা সংহতি B কমপক্ষেও এটা সংহতিত থকা মৌলৰে গঠিত সংহতিকেই A আৰু B ৰ মিলন বোলা হয় আৰু ইয়াক A$\cup$B প্ৰতীকেৰে সূচোৱা হয়।

$\therefore$ A $\cup$ B = {x | x $\in$ A নাইবা $x \in$B}

টোকা ঃ

(i) $x \in$A নাইবা $x \in$Aৰ অৰ্থ হ'ল x মৌলটো A ত আছে বা B ত আছে বা দুয়োটাতে আছে।

(ii) $x \in$ A$\cup$B $\Rightarrow$ $x \in$A বা $x \in$B

(iii) $x \notin$A$\cup$B $\Rightarrow$ $x \notin$A আৰু $x \notin$B

(iv) A$\cup$B = B$\cup$A

(v) A$\cup$A = A

উদাহৰণ স্বৰূপে ঃ যদি A = {a, b, c, d, e}

আৰু B = {b, e, g, f}

তেনেহ'লে A$\cup$B = {a, b, c, d, e, f, g}

3.1.6.2 সংহতিৰ ছেদন (Intersection of two sets) ঃ

ধৰা হ'ল, A আৰু B দুটা সংহতি। তেনেহ'লে সংহতি A আৰু B দুয়োটা সংহতিতে থকা উমৈহতীয়া মৌলৰে গঠিত সংহতিক A আৰু B ৰ, ছেদন বোলা হয় আৰু ইয়াক সূচাবলৈ $A \cap B$ প্ৰতীক ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

$\therefore \ A \cap B = \{x \mid x \in A$ আৰু $x \in B\}$

টোকা ঃ

(i) $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ আৰু $x \in B$

(ii) $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ বা $x \notin B$.

(iii) $A \cap B = B \cap A$

(iv) $A \cap A = A$

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

যদি $A = \{a, b, c, d, e\}$

আৰু $B = \{b, e, f, g\}$ হয়

তেনেহ'লে, $A \cap B = \{b, e\}$

3.1.6.3 সংহতিৰ অন্তৰ (Difference of two sets) ঃ

ধৰা হ'ল, A আৰু B দুটা সংহতি। যিবোৰ মৌল কেৱল A ত থাকে কিন্তু B ত নাথাকে সেই মৌলবোৰেৰে গঠিত সংহতিক A আৰু B ৰ অন্তৰ বোলা হয় আৰু ইয়াক $A - B$ প্ৰতীকেৰে সূচোৱা হয়।

ঠিক সেইদৰে যিবোৰ মৌল কেৱল B ত থাকে কিন্তু A ত নাথাকে তাক B আৰু A অন্তৰ বোলা হয় আৰু $B - A$ প্ৰতীকেৰে সূচোৱা হয়।

$\therefore \ A - B = \{x : x \in A$ কিন্তু $x \notin B\}$

আকৌ $B - A = \{x : x \in B$ কিন্তু $x \notin A\}$

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

যদি $A = \{a, \underset{=}{b}, c, d, \underset{=}{e}\}$

আৰু $B = \{\underset{=}{b}, \underset{=}{e}, f, g\}$

তেনেহ'লে, $A - B = \{a, c, d\}$

আৰু $B - A = \{f, g\}$

টোকা ঃ

দুটা সংহতি A আৰু B ৰ অন্তৰ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ প্ৰথমে A আৰু B দুয়োটাতে থকা মৌলসমূহ চিন দি লোৱা হয়। তাৰ পিছত A – B নিৰ্ণয় কৰিবলৈ A সংহতিৰ বাকী মৌলবোৰ আৰু B – A ৰ বাবে B সংহতিৰ বাকী মৌলবোৰ লিখিব লাগে।

মন্তব্য ঃ $A - B \neq B - A$

3.1.6.4 সংহতিৰ প্ৰতিসম অন্তৰ (Symmetric Difference of two sets) ঃ

দুটা সংহতিৰ প্ৰতিসম অন্তৰ $A \Delta B$ প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয় আৰু

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

যদি $A = \{a, \underline{\underline{b}}, c, d, \underline{\underline{e}}\}$

$B = \{\underline{\underline{b}}, \underline{\underline{e}}, f, g\}$

তেনেহ'লে $A \Delta B = (A - B) \cap (B - A)$

$= \{a, c, d\} \cup \{f, g\}$

$= \{a, c, d, f, g\}$

3.1.7 ৰিক্ত সংহতিৰ ধাৰণা (Concept of null set) ঃ

ওপৰৰ আলোচনাৰ পৰা দেখা যায় যে দুটা সংহতিৰ ছেদনে এটা নতুন সংহতি গঠন কৰে।

ধৰা হ'ল, $A = \{2, 6, 9\}$

$B = \{4, 5\}$

$\therefore$ সংহতিৰ ছেদনৰ সূত্ৰ মতে $A \cap B$ এটা সংহতিয়েই হ'ব। কিন্তু এই ক্ষেত্ৰত A আৰু B সংহতিৰ কোনো উমৈহতীয়া মৌল নাই। গতিকে দেখা গ'ল যে আমি এনে এটা সংহতি পাব পাৰোঁ য'ত এটাও মৌল নাথাকে। কিন্তু এই কথা সংহতিৰ প্ৰাথমিক সূত্ৰৰ বিপৰীতধৰ্মী। কাৰণ সংহতি গঠন হ'বলৈ তাত কিছুমান উপাদান থাকিব লাগিব।

গতিকে গণিতজ্ঞসকলে এই ধৰণৰ সংহতিক এটি বিশেষ ধৰণৰ সংহতি হিচাপে চিহ্নিত কৰি ৰিক্ত সংহতি বুলি নামকৰণ কৰিছে অৰ্থাৎ এটা সংহতিত যদি এটাও উপাদান নাথাকে তাক ৰিক্ত সংহতি বোলা হয় আৰু ইয়াক গ্ৰীক বৰ্ণমালাৰ ϕ (ফাই) আখৰৰ দ্বাৰা সূচিত কৰা হয়।

তালিকাকৰণ পদ্ধতিৰে ৰিক্ত সংহতিক { } দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

(i) 9 আৰু 11 ৰ মাজত থকা অযুগ্ম সংখ্যাৰ সংহতি।

(ii) 5 আৰু 6 ৰ মাজত থকা অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

(iii) 2 তকৈ ডাঙৰ মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি।

অসংলগ্ন সংহতি (Disjoint Set) ঃ যিকোনো দুটা সংহতি A আৰু B ক অসংলগ্ন সংহতি বোলা হয় যদিহে $A \cap B = \phi$ হয়। অৰ্থাৎ সিহঁতৰ কোনো উমৈহতীয়া মৌল নাথাকে।

উদাহৰণ স্বৰূপে ঃ

ধনাত্মক আৰু ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি দুটা অসংলগ্ন যিহেতু এনে কোনো অখণ্ড সংখ্যা নাই যিটো দুয়োটা সংহতিতে থাকে।

3.1.8 উপসংহতি আৰু অধিসংহতি (Subsets and Supersets) ঃ

যদি A আৰু B এনে দুটা সংহতিয়ে A ৰ প্ৰতিটো মৌল B সংহতিত থাকে তেনেহ'লে A ক B ৰ উপসংহতি বোলা হয় আৰু ইয়াক $A \subseteq B$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

আকৌ A সংহতি B ৰ উপসংহতি হ'লে A ক B ৰ অধিসংহতি বোলা হয় আৰু ইয়াক $B \supseteq A$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

যদি $A = \{1, 3, 4, 7\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ হয়

$A \subseteq B$ আৰু $B \supseteq A$

টোকা ঃ

(i) যদি A সংহতিত এনে এটা মৌল থাকে যিটো B সংহতিও নাই তেনেহ'লে A, B ৰ উপসংহতি নহয় আৰু ইয়াক $A \not\subseteq B$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

$A = \{1, 2, 5, 6\}$

আৰু $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ হ'লে

$A \not\subseteq B$ কিয়নো $6 \in A$ কিন্তু $6 \notin B$

(ii) দুটা সংহতি A আৰু B ক সমান বোলা হয় যদিহে $A \subseteq B$ আৰু $B \subseteq A$

আনহাতে $A = B$ হ'লে

$A \subseteq B$ আৰু $B \subseteq A$ হয়

3.1.9 প্ৰকৃত উপসংহতি (Proper Subset) ঃ

ধৰা হ'ল, A আৰু B দুটা সংহতি। যদি A সংহতিৰ প্ৰতিটো মৌল B সংহতিও থাকে আৰু B সংহতিত কমপক্ষেও এনে এটা মৌল আছে যিটো A সংহতিত নাই তেনেহ'লে B ক A ৰ প্ৰকৃত উপসংহতি বোলা হয় আৰু ইয়াক $A \subset B$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে ঃ $N \subset I$

যʼত N = স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি

I = অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি

টোকা ঃ

(i) এটা সংহতি প্ৰকৃতি উপসংহতি নহʼলে ইয়াক অপ্ৰকৃত উপসংহতি (Improper subset) বোলা হয়।

(ii) প্ৰতিটো সংহতি নিজেই নিজৰ উপসংহতি কিন্তু অপ্ৰকৃত উপসংহতি।

(iii) ৰিক্ত সংহতি ϕ প্ৰত্যেক সংহতিৰ এটা প্ৰকৃত উপসংহতি।

(iv) প্ৰতিটো সংহতি A ৰ কমপক্ষেও দুটা উপসংহতি থাকে— এটা হʼল ϕ আৰু আনটো A। ইয়াৰ ভিতৰত ϕ প্ৰকৃত উপসংহতি আৰু A অপ্ৰকৃত উপসংহতি।

(v) ৰিক্ত সংহতি ϕ ৰ কোনো প্ৰকৃত উপসংহতি নাই।

3.1.10 উপসংহতিৰ সংখ্যা ঃ

যদি এটা সংহতিৰ মৌল সংখ্যা n হয় তেনেহʼলে সেই সংহতিৰ উপসংহতিৰ সংখ্যা 2^n হয়।

3.1.11 সংহতিৰ সংহতি (Family of Set or Class of Set) ঃ

যদি এটা সংহতিৰ প্ৰতিটো মৌল নিজেই একোটা সংহতি হয় তেনেহʼলে সেই সংহতিক সংহতিৰ সংহতি বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

এখন সমতলৰ ওপৰত থকা ৰেখাসমূহে এটা সংহতিৰ শ্ৰেণী গঠন কৰে কিয়নো প্ৰতিডাল ৰেখাই হʼল কিছুমান বিন্দুৰ সংহতি।

3.1.12 ঘাত সংহতি (Power Set) ঃ

এটা সংহতি A ৰ উপসংহতিৰ সংহতিটোক ঘাত সংহতি বোলা হয় আৰু ইয়াক সূচাবলৈ P(A) ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

যদি $A = \{1, 2, 3\}$

তেনেহʼলে $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\},$

$\{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

টোকা ঃ

যদি $n(A) = K$

তেনেহʼলে $n[P(A)] = 2^K$

3.1.13 সাৰ্বজনীন সংহতি (Universal Set) ঃ

সংহতিৰ বিষয়ে আলোচনা কৰোঁতে যদি আলোচ্য সংহতিবোৰ এটা নিৰ্দিষ্ট সংহতিৰ উপসংহতি হয়, তেনেহ'লে সেই নিৰ্দিষ্ট সংহতিটোক সাৰ্বজনীন সংহতি বোলা হয় আৰু ইয়াক ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ $\cup$ আখৰৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ

যদি $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{2, 4, 5, 6\}$

আৰু $C = \{1, 3, 6, 8, 9\}$ হয়

তেনেহ'লে $\cup = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

A, B, C সংহতিৰ সাৰ্বজনীন সংহতি

ঠিক সেইদৰে

$\cup_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$\cup_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

... ইত্যাদি সংহতিও আলোচ্য সংহতিৰ বাবে সাৰ্বজনীন সংহতি হ'ব।

টোকা ঃ গতিকে দেখা গ'ল যে সাৰ্বজনীন সংহতি একক (unique) নহয়। আলোচ্য সংহতিৰ বাবে অসংখ্য সাৰ্বজনীন সংহতি থাকিব পাৰে।

3.1.14 পূৰক সংহতি (Complement of a Set) ঃ

ধৰা হ'ল, A সংহতিৰ বাবে সাৰ্বজনীন সংহতি $\cup$। যিবোৰ মৌল $\cup$ সংহতিত আছে কিন্তু A সংহতিত নাই সেইবোৰ মৌলৰে গঠন হোৱা সংহতিক A ৰ পূৰক সংহতি বোলা হয় আৰু A' ইয়াক বা A^C ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

$\therefore\ A' = \{x \mid x \in \cup$ কিন্তু $x \notin A\}$

$= \cup - A$

উদাহৰণ স্বৰূপে ঃ

যদি $\cup = \{1, 2, 3, ..., 10\}$

আৰু $A = \{2, 4, 5, 7, 8\}$

তেনেহ'লে $A' = \{1, 3, 6, 9, 10\}$

টোকা ঃ

(i) $A \cup A' = \cup$

(ii) $A \cap A' = \phi$

(iii) $(A')' = A$

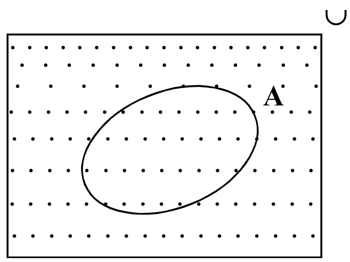
(iv) $\cup' = \phi$

(v) $\phi' = \cup$

3.1.15 ভেনৰ চিত্ৰ (Venn Diagram) ঃ

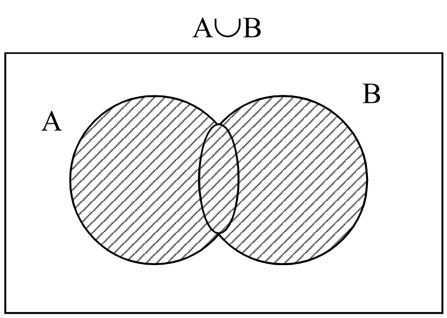
কেতিয়াবা গণিতৰ কিছুমান বিমূৰ্ত (Abstract) ধাৰণা চিত্ৰৰ দ্বাৰা অতি সহজে উপস্থাপন কৰিব পাৰি। পোনপ্ৰথমে ছুইজাৰলেণ্ডৰ গণিতজ্ঞ ইউলাৰে (Euler) সংহতি একোটাক এটা বন্ধ বক্ৰৰে আগুৰা ক্ষেত্ৰৰে আৰু ইয়াৰ মৌলবোৰক তাত থকা বিন্দুৰে নিৰ্দেশ কৰিব পাৰি বুলি ধাৰণা এটা দিছিল। পিছত ব্ৰিটিছ ন্যায়শাস্ত্ৰবিদ জন ভেনে এই ধাৰণাৰ ব্যৱহাৰ কৰিববৈ ল'লে। সেইবাবে তেওঁৰ নাম অনুসৰি এই ধৰণৰ চিত্ৰক ভেনচিত্ৰ বোলে।

ভেনৰ চিত্ৰ অনুসৰি সাৰ্বজনীন সংহতিক এটা আয়তক্ষেত্ৰ আৰু তাৰ মৌলবোৰক তাত থকা বিন্দুৰে নিৰ্দেশ কৰা হয়।

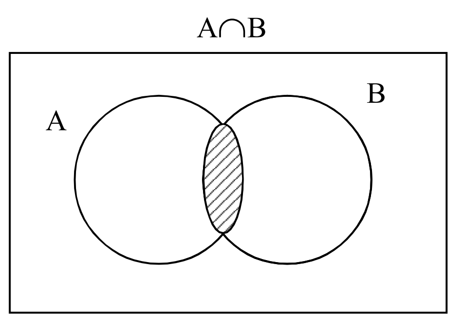


সংহতিৰ মিলন আৰু ছেদন ঃ

ভেনৰ চিত্ৰৰ দ্বাৰা সংহতিৰ মিলন আৰু ছেদন চিত্ৰ 3.1.15(a) আৰু 3.1.15(b) ৰ চিহ্নিত অংশৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয়।



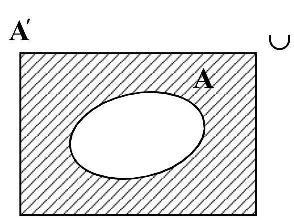
3.1.15(a)



3.1.15(b)

পূৰক সংহতি ঃ

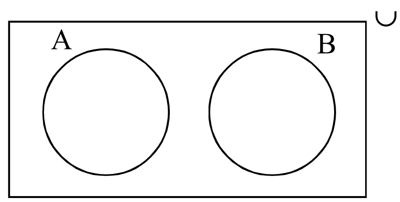
ভেনৰ চিত্ৰৰ দ্বাৰা A ৰ পূৰক সংহতি A/ বুজাববৈ A ৰ বাহিৰে সাৰ্বজনীন সংহতি ∪ ৰ বাকী অংশ [চিত্ৰ 3.1.15.(c) ৰ চিহ্নিত অংশ] সূচোৱা হয়।



3.1.15(C)

অবিভক্ত সংহতি **Disjoint set** ঃ

A আৰু B দুটা অবিভক্ত সংহতি তলত দিয়া ধৰণে ভেনৰ চিত্ৰৰ দ্বাৰা [চিত্ৰ 3.1.15 (d)] সূচোৱা হয়।

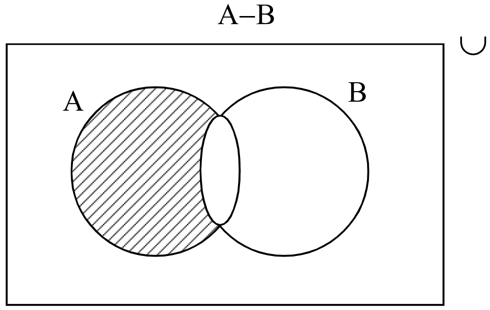


3.1.15(d)

অন্তৰ ঃ

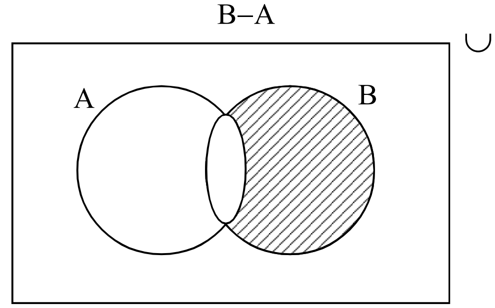
A আৰু B ৰ অন্তৰ অৰ্থাৎ A – B আৰু B আৰু A ৰ অন্তৰ অৰ্থাৎ B – A ক্ৰমে 3.1.15 (e) আৰু 3.1.15(f) ৰ চিহ্নিত অংশৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

A–B



3.1.15(e)

B–A

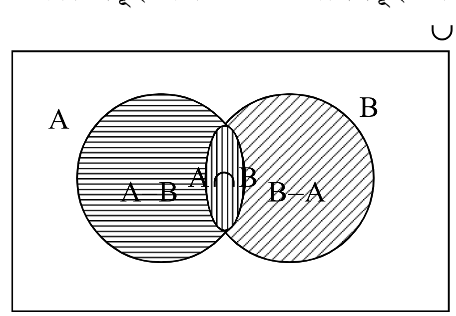


3.1.15(f)

ভেনচিত্ৰৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা সম্বন্ধ ঃ

ধৰা হ'ল, A আৰু B এনে দুটা সংহতি যাৰ কিছুমান উমৈহতীয়া মৌল আছে।

$A \cup B$ সংহতিৰ মৌলসমূহ গণনা কৰোঁতে $A \cap B$ অংশত থকা সমূহ এবাৰ A ৰ মৌলসমূহ আৰু দ্বিতীয়বাৰ B ৰ মৌলসমূহ গণনা কৰোঁতে ধৰা হয়।



3.1.15(g)

$\therefore \boxed{n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$

যদি $A \cap B = \phi$ হয়, তেনেহ'লে

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

ভেনৰ চিত্ৰৰ পৰা আমি পাওঁ যে—

(i) $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

(ii) $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$

(iii) $n(A \cap B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

3.1.16 সংহতিৰ বীজগণিতীয় প্ৰক্ৰিয়াৰ ধৰ্মসমূহ (Laws of Algebra of Sets) ঃ

সংহতিৰ বীজগণিতীয় প্ৰক্ৰিয়াসমূহে কিছুমান ধৰ্ম মানি চলে আৰু এই ধৰ্মসমূহ যিকোনো সংহতিৰ বাবেই সত্য।

(a)

(i) $A \cup A = A$ (ii) $A \cap A = A$

(b)

(i) $A \cup \phi = A$ (ii) $A \cap \phi = \phi$

(iii) $A \cup \cup = \cup$ (iv) $A \cap \cup = A$

(b) ক্ৰম বিনিয়ম ধৰ্ম (Commutative law)

(i) $A \cup B = B \cup A$

(ii) $A \cap B = B \cap A$

(d) সংযোগ বিধি (Associative)

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(e) বিতৰণ বিধি (Distributive Law) ঃ

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(f) দি মৰ্গেনৰ সূত্ৰ ঃ

(i) $(A \cap B)' = A' \cap B'$

(ii) $(A \cap B)' = A' \cap B'$

ব্যাখ্যামূলক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 5 ঃ তলৰ কোনবোৰ সমষ্টি সংহতি নিৰ্ণয় কৰা

(i) 50 তকৈ সৰু যুগ্ম সংখ্যাৰ সমষ্টি।

(ii) ভাৰতৰ বিখ্যাত লিখকৰ সমষ্টি।

(iii) তোমাৰ মহাবিদ্যালয়ৰ চকী-মেজৰ সমষ্টি।

(iv) পৃথিৱীৰ দীঘল নদীৰ সমষ্টি।

সমাধান ঃ

(i) আৰু (ii) সংহতি

কিন্তু (ii) আৰু (iv) সংহতি নহয় কাৰণ সংহতি হ'ব লাগিলে মৌলবোৰ সুসংজ্ঞাবদ্ধ হ'ব লাগিব।

উদাহৰণ 6 ঃ তলৰ সংহতিবোৰ তালিকাভুক্তিকৰণ আৰু সংহতি গঠন পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি লিখা

(i) $x^2 - 7x - 30 = 0$ সমীকৰণৰ মূলৰ সংহতি

(ii) 'Mathematics' শব্দৰ বৰ্ণবোৰৰ সংহতি

(iii) 25 তকৈ সৰু মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি।

(iv) দুটা অংকৰে গঠিত সংখ্যাৰ সংহতি যিবোৰত অংক দুটাৰ যোগফল 7 হয়।

(v) যিবোৰ অখণ্ড সংখ্যাৰ বৰ্গ 30 তকৈ সৰু সেইবোৰৰ সংহতি।

সমাধান ঃ

(i) $x^2 - 7 - 30 = 0$ ক সমাধান কৰি পাওঁ —

$(x - 10)(x + 3) = 0$

$\Rightarrow \quad x = 10$ বা -3

$\therefore \quad A = \{10, -3\} = \{x \mid x^2 - 7x - 30 = 0\}$

(ii) $A = \{m, a, t, h, e, i, c, s\}$

$= \{x \mid x$ হ'ল 'mathematics' শব্দৰ এটা বৰ্ণ$\}$

(iii) $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$

$= \{x \mid x$, 25 তকৈ সৰু এটা মৌলিক সংখ্যা$\}$

(iv) $A = \{16, 61, 25, 52, 43, 34, 70\}$

$= \{x \mid x$ এটা দুটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যা আৰু অংক দুটাৰ যোগফল $7\}$

(v) $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

উদাহৰণ 7 ঃ তলৰ কোনবোৰ ৰিক্ত সংহতি কাৰণ সহ দৰ্শোৱা।

(i) 23 আৰু 29 মাজৰ মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি।

(ii) $x^2 - 8x - 20 = 0$ সমীকৰণৰ ধনাত্মক মূলৰ সংহতি।

(iii) 2 তকৈ ডাঙৰ যুগ্ম মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি।

(iv) $x^2 - 5 = 0$ সমীকৰণৰ পৰিমেয় মূলৰ সংহতি।

(v) $\{x \mid 5 < x < 6, x \in N\}$

সমাধান ঃ

(i) 23 আৰু 29 ৰ মাজৰ মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি = ϕ। কাৰণ 23 আৰু 29 ৰ মাজত থকা 24, 25, 26, 27, 28 মৌলিক সংখ্যা নহয়।

(ii) $x^2 - 8x - 20 = 0$

$\Rightarrow (x - 10)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x = 10$ or $- 2$

$\therefore$ $x^2 - 8x - 20 = 0$ সমীকৰণ ধনাত্মক মূলৰ সংহতি। = {10} ই ৰিক্ত সংহতি নহয়।

(iii) 2 তকৈ ডাঙৰ যুগ্ম মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি = ϕ কাৰণ 2 তকৈ ডাঙৰ সকলো যুগ্ম সংখ্যাৰে 2 এটা উৎপাদক।

(iv) $x^2 - 5 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ ই পৰিমেয় সংখ্যা নহয়।

$\therefore$ $x^2 - 5 = 0$ সমীকৰণৰ পৰিমেয় মূলৰ সংহতি = ϕ.

(v) $\{x \mid 5 < x < 6, x \in N\} = \phi$ কাৰণ 5 আৰু 6 ৰ মাজত কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা নাই।

উদাহৰণ 8 ঃ তলৰ কোনবোৰ উক্তি শুদ্ধ আৰু কোনবোৰ অশুদ্ধ কাৰণ সহ দৰ্শোৱা —

(i) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 3, 5, 7\}$

(ii) $\{3, 4\} \in \{1, 2, \{3, 4\}, 5\}$

(iii) $\phi \subset A$

(iv) $\{3\} \in \{1, 3, 5\}$

(v) {o, u) ⊂ {x | x ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ এটা স্বৰবৰ্ণ।

সমাধান ঃ

(i) অশুদ্ধ কাৰণ $2 \notin \{1, 3, 5, 7\}$

(ii) শুদ্ধ কাৰণ {1, 2, {3, 4}, 5} সংহতিৰ এটা মৌল {3, 4}

(iii) শুদ্ধ কাৰণ ϕ প্ৰতি সংহতিৰ এটা প্ৰকৃত উপসংহতি

(iv) অশুদ্ধ কাৰণ {1, 3, 5} সংহতিৰ {3} এটা মৌল নহয়।

(v) শুদ্ধ, কাৰণ $\{o, u\} \subset \{a, e, i, o, u\}$

উদাহৰণ 9 ঃ তলৰ কোনবোৰ সংহতি অবিভক্ত নিৰ্ণয় কৰা।

(i) {1, 2, 3, 4} আৰু {x | x এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা আৰু $4 \le x \le 6$}

(ii) {a, e, i} আৰু {b, c, d}

(iii) $A = \{x \mid 5 < x < 9, x \in N\}$

$B = \{x \mid x^2 - 16 = 0\}$

সমাধান ঃ

(i) দিয়া আছে $A = \{1, 2, 3, 4\}$

ইয়াত $B = \{4, 5, 6\}$

$\therefore\ A \cap B = \{4\} \neq \phi$

$\therefore$ A আৰু B অবিভক্ত সংহতি নহয়

(ii) ইয়াত $\{a, e, i\} \cap \{b, c, d\} = \phi$

$\therefore$ এই দুটা অবিভক্ত সংহতি

(iii) $A = \{6, 7, 8\}$

$B = \{-4, 4\}$

$\therefore\ A \cap B = \phi$

$\therefore$ A আৰু B অবিভক্ত সংহতি

উদাহৰণ 10 ঃ যদি $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

$B = \{7, 9, 11, 13\}$

$C = \{11, 13, 15\}$

$D = \{15, 17\}$

তেনেহ'লে তলৰ সংহতিবোৰ নিৰ্ণয় কৰা

(i) $A \cap C$

(ii) $A \cap (B \cap D)$

(iii) $(A \cap B) \cup (C \cup D)$

(iv) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$

(v) $(A - B) \cup (C - D)$

সমাধান ঃ

দিয়া আছে

$A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

$B = \{7, 9, 11, 13\}$

$C = \{11, 13, 15\}$

$D = \{15, 17\}$

(i) $A \cap C = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{11, 13, 15\}$

$= \{11\}$

(ii) $A \cap (B \cup D) = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{7, 9, 11, 13, 15, 17\}$

$= \{7, 9, 11\}$

(iii) $(A \cap B) \cup (C \cup D)$

$= \{7, 9, 11\} \cup \{11, 13, 15, 17\}$

$= \{7, 9, 11, 13, 15, 17\}$

(iv) $\{A \cup D\} \cap (B \cup C)$

$= \{3, 5, 7, 9, 11, 15, 17\} \cap \{7, 9, 11, 13, 15\}$

$= \{7, 9, 11\}$

(v) $(A - B) \cup (C - D)$

$= \{3, 5\} \cup \{11, 13\}$

$= \{3, 5, 11, 13\}$

উদাহৰণ 11 ঃ যদি $\cup = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$A = \{a, c, e, g\}$

$B = \{d, e, f, g\}$

$C = \{a, f, g, h\}$

তেনেহ'লে তলৰ সংহতিবোৰ নিৰ্ণয় কৰা

(i) $(A - B)'$

(ii) $A' \cap (B' - C')$

(iii) $(A - B)' \cup (B - C)'$

দেখুওৱা যে (iv) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

সমাধান ঃ

দিয়া আছে

$\cup = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$A = \{a, c, e, g\}$

$B = \{d, e, f, g\}$

$C = \{a, f, g, h\}$

(i) $(A - B)' = \{a, c\}' = \{b, d, e, f, g, h\}$

(ii) ইয়াত $(B' - C')$

$= \{a, b, c, h\} - \{b, c, d, e\}$

$= \{a, h\}$

$\therefore A' \cap (B' - C')$

$= \{b, d, f, h\} \cap \{a, h\}$
$= \{h\}$

(iii) $(A - B)' \cup (B - C)'$

$= \{a, c\}' \cup \{d, e\}'$

$= \{b, d, e, f, g, h\} \cup \{a, b, c, f, g, h\}$

$= \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

(iv) L.H.S. $= (A \cap B)'$

$= \{e, g\}'$

$= \{a, b, c, d, f, h\}$

R.H.S $= A' \cap B'$

$= \{b, d, f, h\} \cup \{a, b, c, h\}$

$= (a, c, d, f, h\}$

$\therefore (A \cap B)' = A' \cup B'$

উদাহৰণ 12 ঃ তলৰ সংহতিবোৰ ভেনচিত্ৰৰ সহায়ত দেখুওৱা

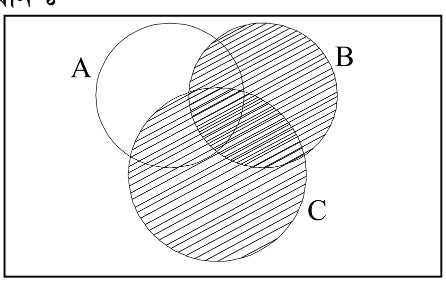
(i) $A - (B \cup C)$

(ii) $(A - B)'$

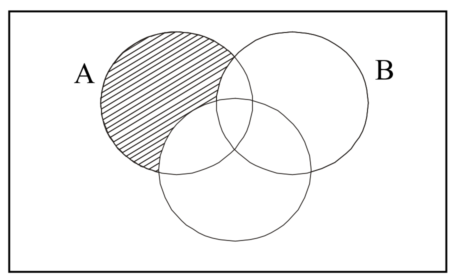
(iii) $A \subset (B \cap C)$, $B \subset C$, $C \neq B$, $C \neq A$

সমাধান ঃ

(i)



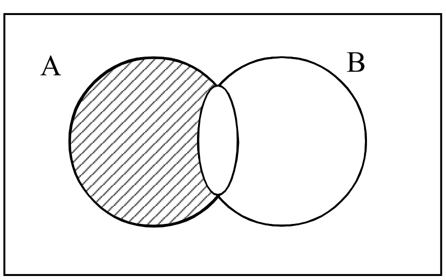
$B \cup C =$



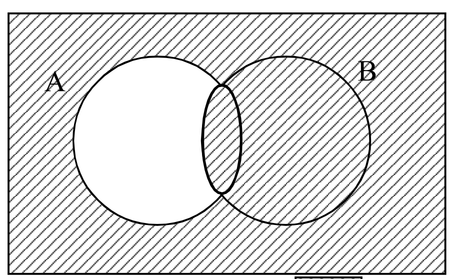
$\therefore A-(B \cup C) =$

$\cup$

(ii)

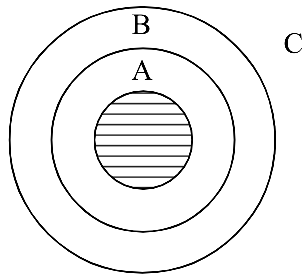


A–B



$(A-B)' =$

(iii)



$A \subset (B \cap C)$, $B \subset C$, $C \neq B$ $B \neq A$ =

উদাহৰণ 13 ঃ এটা শ্ৰেণীত থকা 35 জন ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সকলো ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে ব'ৰ্ণভিটা বা হৰলিক্স খায়। যদি 25 জনে ব'ৰ্ণভিটা আৰু 16 জনে হৰলিক্স খায়, তেনেহ'লে কিমান জন ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে দুয়োবিধ পানীয় খায়?

সমাধান ঃ

ধৰা হ'ল,

B = ব'ৰ্ণভিটা খোৱা ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংহতি

H = হৰলিক্স খোৱা ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংহতি

$\therefore \quad n(B) = 25,\ n(H) = 16$

আৰু $n(B \cup H) = 35$ [$\because$ বা শব্দটো আছে]

আমি $n(B \cap H)$ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে

আমি জানো যে

$$n(B \cap H) = n(B) + n(H) - n(B \cap H)$$

$$\Rightarrow \quad 35 = 25 + 16 - n(B \cap H)$$

$$\Rightarrow \quad n(B \cap H) = 41 - 35 = 6$$

$\therefore$ দুয়োবিধ পানীয় খোৱা ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা = 6

উদাহৰণ 14 ঃ 600 টা পৰিয়াল বাস কৰা এখন নগৰৰ 150 টা পৰিয়ালে ‘আসাম ট্ৰিবিউন’, 225 টা পৰিয়ালে ‘আমাৰ অসম’ আৰু 100 টা পৰিয়ালে দুয়োখন বাতৰি কাকত পঢ়ে। কেইটা পৰিয়ালে—

(i) কেৱল ‘আসাম ট্ৰিবিউন’ পঢ়ে?

(ii) কেৱল ‘আমাৰ অসম’ পঢ়ে?

(iii) এখনো বাতৰি কাকত নপঢ়ে, নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

ধৰা হ'ল,

A = আসাম ট্ৰিবিউন পঢ়া পৰিয়ালৰ সংহতি

B = আমাৰ অসম পঢ়া পৰিয়ালৰ সংহতি

দিয়া আছে $n(\cup) = 600$

$$n(A) = 150$$
$$n(B) = 225$$
$$n(A \cap B) = 100$$

(i) আজি জানো যে

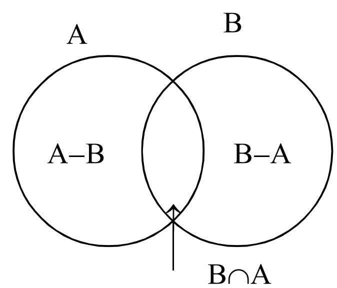
$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 150 + 225 - 100 \\ &= 375 - 100 \\ &= 275 \end{aligned}$$

$\therefore$ এখনো বাতৰি কাকত নপঢ়া পৰিয়ালৰ সংখ্যা

$$\begin{aligned} &= n(A' \cap B') \\ &= n(A \cup B)' \\ &= n(\cup) - n(A \cup B) \\ &= 600 - 275 = 325 \end{aligned}$$

(ii) কেৱল আসাম ট্ৰিবিউন পঢ়া পৰিয়ালৰ সংখ্যা

$$\begin{aligned} &= n(A - B) \\ &= n(A) - n(A \cap B) \\ &= 150 - 100 = 50 \end{aligned}$$



(iii) কেৱল আমাৰ অসম পঢ়া পৰিয়ালৰ সংখ্যা

$$\begin{aligned} &= n(B) - n(A \cap B) \\ &= 225 - 100 = 125 \end{aligned}$$

সাৰাংশ (Summary)

* সংহতি হ'ল সুসংজ্ঞাবদ্ধ বস্তুৰ গোট।
* এটাও মৌল নথকা সংহতিক ৰিক্ত সংহতি বোলে।
* এটা সংহতিৰ মৌলবোৰ গণনা কৰিব পাৰিলে তাক সসীম সংহতি আৰু গণনা কৰিব নোৱাৰিলে তাক অসীম সংহতি বোলে।
* দুটা সংহতিত সমান সংখ্যক মৌল থাকিলে সিহঁতক সমতুল্য সংহতি বোলে।
* দুটা সংহতিৰ মৌলবোৰ একে হ'লে সিহঁতক সমান সংহতি বোলে।
* যদি A সংহতিৰ প্ৰতিটো মৌল B সংহতিত থাকে তেনেহ'লে A ক B ৰ উপসংহতি বোলে।
* S সংহতিৰ উপসংহতিৰে গঠিত সংহতিক ইয়াৰ ঘাত-সংহতি বোলা হয় আৰু ইয়াক P(S) ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।
* যদি A আৰু B দুটা সংহতি হয় তেনেহ'লে A বা B ৰ মৌলবোৰ লৈ গঠিত হোৱা সংহতিক A আৰু B সংহতিৰ মিলন বোলা হয়। আৰু ইয়াক $A\cup B$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।
* যদি A আৰু B দুটা সংহতি হয়, তেনেহ'লে A আৰু B দুয়োটা সংহতিৰ উমৈহতীয়া মৌলৰে গঠিত সংহতি A আৰু B ৰ ছেদন বোলা হয় আৰু ইয়াক $A\cap B$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।
* A আৰু B দুটা সংহতি হ'লে, যিবোৰ মৌল কেৱল A সংহতিত থাকে কিন্তু B সংহতিত নাথাকে সেইবোৰ মৌলৰে গঠিত সংহতিক A আৰু B ৰ অন্তৰ বোলা হয় আৰু ইয়াক $A - B$ ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।
* A যদি সংহতিৰ বাবে $\cup$ সাৰ্বজনীন সংহতি হয়, তেনেহ'লে যিবোৰ মৌল A ত নাথাকে কিন্তু $\cup$ ত থাকে সেইবোৰ মৌলৰে গঠিত সংহতিক A ৰ পূৰক সংহতি বোলা হয় আৰু ইয়াক A' ৰে সূচোৱা হয়।
* যিকোনো দুটা সংহতি A আৰু B ৰ বাবে $(A\cup B)' = A' \cap B'$ আৰু $(A\cap B)' = A\cup B'$
* A আৰু B দুটা সংহতি হ'লে—

  (i) $n(A\cap B) = n(A) + n(B)$; যদি $A\cap B = \phi$

  (ii) $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$ যদি $A\cap B \neq \phi$

প্ৰশ্নমালা 3.1

1. তলৰ কোনবোৰ সংহতি হয় আৰু কোনবোৰ সংহতি নহয়, কাৰণ সহ উত্তৰ লিখা।
   (i) তোমাৰ মহাবিদ্যালয়ৰ অধ্যাপকসকল
   (ii) 100 তকৈ সৰু মৌলিক সংখ্যাসমূহ
   (iii) অসমৰ প্ৰথিতযশা সাহিত্যিকসকল।
   (iv) ড° ভবেন্দ্ৰনাথ শইকীয়া ৰচিত উপন্যাসসমূহ।
   (v) অসমৰ এঘাৰজন বিখ্যাত ক্ৰিকেট খেলুৱৈ।
2. তলৰ সংহতিসমূহ তালিকাভুক্তিকৰণ আৰু সংহতি গঠন প্ৰক্ৰিয়াৰ দ্বাৰা প্ৰকাশ কৰা।
   (i) ‘Engineering’ শব্দৰ আখৰবোৰৰ সংহতি।
   (ii) যিবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বৰ্গ 50 তকৈ সৰু সেইবোৰৰ সংহতি
   (iii) $4x^2 - 8x + 3 = 0$ সমীকৰণৰ মূলৰ সংহতি
   (v) 24 ৰ মৌলিক উৎপাদকৰ সংহতি
   (v) $\frac{n}{n+1}, n \in N$, ৰূপৰ ভগ্নাংশৰ সংহতি
   (vi) যিবোৰ দুটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ অংক দুটাৰ যোগফল 6 সেইবোৰৰ সংহতি
3. তলৰ কোনবোৰ সংহতি সসীম আৰু কোনবোৰ অসীম নিৰ্ণয় কৰা।
   (i) $\{x : x \in \mathrm{N}, x^2 - 5x - 14 = 0\}$
   (ii) $\{x : 3x - 1 = 0\}$
   (iii) $\{x$: x হ’ল -1 আৰু 0 ৰ মাজৰ এটা বাস্তৱ সংখ্যা$\}$
   (iv) $\{x$: x হ’ল গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়ৰ এজন স্নাতক ডিগ্ৰীধাৰী$\}$
   (v) যুগ্ম মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি
   (vi) 30 তকৈ সৰু অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি
4. তলৰ কোনবোৰ সমতুল্য আৰু কোনবোৰ সমান সংহতি নিৰ্ণয় কৰা
   A = $\{x$: x হ’ল ‘loyal’ শব্দৰ এটা বৰ্ণ$\}$
   B = $\{x$: x হ’ল ‘wolf’ শব্দৰ এটা বৰ্ণ$\}$
   C = $\{x$ | x হ’ল ‘alloy’ শব্দৰ এটা বৰ্ণ$\}$
   D = $\{x$: x হ’ল 10 তকৈ সৰু এটা মৌলিক সংখ্যা$\}$

5. তলৰ কোনবোৰ ৰিক্ত সংহতি নিৰ্ণয় কৰা।
   (i) 2 ৰে বিভাজ্য অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।
   (ii) A = $\{x : x \in N, x < 5$ আৰু $x > 9\}$
   (iii) B = $\{x : x$ হ'ল $x^2 + 4 = 0$ সমীকৰণৰ এটা বাস্তৱ মূল$\}$
   (iv) $\alpha = \{x : x + 8 = 8\}$

6. তলৰ খালী ঠাইবোৰত $\subset$ বা $\not\subset$ চিন বহোৱা।
   (i) $\{4, 5, 6\}$.... $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   (ii) $\{c, e, g\}$ ... $\{a, b, c, d, e\}$
   (iii) $\{x : x$ প্ৰাক্‌বিশ্ববিদ্যালয় দ্বিতীয় বাৰ্ষিকৰ ছাত্ৰ$\}$
   $\{x : x$ স্নাতক তৃতীয় বৰ্ষৰ ছাত্ৰ$\}$
   (iv) $\{x : x$ এটা মৌলিক সংখ্যা$\}$ ...
   $\{x : x$ এটা অখণ্ড সংখ্যা$\}$
   (v) $\{x : x$ এটা বৰ্গক্ষেত্ৰ$\}$ .... $\{x : x$ এটা ৰম্বচ$\}$
   (vi) $\{x : x$ এটা সমবাহু ত্ৰিভুজ$\}$ .... $\{x : x$ এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ$\}$
   (vii) $\{x : x$ এটা বৃত্ত$\}$ .... $\{x : x$ 2 একক ব্যাসাৰ্দ্ধ বিশিষ্ট এটা বৃত্ত$\}$

7. তলৰ কোনবোৰ উক্তি সত্য আৰু কোনবোৰ অসত্য নিৰ্ণয় কৰা।
   (i) $\{2\} \subset \{1, 2, 4\}$
   (ii) $\{a, b\} \subset \{x : x$ ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ স্বৰবৰ্ণ$\}$
   (iii) $\{1, 4\} \in \{1, 4, 6, 9\}$
   (iv) $\{x : x + 8 = 8\} = \phi$
   (v) $\{a\} \in \{a, b, \{a\}, \{e\}\}$
   (vi) $\{\phi\} \subset \{p, q, s\}$

8. তলৰ কোনবোৰ উক্তি অসত্য আৰু কিয় অসত্য উল্লেখ কৰা
   দিয়া আছে A = $\{a, b, \{c, d\}, e\}$
   (i) $\{c, d\} \subset A$
   (ii) $\{c, d\} \in A$
   (iii) $\{a, b, e\} \in A$
   (iv) $\phi \subset A$

(v) $a \subset A$

(vi) $\{\{c, d\}, e\} \subset A$

9. তলৰ কোনবোৰ একক সংহতি?

(i) $\{x : x \in R, 2x^2 - x = 0\}$

(ii) $\{x : x \in N, 7x = 9$

(iii) $\{x : x^2 = 36\}$

(iv) $\{x : 2x^2 - 9x - 5 = 0, x \in N\}$

10. যদি $A = \{x : x$ এটা অখণ্ড সংখ্যা, $| \leq x \leq 12\}$

$B = \{x : x$ হ'ল 20 তকৈ সৰু মৌলিক সংখ্যা$\}$

$C = \{x : x$ হ'ল 15 তকৈ সৰু স্বাভাৱিক সংখ্যা$\}$

তেনেহ'লে তলৰ সংহতিবোৰ নিৰ্ণয় কৰা

(i) $A \cap B \cap C$

(ii) $A - (B \cap C)$

(iii) $B \Delta C$

(iv) $C - B$

(v) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(vi) $(A - B) \cup (B - C)$

11. তলৰ কোনযোৰ সংহতি অবিভক্ত নিৰ্ণয় কৰা

(i) $A = \{x : x \in N, 5 < x < 9\}$

$B = \{x : x^2 - 4x - 12 = 0\}$

(ii) $L = \{x : x$ এটা মৌলিক সংখ্যা আৰু $x \leq 5\}$

$M = \{x : x^2 - 16x + 63 = 0\}$

(iii) $C = \{x : x$ ইংৰাজী স্বৰবৰ্ণৰ এটা বৰ্ণ$\}$

$D = \{x : x$ ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ শেষৰ 5 টা আখৰ$\}$

12. তলৰ সংহতিবোৰৰ ক্ষেত্ৰত $A \cap B$ নিৰ্ণয় কৰা।

(i) $A = \{c, d, e, f\}$ $B = \{d, f, g, h\}$

(ii) $A = \{x : x$ এটা যুগ্ম সংখ্যা, $x < 8\}$

$B = \{x : x$ এটা যুগ্ম মৌলকি সংখ্যা$\}$

(iii) $A = \{x : 5 < x < 10\}$
$B = \{x : 4 < x < 9\}$

13. যদি $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A = \{2, 3, 5, 7\}$
$B = \{1,4, 7, 8\}$
$C = \{2, 3, 6, 8, 9\}$ সংহতিৰ বাবে সাৰ্বজনীন সংহতি হয়,
তেনেহ'লে তলৰ সংহতিবোৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(i) $B \cap (A - C)$

(ii) $A' \cap (B - C)'$

(iii) $A' \cap (B \Delta C)$

(iv) $B' \cap (A' - C')$

14. যদি $A = \{a, b, c, d\}$
$B = \{b, d, f, h\}$
আৰু $C = \{c, d, e, f\}$ হয়
তেনেহ'লে প্ৰমাণ কৰা যে—

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(iii) $A - (A - B) = A \cap B$

(iv) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (B \cap C)$

15. যদি S = এটা হোষ্টেলৰ আবাসীৰ সংহতি
F = হোষ্টেলৰ মাছ খোৱা আবাসীৰ সংহতি
M = হোষ্টেলৰ মাংস খোৱা আবাসীৰ সংহতি
আৰু G = হোষ্টেলৰ কণী খোৱা আবাসীৰ সংহতি
তেনেহ'লে তলৰ সংহতিবোৰ বাক্যৰে প্ৰকাশ কৰা

(i) F' (ii) $(M \cap G)'$ (iii) $F \cup M$

(iv) $M \setminus G$ (v) $S - (M \cup G)$

16. তলৰ সম্বন্ধবোৰ ভেনচিত্ৰৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা।

(i) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

(ii) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(iii) $(A' \cup B') = A \cap B$

17. এটা শ্ৰেণীৰ 100 জন ছাত্ৰৰ প্ৰতিজনেই বাণিজ্যিক গণিত বা অৰ্থনীতি এই দুটা বিষয়ৰ কমপক্ষেও এটা বিষয় ল'ব লাগে। যদি 75 জন ছাত্ৰই বাণিজ্যিক গণিত আৰু 60 জনে অৰ্থনীতি লয়, তেনেহ'লে কিমানজন ছাত্ৰই

(i) দুয়োটা বিষয় লয়।

(ii) কেৱল বাণিজ্যিক গণিত লয়

(iii) কেৱল অৰ্থনীতি লয়— তাৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

18. এটা ক্লাৱৰ 100 জন সদস্যৰ 40 জনে ফুটবল আৰু 30 জনে ভলীবল নেখেলে। আনহাতে 45 জন সদস্যই দুয়োবিধ খেলে। কিমানজন সদস্যই—

(i) কেৱল ফুটবল খেলে?

(ii) কেৱল ভলীবল খেলে?

আৰু

(iii) দুয়োবিধ খেলেই নেখেলে— নিৰ্ণয় কৰা।

19. এটা অনুষ্ঠানলৈ 150 জন লোকক নিমন্ত্ৰণ কৰা হৈছিল। তাৰ ভিতৰত 90 জনে কেৱল আপেলৰ ৰস, 20 জনে কেৱল আমৰ ৰস আৰু 30 জনে দুয়োবিধ পানীয় গ্ৰহণ কৰে। কিমানজন অতিথিয়ে এবিধো পানীয় গ্ৰহণ নকৰিলে নিৰ্ণয় কৰা।

20. এখন সভাত উপস্থিত থকা প্ৰতিজন লোকেই ইংৰাজী বা অসমীয়াৰ ভিতৰত কমপক্ষেও এটা ভাষা ক'ব পাৰে। যদি 100 জন লোকে অসমীয়া, 50 জনে ইংৰাজী আৰু 25 জনে দুয়োটা ভাষাই ক'ব পাৰে তেনেহ'লে সভাখনত উপস্থিত থকা লোকৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

উত্তৰমালা 3.1

1. (i), (ii), (iv) – সংহতি হয়,

(iii), (v) $\rightarrow$ সংহতি নহয়

2. (i) {e, n, g, i, r}

$\{x \mid x$ হ'ল 'engineering' শব্দৰ এটা বৰ্ণ$\}$

(ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$\{x : x \in N, x^2 < 50\}$

(iii) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

{x : x হ'ল $4x^2 - 8x + 3 = 0$ সমীকৰণৰ এটা মূল}

(iv) {1, 3}

{x : x হ'ল 24 ৰ এটা মৌলিক উৎপাদক}

(v) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots\ldots\right\}$

$\left\{x : x = \frac{n}{n+1}, n \in N\right\}$

(vi) {15, 51, 24, 42, 33, 60}

$\{x : x = 10k + l,\ l + k = 6,\ l, k \in \mathrm{N}\}$

3. (i), (ii), (iv), (v) – সসীম সংহতি

(iii), (vi) – অসীম সংহতি

4. A = {l, o, y, a}

B = {w, o, l, f}

C = {a, l, o, y}

D = {2, 3, 5, 7}

$\therefore$ A = C, A ~ B, A ~ C, A ~ D

B ~ C, B ~ D, C ~ D

5. (i), (ii), (iii) $\rightarrow$ ৰিক্ত সংহতি

6. (i) $\subset$ (ii) $\not\subset$ (iii) $\not\subset$ (iv) $\subset$

(v) $\subset$ (vi) $\not\subset$ (vii) $\not\subset$

7. (i), (v) – শুদ্ধ

(ii), (iii), (iv), (vi) – অশুদ্ধ

8. (i) অশুদ্ধ কাৰণ $\{c, d\} \in A$

(iii) অশুদ্ধ কাৰণ $\{a, b, c\} \subset A$

(v) অশুদ্ধ কাৰণ $a \in A$

9. (ii), (iv)

10. (i) $\{3, 5, 7, 11\}$
    (ii) $\{4, 6, 8, 10, 12\}$
    (iii) $\{1, 2, 9, 17, 19\}$
    (iv) $\{1, 9\}$
    (v) $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11\}$
    (vi) $\{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 17, 19\}$

11. (i) $L \cap M = \phi$, L আৰু M অসংযোগী সংহতি
    (ii) $C \cap D = \phi$, C আৰু D অসংযোগী সংহতি

12. (i) $\{d, f\}$
    (ii) $\{2\}$
    (iii) $\{x \mid 5 < x < 8\}$

13. (i) $\{7\}$
    (ii) $\{6, 8, 9\}$
    (iii) $\{1, 4, 6, 9\}$
    (iv) $\{6, 9\}$

15. (i) মাছ নোখোৱা আবাসীৰ সংহতি।
    (ii) কণী আৰু মাংস দুয়োবিধেই নোখোৱা আবাসীৰ সংহতি।
    (iii) মাছ আৰু মাংস দুয়োবিধ খোৱা আবাসীৰ সংহতি।
    (iv) কেৱল মাংস খোৱা কিন্তু কণী নোখোৱা আবাসীৰ সংহতি।
    (v) মাংস আৰু কণী দুয়োবিধেই নোখোৱা আবাসীৰ সংহতি।

17. (i) 35 (ii) 40 (iii) 25

18. (i) 15 (ii) 25 (iii) 15

19. 10

20. 125

3.2 নির্ণায়ক (Determination)

3.2.1 পাতনি (Introduction) ঃ

গণিতশাস্ত্রত নির্ণায়কৰ আৰম্ভণি একঘাতৰ সহসমীকৰণৰ সমাধানৰ সৈতেই জড়িত যদিও বৰ্তমান অইন বহুতো ক্ষেত্ৰতে নির্ণায়ক ব্যৱহৃত হৈছে। দেখা যায় যে অনেক জটিল ৰাশি যিবোৰৰ সৰলীকৰণৰ বাবে দীঘলীয়া গণনাৰ প্ৰয়োজন সেইবোৰ নির্ণায়কৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰিলে সহজেই সমাধান কৰিব পাৰি।

তলৰ সমীকৰণ দুটা (অজ্ঞাত ৰাশিদ্বয় x আৰু y) বিবেচনা কৰা যাওক—

$$a_1x + b_1y = d_1 \text{ .... } (1)$$

$$a_2x + b_2y = d_2 \text{ .... } (2)$$

যদি $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ হয়, (1) আৰু (2)

সমাধান কৰি পাওঁ—

$$x = \frac{b_2d_1 - b_1d_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

আৰু $$y = \frac{\mathrm{a}_1\mathrm{d}_2 - \mathrm{a}_2\mathrm{d}_1}{\mathrm{a}_1\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2\mathrm{b}_1}$$

বীজগণিতীয় ৰাশি $(a_1b_2 - a_2b_1)$ ক তলৰ ধৰণেও প্ৰকাশ কৰিব পাৰি ঃ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ক এটা দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ নির্ণায়ক বোলা হয়। অৰ্থাৎ চাৰিটা সংখ্যাক শাৰী (Raw) আৰু স্তম্ভৰ (Column) আকাৰত দুটা উলম্ব ৰেখাৰ মাজত সজালে তাক দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ নির্ণায়ক বোলা হয়। অনুভূমিকভাৱে থকা ৰাশিবোৰে শাৰী (Row) আৰু উলম্বভাৱে থকা ৰাশিবোৰে স্তম্ভ (Column) গঠন কৰে।

প্ৰথম স্তম্ভ	**দ্বিতীয় স্তম্ভ**	
a_1	b_1	→ প্ৰথম শাৰী
a_2	b_2	→ দ্বিতীয় শাৰী

ইয়াত a_1, a_2, b_1, b_2 ক নির্ণায়কটোৰ মৌল (element) বোলা হয়। a_1 b_2, a_2, b_1 ক নির্ণায়কৰ পদ (terms) আৰু $(a_1b_2 - a_2b_1)$ ক ইয়াৰ মান বোলা হয়।

এটা নিৰ্ণায়কৰ প্ৰথম মৌল আৰু অন্তিম মৌল সংযোগ কৰি টনা ৰেখাডালৰ ওপৰত থকা মৌলসমূহক তাৰ বিকৰ্ণ মৌল (diagonal element) বোলা হয়।

যিডাল ৰেখাৰ ওপৰত এই বিকৰ্ণ মৌলসমূহ অৱস্থিত হয়, তাক নিৰ্ণায়কৰ মুখ্য কৰ্ণ (principal diagonal) বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \longrightarrow$ নিৰ্ণায়কৰ মুখ্য কৰ্ণ

a_1 আৰু a_2 হ'ল বিকৰ্ণ মৌল।

টোকা ঃ

(i) এটা নিৰ্ণায়কত সদায় সমান সংখ্যক শাৰী আৰু স্তম্ভহে থাকে।

(ii) এটা নিৰ্ণায়ক সাধাৰণতে Δ বা D ৰ দ্বাৰা সূচোৱা হয়।

3.2.2 দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ মান নিৰ্ণয় (Expansion of dertermination of second order) ঃ

দেখা যায় যে দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ৰ মান হয় $a_1b_2 - a_2b_1$

$\therefore$ দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ মান

= ইয়াৰ মুখ্য কৰ্ণত অৱস্থিত মৌল দুটাৰ পূৰণফল – বাকী থকা মৌল দুটাৰ পূৰণফল

টোকা ঃ

এটা দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কত 2^2 সংখ্যক মৌল থাকে আৰু ইয়াক বিস্তৃত কৰি আমি দুটা পদ পাওঁ।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - 5 \times (-6) = 8 + 30 = 38$

3.2.3 তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক (Third order determinant) ঃ

যদি আমি নটা সংখ্যা a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 ক তিনিটা শাৰী আৰু তিনিটা স্তম্ভত সজাওঁ তেনেহ'লে এটা তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক পোৱা যায়। উদাহৰণস্বৰূপে

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

হ'ল এটা তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক।

এটা তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক 3^2 সংখ্যক মৌলৰে গঠিত আৰু ইয়াক বিস্তৃত কৰিলে $\underline{|3}$ সংখ্যক পদ (term) পোৱা যায়।

টোকা ঃ

(i) গতিকে দেখা যায় যে n^2 সংখ্যক মৌলক n টা শাৰী আৰু n টা স্তম্ভত সজালে আমি এটা n মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক পাওঁ আৰু ইয়াক বিস্তৃত কৰি $\underline{|n}$ সংখ্যক পদ পোৱা যায়।

(ii) ইয়াত আমাৰ আলোচনা দ্বিতীয় আৰু তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কতেই সীমিত ৰাখিম।

3.2.4 অণুৰাশি আৰু সহৰাশি (Minor and Cofactors) ঃ

এটা নিৰ্ণায়কৰ কোনো এটা মৌলৰ অণুৰাশি হ'ল সেই মৌলটো থকা শাৰী আৰু স্তম্ভ বাদ দি পোৱা নিৰ্ণায়কটো।

ধৰা হ'ল, $\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

এটা তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক।

ধৰা হ'ল, a_1 ৰ অণুৰাশি উলিয়াব লাগে। এই মৌলটো প্ৰথম শাৰী আৰু প্ৰথম স্তম্ভত আছে।

$\therefore$ a_1 ৰ অণুৰাশি $= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - b_3c_2$

সেইদৰে b_2 ৰ অণুৰাশি $= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= a_1c_3 - a_3c_1$$

গতিকে এটা তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ অণুৰাশি এটা দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়ক হ'ব।

নিৰ্ণায়কৰ কোনো মৌলৰ সহৰাশি

$= (-1)^{R+C} \times$ মৌলটোৰ অণুৰাশি ইয়াত R আৰু C য়ে ক্ৰমে মৌলটো থকা শাৰী আৰু স্তম্ভৰ সংখ্যা বুজায়।

সাধাৰণতে কোনো মৌলৰ সহৰাশি বুজাবলৈ সেই মৌলৰ অনুৰূপ বৰফলাৰ আখৰেৰে বুজোৱা হয়। ওপৰৰ নিৰ্ণায়কত a_1 ৰ সহৰাশি A_1, b_2 ৰ সহৰাশি B_2 ৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয়।

$$\therefore\ a_1 \text{ৰ সহৰাশি} = A_1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= +\,(b_2c_3 - b_3c_2)$$

$$b_2 \text{ৰ সহৰাশি} = B_2 = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= +\,(a_1c_3 - a_3c_1)$$

$$c_2 \text{ৰ সহৰাশি} = C_2 = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\,(a_1b_3 - a_3b_1)$$

টোকা ঃ

এটা দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ প্ৰতিটো মৌলৰ সহৰাশি মাত্ৰ এটা মৌলহে হ'ব।

উদাহৰণস্বৰূপে $\triangleleft = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ৰ

ক্ষেত্ৰত

$$a_1 \text{ৰ সহৰাশি} = A_1 = (-1)^{1+1}\, b_2 = b_2$$

$$b_1 \text{ৰ সহৰাশি} = B_1 = (-1)^{1+2}\, a_2 = -\,a_2$$

3.2.5 তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ মান (Value of a determinant of order 3) ঃ

এটা তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ মান নিৰ্ণয়ৰ পদ্ধতি এনেধৰণৰ—

$$\triangleleft = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + b_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

ইয়াত A_1, B_1, C_1 ক্ৰমে a_1, b_1 আৰু c_1 মৌলৰ সহৰাশি।

ইয়াত আমি প্ৰথম শাৰীৰ মৌলৰ সহায়ত নিৰ্ণায়কটোৰ মান নিৰ্ণয় কৰিছোঁ।

আকৌ প্ৰথম স্তম্ভৰ মৌলৰ সহায়ত নিৰ্ণায়কটো বিস্তৃত কৰি পাওঁ।

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_1 - b_3c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_1 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

$$= \Delta$$

$\therefore$ তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ মান নিৰ্ণয় কৰিবলৈ কোনো এটা শাৰী বা স্তম্ভৰ প্ৰতিটো মৌলক অনুৰূপ সহৰাশিৰে পূৰণ কৰি সেই পূৰণফলসমূহ যোগ কৰিব লাগে।

উদাহৰণস্বৰূপে ঃ $\triangleleft = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 4\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-6)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-4 + 35) - 3(2 - 0) - 6(-7 - 0)$$

$$= 124 - 6 + 42 = 160$$

3.2.6 নিৰ্ণায়কৰ ধৰ্ম (Properties of determinant) ঃ

এতিয়া আমি নিৰ্ণায়কৰ কিছুমান ধৰ্মৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিবলৈ ওলাইছোঁ। এই ধৰ্মসমূহ ব্যৱহাৰ কৰি আমি যিকোনো শাৰী বা স্তম্ভৰ গৰিষ্ঠসংখ্যক মৌলক শূন্যলৈ পৰিৱৰ্তন কৰি ল'ব পাৰোঁ আৰু তাৰ ফলত নিৰ্ণায়কৰ মান নিৰ্ণয় সুচল হৈ পৰে।

এই ধৰ্মসমূহ যিকোনো মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰযোজ্য যদিও ইয়াত আমাৰ আলোচনা তৃতীয় মাত্ৰাৰ নিৰ্ণায়কৰ পৰ্যন্ত সীমাবদ্ধ থাকিব।

ধৰ্ম 1 ঃ কোনো নিৰ্ণায়কৰ শাৰীবোৰ স্তম্ভলৈ আৰু স্তম্ভবোৰ শাৰীলৈ পৰিৱৰ্তিত কৰিলে ইয়াৰ মানৰ কোনো পৰিৱৰ্তন নহয়।

সত্যাপণ (Verification) ঃ

ধৰা হ'ল, $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্ৰথম শাৰীৰ মৌলৰ সহায়ত বিস্তৃত কৰি পাওঁ—

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

শাৰীবোৰ স্তম্ভ আৰু স্তম্ভবোৰ শাৰীলৈ পৰিৱৰ্তিত কৰি পাওঁ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্ৰথম স্তম্ভৰ মৌলৰ সহায়ত বিস্তৃত কৰি পাওঁ—

$$\Delta_1 = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$\therefore \Delta = \Delta_1$$

টোকা ঃ

এই ধৰ্ম সাংকেতিকভাৱে $R \longleftrightarrow C$ ৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰা হয়।

ধৰ্ম 2 ঃ কোনো নিৰ্ণায়কৰ দুটা ওচৰা-উচৰি শাৰী (বা স্তম্ভ) সাল-সলনি কৰিলে নিৰ্ণায়কটোৰ সাংখ্যিক মান একেই থাকে, মাথোঁ চিনহে সলনি হয়।

সত্যাপণ (Verification) ঃ

ধৰা হ'ল, $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্ৰথম শাৰীৰ মৌলৰ সহায়ত বিস্তৃত কৰি পাওঁ—

$$\Delta_1 = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

প্ৰথম আৰু তৃতীয় শাৰীৰ সলনা-সলনি কৰি পাওঁ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

তৃতীয় শাৰীৰ মৌলৰ সহায়ত বিস্তৃত কৰি পাওঁ

$$\Delta_1 = a_1(b_2c_3 - c_3b_2) - a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_2c_1 - b_1c_2)$$

$$= -[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)]$$

$$\therefore \quad \Delta_1 = -\Delta$$

টোকা ঃ

এই ধৰ্ম সাংকেতিকভাৱে এনেধৰণে প্ৰকাশ কৰা হয়।

$R_i \longleftrightarrow R_j$ যদি i তম শাৰী আৰু j তম শাৰী সলনা-সলনি কৰা হয়।

$C_i \longleftrightarrow C_j$ যদি i তম স্তম্ভ আৰু j তম স্তম্ভ সলনা-সলনি কৰা হয়।

ধৰ্ম 3 ঃ কোনো নিৰ্ণায়কৰ দুটা শাৰী (বা স্তম্ভ) সমান হ'লে নিৰ্ণায়কটোৰ মান শূন্য হয়।

সত্যাপণ (Verification) ঃ

ধৰা হ'ল, $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

ইয়াত R_1 আৰু R_3 সলনা-সলনি কৰি ধৰ্ম 2 ৰ সহায়ত পাওঁ

$$\Delta = -\Delta$$

$$\Rightarrow \quad 2\Delta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = 0$$

ধৰ্ম 4 ঃ কোনো নিৰ্ণায়কৰ কোনো শাৰীৰ (বা স্তম্ভৰ) প্ৰত্যেক মৌলক এটা স্থিৰ ৰাশিৰে পূৰণ কৰিলে, নিৰ্ণায়কটোক সেই ৰাশিৰে পূৰণ কৰা হয়।

সত্যাপণ ঃ ধৰা হ'ল $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

য'ত A_1, B_1, C_1 যথাক্রমে a_1, b_1 আৰু c_1 ৰ সহৰাশি।

ধৰা হ'ল, k এটা বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $k \neq 0$

স্পষ্টতঃ $$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix}$$

$$= ka_1A_1 + kb_1B_1 + kc_1C_1$$
$$= k(a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1)$$
$$= k\Delta$$

মন্তব্য ঃ এই ধৰ্মৰ সহায়ত এটা নিৰ্ণায়কৰ কোনো শাৰী (বা স্তম্ভৰ) মৌলসমূহৰ যদি এটা সাধাৰণ গুণিতক k থাকে তেনেহ'লে তাক নিৰ্ণায়কৰ বাহিৰলৈ উলিয়াই আনিব পাৰি।

ধৰ্ম 5 ঃ কোনো নিৰ্ণায়কৰ কোনো শাৰীৰ (বা স্তম্ভৰ) প্ৰতিটো মৌল দুটা ৰাশিৰ যোগফল হ'লে, নিৰ্ণায়কটোক একে ঘাতৰ দুটা নিৰ্ণায়কৰ যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

সত্যাপণ (verification) ঃ

ধৰা হ'ল, $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1A_1 + \beta_1B_1 + \gamma_1C_1$$

এতিয়া $$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1+\gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 + \alpha_1) A_1 + (b_1 + \beta_1) B_1 + (c_1 + \gamma_1)C_1$$

$$= (a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) + (\alpha_1A_1 + \beta_1B_1 + \gamma_1C_1)$$
$$= \Delta_1 + \Delta_2$$

টোকা ঃ

সেইদৰে আমি দেখুৱাব পাৰোঁ যে কোনো নিৰ্ণায়কৰ কোনো শাৰীৰ (স্তম্ভৰ) প্ৰতিটো মৌল n টা ৰাশিৰ যোগফল হ'লে, নিৰ্ণায়কটোক একে ঘাতৰ n টা নিৰ্ণায়কৰ যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

ধৰ্ম 6ঃ কোনো নিৰ্ণায়কৰ কোনো শাৰীৰ (বা স্তম্ভৰ) অনুৰূপ মৌলৰ স্থিৰ গুণিতকেৰে বৰ্ধিত বা হ্ৰাস কৰিলে নিৰ্ণায়কৰ মানৰ কোনো পৰিৱৰ্তন নহয়।

সত্যাপণ (Verification) ঃ

ধৰা হ'ল, $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

এটা নিৰ্ণায়ক আৰু $k \neq 0$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা।

দ্বিতীয় শাৰীৰ মৌলকেইটাক k ৰে পূৰণ কৰি পূৰণফলক প্ৰথম শাৰীৰ অনুৰূপ মৌলৰ লগত যোগ দি, আমি নতুন নিৰ্ণায়কটো পাওঁ—

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 & c_1 + kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

এতিয়া ধৰ্ম 5 প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = k \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \Delta + k \times 0 \quad [\because R_1 = R_2]$$
$$= \Delta$$

টোকা ঃ

ওপৰৰ ধৰ্মটোত $k = -1$ ল'লে পাম

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

গতিকে কোনো নিৰ্ণায়কৰ এটা শাৰী (বা স্তম্ভ)ৰ মৌলৰ পৰা আন এটা শাৰী (বা স্তম্ভৰ) অনুৰূপ স্থানৰ মৌলবোৰ বিয়োগ কৰিলেও নিৰ্ণায়কটোৰ মান সলনি নহয়।

টোকা ঃ

এই ধৰ্ম সাংকেতিকভাৱে এনেধৰণে প্ৰকাশ কৰা হয়—

$R_i \to R_i \pm kR_j$

বা

$C_i \to C_i \pm kC_j$

অৰ্থাৎ R_i(বা C_j)ৰ মৌলসমূহক k ৰে পূৰণ কৰি সেই পূৰণফলকেইটা R_i (C_i বা) ৰ মৌলকেইটাৰ লগত + বা – কৰি R_i (বা C_i) ত বহুৱাব লাগে।

ব্যাখ্যামূলক উদাহৰণ (Worked Out Example) ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & -3 \end{vmatrix}$ নিৰ্ণায়কৰ

মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & -3 \end{vmatrix}$

$$= 3\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$= 3(-21 - 0) + 4(-18 - 0) + 5(48 - 14)$

$= -63 - 72 + 170 = 35$

উদাহৰণ 2 ঃ x ৰ কি মানৰ বাবেৰড

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

সমাধান ঃ দিয়া আছে $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow 3 - x^2 = 3 - 8$$

$$\Rightarrow x^2 = 8$$

$$\Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

উদাহৰণ 3 ঃ বিস্তৃত নকৰাকৈ প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -10 \\ -3 & 9 & 15 \\ 7 & -2 & -35 \end{vmatrix} = 0$$

সমাধান ঃ বাওঁপক্ষ = $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -10 \\ -3 & 9 & 15 \\ 7 & -2 & -35 \end{vmatrix}$

$$= -5\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -3 & 9 & -3 \\ 7 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$ [c_3 ৰ পৰা উলিয়াই নিলে]

$= -5 \times 0$ [$\because C_1 = c_3$]

$= 0 =$ সোঁপক্ষ

(ii) $$\begin{vmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 7 & -2 & 11 \\ 1 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

সমাধান ঃ বাওঁপক্ষ $= \begin{vmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 7 & -2 & 11 \\ 1 & -8 & 5 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$= 4 \times (-2) \begin{vmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

[R_2ৰ পৰা 4 আৰু R_3ৰ পৰা – 2 উলিয়াই নিয়া হ'ল]

$= -8 \times 0 \quad [\because R_2 = R_3]$

= 0 = সোঁপক্ষ

(iii) $$\begin{vmatrix} 1 & p & q+r \\ 1 & q & r+p \\ 1 & r & p+q \end{vmatrix} = 0$$

বাওঁপক্ষ = $$\begin{vmatrix} 1 & p & q+r \\ 1 & q & r+p \\ 1 & r & p+q \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & p & p+q+r \\ 1 & q & p+q+r \\ 1 & r & p+q+r \end{vmatrix} = c_3 \to c_3 + c_2$$

$$= (p+q+r) \begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ 1 & q & 1 \\ 1 & r & 1 \end{vmatrix}$$ [c_3 ৰ পৰা $(p+q+r)$ উলিয়াই নিয়া হ'ল]

$= (p+q+r) \times 0 \quad [\because C_1 = c_2]$

= 0 = সোঁপক্ষ

4. দেখুওৱা যে $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy$

সমাধান ঃ বাওঁপক্ষ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & x & -y \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} R_1 \to R_1 - R_3 \\ R_2 \to R_2 - R_3 \end{matrix}$$

$$= -y \begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= -y(0-x)$

$= xy =$ সোঁপক্ষ

5. **প্ৰমাণ কৰা যে**

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

বাওঁপক্ষ = $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$

$$= abc \begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

[R_1, R_2, R_3 ৰ পৰা *a, b, c* উলিয়াই নিয়া হ'ল]

$$= (abc)\ (abc)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

[C_1, C_2, C_3 ৰ পৰা *a, b, c* ৰ পৰা উলিয়াই নিয়া হ'ল]

$$= a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 \to C_1 + C_3 \\ C_2 \to C_2 - C_3 \end{matrix}$$

$= a^2b^2c^2(4 - 0)$

$= 4a^2b^2c^2$ সোঁপক্ষ

6. দেখুওৱা যে

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$= (a + b + c)^3$

সমাধান ঃ

বাওঁপক্ষ $= \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \to \\ R_1 + R_2 + R_3 \end{matrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{matrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -b-c-a & 0 \\ 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$= (a + b + c)[(-1)^2(a + b + c)^2 - 0]$

$= (a + b + c)^3 =$ সোঁপক্ষ

7. সমাধান কৰা

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

সমাধান ঃ দিয়া আছে $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ x+2 & x & 1 \\ x+2 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \quad C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$$

$$\Rightarrow (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow (x - 2)(x- 1)^2 = 0$

$\Rightarrow (x + 2) = 0$ বা, $(x - 1)^2 = 0$
$\Rightarrow x = -2$ বা, $x = 1, 1$
$\therefore x = -2, 1, 1$ উত্তৰ

3.2.7 ক্ৰেমাৰৰ পদ্ধতিৰ দ্বাৰা সমীকৰণৰ সমাধান (Solution of Equations using Creamer's Rule) ঃ

গেব্ৰিয়েল ক্ৰেমাৰে ৰৈখিক সহসমীকৰণৰ সমাধানৰ বাবে নিৰ্ণায়কৰ ব্যৱহাৰৰ দ্বাৰা এটি সৰল প্ৰণালী আগবঢ়াইছে।

ধৰা হ'ল, ৰৈখিক সমীকৰণকেইটা হ'ল—

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

ধৰা হ'ল,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

ইয়াত Δ_x, Δ_y, Δ_z নিৰ্ণায়ক কেইটা নিৰ্ণায়ক Δ ৰ প্ৰথম, দ্বিতীয় আৰু তৃতীয় স্তম্ভত ক্ৰমে (d_1, d_2, d_3) বহুৱাই পোৱা হৈছে।

ইয়াত

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & d_1 \\ d_2 & b_2 & d_2 \\ d_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x + b_1x + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x + b_1 + c_1 \\ a_2x + b_2 + c_2 \\ a_3x + b_3 + c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1y + b_1 + c_1 \\ b_2y + b_2 + c_2 \\ b_3y + b_3 + c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1z + b_1 + c_1 \\ c_2z + b_2 + c_2 \\ c_3z + b_3 + c_3 \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} b_1 + b_1 + c_1 \\ b_2 + b_2 + c_2 \\ b_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} c_1 + b_1 + c_1 \\ c_2 + b_2 + c_2 \\ c_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix}$$

$$= x.\Delta + y.0 + z.0$$

$$\Rightarrow \Delta_x = x.\Delta$$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

ঠিক সেইদৰে $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$

$\therefore$ ক্ৰেমাৰৰ পদ্ধতি অনুসৰি

$$\frac{x}{\Delta_x} = \frac{y}{\Delta_y} = \frac{z}{\Delta_z} = \frac{1}{\Delta}; \Delta \neq 0$$

টোকা ঃ

(1) যদি $\Delta \neq 0$ সমীকৰণ প্ৰণালী সুসংগত (consistent) আৰু সমাধান অদ্বিতীয় (unique)

(2) যদি $\Delta = 0$ কিন্তু Δ_x, Δ_y, Δ_z ৰ কমপক্ষেও (atleast) এটা শূন্য (0) নহয়, সমীকৰণ প্ৰণালী অসুসংগত আৰু ইয়াৰ কোনো সমাধান নাই।

মন্তব্য ঃ ইয়াত আমি কেৱল সেইবোৰ সমীকৰণ প্ৰণালীহে আলোচনা কৰিম যাৰ বাবে $\Delta \neq 0$

ব্যাখ্যামূলক উদাহৰণ (Illustrative Example) ঃ

উদাহৰণ 8 ঃ ক্ৰেমাৰৰ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা

$$2x + 3y = 13$$
$$x + 7y = 23$$

সমাধান ঃ ইয়াত $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 3 = 11 \neq 0$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 23 & 7 \end{vmatrix} = 91 - 69 = 22$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} z & 13 \\ 1 & 23 \end{vmatrix} = 46 - 13 = 33$$

$$\therefore \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{22}{11} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{33}{11} = 3$$

উদাহৰণ 9 ঃ ক্ৰেমাৰৰ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা

$$x + 2y + 3z - 6 = 0$$
$$2x + 4y - 7 = -z$$
$$3x + 2y + 9z - 14 = 0$$

সমাধান ঃ [**টোকা ঃ** মন কৰিবলগীয়া যে আমি নিৰ্ণায়কবোৰ গঠন কৰাৰ আগতে ধ্ৰুৱক পদকেইটা সোঁপক্ষলৈ আৰু x, y, z বিশিষ্ট পদকেইটা বাওঁপক্ষলৈ স্থানান্তৰিত কৰি ল'ব লাগিব।

ইয়াত $x + 2y + 3z = 6$

$$2x + 4y + z = 7$$
$$3x + 2y + 9z = 14$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 1(36 - 2) - 2(18 - 3) + 3(4 - 12)$$
$$= 34 - 30 - 24 = -20 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \\ 14 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$= 6(36 - 2) - 2(63 - 14) + 3(14 - 56)$

$= 204 - 98 - 126 = - 20$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 14 & 9 \end{vmatrix}$$

$= 1(63 - 14) - 6(18 - 3) + 3(28 - 21)$

$= 49 - 90 + 21 = - 20$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 14 \end{vmatrix}$$

$= 1(56 - 14) - 2(28 - 21) + 6(4 - 12)$

$= 42 - 14 - 48 = - 20$

$$\therefore\ x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1$$

উত্তৰ ঃ $x = 1, y = 1, z = 1$

উদাহৰণ 10 ঃ সমাধান কৰা

$$3x + y + z - 10 = 0$$

$$x + y - z = 0$$

$$5x - 9y = 1$$

সমাধান ঃ ইয়াত $3x + y + z = 10$

$x + y - z = 0$

$5x - 9y + 0.z = 1$

$$\therefore\ \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -9 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 3(0 - 9) - 1(0 + 5) + 1(- 9 - 5)$

$= - 27 - 5 - 14 = - 46$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -9 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 10(0 - 9) - 1(0 + 1) + 1(0 - 1)$$
$$= -90 - 1 - 1 = -92$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3(0 + 1) - 10(0 + 5) + 1(0 - 1)$$
$$= -3 - 50 + 1 = -46$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1 + 0) - 1(1 - 0) + 10(-9 - 5)$$
$$= -3 - 1 - 140$$
$$= -138$$

$$\therefore\ x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-92}{-46} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-46}{-46} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-138}{-46} = 3$$

$x = 2,\ y = 1,\ z = 3$

সাৰাংশ (Summary)

* $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

* $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

* এটা নিৰ্ণায়কৰ a_{ij} মৌলৰ অনুৰাশি হ'ল সেই মৌলটো অৱস্থিত শাৰী আৰু স্তম্ভ বাদ দি পোৱা নিৰ্ণায়ক $\mathbf{M}_{ij}$।
* $n(n \geq 2)$ মাত্ৰাবিশিষ্ট নিৰ্ণায়কৰ অনুৰাশি $(n - 1)$ মাত্ৰাবিশিষ্ট এটা নিৰ্ণায়ক।
* এটা নিৰ্ণায়কৰ a_{ij} মৌলৰ সহৰাশি হ'ল $\mathbf{A}_{ij}$ আৰু $\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \mathbf{M}_{ij}$
* এটা শাৰী বা স্তম্ভৰ মৌলবোৰক অইন এটা শাৰী বা স্তম্ভৰ অনুৰূপ সহৰাশিৰে পূৰণ কৰি সেই পূৰণফলবোৰ যোগফল শূন্য হয়।
* কোনো শাৰী বা স্তম্ভৰ মৌলসমূহ অইন এটা শাৰী বা স্তম্ভৰ অনুৰূপ সহৰাশিৰে পূৰণ কৰি পূৰণফলবোৰ যোগ কৰিলে নিৰ্ণায়কটোৰ মান পোৱা যায়।
* এটা নিৰ্ণায়কৰ শাৰীবোৰ স্তম্ভলৈ আৰু স্তম্ভবোৰ শাৰীলৈ পৰিৱৰ্তিত কৰিলে নিৰ্ণায়কটোৰ মান একেই থাকে।
* এটা নিৰ্ণায়কৰ যিকোনো দুটা শাৰী বা স্তম্ভৰ স্থান পৰস্পৰ সাল-সলনি কৰিলে নিৰ্ণায়কটোৰ মান একেই থাকে কিন্তু চিহ্ন সলনি হয়।
* যিকোনো দুটা শাৰী বা স্তম্ভ একে হ'লে নিৰ্ণায়কৰ মান শূন্য হ'ব।
* যিকোনো এটা শাৰী বা স্তম্ভৰ মৌলসমূহক এটা বাস্তৱ সংখ্যা $k(k \neq 0)$ ৰে পূৰণ কৰিলে নিৰ্ণায়কটোক সেই ৰাশিটোৰে পূৰণ কৰা বুজায়।
* কোনো নিৰ্ণায়কৰ কোনো শাৰীৰ বা স্তম্ভৰ প্ৰতিটো মৌল দুটা ৰাশিৰ যোগফল হ'লে নিৰ্ণায়কটোক একে মাত্ৰাৰ দুটা নিৰ্ণায়কৰ যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।
* কোনো নিৰ্ণায়কৰ কোনো শাৰীৰ বা স্তম্ভৰ প্ৰতিটো মৌল আন কোনো শাৰীৰ (বা স্তম্ভৰ) অনুৰূপ মৌলৰ স্থিৰ গুণিতকেৰে বৰ্ধিত বা হ্ৰাস কৰিলে, নিৰ্ণায়কৰ মানৰ কোনো পৰিৱৰ্তন নহয়।

* যদি $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ হয়

আৰু $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ হয়

তেনেহ'লে ক্ৰেমাৰৰ পদ্ধতি অনুসাৰে

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; y = \frac{\Delta y}{\Delta}, z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

প্ৰশ্নমালা 3.2

1. (i) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ নিৰ্ণায়কৰ – 2 আৰু

4 ৰ অনুৰাশিৰ মান লিখা

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & -3 \end{vmatrix}$ নিৰ্ণায়কৰ 3 আৰু

– 5 ৰ সহৰাশি লিখা

2. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ নিৰ্ণায়কৰ দ্বিতীয় শাৰীৰ

মৌলসমূহৰ সহৰাশি নিৰ্ণয় কৰা

3. তলৰ নিৰ্ণায়ককেইটাৰ প্ৰথম স্তম্ভৰ মৌলসমূহৰ অনুৰাশি আৰু সহৰাশি লিখা

(i) $\begin{vmatrix} 5 & 17 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

4. মান নিৰ্ণয় কৰা

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

5. বিস্তৃত নকৰাকৈ প্ৰমাণ কৰা যে তলত দিয়া প্ৰতিটো নিৰ্ণায়কৰ মান শূন্য হয়।

(i) $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -10 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 9 & 6 & -12 \\ 31 & 16 & 19 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 13 & 16 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} 1 & 1^2 & 2^2 \\ 2 & 2^2 & 4^2 \\ 3 & 3^2 & 6^2 \end{vmatrix}$

(v) $\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & a & bc \\ \frac{1}{b} & b & ca \\ \frac{1}{c} & c & ab \end{vmatrix}$

(vi) $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix}$

(vii) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$

6. তলৰ নিৰ্ণায়কবোৰত x ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(i) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 28$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

(iii) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$

7. বিস্তৃত নকৰাকৈ প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2-yz \\ 1 & y & y^2-zx \\ 1 & z & z^2-xy \end{vmatrix} = 0$

(iii) $\begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ca & bc \\ ca & bc & ab \end{vmatrix}$

8. প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

(ii) $\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z$

(iii) $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

(iv) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(v) $\begin{vmatrix} x+y & z & z-x \\ y+z & x & x-y \\ z+x & y & y-z \end{vmatrix} = x^3+y^3+z^3-3xyz$

(vi) $\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & 0 & bc^2 \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix} = 2a^3b^3c^3$

(vii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(viii) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)$

9. সমাধান কৰা

(i) $\begin{vmatrix} 3-x & -6 & 3 \\ -6 & 3-x & 3 \\ 3 & 3 & -6-x \end{vmatrix} = 0$

(ii) $$\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ c & x+b & a \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$$

10. ক্রেমাৰৰ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা

(i) $3x + 4y = 2$

$9x + 16y = -1$

(ii) $2x + 3y = 5$

$3x - 2y = 1$

(iii) $x + 2z = 7$

$3x + 4y = 11$

$3y - 5z = -9$

(iv) $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 8$

$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 5$

(v) $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 22$

$5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5$

$9x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 16$

(vi) $x - y = 1$

$x + z = -6$

$x + y + 2z = 3$

উত্তৰমালা 3.2

1. (i) অণুৰাশি = 5; – 5

   (ii) সহৰাশি = 30 ; 22

2. 2য় শাৰীৰ মৌলৰ সহৰাশি—

   2, 5, – 2

3. (i) অণুৰাশি = – 1, 17; সহৰাশি = – 1, – 17

   (ii) অণুৰাশি = $ab^2 - ac^2$; $a^2b - bc^2$; $a^2c - b^2c$

   সহৰাশি = $ab^2 - ac^2$; $bc^2 - a^2b$; $a^2c - b^2c$

4. 13

6. (iii) $x = 3$ (ii) $x = 1, 1$ (i) $x = 2, -\frac{17}{7}$

9. (i) $x = 0, 9$ বা -9

   (ii) $x = 0,$ বা $-(a + b + c)$

10. (i) $x=\frac{1}{3}, \ y=\frac{1}{4}$

    (ii) $x = 1, y = 1$

    (iii) $x = 1, y = 2, z = 3$

    (iv) $x=\frac{1}{3}, \ y=-\frac{1}{2}$

    (v) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

    (vi) $x = -2, y = -3, z = -4$

চতুৰ্থ অধ্যায়

কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ পৰিমাপ (গড়)
(MEASURES OF CENTRAL TENDENCY OR AVERAGES)

ভূমিকা ঃ

তথ্যৰ পৰিমাণ বেছি হ'লে স্বাভাৱিকতেই মানুহে বুজিবলৈ টান পায় আৰু মনতো ৰাখিব নোৱাৰে। আনহাতে প্ৰাথমিকভাৱে গৃহীত তথ্যবোৰ বিশৃংখল অৱস্থাত থকাৰ ফলত সহজতে বোধগম্য নহয়। তথ্যখিনিক সংক্ষিপ্ত আকাৰত উপস্থাপন কৰাটো সংখ্যাবিজ্ঞানৰ এটা মূল উদ্দেশ্য। তথ্যৰ সংক্ষিপ্তকৰণৰ প্ৰক্ৰিয়াবোৰ যেনে— বৰ্গীকৰণ, সাৰণীয়ন, লেখ বা চিত্ৰৰ কথা আমি আগতে পাই আহিছোঁ।

ওপৰৰ পদ্ধতিবোৰৰ বাহিৰেও তথ্য সংক্ষিপ্তকৰণৰ আন এক গাণিতিক প্ৰক্ৰিয়া আছে যাৰ দ্বাৰাই তথ্যখিনিৰ এটা প্ৰতিনিধিত্বমূলক মান উলিয়াব পাৰি। ফলত তথ্যখিনিৰ ধাৰা বা গতিবিধি সম্বন্ধে থূলমূলকৈ হ'লেও আভাস এটা পাব পাৰি আৰু সংশ্লিষ্ট সমস্যাটোৰ বাবে ভৱিষ্যৎ আঁচনি লোৱাত সুবিধা হয়। এই গাণিতিক প্ৰক্ৰিয়াবোৰক কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ পৰিমাপ বা গড় বোলা হয়।

কোনো এটা শ্ৰেণীৰ মানবোৰৰ পৰা গড় উলিয়ালে দেখা যায় যে গড়ৰ মানটো শ্ৰেণীৰ মানবোৰৰ সোঁমাজত বা কেন্দ্ৰস্থলত অৱস্থান কৰে আৰু ইয়াৰ দুয়োফালে মানবোৰ সিঁচৰতি অৱস্থাত থাকে। সেয়েহে গড়ৰ পৰিমাপবোৰক কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ পৰিমাপ বুলি কোৱা হয়।

গড়ৰ সংজ্ঞা ঃ

গড় হ'ল কোনো সংখ্যামূলক তথ্যৰ লঘুমান আৰু গুৰুমানৰ সোঁমাজত থকা এনে এটা মান যিটোৱে তথ্যখিনিৰ মানবোৰক কম-বেছি পৰিমাণে হ'লেও প্ৰতিনিধিত্ব কৰে। পলত তথ্যখিনিৰ কিছু বৈশিষ্ট্যৰ কথা জানিব পাৰি।

গড়ৰ উদ্দেশ্য ঃ

কোনো শ্ৰেণীৰ গড় নিৰ্ণয় কৰাৰ কেইটামান উদ্দেশ্য তলত উল্লেখ কৰা হ'ল—

1. শ্ৰেণীৰ মানবোৰক প্ৰতিনিধিত্ব কৰিব পৰা এটা মান নিৰ্ণয় কৰা। ফলত শ্ৰেণীটোৰ বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য সম্বন্ধে বুজ ল'ব পাৰি।
2. গড়ৰ সহায়ত সদৃশ শ্ৰেণীবোৰৰ তুলনা সম্ভৱ আৰু সেইবোৰৰ তুলনামূলক বিচাৰ-বিশ্লেষণ কৰিব পাৰি।

3. সংশ্লিষ্ট বিভাজনটোৰ বাবে ভৱিষ্যৎ পৰিকল্পনা গ্ৰহণ কৰা সম্ভৱ।
4. গড়ে বিভাজনটো সম্বন্ধে থূলমূলকৈ আভাস এটা দিয়ে সঁচা, তথাপিও বিভাজনটোৰ প্ৰকৃতি আৰু গতিবিধি সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ কৰিব পৰা যায়।

আদৰ্শ গড়ৰ বৈশিষ্ট্যবোৰ ঃ

আদৰ্শ গড়ৰ কেইটামান বৈশিষ্ট্য তলত উল্লেখ কৰা হ'ল—

1. ই বুজিবলৈ আৰু গণনা কৰিবলৈ সহজ হ'ব লাগে।
2. ইয়াৰ গণনা কাৰ্যত শ্ৰেণীটোৰ আটাই কেইটামান অন্তৰ্ভুক্ত হ'ব লাগে।
3. ইয়াৰ সংজ্ঞা সঠিক আৰু সুদৃঢ় হ'ব লাগে।
4. ইয়াৰ দ্বাৰাই বীজগণিতীয় সম্প্ৰসাৰণ সম্ভৱ হ'ব লাগে।
5. শ্ৰেণীটোত কিছু লঘুমান বা গুৰুমান থাকিলেও আদৰ্শ গড়টো বেছি প্ৰভাৱান্বিত হ'ব নালাগে।
6. প্ৰতিদৰ্শজ তাৰতম্যৰ দ্বাৰাই ই কম প্ৰভাৱান্বিত হ'ব লাগে।
7. সংশ্লিষ্ট শ্ৰেণীটোক প্ৰতিনিধিত্ব কৰিব পৰাটো আদৰ্শগড়ৰ এটা মূল বৈশিষ্ট্য।

সাংখ্যিকীয় পদ্ধতিবোৰৰ লগত জড়িত কেইটামান লাগতিয়াল শব্দৰ ধাৰণা ঃ

শব্দকেইটা হ'ল— চলক, শ্ৰেণী, অবৰ্গীকৃত আৰু বৰ্গীকৃত তথ্য, সাংকেতিক চিন।

চলক ঃ চলক হ'ল এটা জুখিব পৰা ৰাশি। ই এটা নিৰ্দিষ্ট সীমাৰ ভিতৰত সংখ্যামূলক মান গ্ৰহণ কৰে। চলক দুবিধ। যেনে— বিচ্ছিন্ন চলক আৰু অবিচ্ছিন্ন চলক। বিচ্ছিন্ন চলকবোৰে সাধাৰণতে এটা নিৰ্দিষ্ট সীমাৰ ভিতৰত অখণ্ড সংখ্যাবোৰ গ্ৰহণ কৰে। যেনে— এখন কলেজত ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা, মাৰুতি উদ্যোগে উৎপাদন কৰা মটৰগাড়ী, গুৱাহাটী চহৰত থকা কাপোৰৰ দোকানবোৰ ইত্যাদি হ'ল বিচ্ছিন্ন চলকৰ উদাহৰণ। আনহাতে অবিচ্ছিন্ন চলকবোৰে এটা নিৰ্দিষ্টি সীমাৰ ভিতৰত যিকোনো সংখ্যামূলক মান (খণ্ড অথবা অখণ্ড সংখ্যা) গ্ৰহণ কৰে। যেনে— মানুহৰ উচ্চতা, ওজন, বস্তুৰ পৰিমাণ, তাপমাত্ৰা, বস্তুৰ মূল্য ইত্যাদি।

চলকবোৰক সাধাৰণতে X, Y, Z, P, T, D, S ইত্যাদি আখৰেৰে চিহ্নিত কৰা হয়। যদি চলকক X বুলি ধৰোঁ তেন্তে চলকৰ মানবোৰক $x_1, x_2, x_3, ...$ ইত্যাদি আখৰেৰে চিহ্নিত কৰা হ'ব। আনহাতে চলক Y- বুলি ধৰিলে ইয়াৰ মানবোৰক $y_1, y_2, y_3....$ ইত্যাদি আখৰেৰে চিহ্নিত কৰা হ'ব। ইত্যাদি।

ছিগ্‌মা প্ৰতীক চিন ($\sum$) ঃ

$\sum$ চিনটো ৰাশিৰ মানবোৰৰ যোগফলক প্ৰকাশ কৰিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

যেনে— $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i, i = 1, 2, 3.... n$

অথবা

$$= \sum x$$

$\sum$ প্ৰতীক চিনৰ কেইটামান বীজগণিতীয় সম্বন্ধ

1. $Cx_1 + Cx_2 + \ldots + Cx_n = C\sum_{i=1}^{n} x_i$, য'ত C এটা ধ্ৰুৱক সংখ্যা

2. $\frac{x_1}{C} + \frac{x_2}{C} + \ldots + \frac{x_n}{C} = \frac{1}{C}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$

$$= \frac{1}{C}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

অর্থাৎ $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{C} = \frac{1}{C}\sum_{i=1}^{n} x_i$

3. $(x_1 \pm C) + (x_2 \pm C) + \ldots + (x_n \pm C) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \pm C(1 + 1 + 1 + \ldots n$ সংখ্যক পদ লৈ)

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \pm n.C$$

4. (a) $\sum_{1}^{10} 5 = 5 + 5 + \ldots 10$ টা পদ লৈ

$= 5 \times 10 = 50$

4. (b) $\sum_{1}^{n} a = na$

5. $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = \sum_{i=1}^{10} x_i$

6. $f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n = \sum_{i=1}^{n} f_ix_i$, f বোৰ পৰিসংখ্যা বা বাৰংবাৰতা

বৰ্গীকৃত আৰু অবৰ্গীকৃত তথ্য ঃ

কোনো অনুসন্ধানত প্ৰাথমিকভাৱে সংগৃহীত তথ্যবোৰ সুশৃংখলভাৱে গৃহীত অৰ্থাৎ সমজাতীয় তথ্যবোৰ একে লগত নাথাকে— সেয়েহে এইবোৰ তথ্যক অবৰ্গীকৃত তথ্য বোলা হয়। আনহাতে সংগৃহীত তথ্যখিনি কোনো বৈশিষ্ট্যৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি সজোৱা হ'লে বৰ্গীকৃত তথ্যৰ ৰূপ লয়।

ওপৰৰ কথাখিনি আগৰ শ্ৰেণীত পাই আহিছোঁ।

নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণী ঃ নিৰ্দিষ্ট মানৰ সংখ্যাৰ সংহতিক শ্ৰেণী বোলা হয়। যেনে— 5, 12, 18, 20 ইত্যাদি।

নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণীটোৰ পৰা দুই ধৰণৰ বাৰংবাৰতা বিভাজন প্ৰস্তুত কৰিব পাৰি। যেনে— বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন আৰু অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন।

বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ উদাহৰণ ঃ

নম্বৰ	10	15	20	25
ছাত্ৰৰ সংখ্যা (বাৰংবাৰতা)	5	7	12	8

ইয়াত চলক হ'ল নম্বৰ আৰু ছাত্ৰ সংখ্যা হ'ল বাৰংবাৰতা।

অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ উদাহৰণ ঃ

নম্বৰ ঃ	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
ছাত্ৰ সংখ্যা ঃ	4	3	7	10	3

টোকা ঃ

শ্ৰেণী তিনিটা যেনে—

(i) নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণী

(ii) বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণী

(iii) অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণী।

গড়ৰ বিভিন্ন পৰিমাপবোৰ ঃ

1. গাণিতিক গড় (A.M.) বা মাধ্য) 2. মধ্যমা (Median or Me)

3. বহুলক বা ম'ড (Mode ie Mo) 4. গুণোত্তৰ মাধ্য (G.M.) 5. হৰাত্মক গড় (H.M.)

এতিয়া আমি ওপৰৰ পৰিমাপবোৰ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

1. **গাণিতিক গড় বা মাধ্য (নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণী) ঃ**

যদি X চলকৰ n-সংখ্যক মান লোৱা হয় যেনে $x_1, x_2, x_3 ..... x_n$ তেন্তে এই মানবোৰক যোগ কৰি যোগফলক n ৰে হৰণ কৰিলে মাধ্যৰ মান পোৱা যায়। মাধ্যক $\bar{x}$ আখৰেৰে চিহ্নিত কৰিলে—

$\bar{x}$ ৰ মান হ'ব $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

অথবা,

অৰ্থাৎ, $\bar{x} = \dfrac{\sum x}{n}$ .... (1)

(1) নং সূত্ৰটোক প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতিৰ অন্তৰ্ভুক্ত।

পৰোক্ষ পদ্ধতি বা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি বা কল্পিত গড় পদ্ধতি ঃ

ধৰা হ'ল, $d_i = x_i - A,\ A$ হ'ল কল্পিত গড়ৰ মান

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} di = \sum_{i=1}^{n} (x_i - A)$ [উভয়পক্ষত n সংখ্যক মানৰ যোগফল লোৱা হৈছে]

$$\Rightarrow \sum d = \sum x - nA$$

($\sum$ চিনত বীজগণিতীয় সম্বন্ধত দেখুওৱা হৈছে)

উভয় পক্ষক n ৰে হৰণ কৰিলে পাওঁ, (i প্ৰতীকটো বাদ দিয়া হৈছে)

$$\frac{\sum d}{n} = \frac{\sum x}{n} - A$$

$$= \bar{x} - A$$

$$\boxed{\therefore \quad \bar{x} = A + \frac{\sum d}{n}} \quad .... (2)$$

(2) নং সূত্ৰটো সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিত অন্তৰ্ভুক্ত। ইয়াত n হ'ল মুঠ আবেক্ষণৰ (observations) সংখ্যা।

মাধ্য (বিচ্ছিন্ন আৰু অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত)

যদি X চলকৰ মানবোৰ যেনে $x_1, x_2, x_3 .... x_n$
যথাক্ৰমে $f_1, f_2, f_3 .... f_n$ সংখ্যক বাৰ সংগঠিত হয়
তেন্তে মানবোৰৰ মাধ্য তলত দিয়া ধৰণে লিখা হয়।

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + ... + f_nx_n}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n} \quad \text{বা} \quad \frac{\sum fx}{n}$$

x	x_1	x_2	......	x_n
f	f_1	f_2	......	f_n

অৰ্থাৎ, $\boxed{\bar{x} = \dfrac{\sum fx}{n}}$ .... (3)

ইয়াত চলক হ'ল X আৰু f বোৰ বাৰংবাৰতা বা পৰিসংখ্যা।
আৰু n হ'ল মুঠ বাৰংবাৰতা অৰ্থাৎ $f_1 + f_2 + \ldots .. + f_n = n$

(3) নং সূত্ৰটো প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতিত অন্তৰ্ভুক্ত।

টোকা ঃ

(1) বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত (3) নং সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰিলে x বোৰ হ'ল চলকৰ মানবোৰ, f বোৰ ক্ৰমিক বাৰংবাৰতা আৰু 'n' হ'ল মুঠ বাৰংবাৰতা।

(2) আনহাতে, অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত (3) নং সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰিলে x বোৰ হ'ব বিভাগবোৰৰ মধ্যমান, f বোৰ পৰিসংখ্যা আৰু 'n' হ'ব মুঠ বাৰংবাৰতা।

বিচ্ছিন্ন আৰু অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত মাধ্য নিৰ্ণয়ৰ কল্পিত গড় বা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি ঃ

সূত্ৰ দুটা হ'ল— $\bar{x} = A + \frac{\sum f.d}{n}$ .... (4) [প্ৰমাণ (2) নং সূত্ৰৰ আধাৰত কৰিব পাৰি]

আৰু $\bar{x} = A + \frac{\sum fd^{/}}{n} \times c$ .... (5)

য'ত A = কল্পিত গড়

(বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত চলকৰ মানবোৰ সোঁমাজৰ পৰা ল'লে সুবিধা হয় আৰু অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত বিভাগবোৰৰ মধ্যমানবোৰৰ সোঁমাজৰ পৰা ল'লে সুবিধা হয়)

$d_i = x_i - \text{A},\ d^{/}_i = \frac{x_i - A}{i}$ [(4) আৰু (5) নম্বৰ সূত্ৰত 'i' চিনটো বাদ দিয়া হৈছে]

x বোৰ হ'ল চলকৰ মানবোৰ (বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত)

x বোৰ হ'ল বিভাগবোৰৰ মধ্যমান (অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত)

C = বিভাগৰ অন্তৰাল

n = মুঠ বাৰংবাৰতা

টোকা ঃ

(1) বিচ্ছিন্ন আৰু অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত সাধাৰণতে কল্পিত গড় পদ্ধতি অৱলম্বন কৰা সুবিধাজনক কিয়নো গণনা কাৰ্য সহজ হয়।

(2) বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত (4) নং সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰিবা।

(3) অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত (5)নং সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰিবা যদিহে প্ৰত্যেক বিভাগৰ অন্তৰাল একেই মানৰ থাকে, নহ'লে (4) নং সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰিবা।

তিনিটা শ্ৰেণীৰ কেইটামান উদাহৰণ হ'ল ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ10 জন বনুৱাৰ দৈনিক মজুৰিৰ পৰিমাণ (টকাত) তলত দিয়া হ'ল—

105, 108, 100, 90, 110, 115, 87, 165, 125, 80

তথ্যখিনিৰ পৰা মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত তথ্যখিনি এটা নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণী।

আমি কল্পিত গড় পদ্ধতিৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰিম। [প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি অৱলম্বন কমিলেও ক্ষতি নাই]

ইয়াত সৰ্বনিম্ন মান = 80

সৰ্বোচ্চ মান = 165

কল্পিত গড় সাধাৰণতে সীমামূৰীয়া মান দুটাৰ মাজৰ পৰা ল'লে সুবিধা হয়।

সেয়েহে কল্পিত গড় অৰ্থাৎ, $A = \frac{80+165}{2} = 123$

টোকা ঃ

(123 সংখ্যাটো অখণ্ড সংখ্যা ল'বা)

(123 সংখ্যাটো প্ৰদত্ত শ্ৰেণীত নাথাকিবও পাৰে)

কল্পিত গড় A = 123

দৈনিক মজুৰি (টকা) x	$d = x - 123$
105	− 18
108	− 15
100	− 23
90	− 33
110	− 13
115	− 8
87	− 36
165	+ 42
125	2
80	− 43
মুঠ	$-145 = \sum d$

ইয়াত $n = 10$,

এতিয়া, $\bar{x} = A + \frac{\sum d}{n}$

$= 123 + \frac{-145}{10}$

$= 123 - 14.50$

$= 108.50$ টকা

$\therefore$ নিৰ্ণেয় মাধ্য $= 108.50$ টকা

টোকা ঃ

(1) বিভাজনটোৰ চলকৰ একক হ'ল গড়ৰ পৰিমাপবোৰৰ একক।

(2) কল্পিত গড়ৰ মান বেলেগ বেলেগ লোৱা হ'লেও মাধ্যৰ মান একেই থাকে।

উদাহৰণ 2 ঃ তলত দিয়া তথ্যৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা ঃ

ওজন (কিলো) ঃ	40	44	50	57	62	65
মানুহৰ সংখ্যা ঃ	18	23	27	19	16	7

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত তথ্যখিনি এটা বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণী।

ইয়াত চলক হ'ল ওজন (x) আৰু পৰিসংখ্যা হ'ল মানুহৰ সংখ্যা (f)

কল্পিত গড় পদ্ধতিৰে মাধ্য নিৰ্ণয় কৰিম।

ধৰা হ'ল, কল্পিত গড় A = 50

$$\left[\begin{array}{l} A = \frac{40+65}{2} \\ = \frac{105}{2} = 52.5 = 53 \\ A = 53 \\ \quad\quad \text{ল'ব পাৰা} \end{array}\right]$$

ওজন (কিলো) x	$d = x - 50$	**মানুহৰ সংখ্যা** f	fd
40	− 10	18	− 180
44	− 6	23	− 138
50	0	27	0
57	7	19	133
62	12	16	192
65	15	7	105
মুঠ		$110 = n$	$112 \sum fd$

এতিয়া, $\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{n}$

$= 50 + \frac{112}{110}$

$\cong$ 50 + 1.05

$\cong$ 51.05 কিলো

$\therefore$ নিৰ্ণেয় মাধ্য = 51.05 কিলো গ্ৰাম (প্ৰায়)

উদাহৰণ 3 ঃ তলৰ তথ্যখিনিৰ পৰা মাধ্য বা গাণিতিক গড় নিৰ্ণয় কৰা ঃ

উচ্চতা (চে. মি.) ঃ	130–135	135–140	140–145	145–150	150–155
পৰিসংখ্যা ঃ	8	12	17	6	2

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত তথ্যখিনি এটা অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণী (বহিৰ্ভুক্ত পদ্ধতি)
ইয়াত চলক হ'ল উচ্চতা (x)।

আমি কল্পিত গড় পদ্ধতিৰে মাধ্য নিৰ্ণয় কৰিম।

ধৰা হ'ল, কল্পিত গড় A = 142.5, ইয়াত C = 5 [বিভাগকেইটা সমান অন্তৰালত আছে।]

উচ্চতা চে.মি.	মধ্যমান x	$d' = \frac{x - 142.5}{5}$	f	fd'
130–135	132.5	– 2	8	– 16
135–140	137.5	– 1	12	– 12
140– 145	142.5	0	17	0
145–150	147.5	1	6	6
150–155	152.5	2	2	4
মুঠ			45 = n	–18 = $\sum fd'$

এতিয়া, $\bar{x} = A + \frac{\sum fd'}{n} \times C'$

$= 142.5 + \frac{-18}{45} \times 5$

= 142.5 – = 140.5 ছে.মি.

$\therefore$ নিৰ্ণেয় মাধ্য = 140.5 ছে.মি.

টোকা ঃ

ইয়াত (5) নং সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰা হৈছে। (4)নং সূত্ৰটোও ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰা।

উদাহৰণ 4 ঃ তলৰ তথ্যৰ পৰা মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা ঃ

বিভাগ সীমা ঃ	0–9	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59
পৰিসংখ্যা ঃ	7	17	27	23	19	7

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত তথ্যখিনি এটা অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণী (অন্তৰ্ভুক্ত পদ্ধতি)
ইয়াত বিভাগ অন্তৰাল C = 10 (9 নহয়), বিভাগকেইটা সমান অন্তৰালত আছে।
মাধ্য নিৰ্ণয় কৰাত কল্পিত গড় পদ্ধতি অৱলম্বন কৰা হ'ব।

ধৰা হ'ল কল্পিত গড় A = 24.5

বিভাগ সীমা	মধ্যমান	$d' = \frac{x - 24.5}{10}$	f	fd'
0–9	4.5	–2	7	–14
10–19	14.5	–1	17	–17
20–29	24.5	0	27	0
30–39	34.5	1	23	23
40–49	44.5	2	19	38
50–59	54.5	3	7	21
মুঠ			$100 = n$	$51 = \sum fd'$

এতিয়া, $\bar{x} = A + \frac{\sum fd'}{n} \times C$

$$= 24.5 + \frac{51}{100} \times 10$$

$$= 24.5 + 5.1$$

$$= 29.6$$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় মাধ্য = 29.6

কেইটামান ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 5 ঃ তলৰ তথ্যৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা।

(a)

বিভাগ ঃ	0–10	10–20	20–40	40–70	70–110
পৰিসংখ্যা ঃ	8	13	17	12	5

(b)

নম্বৰ (তলত) ঃ	10	20	30	40	50
ছাত্ৰসংখ্যা ঃ	8	28	68	86	100

(c)

বিভাগ (মধ্যমান) ঃ	15	25	35	45	55
পৰিসংখ্যা ঃ	6	8	10	4	2

(d)

নম্বৰ (ওপৰত) ঃ	0	10	20	30	40	50
ছাত্ৰ সংখ্যা ঃ	50	46	30	20	8	2

উদাহৰণ 6 ঃ তলৰ তথ্যৰ মাধ্যৰ মান 67.45 ইঞ্চি।
লুপ্ত পৰিসংখ্যা f_3 নিৰ্ণয় কৰা ঃ

চলকৰ বিভাগ ঃ	60–62	63–65	66–68	69–71	72–74
পৰিসংখ্যা ঃ	5	54	f_3	81	24

উদাহৰণ 7 ঃ n_1 টা সংখ্যাৰ মাধ্য $\bar{x}_1$ আৰু (n_1+n_2) টা সংখ্যাৰ মাধ্য $\bar{x}$ হ'লে n_2 টা সংখ্যাৰ মাধ্য হ'ব

$\bar{x}+\frac{n_1}{n_2}\left(\bar{x}-\bar{x}_1\right)$ প্ৰমাণ কৰা।

উদাহৰণ 8 ঃ x চলকৰ মাধ্য $\bar{x}$ আৰু y চলকৰ মাধ্য $\bar{y}$ হ'লে আৰু চলক দুটাৰ মাজত ৰৈখিক সম্বন্ধটো $y = a + bx$ হ'লে (য'ত a আৰু b ধ্ৰুৱক) প্ৰমাণ কৰা যে— $\bar{y}=a+b\bar{x}$

উদাহৰণ 9 ঃ বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰমাণ কৰা—

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i-\bar{x}\right)=0$$

উদাহৰণ 10 ঃ (a) 19 টা আবেক্ষণৰ মাধ্য 20। পিছত এটা আবেক্ষণ অন্তৰ্ভুক্ত কৰাৰ ফলত মাধ্য হ'ল 21। অন্তৰ্ভুক্ত কৰা আবেক্ষণটো নিৰ্ণয় কৰা।

(b) 18 টা সংখ্যাৰ মাধ্য 7। এটা সংখ্যা 12 ৰ সলনি 21 লোৱা হৈছিল। শুদ্ধ মাধ্যৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(c) তলৰ বিভাজনটোৰ মাধ্য 124

চলক ঃ	100	110	120	135	$x + 5$
পৰিসংখ্যা ঃ	1	2	3	2	2

x ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা (প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰা)

(d) 99 টা সংখ্যাৰ মাধ্য 55। 100-তম সংখ্যাটো 100 টা সংখ্যাৰ মাধ্যতকৈ 99 বেছি। 100-তম সংখ্যাটো নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ

উদাহৰণ 5 ঃ (a) ইয়াত বিভাগৰ অন্তৰাল সমান নহয়।

সেয়েহে মাধ্য নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰত তলৰ সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰা হ'ব।

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{n}$$

ধৰা হ'ল কল্পিত গড় A = 30

বিভাগ	মধ্যমান x	$d = x-30$	পৰিসংখ্যা f	fd
0–10	5	–25	8	– 200
10–20	15	–15	13	–195
20–40	30	0	17	0
40–70	55	25	12	300
70–110	90	60	5	300
মুঠ			55	205

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{n}$$

$$= 30 + \frac{205}{55} \cong 30 + 3.75 = 33.73 \text{ (প্ৰায়)}$$

(b) ইয়াত সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজন দিয়া হৈছে। সেয়েহে প্ৰদত্ত তথ্যখিনিৰ সাধাৰণ বাৰংবাৰতা বিভাজন প্ৰস্তুত কৰি মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা হ'ব।

ধৰা হ'ল, কল্পিত গড় A = 25, C = 10

নম্বৰ	ছাত্ৰসংখ্যা f	মধ্যমান	$d' = \frac{x-25}{10}$	fd'
0–10	8	5	–2	–10
10–20	20	15	–1	–15
20–30	40	25	0	0
30–40	18	35	1	35
40–50	14	45	2	90
মুঠ	100			100

এতিয়া, $\bar{x} = A + \frac{\sum fd^{/}}{n} \times C$

$= 25 + \frac{100}{100} \times 10$

$= 35$

$\therefore$ মাধ্য = 35 নম্বৰ

(c) ইয়াত বিভাগৰ মধ্যমানবোৰ দিয়া হৈছে। মধ্যমানবোৰৰ পৰা বিভাগবোৰ উলিওৱা হ'ল—

বিভাগ ঃ	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
পৰিসংখ্যা ঃ	6	8	10	4	2

এতিয়া, 5(b) প্ৰশ্নৰ সমাধান মতে নিজে চেষ্টা কৰা।

(d) ইয়াত সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজন দিয়া হৈছে। সেয়েহে প্ৰদত্ত তথ্যখিনিৰ সাধাৰণ বাৰংবাৰতা বিভাজন প্ৰস্তুত কৰা হ'ল—

নম্বৰ ঃ	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
ছাত্ৰ সংখ্যা ঃ	4	16	10	12	6	2

(অংকটো নিজে সমাধান কৰা)

উদাহৰণ 6 ঃ

সমাধান ঃ ইয়াত মাধ্য = 67.45 ইঞ্চি। লুপ্ত পৰিসংখ্যা f_3 নিৰ্ণয় লাগে। মাধ্যৰ সূত্ৰ প্ৰয়োগৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি অৱলম্বন কৰা হ'ব।

চলকৰ বিভাগ	মধ্যমান x	f	fx
60–62	61	5	305
63–65	64	54	3456
66–68	67	f_3	$67f_3$
69–71	70	81	5670
72–74	73	24	1752
		$164+f_3$	$11183+67f_3$

এতিয়া, $\bar{x} = \frac{\sum fx}{n} = \frac{11183 + 67f_3}{164 + f_3}$

$\Rightarrow 67.45 = \frac{11183 + 67f_3}{164 + f_3}$

$\Rightarrow 0.45f_3 = 11183 - 11051.80 = 131.20$

$$\therefore\ f_3 = \frac{13120}{45} \simeq 291$$

$\therefore$ লুপ্ত পৰিসংখ্যা = 291 (প্ৰায়)

উদাহৰণ 7 ঃ

সমাধান ঃ ইয়াত, n_1 টা সংখ্যাৰ মুঠ মান = $n_1\overline{x}_1$

(n_1+n_2) টা সংখ্যাৰ মুঠ মান = $(n_1+n_2)\overline{x}$

$\therefore$ n_2 টা সংখ্যাৰ মুঠ মান $=(n_1+n_2)\overline{x}-n_1\overline{x}_1$

এতেকে, n_2 টা সংখ্যাৰ মাধ্য $= \dfrac{(n_1+n_2)\overline{x}-n_1\overline{x}_1}{n_2}$

$$= \frac{n_1(\overline{x}-\overline{x}_1)+n_2\overline{x}}{n_2}$$

$$= \overline{x}+\frac{n_1}{n_2}\left(\overline{x}-\overline{x}_1\right)$$

উদাহৰণ 8 ঃ

সমাধান ঃ x আৰু y চলক দুটাৰ ৰৈখিক সম্বন্ধটো হ'ল—

$y = a + bx,$ য'ত a আৰু b ধ্ৰুৱক সংখ্যা

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n}(a+bx_i)$$ [উভয়পক্ষত n সংখ্যক বাৰ যোগফল লোৱা হৈছে]

$$= na + b\sum_{i=1}^{n} x_i$$

উভয়পক্ষত n ৰে ভাগ কৰি পাওঁ—

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = a + b\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

অৰ্থাৎ, $\overline{y} = a + b\overline{x}$

উদাহৰণ 9 ঃ বাওঁপক্ষ $= \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})$

$= f_1(x_1 - \bar{x}) + f_2(x_2 - \bar{x}) + ... + f_n(x_n - \bar{x})$

$= (f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n) - (\bar{x} + \bar{x} + ... n$ সংখ্যক বাৰ)

$= \sum_{i=1}^{n} f_i x_i - n\bar{x}$ $\qquad \because \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n}$

$= n\bar{x} - n\bar{x} = 0 =$ সোঁপক্ষ। $\qquad \therefore \sum_{i=1}^{n} f_i x_i = n\bar{x}$

উদাহৰণ 10 (a) ঃ

সমাধান ঃ 19টা আৰেক্ষণৰ মুঠ মান = 19 × 20 = 380

এটা আবেক্ষণ অন্তৰ্ভুক্ত কৰা হ'লে আবেক্ষণৰ সংখ্যা হ'ব = 20 টা।

এতিয়া, 20 টা আবেক্ষণৰ মুঠমান = 20 × 21 = 420

∴ নতুন আবেক্ষণটোৰ মান = 420 – 380 = 40

(b) ইয়াত, 18 টা সংখ্যাৰ মুঠ মান = 18 × 7 = 126

এটা সংখ্যা 12-ৰ সলনি 21 লোৱা হ'লে, 18 টা সংখ্যাৰ

মুঠ শুদ্ধ মান = 126 – 21 + 12 = 117

$\therefore$ শুদ্ধ মাধ্যৰ মান হ'ব $= \frac{117}{18} = 6.5$

(c) প্ৰদত্ত বিভাজনটোৰ মাধ্য 124

x	f	fx
100	1	100
110	2	220
120	3	360
135	2	270
$x + 5$	2	$2x + 10$
মুঠ	$10 = n$	$2x + 960$

এতিয়া, $\bar{x} = \frac{\sum fx}{n}$

$\Rightarrow \quad 124 = \frac{960 + 2x}{10}$

$\Rightarrow \quad 960 + 2x = 1240$

$\Rightarrow \quad 2x = 280$

$\therefore \quad x = 140$

$\therefore$ x ৰ মান = 140

(d) ইয়াত,

99 টা সংখ্যাৰ মুঠ মান = 99 × 55 = 5445

ধৰা হ'ল, 100 টা সংখ্যাৰ মাধ্য $\overline{x}$

$\therefore$ 100 টা সংখ্যাৰ যোগফল = $100\overline{x}$

প্ৰশ্নমতে,= $100\overline{x} - 5445 = \overline{x} + 99$

$\Rightarrow 99\overline{x} = 5544$

$\therefore \overline{x} = \frac{5544}{99} = 56$

এতেকে 100-তম সংখ্যাটো (56 + 99) = 155

দুটা বিভাগৰ যুগ্ম গড়ৰ সূত্ৰ ঃ

প্ৰথম বিভাগত n_1টা আবেক্ষণ আৰু ইয়াৰ মাধ্য $\overline{x}_1$আৰু দ্বিতীয় বিভাগত n_2 টা আৰেক্ষণ আৰু ইয়াৰ মাধ্য $\overline{x}_2$ হ'লে— বিভাগ দুটাৰ আৰেক্ষণবোৰৰ যুগ্ম গড় হ'ব—

$$\overline{x} = \frac{x_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2}{n_1 + n_2}$$

প্ৰমাণ ঃ প্ৰথম বিভাগৰ n_1 টা আৰেক্ষণৰ মুঠ মান = $n_1\overline{x}_1$

দ্বিতীয় বিভাগৰ n_2 টা আৰেক্ষণৰ মুঠমান $= n_2\overline{x}_2$

$\therefore$ দুয়োটা বিভাগৰ আৰেক্ষণবোৰৰ মুঠ মান $= n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2$

এতেকে, বিভাগ দুটাৰ যুগ্ম গড় $= \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2}{n_1 + n_2}\overline{x}$

এইদৰে k সংখ্যক বিভাগৰ যুগ্ম গড় হ'ব— $\overline{x} = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2 + n_3\overline{x}_3 + \ldots\ldots + n_k\overline{x}_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots\ldots + n_k}$

মাধ্যৰ কেইটামান ধৰ্ম ঃ

1. মাধ্যৰ পৰা আৰেক্ষণবোৰৰ পাৰ্থক্যৰ বীজগণিতীয় যোগফল শূন্য হ'ব।

অৰ্থাৎ, $\sum(x-\bar{x})=0$

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, n-টা আৰেক্ষণ যেনে $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n$-ৰ মাধ্য $\overline{X}$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}) = (x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\ldots+(x_n-\bar{x})$$

$$= (x_1+x_2+\ldots..+x_n)-(\bar{x}+\bar{x}+\ldots n \text{ সংখ্যক বাৰ})$$

$$= n\bar{x}-n\bar{x}$$
$$= 0$$

$$\because \bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$
$$\therefore x_1+x_2+\ldots\ldots+x_4=n\bar{x}$$

বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত (1) নং ধৰ্মটো আগতেই প্ৰমাণ কৰা হৈছে।

(2) দুই বা ততোধিক বিভাগৰ যুগ্ম গড় উলিয়াব পাৰি। (দুটা বিভাগৰ ক্ষেত্ৰত যুগ্ম গড় সূত্ৰৰ প্ৰমাণ আগতে দিয়া হৈছে।

(3) মাধ্যৰ পৰা আৰেক্ষণবোৰৰ পাৰ্থক্যৰ বৰ্গৰ যোগফল অইন যিকোনো মানৰ পৰা পাৰ্থক্যৰ বৰ্গৰ যোগফলতকৈ ন্যূনতম অৰ্থাৎ $\Sigma(x-\bar{x})^2<\Sigma(x-A)^2, A$ হ'ল যিকোনো মান, $\bar{x}$ হ'ল মাধ্য।

(4) আৰেক্ষণৰ সংখ্যা আৰু এইবোৰৰ মাধ্য দিয়া থাকিলে আৰেক্ষণবোৰৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি। যেনে— $\bar{x}=\frac{\Sigma x}{n}$

$\therefore \sum x = n\bar{x}$

(5) যদি প্ৰতিটো আৰেক্ষণৰ লগত কোনো ধ্ৰুৱক সংখ্যা যোগ বা বিয়োগ কৰা হয় আৰু প্ৰতিটো আৰেক্ষণক কোনো ধ্ৰুৱক সংখ্যাৰে পূৰণ বা ভাগ কৰা হয়।

তেন্তে প্ৰথম ক্ষেত্ৰত মাধ্যৰ মানো ধ্ৰুৱক সংখ্যাৰ মানত বৃদ্ধি বা হ্ৰাস পায়; আৰু দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰত নতুন মাধ্যৰ মান = আগৰ মাধ্য × ধ্ৰুৱক সংখ্যা আৰু নতুন মাধ্যৰ মান = $\frac{\text{আগৰ মাধ্য}}{\text{ধ্ৰুৱক সংখ্যা}}$

(6) n-টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ মাধ্য $=\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

(7) যদি x আৰু y-চলক দুটাৰ এটি ৰৈখিক সম্বন্ধ যেনে y=a+bx, য'ত a আৰু b ধ্ৰুৱক এনেধৰণৰ থাকে তেন্তে চলক দুটাৰ গড় সম্বন্ধটো তলত দিয়া ধৰণে সৃষ্টি হয়—

$\bar{y}=a+b\bar{x}$, য'ত $\bar{x}$ হ'ল x-চলকৰ মাধ্য।

$\bar{y}$ হ'ল y-চলকৰ মাধ্য।

ভাৰিত গাণিতিক গড় (Weighted Average) ঃ

গাণিতিক গড়ৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰতিটো আৰেক্ষণকেই সমান গুৰুত্ব (ভাৰ) দিয়া হৈছে। কেতিয়াবা দেখা যায় যে আৰেক্ষণবোৰৰ আপেক্ষিক গুৰুত্ব সমান নাথাকে। তেনেস্থলত গড় নিৰ্ণয় কৰিবলৈ হ'লে আমি ভাৰযুক্ত গড় নিৰ্ণয় কৰিব লাগে। কিয়নো আৰেক্ষণবোৰৰ গুৰুত্ব অনুসৰি ভাৰ বিভিন্ন হ'লে সৰল গাণিতিক গড় প্ৰতিনিধিমূলক নহ'বও পাৰে। সেয়েহে ভাৰযুক্ত গড় নিৰ্ণয় কৰাটো যুক্তিযুক্ত।

ভাৰযুক্ত গড়ৰ সূত্ৰটো এইদৰে দিয়া হয়—

$$\bar{x}_w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots\ldots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \ldots\ldots + w_n} = \frac{\sum w.x}{\sum w}$$

ইয়াত, আৰেক্ষণ $x_1, x_2, \ldots. x_n$ৰ ভাৰ ক্ৰমে $w_1 w_2, \ldots.. w_n$

টোকা ঃ

ওপৰৰ সূত্ৰটো বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ মাধ্যৰ সূত্ৰৰ লগত একেই হয় যদি w'-বোৰক f'ৰে লিখা (f হ'ল পৰিসংখ্যা) হয়।

এটা উদাহৰণেৰে ভাৰযুক্ত গড় বুজোৱা হ'ল—

উদাহৰণ ঃ তিনিজন ছাত্ৰই তিনিটা বিষয়ত পোৱা নম্বৰসমূহ তলৰ তালিকাখনত দেখুওৱা হ'ল—

ছাত্ৰ ঃ	**বিষয়**		
	A	B	C
x:	50	60	65
y:	70	55	45
z:	50	55	60

বিষয়বোৰৰ ভাৰ এনেধৰণৰ ঃ A: 30%, B: 20%, C: 50%

গড় হিচাপে কোনজন ছাত্ৰৰ নম্বৰ উৎকৃষ্ট?

সমাধান ঃ ইয়াত প্ৰত্যেক ছাত্ৰৰ ভাৰযুক্ত গড় নিৰ্ণয় কৰা হ'ব।

$$\bar{x}_w(x) = \frac{50 \times 30\% + 60 \times 20\% + 65 \times 50\%}{30\% + 20\% + 50\%} = \frac{50 \times 0.3 + 60 \times 0.2 + 65 \times 0.5}{0.3 + 0.2 + 0.5}$$

$$= \frac{15 + 12 + 32.5}{1} = 59.5$$

$$\bar{x}_w(y) = \frac{70 \times 0.3 + 55 \times 0.2 + 45 \times 0.5}{1} = 21 + 11 + 22.5 = 54.5$$

$$\bar{x}_w(z) = \frac{50 \times 0.3 + 55 \times 0.2 + 60 \times 0.5}{1} = 15 + 11 + 30 = 56$$

এতেকে দেখা গ'ল যে গড় হিচাপে x-ৰ নম্বৰ উৎকৃষ্ট।

উদাহৰণ 11 ঃ কোনো এটা প্ৰতিষ্ঠানৰ কৰ্মচাৰীসকলৰ সাপ্তাহিক গড় মজুৰি 600 টকা। পুৰুষ আৰু মহিলা কৰ্মচাৰীসকলৰ সাপ্তাহিক গড় মজুৰি ক্ৰমে 620 টকা আৰু 520 টকা। প্ৰতিষ্ঠানটোত পুৰুষ আৰু মহিলা কৰ্মচাৰীক শতাংশত প্ৰকাশ কৰা?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, প্ৰতিষ্ঠানটোত n_1 জন পুৰুষ আৰু n_2 জনী মহিলা আছে।

ইয়াত, যুগ্ম গড় $(\bar{x}) = 600$ টকা, $\bar{x}_1 =$ পুৰুষ কৰ্মচাৰীৰ গড় মজুৰি = 620 টকা

আৰু $\bar{x}_2 =$ মহিলা কৰ্মচাৰীৰ গড় মজুৰি = 520 টকা

এতিয়া, $$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$\Rightarrow 600 = \frac{620n_1 + 520n_2}{n_1 + n_2}$$

$$\Rightarrow 20n_1 + 80n_2$$

$$\Rightarrow n_1 = 4n_2 \quad \therefore \; n_1 : n_2 = 4:1$$

এতেকে, পুৰুষ কৰ্মচাৰী $= \frac{4}{1+4} \times 100\% = 80\%$

মহিলা কৰ্মচাৰী $= \frac{1}{5} \times 100\% = 20\%$

মাধ্যৰ সুবিধা আৰু অসুবিধাসমূহ ঃ

সুবিধা ঃ

1. মাধ্য বুজিবলৈ আৰু গণনা কৰিবলৈ সহজ।
2. মাধ্যই আটাইকেইটা আৰেক্ষণক গণনা কাৰ্যত অন্তৰ্ভুক্ত কৰে।
3. ইয়াৰ সংজ্ঞা দৃঢ়।
4. বীজগণিতীয় সম্প্ৰসাৰণ সম্ভৱ।
5. প্ৰতিদৰ্শজ তাৰতম্যৰ দ্বাৰাই মাধ্যই কম প্ৰভাৱান্বিত হয়।
6. মাধ্যৰ গণনাত তথ্যখিনি সজাই লোৱাৰ প্ৰয়োজন নহয়।
7. দুই বা ততোধিক বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ তুলনাত মাধ্যৰ ভূমিকা যথেষ্ট গুৰুত্বপূৰ্ণ।
8. প্ৰতিদৰ্শজ তাৰতম্যৰ দ্বাৰাই মাধ্য বেছি প্ৰভাৱান্বিত নহয়।

অসুবিধা ঃ

1. তথ্যখিনিত লঘুমান আৰু গুৰুমান বেছি সংখ্যক হ'লে মাধ্য বেছি প্ৰভাৱান্বিত হয়।
2. বিভাগৰ নিম্ন বা উচ্চ সীমা মুক্ত ধৰণৰ হ'লে মাধ্য গণনা কৰিবলৈ টান হয়।
3. নিৰীক্ষণ পদ্ধতিত মাধ্যৰ গণনা সম্ভৱ নহয়।
4. কোনো শ্ৰেণীৰ মাধ্যৰ মান কেতিয়াবা অস্বাভাৱিক ধৰণৰ হ'ব পাৰে।

5. গুণধৰ্মী তথ্যৰ ক্ষেত্ৰত মাধ্য ব্যৱহাৰ কৰিব নোৱাৰি।
6. অসমমিত বা বৈষম্য থকা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত মাধ্যই বিভাজনটোক প্ৰতিনিধিত্ব নকৰিবও পাৰে।
7. লেখৰ দ্বাৰাই মাধ্য নিৰ্ণয় অসম্ভৱ।
8. অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত বিভাগৰ মধ্যমানক বিভাগটোৰ প্ৰতিনিধিত্বমূলক মান বিবেচনা কৰা হয়। আৰু এই কথাষাৰ সকলো ক্ষেত্ৰত ফলপ্ৰসূ নহ'বও পাৰে।

2. মধ্যমা (নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত) ঃ কোনো নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণীৰ মানবোৰ মানৰ উৰ্ধ্বক্ৰম বা অধঃক্ৰম অনুসৰি সজাই লোৱাৰ পিছত যিটো মান শ্ৰেণীটোৰ মানবোৰৰ সোঁমাজত অৱস্থান কৰে তাকেই মধ্যমা বুলি কোৱা হয়। মধ্যমাই বিভাজনটোক সমান দুটা ভাগত বিভক্ত কৰে আৰু সমান সংখ্যক মান ইয়াতকৈ ডাঙৰ অথবা সমান আৰু সৰু অথবা সমান হ'ব। অৱশ্যে এই কথাষাৰ শ্ৰেণীটোত অযুগ্ম সংখ্যক মান থাকিলেহে প্ৰযোজ্য হ'ব। যদি যুগ্ম সংখ্যক মান থাকে তেনেহ'লে শ্ৰেণীটোৰ মাজতে দুটা মান পোৱা যায়। তেনেস্থলত মাজৰ মান দুটাৰ গাণিতিক গড় হ'ব মধ্যমাৰ মান। এইটো মধ্যমা নিৰ্ণয়ৰ এটা প্ৰচলিত পদ্ধতি (conventional method)।

টোকা ঃ

(1) শ্ৰেণীটোত অযুগ্ম সংখ্যক n টা মান থাকিলে মধ্যমা হ'ব $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম মান।

(2) শ্ৰেণীটোত যুগ্ম সংখ্যক n টা মান থাকিলে মধ্যমা হ'ব $\left(\frac{n}{2}\right)$তম মান আৰু $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম মানৰ গণিতিক গড়, 'n' হ'ল মুঠ আৰেক্ষণৰ সংখ্যা।

মধ্যমাৰ ওপৰৰ সংজ্ঞাটো নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰযোজ্য।

উদাহৰণ 1 ঃ তলৰ শ্ৰেণী দুটাৰ মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(a) 78, 82, 36, 38, 50, 72, 68, 64, 70

(b) 69, 75, 72, 70, 71, 73, 74, 76, 75, 78

সমাধান ঃ

(a) শ্ৰেণীটোৰ মানকেইটা উৰ্ধ্বক্ৰমত সজাই ল'লে পাওঁ—

36, 38, 50, 64, 68, 70, 72, 78, 82 (অযুগ্ম সংখ্যক মান অৰ্থাৎ 9 টা n=9)

$\therefore$ মধ্যমা হ'ব $=\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম মান $=\left(\frac{9+1}{2}\right)$তম মান = 5-ম মান = 68

(b) শ্ৰেণীটোৰ মানকেইটা উৰ্ধ্বক্ৰমত সজাই ল'লে পাওঁ—

69,70, 71, 72, 73, 74, 75, 75, 76, 78 (যুগ্ম সংখ্যক মান অৰ্থাৎ 10 টা, n=10)

$\therefore$ মধ্যমা হ'ব $=\frac{n}{2}$ তম আৰু $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম মানৰ গাণিতিক গড়

= পঞ্চম আৰু ষষ্ঠ মানৰ গাণিতিক গড় $=\frac{73+74}{2}=\frac{147}{2}=73.5$

মধ্যমা (বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত) ঃ

বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰাৰ বিভিন্ন ধাপবোৰ এনেধৰণৰ ঃ

1. প্ৰথমতে চলকৰ মানৰ (কম) পদ্ধতি সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা নিৰ্ণয় কৰা হ'লে মানবোৰ মানৰ ঊৰ্ধ্বক্ৰমত সজোৰা হ'ব।
2. এতিয়া মুঠ বাৰংবাৰতাৰ $\frac{n}{2}$(যুগ্ম হ'লে) অথবা $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ অযুগ্ম হ'লে)ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা হ'ব।
3. $\frac{n}{2}$ অথবা $\frac{n+1}{2}$ৰ মান কোনটো সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাত অন্তৰ্ভুক্ত হৈছে স্থিৰ কৰা আৰু সেই সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাৰ বিপৰীতে চলকৰ মান কিমান নিৰ্ণয় কৰা আৰু নিৰ্ণয় কৰা চলকৰ মানটোৱেই হ'ব নিৰ্ণেয় মধ্যমাৰ মান।

এটা উদাহৰণ দিয়া হ'ল—

উদাহৰণ 2 ঃ তলৰ তথ্যখিনিৰ পৰা মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰা।

উচ্চতা (ইঞ্চি) ঃ	60	50	57	61	56
মানুহ ঃ	4	8	7	3	5

সমাধান ঃ

প্ৰথমতে তথ্যখিনি তলত দিয়া ধৰণে মানৰ ঊৰ্ধ্বক্ৰমত সজোৰা হ'ল আৰু সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা তালিকাখনত দেখুওৱা হ'ল—

উচ্চতা (ইং)	বাৰংবাৰতা (f)	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (cf)
50	8	8
56	5	13
57	7	20
60	4	24
61	3	27
মুঠ	27=n	

এতিয়া,

মধ্যমা $\frac{n+1}{2}$-তম মানুহজনৰ উচ্চতা

$= \frac{27+1}{2} = 14$ তম মানুহজনৰ উচ্চতা

14-তম মানুহজন 20 সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাত অন্তৰ্ভুক্ত হৈছে আৰু ইয়াৰ বিপৰীতে উচ্চতাৰ মান 57 ইঞ্চি

$\therefore$ নিৰ্ণেয় মধ্যমা = 57 ইঞ্চি।

মধ্যমা (অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত) ঃ

অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰথমতে সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত যিধৰণে কৰা হৈছে) উলিওৱা হ'ব আৰু $\frac{n}{2}$-তম মান ($\frac{n+1}{2}$তম নহয়) কোনটো সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাত অন্তৰ্ভুক্ত হৈছে আৰু সেই সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাৰ বিপৰীতে বিভাগটো হ'ল মধ্যমাই অৱস্থান কৰা বিভাগ। মধ্যমা বিভাগটো নিৰ্ধাৰণ কৰি মধ্যমা নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰত তলত দিয়া সূত্ৰটো প্ৰয়োগ কৰা হ'ব—

$$\text{মধ্যমা (Me)} = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$$

যʼত L = মধ্যমা বিভাগৰ নিম্ন সীমা
n = মুঠ বাৰংবাৰতা
cf = মধ্যমা বিভাগৰ ঠিক আগৰ (পূৰ্ব্বৱৰ্তী) বিভাগৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা
f = মধ্যমা বিভাগৰ বাৰংবাৰতা।
c = মধ্যমা বিভাগৰ অন্তৰাল।

টোকা ঃ

(1) প্ৰদত্ত বিভাগবোৰ বহিৰ্ভুক্ত পদ্ধতিত থাকিলে বিভাগৰ নিম্নসীমাৰ কোনো পৰিৱৰ্তন নহয়।

(2) আনহাতে, বিভাগবোৰ অন্তৰ্ভুক্ত পদ্ধতিত থাকিলে এটা বিভাগৰ নিম্নসীমা 0.5 কম হ'ব আৰু উচ্চসীমা 0.5 বেছি হ'ব।

ওপৰৰ টোকা দুটাৰ ব্যৱহাৰ উদাহৰণেৰে বুজোৱা হ'ব।

উদাহৰণ 3 ঃ তলৰ তথ্যখিনিৰ মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰা।

(a)

বিভাগ ঃ	65-75	55-65	45-55	35-45	25-35	15-25
পৰিসংখ্যা ঃ	2	0	14	19	11	4

(b)

নম্বৰ ঃ	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90–99
পৰিসংখ্যা ঃ	1	4	14	20	22	12	2

সমাধান ঃ প্ৰথমতে বিভাগবোৰ মানৰ ঊৰ্দ্ধক্ৰম অনুসৰি সজোৱা হ'ব

বিভাগ	পৰিসংখ্যা(f)	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (cf)
15-25	4	4
25-35	11	15
35-45	19	34
45-55	14	48
55-65	0	48
65-75	2	50
মুঠ	50 = n	

এতিয়া মধ্যমা বিভাগ নিৰ্ণয় কৰা হ'ব—

মধ্যমা $= \frac{n}{2}$ তম চলকৰ মান $= \frac{50}{2}$ তম চলকৰ মান = 25-তম চলকৰ মান 25-তম চলকৰ মান 34-সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাত অন্তৰ্ভুক্ত হৈছে আৰু ইয়াৰ বিপৰীতে বিভাগটো হ'ল (35–45) সেয়েহে মধ্যমা বিভাগ = 35-45

মধ্যমাৰ সূত্ৰৰ পৰা পাওঁ—

$$Me = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$$

$$\therefore Me = 35 + \frac{25 - 15}{19} \times 10$$

$$= 35 + \frac{100}{19} = 40.26$$

ইয়াত L = 35
n = 50
cf = 15
f = 19
c = 10

অৰ্থাৎ, নিৰ্ণেয় মধ্যমা $= 40.26$

(b) প্ৰদত্ত তথ্যখিনিৰ বিভাগবোৰ অন্তৰ্ভুক্ত পদ্ধতিত দিয়া হৈছে— সেয়েহে বিভাগবোৰৰ প্ৰকৃত নিম্ন আৰু উচ্চসীমা দেখুৱাই সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা তালিকা প্ৰস্তুত কৰা হ'ব।

বিভাগৰ সীমা (নম্বৰ)	f	cf
29.5–39.5	1	1
39.5–49.5	4	5
49.5–59.5	14	19
59.5–69.5	20	39
69.5–79.5	22	61
79.5–89.5	12	73
89.5–99.5	2	75=n
মুঠ	75	

মধ্যমা $= \frac{n}{2}$ –তম চলকৰ মান

$= \frac{75}{2}$ –তম চলকৰ মান

= 37.5–তম চলকৰ মান

= 38–তম চলকৰ মান

আগৰ দৰে, মধ্যমা বিভাগ = 59.5–69.5

এতিয়া, $Me = L + \dfrac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times i$

ইয়াত L = 59.5
cf = 19
f = 20
c = 10

$= 59.5 + \dfrac{37.5 - 19}{20} \times 10$

$= 59.5 + \dfrac{18.5}{2}$

$= 59.5 + 9.25 = 68.75$

$\therefore$ নির্ণেয় নম্বৰ মধ্যমা= 68.75

উদাহৰণ 4 ঃ তলৰ তথ্যবোৰৰ পৰা মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(a)

নম্বৰ	**ছাত্ৰ সংখ্যা**
10-ৰ কম	3
20-ৰ কম	8
30-ৰ কম	17
40-ৰ কম	20
50-ৰ কম	22

(b)

মজুৰি (টকাত)	**বনুৱাৰ সংখ্যা**
0 আৰু ওপৰত	50
20 আৰু ওপৰত	45
40 আৰু ওপৰত	34
60 আৰু ওপৰত	16
80 আৰু ওপৰত	6
100 আৰু ওপৰত	0

(c)

বিভাগ ঃ	0–10	10–30	30–60	60–70	70–90
পৰিসংখ্যা ঃ	15	25	30	4	10

(d) তলৰ বিভাজনটোৰ লুপ্ত পৰিসংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা ঃ

x :	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
f :	3	5	–––	3	1

(বিভাজনটোৰ মধ্যমা = 32.5)

(a) **সমাধান ঃ** প্ৰদত্ত তথ্যখিনি সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনত দিয়া হৈছে। সেয়েহে তথ্যখিনিৰ বাৰংবাৰতা বিভাজন প্ৰস্তুত কৰা হ'ব।

নম্বৰ	f	cf
0–10	3	3
10–20	5 (=8-3)	8
20–30	9 (=17–8)	17
30–40	3 (=20–17)	20
40–50	2 (=22–20)	22=n

মধ্যমা $= \frac{n}{2}$ তম ছাত্ৰৰ নম্বৰ

$= \frac{22}{2}$ তম ছাত্ৰৰ নম্বৰ

$= 11$ তম ছাত্ৰৰ নম্বৰ

$\therefore$ মধ্যমা বিভাগ = 20–30

সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি সমাধান কৰা।

উত্তৰ ঃ 23.33 নম্বৰ

(b) প্ৰদত্ত তথ্যখিনি সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনত দেখুউৰা হৈছে। তথ্য বাৰংবাৰতা বিভাজন তলত দিয়া ধৰণে কৰা হ’ব।

বিভাগ মঞ্জুৰী টকা	f (বনুৰাৰ সংখ্যা)	cf
0–20	5 = (50–45)	5
20–40	11 = (45–38)	16
40–60	18 = (34–16)	34
60–80	10 = (16–6)	44
80–100	6 = (6–0)	50=n

মধ্যমা $= \frac{n}{2}$ তম মজুৰৰ মজুৰি

$= \frac{50}{2}$ তম মজুৰৰ মজুৰি

$= 11$ তম মজুৰৰ মজুৰি

$\therefore$ মধ্যমা বিভাগ = 40–60

ইয়াৰ পিছত নিজে চেষ্টা কৰা

উত্তৰ ঃ মধ্যমা 50 টকা

(c)

বিভাগ	f	cf
0–10	15	15
10–30	25	40
30–60	30	70
60–70	4	74
70–90	10	84 = n

মধ্যমা $= \frac{n}{2}$ তম চলকৰ মান

$= 42$ তম চলকৰ মান

$\therefore$ মধ্যমা বিভাগ = 30–60

(নিজে চেষ্টা কৰা)

উত্তৰ ঃ 32

টোকা ঃ

বিভাগবোৰৰ অন্তৰাল সমান কৰি ল'লেও মধ্যমাৰ মান একেই পোৱা যায়।

প্ৰত্যেক বিভাগৰ অন্তৰাল 10 কৰা হ'লে প্ৰদত্ত তথ্যখিনি এনে ধৰণৰ হ'ব—

বিভাগ ঃ	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90
f :	15	12.5	12.5	10	10	10	4	5	5

পৰিসংখ্যা 12. 5 গড় হিচাপে পোৱা গৈছে।

(d) ইয়াত বিভাজনটোৰ মধ্যমা 32.5 নম্বৰ। ধৰা হ'ল, লুপ্ত পৰিসংখ্যা = f_3

নম্বৰ	f	c.f
10–20	3	3
20–30	5	8
30–40	f_3	$8+f_3$
40–50	3	$11+f_3$
50–60	1	$12+f_3=n$

$\because$ মধ্যমা = 32.5

$\therefore$ মধ্যমা বিভাগটো = 30–40

এতিয়া $$Me = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$$

$$\Rightarrow 32.5 = 30 + \frac{\frac{12+f_3}{2} - 8}{f_3} \times 10$$

সৰল কৰাৰ পিছত, $f_3 = 8$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় লুপ্ত পৰিসংখ্যা = 8

মধ্যমাৰ সুবিধা আৰু অসুবিধাসমূহ ঃ

সুবিধা ঃ

1. নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণীটোত কিছুমান লঘু বা গুৰু মান থাকিলেও মধ্যমা প্ৰভাৱান্বিত নহয়, কিয়নো এইবোৰ মান শ্ৰেণীটোৰ সীমামূৰীয়া মান। মধ্যমাৰ মান বিভাজনটোৰ সোঁমাজত থকা কোনো এটা মানহে।
2. গুণধৰ্মী তথ্যৰ ক্ষেত্ৰত মধ্যমা নিৰ্ণয় সম্ভৱ। কাৰণ অভিজ্ঞতা আৰু জ্ঞানৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি তথ্যখিনিক গুণগত বৈশিষ্ট্যৰ আধাৰত সজোৱা সম্ভৱ, সেয়েহে মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰা সম্ভৱ।
3. সীমামুক্ত বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত মধ্যমা নিৰ্ণয় সম্ভৱ। কিয়নো মধ্যমা হ'ল বিভাজনটোৰ মাজতে থকা কোনো মান আৰু সীমা নিৰ্দেশ কৰা প্ৰথম আৰু শেষ বিভাগ দুটাই ইয়াৰ ওপৰত প্ৰভাৱ বিস্তাৰ নকৰে।
4. মধ্যমাৰ পৰা আৰেক্ষণবোৰৰ মানৰ পাৰ্থক্যৰ যোগফল অইন কোনো মানৰ পৰা পাৰ্থক্যৰ যোগফলতকৈ ন্যূনতম।
5. নিৰীক্ষণ পদ্ধতিত মধ্যমা নিৰ্ণয় সম্ভৱ আৰু লেখৰ সহায়তো মধ্যমাৰ মান উলিয়াব পাৰি।
6. মধ্যমা হ'ল অৱস্থানমূলক গড় আৰু সেয়েহে লঘুমান অথবা গুৰুমানৰ দ্বাৰা প্ৰভাৱান্বিত নহয়।
7. বিভাগৰ অন্তৰাল বিভিন্ন হ'লেও মধ্যমাৰ মান প্ৰভাৱান্বিত নহয়।

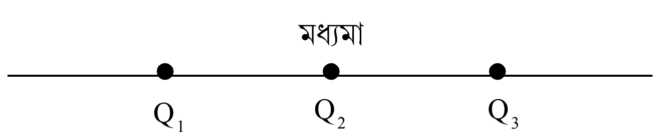
অসুবিধা ঃ

1. যুগ্ম সংখ্যক আৰেক্ষণৰ ক্ষেত্ৰত সঠিকভাৱে মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰা সম্ভৱ নহয়।
2. মধ্যমা বিভাজনটোৰ অৱস্থানমূলক পৰিমাপ হোৱাৰ বাবে আটাইকেইটা আৰেক্ষণক অন্তৰ্ভুক্ত নকৰে।
3. বীজগণিতীয় সম্প্ৰসাৰণ অসম্ভৱ।
4. প্ৰতিদৰ্শজ তাৰতম্যৰ দ্বাৰাই মধ্যমা প্ৰভাৱান্বিত হয়।
5. বিভাজনটোৰ মানবোৰৰ পাৰ্থক্য বেছি হ'লে মধ্যমা প্ৰতিনিধিত্বমূলক নহয়।
6. মধ্যমা $\times$ আৰেক্ষণৰ সংখ্যা $\neq$ আৰেক্ষণবোৰৰ যোগফল।

অৱস্থানমূলক পৰিমাপবোৰ (Positional measures or Partition values) ঃ

এটা শ্ৰেণীক কেইবাটাও সমান ভাগত ভাগ কৰিলে প্ৰত্যেকটো অংশই এটা মান নিৰ্দেশ কৰে আৰু এই মানবোৰক অৱস্থানমূলক মান বা পৰিমাপ বুলি কোৱা হয়। মধ্যমাই শ্ৰেণীটোক সমান দুটা ভাগত ভাগ কৰাৰ বাবে ইয়াক এটা অৱস্থানমূলক পৰিমাপ বোলা হয়।

আনহাতে এটা শ্ৰেণীক চাৰিটা সমান ভাগত ভাগ কৰিলে আমি তিনিটা অৱস্থানমূলক মান যেনে— প্ৰথম চতুৰাংশ (Q_1), দ্বিতীয় চতুৰাংশ (মধ্যমা Q_2) আৰু তৃতীয় চতুৰাংশ (Q_3) পাওঁ।



ইয়াত $Q_1 < Q_2 < Q_3$

প্ৰথম বা নিম্ন চতুৰাংশই (Q_1) বিভাজনটোক এনেদৰে ভাগ কৰে যে বিভাজনৰ 25% আৰেক্ষণৰ মান Q_1 তকৈ কম হয় আৰু 75% আৰেক্ষণৰ মান Q_1 তকৈ বেছি হয়।

তৃতীয় চতুৰাংশই (Q_3) বিভাজনটোক এনেদৰে ভাগ কৰে যে বিভাজনৰ 75% আৰেক্ষণৰ মান Q_3 তকৈ কম হয় আৰু 25% আৰেক্ষণৰ মান Q_3 তকৈ বেছি হয়।

এইদৰে বিভাজনটোক দশটা সমান ভাগত ভাগ কৰি আমি 9 টা দশমাংশ পাওঁ আৰু বিভাজনটোৰ এশটা সমান ভাগত ভাগ কৰিলে 99 টা শতাংশ পাওঁ।

দশমাংশ কেইটাক D_1, D_2 .... D_9 আখৰেৰে চিহ্নিত কৰা হয়।

শতাংশ কেইটাক P_1, P_2 .... P_{99} আখৰেৰে চিহ্নিত কৰা হয়।

এতেকে দেখা গ'ল—

$Q_1 = \frac{n}{4}$-তম চলকৰ মান $\quad D_1 = \frac{n}{10}$-তম চলকৰ মান $\quad P_1 = \frac{n}{100}$-তম চলকৰ মান

$Q_3 = \frac{3n}{4}$-তম চলকৰ মান $\quad D_2 = \frac{2n}{10}$-তম চলকৰ মান $\quad P_2 = \frac{2n}{100}$-তম চলকৰ মান

....

$D_9 = \frac{9n}{10}$-তম চলকৰ মান $\quad P_{99} = \frac{99n}{100}$-তম চলকৰ মান

টোকা ঃ

অৱস্থানমূলক পৰিমাপ নিৰ্ণয় কৰাৰ সময়ত মানবোৰ ঊৰ্ধ্বক্ৰমত সজাই ল'ব লাগে।

উদাহৰণ 5 ঃ তলৰ তথ্যখিনিৰ পৰা Q_1, Q_3, D_6, P_{30}-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা

(a) 6, 4, 10, 13, 9

(b)

দৈনিক মজুৰি (টকা) ঃ	100	110	120	130	140	150	160
বনুৱাৰ সংখ্যা ঃ	8	10	12	16	20	25	15

(c)

ওজন (কিলো) ঃ	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
পৰিসংখ্যা ঃ	18	37	45	27	10

সমাধান ঃ

(a) ইয়াত, n=5, তথ্যখিনি ঊৰ্ধ্বক্ৰমত সজাই লোৱা হ'ল— 4, 6, 9, 10, 13

$Q_1 = \frac{n}{4}$-তম চলকৰ মান $= \frac{5}{4}$ তম চলকৰ মান

$= 1.25$ তম চলকৰ মান

$=$ দ্বিতীয় মান $= 6.$

$Q_3 = \frac{3n}{4}$ তম চলকৰ মান $= \frac{3 \times 5}{4}$ তম চলকৰ মান

= 3.75 তম চলকৰ মান

= চতুৰ্থ মান = 10.

$P_{30} = \frac{30n}{100}$ তম চলকৰ মান $= \frac{30 \times 5}{100}$ তম চলকৰ মান

= 1.5 তম চলকৰ মান

= দ্বিতীয় মান = 6

(b) তথ্যখিনি মানৰ ঊৰ্ধ্বক্ৰমত সজাই ল'লে তলত দিয়া ধৰণে পোৱা যাব—

দৈনিক মজুৰি (টকাত) ঃ	100	110	120	130	140	150	160
সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা ঃ	8	18	30	46	66	91	106=n

$Q_1 = \frac{n}{4}$ তম চলকৰ মান $= \frac{106}{4}$ তম চলকৰ মান = 26.5 তম চলকৰ মান

= 27 তম চলকৰ মান

27 তম চলকৰ মান 30 সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাত অন্তৰ্ভুক্ত আৰু ইয়াৰ বিপৰীতে চলকৰ মান 120 টকা। সেয়েহে প্ৰথম চতুৰাংশ অৰ্থাৎ Q_1 ৰ মান = 120 টকা

$Q_3 = \frac{3n}{4}$ তম চলকৰ মান

$= \frac{3 \times 106}{4}$ তম চলকৰ মান

= 79.5 তম চলকৰ মান

= 80 তম চলকৰ মান

80 তম চলকৰ মান 91 সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাৰ অন্তৰ্ভুক্ত আৰু ইয়াৰ বিপৰীতে চলকৰ মান 150 টকা। সেয়েহে তৃতীয় চতুৰাংশ অৰ্থাৎ Q_3ৰ মান = 150 টকা

$P_{30} = \frac{30n}{100}$ তম চলকৰ মান

$= \frac{30 \times 106}{100}$ তম চলকৰ মান

= 31.8 তম চলকৰ মান

= 32 তম চলকৰ মান

32 তম চলকৰ মান সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা 46ত অন্তৰ্ভুক্ত আৰু ইয়াৰ বিপৰীতে চলকৰ মান 130 টকা। সেয়েহে 30 তম শতাংশ অৰ্থাৎ P_{30}ৰ মান = 130 টকা

D_6= চলকৰ $\frac{6n}{10}$ তম মান = চলকৰ 64 তম মান

$\therefore\ D_6 = 140$

(c) তথ্যখিনিৰ সঞ্চয়ী পৰিসংখ্যা (ঊৰ্ধ্বক্ৰমত) এনে ধৰণৰ হ'ব—

ওজন ঃ	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
পৰিসংখ্যা ঃ	18	37	45	27	10
সঞ্চয়ী পৰিসংখ্যা ঃ	18	55	100	127	137

এতিয়া, $Q_1 = \frac{n}{4}$তম চলকৰ মান $= \frac{137}{4}$তম চলকৰ মান = 34.25 তম চলকৰ মান
= চলকৰ 35 তম মান

চলকৰ 35 তম মান সঞ্চয়ী পৰিসংখ্যাত অন্তৰ্ভুক্ত আৰু ইয়াৰ বিপৰীতে বিভাগ হ'ল 40–50

$\therefore$ Q_1 ৰ মান (40–50) বিভাগত অন্তৰ্ভুক্ত।

Q_3 = চলকৰ $\frac{3n}{4}$ তম মান

= চলকৰ $\frac{3 \times 137}{4}$ তম মান

= চলকৰ 102.75 তম মান

= চলকৰ 103 তম মান

$\therefore$ Q_3 ৰ মান 60–70 বিভাগত অন্তৰ্ভুক্ত (আগৰ দৰে)

D_6 = চলকৰ $\frac{6n}{10}$ তম মান

= চলকৰ $\frac{6 \times 137}{10}$ তম মান

= চলকৰ 82.2 তম মান

= চলকৰ 83 তম মান

$\therefore$ D_6 ৰ মান 50–60 বিভাগত অন্তৰ্ভুক্ত

P_{30} = চলকৰ $\frac{30n}{100}$ তম মান

= চলকৰ $\frac{30 \times 137}{100}$ তম মান

= চলকৰ 42 তম মান

$\therefore$ P_{30} ৰ মান 40–50 বিভাগত অন্তৰ্ভুক্ত

এতিয়া সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ—

$$Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - cf}{f} \times c$$

$$= 40 + \frac{34.25 - 18}{37} \times 10$$

$$= 40 + \frac{162.5}{37}$$

$$\simeq 40 + 4.4$$

$$\simeq 44.4$$

$$Q_2 = L + \frac{\frac{3n}{4} - cf}{f} \times c$$

$$= 60 + \frac{102.75 - 100}{27} \times 10$$

$$= 60 + \frac{27.5}{27}$$

$$= 61.02$$

$$D_6 = L + \frac{\frac{6n}{10} - cf}{f} \times 10 \qquad P_{30} = L + \frac{\frac{30n}{100} - cf}{f} \times c$$

$$= 50 + \frac{82.2 - 55}{37} \times 10 \qquad = 40 + \frac{41.1 - 18}{37} \times 10$$

$$= 50 + \frac{272}{37} \qquad = 40 + \frac{231}{37}$$

$$\simeq 50 + 7.4 \qquad \simeq 40 + 6.3$$

$$= 57.4 \qquad \simeq 46.3$$

অৱস্থানমূলক পৰিমাপবোৰৰ সুবিধা আৰু প্ৰয়োজনীয়তা ঃ

সুবিধা ঃ

1. লেখচিত্ৰ অৰ্থাৎ তোৰণৰ সহায়েৰে পৰিমাপবোৰ নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।
2. বিভাগৰ নিম্ন বা উচ্চসীমা মুক্ত ধৰণৰ হ'লেও অৱস্থানমূলক পৰিমাপবোৰ নিৰ্ণয় কৰা সম্ভৱ।
3. বিভাজনটোত লঘুমান বা গুৰুমান থাকিলেও পৰিমাপবোৰ প্ৰভাৱান্বিত নহয়।
4. সম্পূৰ্ণ তথ্যৰ অবিহনে অৱস্থানমূলক পৰিমাপ নিৰ্ণয় কৰা সম্ভৱ।
5. এটা বিভাজনৰ আংশিকভাৱে অধ্যয়ন কৰিলে বিভাজনটোৰ গতিবিধি বা ধাৰা সম্বন্ধে থুলমূলকৈ হ'লেও আভাস এটা পাব পাৰি। ফলত এই বিষয়ে ভৱিষ্যৎ আঁচনি যুগুতোৱা সম্ভৱ।

অসুবিধা ঃ

1. তথ্যখিনি মানৰ ক্ৰম অনুসৰি সজাব লাগে।
2. অৱস্থানমূলক পৰিমাপবোৰ সকলো আৰেক্ষণক অন্তৰ্ভুক্ত নকৰে।
3. বীজ গণিতীয় সম্প্ৰসাৰণ সম্ভৱ নহয় কিয়নো বিভিন্ন বিভাজনৰ আৰেক্ষণৰ সংখ্যা বা পৰিসংখ্যা সমান নাথাকে। এনেকুৱা বিভাজনবোৰৰ অৱস্থানমূলক পৰিমাপবোৰ বিভিন্ন হোৱাটো স্বাভাৱিক।

প্ৰয়োজনীয়তা ঃ বিভিন্ন কাৰণত এটা বিভাজনৰ সম্পূৰ্ণ তথ্য সংগ্ৰহ কৰা সম্ভৱ নহয়। এই ক্ষেত্ৰত অৱস্থানমূলক পৰিমাপবোৰ কাৰ্যকৰী।

অৱস্থামূলক পৰিমাপৰ বিশেষকৈ শতাংশ পৰিমাপটোৰে মনস্তাত্বিক নাইবা শিক্ষামূলক পৰিসংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত বিশেষ ফলপ্ৰসূ।

অৱস্থানমূলক পৰিমাপৰ বিশেষকৈ চতুৰাংশ পৰিমাণটো অৰ্থনৈতিক বা ব্যৱসায়িক সমস্যাবোৰৰ ক্ষেত্ৰত বিশেষ ভূমিকা লয়।

কোনো কোনো সমস্যাৰ ক্ষেত্ৰত সম্পূৰ্ণ বিভাজন সম্বন্ধে জ্ঞান লাভৰ প্ৰয়োজন নাই। বিভাজনটোৰ আংশিক তথ্যই যথেষ্ট। এনেস্থলত অৱস্থানতমূলক পৰিমাপবোৰে বিভাজনটোৰ গতিবিধি বা ধাৰা সম্বন্ধে আলোকপাত কৰে। ফলত ভৱিষ্যৎ আঁচনি যুগুতোৱাত সুবিধা হয়।

3. ম'ড বা বহুলক ঃ

বিভাজন এটাৰ চলকৰ মানবোৰৰ ভিতৰত যিটো মানৰ পৰিসংখ্যা আটাইতকৈ বেছি তাকেই ম'ড বা বহুলক বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াৰ ওচৰা-উচৰিকৈ থকা আৰেক্ষণবোৰৰ ঘনত্ব বেছি। সেয়েহে কোনো কোনো ক্ষেত্ৰত বহুলকক অইন গড়বোৰৰ তুলনাত বেছি গুৰুত্বপূৰ্ণ বুলি বিবেচনা কৰা হয়।

তলত কেইটামান উদাহৰণ দিয়া হ'ল—

ভাৰতৰ মানুহৰ গড় উচ্চতা 1.68 মিঃ, বৃত্তিমূলক কলেজ এখনত ছাত্ৰ এজনৰ মাহিলী খৰচ 3000 টকা, যোৱা মাহত বাটাৰ জোতাৰ দোকানত 7নং জোতাযোৰৰ বিক্ৰী বেছি। ইত্যাদি।

ওপৰৰ কথাখিনিত বহুলকৰ কথা কোৱা হৈছে।

এটা বিভাজনৰ বহুলক কেইবাটাও হ'ব পাৰে। সেইবোৰ বিভাজনক দ্বিবহুলক, ত্ৰিবহুলক ইত্যাদি বিভাজন বোলা হয়।

এনেস্থলত বহুলক নিৰ্ণয় কৰা টান হয়। সেয়েহে, বহুলক নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰত তলত দিয়া সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

সূত্ৰটো হ'ল— মাধ্য–বহুলক $\equiv$ 3 (মাধ্য–মধ্যমা)

বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত চলকৰ যিটো মানৰ পৰিসংখ্যা আটাইতকৈ বেছি সেই মানটোৱেই বহুলকৰ মান। বিভাজনটো দ্বিবহুলক বা ত্ৰিবহুলক ইত্যাদি থকা হ'লে ওপৰৰ সূত্ৰটো প্ৰয়োগ কৰি বহুলক নিৰ্ণয় কৰা হয়।

অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত তলত দিয়া সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰা হয়। সূত্ৰটো হ'ল—

$$\text{ম'ড বা বহুলক} = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$$

য'ত— L = বহুলক বিভাগৰ নিম্নসীমা

f_1 = বহুলক বিভাগৰ পৰিসংখ্যা

f_0 = বহুলক বিভাগৰ ঠিক পূৰ্ব্ববৰ্তী (আগৰ) বিভাগৰ পৰিসংখ্যা।

f_2 = বহুলক বিভাগৰ ঠিক পিছৰ বিভাগৰ পৰিসংখ্যা।

C = বহুলক বিভাগৰ অন্তৰাল।

টোকা ঃ

(1) যিটো বিভাগৰ পৰিসংখ্যা আটাইতকৈ বেছি সেই বিভাগটো হ'ল বহুলকৰ মান থকা বিভাগ।

(2) বহুলক নিৰ্ণয় কৰাৰ ওপৰ সূত্ৰটোৰ ব্যৱহাৰ কেইটামান অভিধাৰণাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল।

অভিধাৰণা ঃ

(a) বিভাগবোৰ অবিচ্ছিন্ন ধৰণৰ হ'ব লাগে। বিভাগবোৰ অবিচ্ছিন্ন ধৰণৰ নহ'লে অবিচ্ছিন্ন ধৰণৰ কৰি ল'ব লাগে।

(b) বিভাগবোৰৰ অন্তৰাল সমান হ'ব লাগে।

নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণী আৰু বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত বহুলক নিৰীক্ষণ পদ্ধতিত নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত বহুলক নিৰ্ণয়

উদাহৰণ 1 ঃ তলৰ তথ্যৰ পৰা ম'ড নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(a)

নম্বৰ ঃ	10–20	20–30	30–40	40–50	50-60	60–70
ছাত্ৰসংখ্যা ঃ	5	8	12	16	10	8

(b)

নম্বৰ (ওপৰত)	10	20	30	40	50	60	70
ছাত্ৰসংখ্যা ঃ	59	54	46	34	18	8	0

(c)

মজুৰি ঃ	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100-109
বনুৱাৰ সংখ্যা ঃ	5	20	40	50	30	6

(d) 12, 17, 8, 13, 17, 20

সমাধান ঃ (a) ইয়াত বহুলক থকা বিভাগ হ'ল (40–50)

সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ ঃ

$$\text{বহুলক} = L + \frac{f_1 - f_2}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$$

$$= 40 + \frac{16-12}{2 \times 16 - 12 - 10} \times 10$$

$= 44$ নম্বৰ

ইয়াত $f_1 = 16$, $f_0 = 12$, $f_2 = 10$, $C = 10$

(b) প্ৰদত্ত বিভাজনটো সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজন। ইয়াক এটা সাধাৰণ বাৰংবাৰতা বিভাজনত তলত দিয়া ধৰণে দেখুউৱা হ'ল।

নম্বৰ ঃ	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
ছাত্ৰসংখ্যা ঃ	5	8	12	16	10	8

(সমাধান (a) অংশৰ দৰে)

(c) ইয়াত বিভাগবোৰ বিচ্ছিন্ন ধৰণৰ। সেয়েহে বিভাগবোৰ অবিচ্ছিন্ন ধৰণত প্ৰকাশ কৰি তলত দেখুউৱা হ'ল।

বিভাগ সীমা ঃ	49.5–59.5	59.5–69.5	69.5–79.5	79.5–89.5	89.5–99.5	99.5–109.5
পৰিসংখ্যা ঃ	5	20	40	50	30	6

ইয়াত, বহুলক বিভাগ হ'ল 78.5–59.5 (কিয়নো বিভাগটোৰ পৰিসংখ্যা 50 আটাইতকৈ বেছি)

সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ ঃ

$$\text{বহুলক} = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$$

$$= 79.5 + \frac{50-40}{100-40-30} \times 10 = 82.83 \text{ টকা}$$

টোকা ঃ

বিভাগৰ মধ্যমান আৰু পৰিসংখ্যা দিয়া থাকিলে, প্ৰথমতে বিভাগবোৰ নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব আৰু তাৰ পিছত মধ্যমা, মাধ্য, বহুল ইত্যাতি নিৰ্ণয় কৰিব লাগে। বিভাগবোৰ নিৰ্ণয় কৰাৰ পদ্ধতি আগতে আলোচনা কৰা হৈছে।

(d) ইয়াত 17 মানটো আটাইতকৈ বেছি বাৰ অৰ্থাৎ 2 বাৰ (অইন মানকেইটাৰ তুলনাত) অন্তৰ্ভুক্ত হৈছে অৰ্থাৎ 17-ৰ পৰিসংখ্যা আটাইতকৈ বেছি, সেয়েহে বহুলকৰ মান 17 হ'ব।

টোকা ঃ

যদি প্ৰত্যেকটো মান এবাৰকৈ সংঘটিত হয় তেনেহ'লে তথ্যখিনিৰ কোনো বহুলক নাথাকে।

বহুলকৰ সুবিধা, অসুবিধা আৰু ব্যৱহাৰ ঃ

সুবিধা ঃ

1. নিৰীক্ষণ পদ্ধতিত বহুলক নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি (নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণী আৰু বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত)
2. বিভাজনত থকা লঘুমান বা গুৰুমানৰ দ্বাৰা বহুলক প্ৰভাৱান্বিত নহয়।
3. সীমাযুক্ত বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত বহুলক নিৰ্ণয় কৰা সম্ভৱ।
4. লেখ পদ্ধতিত বহুলক নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

অসুবিধা ঃ

1. বীজগণিতীয় সম্প্ৰসাৰণ সম্ভৱ নহয়।
2. আৰেক্ষণৰ সংখ্যা কম হ'লে বহুলক বিভাজনটোত নাথাকিবও পাৰে।
3. প্ৰতিটো আৰেক্ষণৰ মান, বহুলক নিৰ্ণয়ত অন্তৰ্ভুক্ত নহয়।
4. বহুলকৰ সংজ্ঞা সঠিক নহয়।
5. প্ৰতিদৰ্শজ তাৰতম্যৰ দ্বাৰাই বহুলক প্ৰভাৱান্বিত হয়।

ব্যৱহাৰ ঃ

আৰ্থ-সামাজিক আৰু ব্যৱসায়িক সমস্যাবোৰৰ ক্ষেত্ৰত অইন গড়বোৰৰ তুলনাত বহুলকেই বেছি ফলপ্ৰসূ কিয়নো এইবোৰ সমস্যাৰ ক্ষেত্ৰত সৰহসংখ্যক মানুহৰ ৰুচি, ব্যৱহাৰ, চাহিদা ইত্যাদি কথাখিনিৰ ওপৰত গুৰুত্ব দিয়া হয়।

কোনো সমস্যাৰ ক্ষেত্ৰত উপযুক্ত গড় নিৰ্বাচনঃ

বিভিন্ন গড়ৰ বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য আছে। সকলো সমস্যাৰ ক্ষেত্ৰত কোনো এটা গড় আদৰ্শ হ'ব নোৱাৰে। এতেকে উপযুক্ত গড় নিৰ্বাচনৰ সময়ত তলৰ কথাখিনিৰ ওপৰত গুৰুত্ব দিব লাগে।

উন্নত ধৰণৰ সাংখ্যিকীয় বিশ্লেষণৰ বাবে উপযুক্ত গড় নিৰ্বাচন নিৰ্ভৰ কৰে তলৰ কথাখিনিৰ ওপৰত

(i) অনুসন্ধানৰ উদ্দেশ্য, প্ৰকৃতি, পৰিসৰৰ ওপৰত পোৱা সংগৃহীত তথা

(ii) সংশ্লিষ্ট চলকৰ প্ৰকৃতি

(iii) শ্ৰেণী বিন্যাসৰ পদ্ধতি

ইয়াৰ বাহিৰেও প্ৰত্যেক গড়ৰ ব্যৱহাৰ সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ প্ৰয়োজন। প্ৰত্যেক গড়ৰ ব্যৱহাৰ তলত উল্লেখ কৰা হ'ল—

মাধ্য ঃ (1) শ্ৰেণীৰ প্ৰতিটো আৱেক্ষণৰ গুৰুত্ব সমান হ'লে
(2) শ্ৰেণীটোত লঘুমান বা গুৰুমান সংখ্যা কম থাকিলে।

গুণোত্তৰ মাধ্য ঃ (1) অনুপাত, হাৰ, শতাংশৰ গড় নিৰ্ণয়ত।
(2) সূচকাংকৰ গড় নিৰ্ণয়ত
(3) শ্ৰেণীটোৱেই গুণোত্তৰ শ্ৰেণী গঠন কৰিলে

প্ৰসংবাদী মাধ্য ঃ সমান দূৰত্বৰ বাবে আৰু বিভিন্ন গতিবেগ থাকিলে।

মধ্যমা ঃ (1) সীমামুক্ত বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত
(2) অসমান অন্তৰালত বিভক্ত থকা বিভাগ

বহুলক ঃ (i) ডাঙৰ পৰিসংখ্যা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত
(ii) আৰ্থ-সামাজিক আৰু ব্যৱসায়িক সমস্যাবোৰৰ ক্ষেত্ৰত।

এই প্ৰসংগত উল্লেখ কৰিব পাৰি যে মাধ্যক প্ৰায় সকলো ধৰণৰ বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি। কিয়নো ই আদৰ্শ গড়ৰ প্ৰায় আটাইকেইটা বৈশিষ্ট্য সিদ্ধ কৰে।

(4) **গুণোত্তৰ মাধ্য (নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত) ঃ**

দুটা সংখ্যা x_1 আৰু x_2-ৰ গুণোত্তৰ মাধ্য হ'ব সংখ্যা দুটাৰ গুণফলৰ ধনাত্মক বৰ্গমূল। অৰ্থাৎ, গুণোত্তৰ মাধ্য $= +\sqrt{x_1 \times x_2}$

এটা চলক x-ৰ n-সংখ্যক মান যেনে x_1, x_2, x_3,........, x_n হ'লে, মান কেইটাৰ গুণোত্তৰ মাধ্য হ'ব—

$$\text{গুণোত্তৰ মাধ্য (GM)} = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \ldots\ldots \times x_n}$$
$$= \left(x_1 \times x_2 \times x_3 \times \ldots\ldots \times x_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

উভয়পক্ষ লগ লৈ পাওঁ—

$$\text{Log GM} = \frac{1}{n}\log\left(x_1 \times x_2 \times \ldots\ldots \times x_n\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left(\log x_1 + \log x_2 + \ldots\ldots + \log x_n\right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

$\boxed{\therefore \ \text{GM} = \text{anti}\log\frac{1}{n}\sum \log x}$ .... (1), n হ'ল মুঠ আৱেক্ষণৰ সংখ্যা

(1) নং সূত্ৰটো নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰযোজ্য।

বিচ্ছিন্ন আৰু অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত গুণোত্তৰ মাধ্য ঃ

গুণোত্তৰ মাধ্যৰ সূত্ৰটো তলত দিয়া ধৰণে পোৱা যাব—

$$\boxed{GM=\text{antilog}\frac{1}{n}\sum f.\log x.................(2)}$$

ইয়াত n = মুঠ পৰিসংখ্যা

টোকা ঃ

(1) বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত x-বোৰ চলকৰ মান

(2) অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত x-বোৰ বিভাগৰ মধ্যমান।

গুণোত্তৰ মাধ্যৰ সুবিধা, অসুবিধা আৰু ইয়াৰ ব্যৱহাৰ ঃ

সুবিধা ঃ

1. ইয়াৰ সংজ্ঞা সঠিক বা সুদৃঢ়।
2. ই আটাইবোৰ আৰেক্ষণক অন্তৰ্ভুক্ত কৰে।
3. বীজগণিতীয় সম্প্ৰসাৰণ সম্ভৱ।
4. মাধ্যৰ তুলনাত ই লঘুমান বা গুৰুমানৰ দ্বাৰা প্ৰভাৱান্বিত নহয়।
5. প্ৰতিদৰ্শজ তাৰতম্যৰ দ্বাৰাই গুণোত্তৰ মাধ্য প্ৰভাৱান্বিত নহয়।

অসুবিধা ঃ

1. ই বুজিবলৈ আৰু গণনা কৰিবলৈ সহজ নহয়।
2. এটা আৰেক্ষণৰ মান 0 অথবা ঋণাত্মক হ'লে গুণোত্তৰ মাধ্য গণনা কৰিব নোৱাৰি।

ব্যৱহাৰ ঃ

1. বিক্ৰী, উৎপাদন বৃদ্ধিৰ শতাংশৰ গড়, হাৰ আৰু জনসংখ্যাৰ পৰিৱৰ্তনৰ শতাংশৰ গড় হাৰ নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰত গুণোত্তৰ গড় ব্যৱহাৰ হয়।
2. সূচকাংকৰ নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰত গুণোত্তৰ গড় বেছি ফলপ্ৰসূ।
3. অৰ্থনৈতিক আৰু সামাজিক বিজ্ঞানৰ কিছুমান সমস্যাৰ ক্ষেত্ৰত য'ত লঘুমানৰ মানবোৰক বেছি গুৰুত্ব আৰু গুৰু মানবোৰক কম গুৰুত্ব দিয়া হয়। গুণোত্তৰ গড় বেছি কাৰ্যকৰী।

গুণোত্তৰ গড়ৰ ধৰ্ম ঃ

1. এটা চলকৰ n-সংখ্যক মানৰ গুণফল = সিহঁতৰ গুণোত্তৰ মাধ্যৰ n-তম ঘাত

   অৰ্থাৎ, $x_1 \times x_2 \times .... \times x_n = (GM)^n$

2. n-সংখ্যক আৰেক্ষণৰ গুণোত্তৰ মাধ্যৰ ঘাতাংক মান = সিহঁতৰ ঘাতাংকৰ মাধ্য।

3. প্ৰত্যেক আৰেক্ষণ আৰু গুণোত্তৰ মাধ্যৰ অনুপাতৰ গুণফল 1 হ'ব। অৰ্থাৎ

$$\frac{x_1}{GM}\times\frac{x_2}{GM}\times\frac{x_3}{GM}\times\ldots\ldots\times\frac{x_n}{GM}=1 \text{ হ'ব—}$$

কিয়নো— $GM=\sqrt[n]{x_1\times x_2\times\ldots\ldots\times x_n}$

$\therefore\ (GM)^n = x_1\times x_2\times\ldots\ldots\ldots\ldots\times x_n$

$$\Rightarrow\frac{x_1}{GM}\times\frac{x_2}{GM}\times\ldots\ldots\times\frac{x_n}{GM}$$

$$\Rightarrow\frac{(GM)^n}{GM.GM.GM\ldots\ldots\ldots \text{ n সংখ্যক বাৰ}}=\frac{(GM)^n}{(GM)^n}=1$$

4. n_1, n_2,.........n_k আৰেক্ষণ থকা k সংখ্যক শ্ৰেণী থাকিলে আৰু শ্ৰেণীকেইটাৰ গুণোত্তৰ গড় ক্ৰমে G_1, G_2,........ G_k হ'লে শ্ৰেণীকেইটাৰ যুগ্ম গুণোত্তৰ গড় হ'ব—

$$\log G=\frac{n_1\log G_1+n_2\log G_2+\ldots..+n_k\log G_k}{n_1+n_2+\ldots\ldots+n_k}$$

উদাহৰণ 1 ঃ তলৰ তথ্যৰ গুণোত্তৰ গড় নিৰ্ণয় কৰা ঃ

1. 111, 171, 191, 212
2. x: 111 171 191 212
   f : 3 2 4 5
3. বিভাগ : 0–10 10–20 20–30 30–40
   পৰিসংখ্যা : 8 10 5 2

সমাধান ঃ (1)

x	log x
111	2.0453
171	2.2330
191	2.2810
212	2.3263
মুঠ	8.8856

ইয়াত, n=4

এতিয়া,

GM = এণ্টিলগ $\frac{1}{n}\sum\log x$ (গুণোত্তৰ মাধ্য)

= এণ্টিলগ $\frac{1}{4}\times 8.8856$

= এণ্টিলগ 2.2214

$\therefore$ GM = 166.5

(2)

x	f	log x	f log x
111	3	2.0453	6.1359
171	2	2.2330	4.4660
191	4	2.2810	9.1240
212	5	2.3263	11.6315
মুঠ	14=n		31.3574

এতিয়া,

$$GM = \text{anti}\log\frac{1}{2}\sum f\log x$$
$$= \text{anti}\log\frac{1}{14}\times 31.3574$$
$$= \text{anti}\log 2.2391$$
$$= 173.4$$

3. **সংকেত ঃ** ইয়াৰ বিভাগৰ মধ্যমানবোৰক x-ৰ মান বুলি ধৰা এতিয়া (2) নং প্ৰশ্নৰ দৰে চেষ্টা কৰা।

হৰাত্মক গড় (প্ৰসংবাদী মাধ্য) (Harmonic Mean) ঃ

নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত

সংজ্ঞা ঃ X-চলকৰ n- সংখ্যক মান x_1, x_2, x_3,....... x_n-ৰ প্ৰসংবাদী হ'ল মানকেইটাৰ অনোন্যকবোৰৰ মাধ্যৰ অনোন্যক অৰ্থাৎ

$$\text{প্ৰসংবাদী মাধ্য} = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+........+\frac{1}{x_n}\right)}$$

$$= \frac{n}{\sum f.\frac{1}{x}}$$, n-হ'ল আৰেক্ষণৰ সংখ্যা।

বিচ্ছিন্ন আৰু অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত

$$\text{প্ৰসংবাদী মাধ্য} = \frac{n}{\sum f.\frac{1}{x}}$$, n হ'ল মুঠ পৰিসংখ্যা

টোকা ঃ

(1) বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত x-বোৰ হ'ল চলকমান।

(2) অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত x-বোৰ হ'ল বিভাগৰ মধ্যমান।

(3) বিভিন্ন গতিবেগত একেই দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰিলে গড়, গতিবেগ নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰসংবাদী মাধ্য উলিওৱা হয়। আনহাতে যদি বিভিন্ন গতিবেগত বিভিন্ন দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰাৰ সমান সময় দিয়া থাকে, তেন্তে গড় গতিবেগ নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰত মাধ্য উলিওৱা হয়।

(কথাখিনি পিছত উদাহৰণেৰে ব্যাখ্যা কৰা হ'ব।)

গুণোত্তৰ মাধ্য আৰু প্ৰসংবাদী মাধ্যৰ কেইটামান উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ মটৰ গাড়ী এখনে 50 মাইল দৈৰ্ঘ্যৰ বৰ্গক্ষেত্ৰ এটাৰ বাহুকেইটা যথাক্ৰমে প্ৰতি ঘণ্টাত 50 মাইল বেগত, 20 মাইল বেগত, 40 মাইল বেগত আৰু 25 মাইল বেগত অতিক্ৰম কৰিলে। গাড়ীখনৰ গড় গতিবেগ কিমান?

সমাধান ঃ যিহেতু বৰ্গক্ষেত্ৰৰ বাহু চাৰিটা প্ৰত্যেকটোৰ দৈৰ্ঘ্য 50 মাইল (অৰ্থাৎ সমান দৈৰ্ঘ্যৰ দূৰত্ব) আৰু গতিবেগবোৰ বিভিন্ন, সেয়েহে নিৰ্ণেয় গড় গতিবেগ উলিওৱাত প্ৰসংবাদী মাধ্য ব্যৱহাৰ হ'ব।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় গড় গতিবেগ (প্ৰসংবাদী মাধ্য) $= \dfrac{4}{\frac{1}{50}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{25}}$

$=$ 30 মাইল (প্ৰায়) প্ৰতি ঘণ্টাত

ইয়াত, $x_1=50$, $x_2=20$, $x_3=40$, $x_4=25$, $n=4$

উদাহৰণ 2 ঃ এজন মানুহে প্ৰথম দিনত প্ৰতি ঘণ্টাত 45 কি. মি. বেগত 10 ঘণ্টা বাইক চলালে, দ্বিতীয় দিনত প্ৰতি ঘণ্টাত 40 কি. মি. বেগত 10 ঘণ্টা বাইক চলালে আৰু তৃতীয় দিনত প্ৰতিঘণ্টাত 38 কি. মি. বেগত 10 ঘণ্টা বাইক চলালে। প্ৰতিঘণ্টাত গড় গতিবেগ কিমান?

সমাধান ঃ যিহেতু প্ৰতিদিনৰ বাইক চলোৱা সময় সমান আৰু প্ৰতিদিনৰ গতিবেগ বিভিন্ন আৰু প্ৰতিদিনৰ অতিক্ৰম কৰা দূৰত্ব সমান নহয়, সেয়েহে এইক্ষেত্ৰত গড় গতিবেগ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ মাধ্য উলিওৱা হ'ব।

তিনি দিনত অতিক্ৰম কৰাৰ মুঠ দূৰত্ব = (450+400+380) কি. মি.

= 1230 কি. মি.

মুঠ সময় = 30 ঘণ্টা

$\therefore$ গড় গতিবেগ $= \dfrac{1230}{30} = 41$ কি. মি. প্ৰতিঘণ্টা।

উদাহৰণ 3 ঃ কোনো বস্তুৰ মূল্য 2005 চনৰ পৰা 2006 চনৰ ভিতৰত 5%, 2006 চনৰ পৰা 2007 চনৰ ভিতৰত 8% আৰু 2007 চনৰ পৰা 2008 চনৰ ভিতৰত 77% বৃদ্ধি পায়। 2006 চনৰ পৰা 2008 চনৰ ভিতৰত মূল্যৰ গড় বৃদ্ধি কিমান?

সমাধান ঃ 5, 8 আৰু 77 ৰ মাধ্য 30। 30% প্ৰকৃত গড় বৃদ্ধি নহয়। কাৰণ 5% আৰু 8% ৰ তুলনাত 77% বৃদ্ধিক কম গুৰুত্ব দিয়া হ'ব। সেয়েহে গুণোত্তৰ গড় নিৰ্ণয় কৰা হ'ব।

বৃদ্ধিৰ শতকৰা হাৰ	পূৰ্বৱৰ্তী বছৰক 100 ধৰি পৰৱৰ্তী বছৰৰ শেষত মূল্য ‘x’	log x
5	105	2.0212
8	108	2.0334
77	177	2.2480
মুঠ		6.3026

$$GM = \text{anti log } \frac{1}{n}\Sigma \log x = \text{Anti} \log \frac{1}{3} \times 6.3026$$

$$= \text{Anti log } 2.1009$$

$$= 126.2$$

এতেকে 2006 চনৰ পৰা 2008 চনৰ ভিতৰত মূল্যৰ গড় বৃদ্ধি

$= 126.2–100 = 26.2\% = 26\%$ (প্ৰায়)

উদাহৰণ 4 ঃ যোৱা পাঁচ বছৰত অৰ্থনৈতিক বছৰেকীয়া উন্নতিৰ হাৰ ক্ৰমে 1.5, 2.7, 3.0, 4.5 আৰু 6.2 (শতকৰা হাৰত) এই কালছোৱাত অৰ্থনৈতিক উন্নতিৰ বছৰেকীয়া গড় হাৰ কিমান?

সমাধান ঃ ইয়াত গুণোত্তৰ গড় ব্যৱহাৰ হ’ব।

বছৰেকীয়া উন্নতিৰ হাৰ	**বছৰ শেষত আপেক্ষিক উন্নতি**	log x
1.5	101.5	2.0064
2.7	102.7	2.0016
3.0	103	2.0128
4.5	104.5	2.0191
6.2	106.2	2.0261
মুঠ		10.076

$$GM = \text{anti} \log \frac{1}{n}\Sigma \log x = \text{anti} \log \frac{1}{5} \times 10.076$$

$$= \text{anti log } 2.0152$$

$$= 103.5$$

এতিয়া উক্ত কালছোৱাত অৰ্থনৈতিক উন্নতিৰ গড় হাৰ $= (103.5–100)\%$

$= 3.5\%$

প্ৰসংবাদী মাধ্যৰ সুবিধা, অসুবিধা আৰু ব্যৱহাৰ

সুবিধা ঃ

1. প্ৰসংবাদী মাধ্যই আটাইকেইটা আৰেক্ষণক গণনা কাৰ্যত অন্তৰ্ভুক্ত কৰে।
2. বীজগণিতীয় সম্প্ৰসাৰণ সম্ভৱ।
3. সময়, দূৰত্ব, হাৰ সম্বন্ধীয় সমস্যাৰ ক্ষেত্ৰত ফলপ্ৰসূ।
4. সৰু মানবোৰক বেছি গুৰুত্ব দিয়া হ'লে এই গড় কাৰ্যকৰী।

অসুবিধা ঃ

1. ই বুজিবলৈ আৰু গণনা কৰিবলৈ টান।
2. সৰু মানবোৰক বেছি গুৰুত্ব দিয়াত ইয়াৰ ব্যৱহাৰ সীমাবদ্ধ।
3. তথ্যখিনিত ঋণাত্মক মান বা কোনো মান '0' হ'লে প্ৰসংবাদী মাধ্য গণনা কৰিব নোৱাৰি।
4. বিশেষ ধৰণৰ সমস্যাৰ কাৰণে ব্যৱহাৰ হোৱা বাবে ইয়াৰ ব্যৱহাৰ সীমাবদ্ধ।

ব্যৱহাৰ ঃ

সমান দূৰত্ব আৰু বিভিন্ন গতিবেগ থাকিলে গড় গতিবেগ নিৰ্ণয়ত প্ৰসংবাদী মাধ্য ব্যৱহাৰ হয়।

মাধ্য, গুণোত্তৰ গড় আৰু প্ৰসংবাদী মাধ্য সম্বন্ধ ঃ

সম্বন্ধকেইটা হ'ল—

[1) মাধ্য ≥ গুণোত্তৰ গড় ≥ প্ৰসংবাদী মাধ্য

(2) গুণোত্তৰ গড় $=\sqrt{\text{মাধ্য} \times \text{প্ৰসংবাদী মাধ্য}}$

(1) **নং সম্বন্ধৰ প্ৰমাণ ঃ**

ধৰা হ'ল, x_1 আৰু x_2 দুটা ধনাত্মক সংখ্যা ($x_1 > 0,\ x_2 > 0$) তেন্তে মাধ্য $=\frac{x_1+x_2}{2}$, গুণোত্তৰ গড় $=\sqrt{x_1 x_2}$, প্ৰসংবাদী মাধ্য $=\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$

এতিয়া, মাধ্য— গুণোত্তৰ গড় $=\frac{x_1+x_2}{2}-\sqrt{x_1x_2}$

$$=\frac{x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2$$

$\because \left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2$ এটি বৰ্গৰাশি, সেয়েহে ই সদায় ধনাত্মক

এতেকে, $\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0$

$$\therefore \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0$$

অৰ্থাৎ, মাধ্য— গুণোত্তৰ মাধ্য ≥ 0

$\Rightarrow$ মাধ্য $\geq$ গুণোত্তৰ মাধ্য

মাধ্য = গুণোত্তৰ মাধ্য হ'ব যদিহে $\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}$ হয়

অৰ্থাৎ $x_1 = x_2$ হয়

আকৌ, গুণোত্তৰ মাধ্য— প্ৰসংবাদী মাধ্য $= \sqrt{x_1x_2} - \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$

$$= \sqrt{x_1x_2}\left(1-\frac{2\sqrt{x_1x_2}}{x_1+x_2}\right)$$

$$= \sqrt{x_1x_2}\left(\frac{x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}}{x_1+x_2}\right)$$

$$= \sqrt{x_1x_2}\cdot\frac{\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2}{x_1+x_2}$$

আগৰ দৰে, $\because x_1>0,\ x_2>0,\ \sqrt{x_1x_2}\times\frac{\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2}{x_1+x_2} \geq 0$

$\therefore$ গুণোত্তৰ মাধ্য — প্ৰসংবাদী মাধ্য ≥ 0

$\Rightarrow$ গুণোত্তৰ মাধ্য $\geq$ প্ৰসংবাদী মাধ্য

যদি $x_1 = x_2$ হয়, তেনেহ'লে গুণোত্তৰ মাধ্য = প্ৰসংবাদী মাধ্য

(2) **প্ৰমাণ ঃ**

আগৰ দৰে, মাধ্য $\times$ প্ৰসংবাদী মাধ্য $= \frac{x_1+x_2}{2}\times\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$

$$= x_1x_2$$

$\therefore \sqrt{\text{মাধ্য} \times \text{প্ৰসংবাদী মাধ্য}} = \sqrt{x_1x_2} =$ গুণোত্তৰ মাধ্য

উদাহৰণ 5 ঃ দুটা ধনাত্মক সংখ্যাৰ মাধ্য আৰু গুণোত্তৰ গড় ক্ৰমে 5 আৰু 4 হ'লে সংখ্যা দুটাৰ মান আৰু প্ৰসংবাদী মাধ্যৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, সংখ্যা দুটা x_1 আৰু x_2 $(x_1>0, x_2>0)$

এতিয়া, মাধ্য $= \frac{x_1 + x_2}{2} = 5$ $\therefore$ $x_1+x_2=10$........(1)

গুণোত্তৰ মাধ্য $= \sqrt{x_1 x_2} = 4$ $\therefore$ $x_1+x_2=16$........(2) [বৰ্গ কৰি]

(1) নং সমীকৰণৰ পৰা পাওঁ ঃ $x_2 = 10-x_1$

(2) নং সমীকৰণৰ পৰা পাওঁ ঃ $x_1 = (10-x_1)=16$

$\Rightarrow x_1^2-10x_1+16=0$

$\Rightarrow x_1^2-2x_1+8x_1+16=0$

$\Rightarrow x_1(x_1-2)-8(x_1-2)=0$

$\therefore x_1= 2$ অথবা 8

এতিয়া (1) নং সমীকৰণৰ পৰা পাওঁ ঃ $x_2=10-2$ অথবা $10-8$

$= 8$ অথবা 2

$\therefore$ সংখ্যা দুটা হ'ল 2 আৰু 8

আৰু প্ৰসংবাদী মাধ্য $= \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{2.2.8}{2+8} = \frac{32}{10} = 3.2$

অনুশীলনী

1. সাংখ্যিকীয় গড় বুলিলে কি বুজা? গড়বোৰক কিয় কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ পৰিমাপ বোলা হয়? আদৰ্শ গড়ৰ বৈশিষ্ট্যবোৰ কি কি?
2. মাধ্যক কিয় আদৰ্শ গড় বুলি বিবেচনা কৰা হয়? আদৰ্শ গড়ৰ বৈশিষ্ট্যৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি আলোচনা কৰা।
3. গড়বোৰে কি উদ্দেশ্য সিদ্ধ কৰে?
4. মাধ্যৰ ধৰ্মবোৰ কি কি?
5. অৱস্থানমূলক পৰিমাপ সম্বন্ধে টোকা লিখা।
6. তিনিবিধ গড়ৰ সংজ্ঞা লিখি সিহঁতৰ সুবিধা-অসুবিধাসমূহ আলচ কৰা।
7. প্ৰত্যেক গড়ৰ ব্যৱহাৰ আলচ কৰা।
8. মধ্যমা আৰু বহুলকৰ সংজ্ঞা লিখা আৰু সুবিধা-অসুবিধাসমূহ আলচ কৰা।
9. কোনো এটা সমস্যাৰ বাবে গড় বাছনি কৰাৰ চৰ্ত কি আৰু মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক কি ধৰণৰ পৰিস্থিতিত ব্যৱহাৰ হয়— বহলাই আলোচনা কৰা।
10. খালী ঠাই পূৰ কৰা ঃ
    - (i) লঘুমান বা উচ্চমানৰ দ্বাৰাই —— প্ৰভাৱান্বিত নহয়। (মধ্যমা)
    - (ii) লঘুমান বা উচ্চমানৰ দ্বাৰাই —— প্ৰভাৱান্বিত হয়। (মাধ্য)
    - (iii) এটা বিভাজনৰ বহুলকৰ মান দুটা হ'লে সেই বিভাজনক —— বিভাজন বোলা হয়। (দ্বিবহুলক)
    - (iv) সীমামুক্ত বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত —— নিৰ্ণয় কৰিব নোৱাৰি। (মাধ্য)
    - (v) —— গণনাৰ ক্ষেত্ৰত সকলো আৰেক্ষণ অন্তৰ্ভুক্ত কৰা হয়। (মাধ্য)
    - (vi) —— বিভাগৰ ক্ষেত্ৰত মধ্যমা বেছি উপযোগী। (সীমামুক্ত)
    - (vii) গুণধৰ্মী তথ্যৰ ক্ষেত্ৰত —— বেছি উপযোগী। (মধ্যমা)
    - (viii) Me, Q_1, আৰু Q_3 ৰ সম্পৰ্কটো হ'ল——। $(Me=\frac{Q_3-Q_1}{2})$
    - (ix) D_5, P_{80}, Me, আৰু P_{50}-ৰ সম্বন্ধ হ'ল —— $(D_5=Me=P_{50})$
    - (x) D_4, P_{60}, P_{75} আৰু Q_3-ৰ সম্বন্ধ হ'ল —— $(P_{75}=Q_3,\ P_{60}=D_4)$
    - (xi) $\overline{x}$, Me আৰু M_0-ৰ সম্বন্ধ হ'ল —— $(\overline{x}-M_0)=3(\overline{x}-Me)$
    - (xii) আৰেক্ষণবোৰৰ 25% 80-ৰ ওপৰত, 40% 50-ৰ তলত আৰু 70% 40-ৰ বেছি তেন্তে ——— = 80; ——— = 50; ——— = 40 $(P_4,\ D_4,\ D_7)$
    - (xiii) 10 টা আৰেক্ষণৰ মাধ্য 10 আৰু মধ্যমা 12। প্ৰত্যেকে আৰেক্ষণৰ লগত 5 যোগ-বিয়োগ কৰিলে

নতুন মাধ্য =———— আৰু নতুন মধ্যমা ———— (15,17)

নতুন মাধ্য =———— আৰু নতুন মধ্যমা ———— (5,7)

(xiv) 10 টা আৰেক্ষণৰ মাধ্য 10 আৰু মধ্যমা 121 প্ৰত্যেক আৰেক্ষণক 5 ৰে গুণ/ভাগ কৰিলে নতুন মাধ্য, নতুন মাধ্য; নতুন মধ্যমা , নতুন মধ্যমা = –, –, –, –,। (50, 2; 60, 2.4)

(xv) 10 টা সংখ্যাৰ মাধ্য 10। পিছত দুটা সংখ্যা 12 আৰু 8 লোৰা হ'ল। 12 টা সংখ্যাৰ নতুন মাধ্য ——। (10)

(xvi) কোনটো গড়ৰ মান এটাতকৈ বেছি হ'ব পাৰে? গড়টোৰ নাম কি? (বহুলক)

(xvii) —— অৱস্থানমূলক গড়। (মধ্যমা)

(xviii) 7, 12, 10, 2x, 8, –x আৰু 5ৰ গড় 7 হ'লে x= —————— (7)

(xix) সূচকাংক নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰত —— গড় ব্যৱহাৰ হয়। (গুণোত্তৰ)

(xx) বিভিন্ন গতিত একেই দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰিলে —— গড় ব্যৱহাৰ হয়। (প্ৰসংবাদী মাধ্য)

(xxi) $Me—Q_1$ = ... – Me (সমমিত বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত) (Q_3)

(xxii) মাধ্যৰ পৰা আৰেক্ষণবোৰৰ পাৰ্থক্যৰ যোগফল——। (0)

(xxiii) গড়ে এটা শ্ৰেণীক —— কৰে। (প্ৰতিনিধিত্ব)

(xxiv) 6, 8, 10, 6, 12, 10, 8, 8ৰ বহুলক =——— (8)

(xxv) গড় বুলিলে সাধাৰণতে —— বুজায়। (মাধ্যক)

(xxvi) $D_2 <$ ——— (Q_1)

(xxvii) $Q_3 >$ ——— (P_{60})

(xxviii) দুটা বিভাগৰ যুগ্ম গড় সূত্ৰটো হ'ল —— $\left(\frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}\right)$

(xxix) $GM = \sqrt{\_\_\_\_\_ \times \_\_\_\_\_}$ ...(AM×HM)

(xxx) GM ≥ AM ≤ HM (উক্তিটো শুদ্ধ কৰা) (AM ≥ GM ≥ HM)

(xxxi) মাধ্য = _·_·_ (3 মধ্যমা –($\frac{1}{2}$) বহুলক)

(xxxii) বহুলক = –মধ্যমা–2...) Ans : (3 মধ্যমা –2 মাধ্য)

(xxxiii) মাধ্যৰ পৰা আৰেক্ষণবোৰৰ পাৰ্থক্যৰ যোগফল —— (0)

(xxxiv) —— পৰা আৰেক্ষণবোৰৰ পাৰ্থক্যৰ বৰ্গৰ যোগফল ন্যূনতম। (মাধ্য)

(xxxv) বিভিন্ন চহৰৰ জনমূৰি আয় নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰত —— গড় প্ৰযোজ্য। (গুণোত্তৰ গড়)

(xxxvi) ঔদ্যোগিক প্ৰতিষ্ঠান এটাৰ কৰ্মচাৰীসকল গড় মজুৰি নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰ (ভাৰিত) —— গড় প্ৰযোজ্য।

(xxxvii) মধ্যমা = ———— চতুৰাংশ। (দ্বিতীয়)

(xxxviii) গুণোত্তৰ মাধ্যৰ বৰ্গ = ——— × ——— (মাধ্য×প্ৰসংবাদী মাধ্য)

(xxxix) —— চৰ্তত, মাধ্য = মধ্যমা = বহুলক হয়। (আবেক্ষণবোৰ মান সমান হ'লে)

(xxxx) —— লেখ চিত্ৰৰ পৰা মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰা হয়

আৰু —— লেখচিত্ৰৰ পৰা বহুলক নিৰ্ণয় কৰা হয়। (অ'গিভ, আয়তলেখ)

11. (a) গুণোত্তৰ মাধ্য ব্যৱহাৰ কৰাৰ ক্ষেত্ৰত দুটা উদাহৰণ দিয়া।
(b) প্ৰসংবাদী মাধ্য ব্যৱহাৰ কৰাৰ ক্ষেত্ৰত দুটা উদাহৰণ দিয়া।
(c) মধ্যমা ব্যৱহাৰ কৰাৰ ক্ষেত্ৰত দুটা উদাহৰণ দিয়া।

12. তলৰ তথ্যৰ পৰা মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক, নিৰ্ণয় কৰা—
1, 3, 9, 7, 11, 11, 10, 16, 14, 13, 4

(উত্তৰ ঃ মাধ্য=9, মধ্যমা=10, বহুলক=11)

13. তলৰ তথ্যৰ পৰা মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক নিৰ্ণয় কৰা

x :	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f :	5	22	31	43	51	40	35	15	3

(উত্তৰ ঃ মাধ্য=9 (প্ৰায়), মধ্যমা=বহুলক=4)

14. **তলৰ তথ্যৰ পৰা মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা ঃ**

(a)

ওজন ঃ	95–105	105–115	115–125	125–135
ছাত্ৰসংখ্যা ঃ	20	26	38	16

(উত্তৰ ঃ 115)

(b)

ওজন কে.জি. ঃ	60–62	63–65	66–68	69–71	72–74
পৰিসংখ্যা ঃ	15	54	126	81	24

(উত্তৰ ঃ 67.45 কেজি)

(c)

মজুৰি (টকাত) ঃ (তলত)	10	20	30	40	50	60	70	80
বনুৱাৰ সংখ্যা ঃ	15	35	60	84	96	127	198	250

(উত্তৰঃ 50.40 টকাত)

(d)

নমৰ	ছাত্ৰ সংখ্যা
0 আৰু ওপৰত	40
10 আৰু ওপৰত	37
20 আৰু ওপৰত	30
30 আৰু ওপৰত	20
40 আৰু ওপৰত	7
50 আৰু ওপৰত	3

(উত্তৰ ঃ 29.25 নম্বৰ)

15. তলৰ তথ্যৰ পৰা মধ্যমা, বহুলক আৰু Q_1 আৰু Q_3 নিৰ্ণয় কৰা।

বয়স (বছৰত) ঃ	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50	50–55	55–60
মানুহৰ সংখ্যা ঃ	50	70	100	180	150	120	70	60

(উত্তৰ ঃ মধ্যমা = 35 বছৰ, বহুলক = 38.64 বছৰ, Q_1=34 বছৰ, Q_3= 47.08 বছৰ)

16. তলৰ তথ্যৰ পৰা মধ্যমা আৰু বহুলক নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(a)

নম্বৰ (তলত) ঃ	10	20	30	40	50
ছাত্ৰ সংখ্যা ঃ	5	9	15	18	20

(উত্তৰ ঃ 21.67, 24 নম্বৰ)

(b)

মজুৰি (টকাত)	বনুৱাৰ সংখ্যা
0 আৰু ওপৰত	50
20 আৰু ওপৰত	45
40 আৰু ওপৰত	34
60 আৰু ওপৰত	16
80 আৰু ওপৰত	6
100 আৰু ওপৰত	0

(উত্তৰ ঃ 50 টকা, 49.33 টকা)

17. তলৰ তথ্যৰ পৰা D_4 আৰু P_{68} ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

বয়স ঃ	25ৰ তলত	25–29	30–34	35–44	45–54	55–64	65–74	75 আৰু ওপৰত
পৰিসংখ্যা (মিলিয়নত) ঃ	2.22	4.05	5.08	10.45	9.47	6.63	4.16	1.66

(উত্তৰ D_4 = 40.38, P_{68}=52.87)

18. তলৰ তথ্যৰ পৰা Q_1, Q_3, D_4 আৰু P_{60} ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(a) 19, 27, 24, 39, 57, 44, 56, 50, 59, 67
62, 42, 47, 60, 26, 34, 57, 51, 59, 45

(উত্তৰ ঃ Q_1 = 35.25, Q_3=58.50, D_4= 44.4, P_{60} = 54)

(b)

x :	40	42	45	50	51	54	56	59	60	62	64
f :	2	6	8	10	6	14	12	8	14	12	6

(উত্তৰ ঃ Q_1=50, Q_3=60, D_4=54, P_{60}=59)

(c)

ওজন (কে.জি.) ঃ	20–24	24–28	28–32	32–36	36–40	40–44	44–48	48–52	52–56	56–60	60–64
পৰিসংখ্যা ঃ	2	3	5	10	8	6	16	12	10	7	5

(উত্তৰ ঃ Q_1 =36.5 কে.জি., Q_3=52.4 কে.জি., D_4=43.7 কে.জি., P_{60}=49.3 কে.জি.)

19. (a) যদি প্ৰত্যেকটো আৰেক্ষণৰ লগত এটা ধ্ৰুৱক সংখ্যা যোগ/বিয়োগ কৰা হয় তেন্তে দেখুউৱা যে নতুন মাধ্যৰ মান ধ্ৰুৱকত আগৰ মাধ্য ± ধ্ৰুৱক সংখ্যাটো।

(b) তলৰ বিভাজনটোৰ মধ্যমা আৰু বহুলক ক্রমে 27 আৰু 26 হ'লে a আৰু b ৰ মান নির্ণয় কৰাঃ

বিভাগ ঃ	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
পৰিসংখ্যা ঃ	3	a	20	12	b

(উত্তৰ ঃ a=8, b=7)

(c) দুটা অসমান ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা a আৰু b (a>b)ৰ মাধ্য সিহঁতৰ গুণোত্তৰ মাধ্যৰ দুগুণ হ'লে প্রমাণ কৰা যে ঃ $a : b = (2 + \sqrt{3}) : (2-\sqrt{3})$

(d) 2, 4, 6 আৰু 8 ৰ হ্রৰাত্মক গড় নির্ণয় কৰা। (উত্তৰ ঃ 3.84)

(e) 4, 16, 64, 256ৰ গুণোত্তৰ গড় নির্ণয় কৰা। (উত্তৰ ঃ 32)

(f) 7, x–2 আৰু x+3ৰ মাধ্য 9 হ'লে, x-ৰ মান কিমান? (উত্তৰ ঃ 9)

(g) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots\ldots \frac{1}{n}$ ৰ হৰাত্মক গড় কিমান? (উত্তৰ ঃ $\frac{2}{n+1}$)

20. (a) কোনো এটা প্রতিষ্ঠানত প্রথম, দ্বিতীয় আৰু তৃতীয় বছৰত উৎপাদন ক্রমে 3%, 4% আৰু 5% বৃদ্ধি পায়। উৎপাদনৰ বছৰি গড় বৃদ্ধিৰ পৰিমাণ কিমান?

(সংকেত ঃ G.M-ৰ সূত্র ব্যৱহাৰ কৰা) (উত্তৰ ঃ 4%)

(b) এজন মানুহে কোনো এখন ঠাইলৈ বাইকত যাওঁতে প্রতি ঘণ্টাত 50 কিঃ মিঃ বেগত যায় আৰু উভতি আহোঁতে প্রতিঘণ্টাত 40 কিঃ মিঃ বেগত আহে। অহা-যোৱা কৰাৰ গড় গতিবেগ কিমান?

(সংকেত ঃ H.M-ৰ সূত্র ব্যৱহাৰ কৰা) (উত্তৰ ঃ 37.5 কি. মি.)

(c) কোনো এটা ব্যৱসায়িক প্রতিষ্ঠানত তিনিটা ক্রমিক বছৰত টকা-পইচাৰ লেনদেন ক্রমে 2, 3 আৰু 4 গুণ বৃদ্ধি পায়। বছৰি গড় বৃদ্ধি কিমান?

(সংকেত ঃ GM ব্যৱহাৰ কৰা) (উত্তৰ ঃ বছৰি বৃদ্ধি 2.885)

(d) কাৰণ দেখুৱাই তলৰ তথ্যৰ উপযুক্ত গড় নির্ণয় কৰা ঃ

মান	পৰিসংখ্যা
100-ৰ তলত	40
100–200	89
200–300	148
300–400	64
400 আৰু ওপৰত	39

(সংকেত ঃ মধ্যমা ব্যৱহাৰ কৰা।) (উত্তৰ ঃ 241.22)

(e) 25 টা আৰেক্ষণৰ মাধ্যৰ মান 68 পোৱা গ'ল। পিছত দেখা গ'ল যে দুটা আৰেক্ষণৰ মান 57 আৰু 35 ৰ পৰিবর্তে 75 আৰু 53 লোৱা হৈছে। শুদ্ধ মাধ্যৰ মান কিমান?

(উত্তৰ ঃ 66.56)

(f) তলৰ বিভাজনটোৰ বহুলকৰ মান 24 আৰু বিভাজনটোৰ মুঠ পৰিসংখ্যা 100 হ'লে f_1 আৰু f_2ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

বিভাগ ঃ	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
পৰিসংখ্যা ঃ	14	f_1	27	f_2	15

(উত্তৰ ঃ $f_1 = 21$, $f_2 = 23$)

21. তলৰ বিভাজনৰ মাধ্য 56.47 আৰু মুঠ পৰিসংখ্যা 150 হ'লে f_3 আৰু f_5-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

চলক ঃ	45	50	55	60	65	70	75
পৰিসংখ্যা ঃ	5	48	f_3	30	f_5	8	6

(সংকেত ঃ প্ৰত্যক্ষ প্ৰদ্ধতি অৱলম্বন কৰা) (উত্তৰ ঃ 41, 12)

22. এটা কোম্পানীত 35 জন কৰ্মচাৰী আছে। তাৰে 17 জনৰ প্ৰতিজনে বছৰি 3000 টকা, 11 জনৰ প্ৰতিজনে 4000 টকা, 4 জনৰ প্ৰতিজনে 6000 টকা, 2 জনৰ প্ৰতিজনে 7000 টকা আৰু বাকী থকা কৰ্মচাৰীজনে বছৰি 10,000 টকা দৰমহা পায়। কোম্পানীটোৰ কৰ্মচাৰীসকল গড় বছৰেকীয়া দৰমহা আৰু মধ্যমা দৰমহা নিৰ্ণয় কৰা।

(উত্তৰ ঃ 4085.71 টকা আৰু 4000 টকা)

23. তলৰ তথ্যৰ পৰা মাধ্য, মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰি মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলকৰ সম্বন্ধটো ব্যৱহাৰ কৰি বহুলক নিৰ্ণয় কৰা।

দৰমহা (টকাত)ঃ	260–269	270–279	280–289	290–299	300–309	310–319	320–32
মানুহৰ সংখ্যা ঃ	6	14	29	23	16	10	2

(উত্তৰ ঃ 291.20, 289.93 আৰু 287.39 টকা)

24. যদি প্ৰত্যেক আৰেক্ষণৰ পৰিসংখ্যা সমান থাকে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা — সাধাৰণ মাধ্য = ভাৰিত মাধ্য।

25. এটা প্ৰতিষ্ঠানত দুটা বিভাগ আছে আৰু তাতে ক্ৰমে 100 আৰু 80 জন কৰ্মচাৰী আছে। বিভাগ দুটাৰ কৰ্মচাৰীসকলৰ গড় মাহিলী দৰমহা 275 টকা আৰু 225 টকা হ'লে, আটাইকেইজন কৰ্মচাৰীৰ গড় দৰমহা কিমান?

(উত্তৰ ঃ 252.78 টকা)

* * *

পঞ্চম অধ্যায়

বিচলন বা বিক্ষেপণ ঃ ইয়াৰ বিভিন্ন পৰিমাপবোৰ
(DISPERSION AND ITS VARIOUS MEASURES)

ভূমিকা ঃ

কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ পৰিমাপবোৰে বিভাজন এটাৰ আৰেক্ষণবোৰৰ (observations) সম্বন্ধে গড় হিচাপে বুজ লয়। প্ৰকৃতপক্ষে পৰিমাপবোৰৰ সীমাবদ্ধতা নথকা নহয়। দুই বা ততোধিক বিভাজনৰ গড়ৰ মান সমান হ'লেও বিভাজনকেইটা সদৃশ বুলি ক'ব নোৱাৰি। কিয়নো বিভাজনকেইটাৰ মানবোৰৰ গঠনৰ প্ৰকৃতি সম্বন্ধে বুজ নোলোৱাকৈ বিভাজনকেইটাৰ বিষয়ে মন্তব্য দাঙি ধৰাটো যুক্তিযুক্ত নহয়।

গড় হ'ল এটা বিভাজনৰ প্ৰতিনিধিস্বৰূপ। গড়ৰ মানটো বিভাজনৰ মানবোৰক সঠিকভাৱে প্ৰতিনিধিত্ব কৰিব পাৰিছে নে নাই এই কথাষাৰ সত্যাপন কৰাৰ উদ্দেশ্যে কেন্দ্ৰীয় মানৰ বা গড়ৰ পৰা মানবোৰৰ পাৰ্থক্য বা বিক্ষেপণ বা বিচলন বা বিচ্ছুৰণ কেনেকুৱা— এই বিষয়ে অধ্যয়নৰ আৱশ্যক।

বিচলনৰ সংজ্ঞা ঃ

বিচলন শব্দটোৰ অৰ্থ হ'ল বিক্ষেপণ বা বিচ্ছুৰণ অৰ্থাৎ বিভাজন এটাৰ গড়ৰ পৰা মানবোৰৰ পাৰ্থক্যৰ পৰিমাপকেই বিচলন বোলা হয়। পাৰ্থক্যবোৰ ধনাত্মক নাইবা ঋণাত্মক হ'ব পাৰে।

কোনো বিভাজনৰ বিচলনৰ মান যিমানেই কম, সিমানেই বেছি প্ৰতিনিধিত্বমূলক হ'ব গড়ৰ মানটো। আনহাতে বিচলন যিমানেই বেছি সিমানেই কম প্ৰতিনিধিত্বমূলক হ'ব গড়ৰ মান। বিচলন কম হ'লে আৰেক্ষণবোৰ বেছি সংগতিপূৰ্ণ আৰু সমগোত্ৰীয় হ'ব।

স্পাইজেলৰ মতে, "তথ্যখিনিত থকা সংশ্লিষ্ট চলকৰ বিভিন্ন মানবোৰৰ গড়ৰ পৰা পাৰ্থক্যৰ মাত্ৰাকেই বিচলন বোলা হয়।"

এটা উদাহৰণেৰে ওপৰৰ কথাখিনিৰ তাৎপৰ্য ব্যাখ্যা কৰা হ'ল—

শ্ৰেণী A ঃ	50	50	50	50	50,	মুঠ = 250,	মাধ্য = 50
শ্ৰেণী B ঃ	48	45	52	50	55,	মুঠ = 250,	মাধ্য = 50
শ্ৰেণী C ঃ	2	110	40	30	68,	মুঠ = 250,	মাধ্য = 50

শ্ৰেণী A ৰ ক্ষেত্ৰত — প্ৰতিটো আৰেক্ষণৰ মান সমান। এতেকে বিচলনৰ মান = 0

শ্ৰেণী B ৰ ক্ষেত্ৰত — মাথোন এটা আৰেক্ষণক সম্পূৰ্ণৰূপে মাধ্যই প্ৰতিনিধিত্ব কৰিছে। অৱশ্যে বাকী আৰেক্ষণবোৰৰ মাধ্যৰ পৰা পাৰ্থক্য খুব বেছি নহয়। নিম্নতম বিচলন 2 আৰু উচ্চতম বিচলন 7।

শ্ৰেণী C ৰ ক্ষেত্ৰত — কোনো আৰেক্ষণকেই মাধ্যই প্ৰতিনিধিত্ব কৰা নাই আৰু বিচলনৰ মানো খুব বেছি।

এতেকে দেখা গ'ল তিনিওটা শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত মাধ্যৰ মান সমান হ'লেও শ্ৰেণী তিনিটাক একেই বুলি ক'ব নোৱাৰি। এই প্ৰসংগত উল্লেখ কৰিব পাৰি যে গড়ৰ বৈশিষ্ট্য অধ্যয়নত বিচলন অধ্যয়ন এটা পৰিপূৰক ব্যৱস্থা। বিচলন অধ্যয়নৰ দ্বাৰাই বিভাজনটোৰ মানকেইটাৰ গঠনৰ প্ৰকৃতি কেনেকুৱা আৰু বিচলন কম বা বেছি হোৱাৰ কাৰণ কি— এই বিষয়ে জ্ঞান লাভ কৰিব পাৰি।

উদ্দেশ্য (Objective) ঃ 1. কোনো শ্ৰেণীৰ গড়ৰ মান কিমানখিনি বিশ্বাসযোগ্য আৰু গড়ৰ মানটো প্ৰতিনিধিত্বমূলক হয় নে নহয় এই বিষয়ে বুজ লোৱা।

2. কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ পৰিমাপৰ পৰা তথ্যখিনিৰ বিচলন নিয়ন্ত্ৰণ কৰা।

3. দুই বা ততোধিক সদৃশ শ্ৰেণীৰ বিচলন তুলনা কৰা।

4. ভৱিষ্যৎ সাংখ্যিকীয় বিশ্লেষণত বেলেগ সাংখ্যিকীয় পৰিমাপ উদ্ভাৱন কৰা।

5. বস্তুৰ গুণাগুণ সংৰক্ষণত আৰু বস্তুবোৰৰ মানৰ বিচলন নিয়ন্ত্ৰণ কৰা।

6. কোনো শ্ৰেণীৰ বিচলনৰ সীমা নিৰ্ধাৰণ কৰা।

7. কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ পৰিমাপৰ দুয়োফালে মানবোৰৰ থূপ খাই থকাৰ প্ৰকৃতি আৰু গঠনৰ বুজ লোৱা।

উপযোগিতা বা ব্যৱহাৰ ঃ 1. মানুহৰ আয় আৰু সম্পদৰ অসমতাৰ মাত্ৰা দূৰীকৰণত ভৱিষ্যৎ আঁচনি যুগুতোৱাত বিচলন অধ্যয়ন কাৰ্যকৰী।

2. উৎপাদিত বস্তুৰ গুণাগুণ আৰু মূল্য নিয়ন্ত্ৰণত বিচলনৰ ভূমিকা অনস্বীকাৰ্য।

3. তথ্যখিনিৰ আৰেক্ষণবোৰৰ বিচলন নজনাকৈ কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ পৰিমাপবোৰৰ ব্যৱহাৰ অৰ্থহীন।

4. বহুতো সাংখ্যিকীয় পৰিমাপ উদ্ভাৱনত বিচলনৰ ভূমিকা নুই কৰিব নোৱাৰি।

বিচলনৰ আদৰ্শ পৰিমাপৰ ঃ

বৈশিষ্ট্য ঃ

1. বিচলনৰ পৰিমাপটো বুজিবলৈ আৰু গণনা কৰিবলৈ সহজ হ'ব লাগে।

2. ইয়াৰ সংজ্ঞা সুদৃঢ় হ'ব লাগে।

3. ইয়াৰ গণনা কাৰ্যত আটাইকেইটা আৰেক্ষণক অন্তৰ্ভুক্ত কৰিব লাগে।

4. বীজগণিতীয় সম্প্ৰসাৰণ সম্ভৱ হ'ব লাগে।

5. শ্ৰেণীটোত লঘুমান বা গুৰুমানৰ দ্বাৰা ই বেছি প্ৰভাৱান্বিত হ'ব নালাগে।

6. প্ৰতিদৰ্শজ তাৰতম্যৰ দ্বাৰাই ই বেছি প্ৰভাৱান্বিত হ'ব নালাগে।

বিচলনৰ পৰিমাপবোৰ ঃ

পৰিমাপবোৰ হ'ল—

1. প্ৰসাৰ (Range)
2. চতুৰাংশ বিচলন (Quartile deviation)
3. গড় বিচলন (Average or Mean deviation)
4. মানক বিচলন (Standard deviation)

ওপৰৰ পৰিমাপবোৰক পৰম পৰিমাপ বোলা হয়।

বিচলনৰ পৰম পৰিমাপ আৰু আপেক্ষিক পৰিমাপ ঃ

বিচলনৰ যিবিলাক পৰিমাপৰ একক বিভাজনটোৰ সংশ্লিষ্ট এককৰ লগত একেই থাকে সেইবোৰক পৰম পৰিমাপ বুলি কোৱা হয়। এই পৰিমাপবোৰৰ দ্বাৰাই বিভিন্ন এককত প্ৰকাশিত থকা বিভাজনবোৰৰ বিচলন তুলনা কৰিব নোৱাৰি।

আনহাতে বিচলনৰ আপেক্ষিক পৰিমাপবোৰৰ কোনো একক নাথাকে আৰু এইবোৰ শুদ্ধ সংখ্যা। এই পৰিমাপবোৰ সাধাৰণতে শতাংশ বা গুণাংকত প্ৰকাশ কৰা হয়। সেয়েহে বিভাজনবোৰ বিভিন্ন এককত প্ৰকাশিত থাকিলেও আপেক্ষিক পৰিমাপৰ দ্বাৰাই বিচলন তুলনা কৰা সম্ভৱ।

এতিয়া আমি বিচলনৰ বিভিন্ন পৰিমাপ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

1. প্ৰসাৰ (Range) ঃ প্ৰসাৰ হ'ল বিভাজনটোৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মানৰ পাৰ্থক্য,

অৰ্থাৎ, প্ৰসাৰ = H–L, H$\rightarrow$ সৰ্বোচ্চ মান

L$\rightarrow$ সৰ্বনিম্ন মান

প্ৰসাৰৰ গুণাংক (Co-efficient of range) $= \frac{H-L}{H+L}$

বিভাজনবোৰৰ এককবোৰ একেই বা বেলেগ হ'লেও, বিচলনৰ তুলনা প্ৰসাৰৰ গুণাংকেৰে কৰা হয়।

যদি বিভাজনটোৰ আটাইকেইটা আৰেক্ষণৰ মান একেই হয় তেনেস্থলত বিচলনৰ পৰিমাণ = 0 হ'ব।

বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত— প্ৰসাৰ = চলকৰ (সৰ্ব্বোচ্চমান – সৰ্বনিম্ন মান)

অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত — প্ৰসাৰ = অন্তিম বিভাগৰ উচ্চসীমা – প্ৰথম বিভাগৰ নিম্নসীমা।

প্ৰসাৰৰ সুবিধা আৰু অসুবিধাসমূহ ঃ

সুবিধা ঃ

1. প্ৰসাৰ বুজিবলৈ আৰু গণনা কৰিবলৈ সহজ।
2. প্ৰসাৰ পৰিমাপটোৰে বিভাজনটোৰে আৰেক্ষণবোৰৰ সীমা নিৰ্দেশ কৰে আৰু সৰ্বোচ্চ বিলচনৰ পৰিমাণ সম্বন্ধে উনুকিয়াই।

অসুবিধা ঃ

1. গণনাকাৰ্যত আটাইকেইটা আৰেক্ষণ অন্তৰ্ভুক্ত নহয়। সেয়েহে এই পৰিমাপটো বিশ্বাসযোগ্য নহ'বও পাৰে।
2. প্ৰতিদৰ্শজ তাৰতম্যৰ দ্বাৰাই বেছি প্ৰভাৱান্বিত হয়।

3. মুক্ত বিভাগ থকা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰসাৰ নিৰ্ণয় কৰিব নোৱাৰি।
4. বীজগণিতীয় সম্প্ৰসাৰণ সম্ভৱ নহয়।
5. নমুনা (প্ৰতিদৰ্শ)ৰ আকাৰৰ ওপৰত প্ৰসাৰ নিৰ্ভৰশীল হোৱা বাবে প্ৰসাৰ বিচলনৰ ত্ৰুটিপূৰ্ণ পৰিমাপ হ'ব পাৰে।

ব্যৱহাৰ ঃ

1. যিবিলাক তথ্যৰ বিচলনৰ পৰিমাণ খুব বেছি নহয়, যেনে— ষ্ট'ক বজাৰত ষ্ট'কৰ মূল্যৰ পৰিৱৰ্তন, মুদ্ৰা বিনিময়ৰ হাৰ ইত্যাদি এইবোৰ তথ্যৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰসাৰ ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি।
2. উৎপাদিত বস্তুৰ সাংখ্যিকীয় গুণ নিয়ন্ত্ৰণৰ ক্ষেত্ৰত R-চিত্ৰ অৰ্থাৎ প্ৰসাৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয়। চিত্ৰটোৰ পৰা উৎপাদন অভিযন্তাজনে উৎপাদনৰ বিষয়ে জ্ঞান লাভ কৰিব পাৰে। বতৰৰ আগজাননী দিয়া বিভাগত প্ৰসাৰৰ ব্যৱহাৰ দেখা যায়। বতৰ বিজ্ঞান বিভাগে দৈনিক সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন তাপমাত্ৰা বা বৰষুণৰ পৰিমাণ নিৰ্দেশ কৰে। ফলত সংশ্লিষ্ট মানুহবোৰৰ সুবিধা হয়।
3. আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনৰ বিভিন্ন সমস্যাবোৰ যেনে— এটা ব্যৱসায়িক প্ৰতিষ্ঠানৰ দৈনিক বিক্ৰীৰ পৰিমাণ, কৰ্মচাৰীসকলৰ মাহিলী দৰমহা, ফলৰ বাগিছা এটাৰ পৰা সম্ভাব্য ফল পোৱাৰ প্ৰত্যাশা ইত্যাদিৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰসাৰৰ ব্যৱহাৰ দেখা যায়।

2. **চতুৰাংশ বিচলন** (Quartiledeviation) ঃ চতুৰাংশ বিচলন হ'ল তৃতীয় আৰু প্ৰথম চতুৰাংশৰ পাৰ্থক্যৰ অৰ্ধাংশ অৰ্থাৎ,

চতুৰাংশ বিচলন $=\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$, য'ত Q_1 = প্ৰথম চতুৰ্থাংশ, Q_3 = তৃতীয় চতুৰ্থাংশ।

$(Q_3 - Q_1)$ক আন্তঃচতুৰাংশ প্ৰসাৰ (Inter-quartile range) বোলা হয়।

চতুৰাংশ বিচলন গুণাংক $=\dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

সমমিত বিভাজন (Symmetrical distribution)ৰ ক্ষেত্ৰত ঃ

$Q_3 - M_e = M_e - Q_1 \quad \therefore \ M_e = \dfrac{Q_3 + Q_1}{2}$, M_e = মধ্যমা

$Q_1 = M_e - QD,\ Q_3 = M_e + QD$

$\because$ 25% আৰেক্ষণ Q_1ৰ কম আৰু 25% আৰেক্ষণ Q_3-ৰ বেছি,

$\therefore$ 50% আৰেক্ষণ Q_1 আৰু Q_3 ৰ মাজত থাকে

আৰু Me ± Q.D.-য়ে সমমিত বিভাজনৰ 50% আৰেক্ষণ অন্তৰ্ভুক্ত কৰে।

আৰ্থ-ব্যৱসায়িক সমস্যাবোৰৰ ক্ষেত্ৰত সমমিত বিভাজন পোৱা টান, বেছিৰভাগ ক্ষেত্ৰতেই বিভাজনটো অসমমিত (asymmetrical) আকাৰৰ হয়, সেয়েহে অসমমিত বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত M_e ± Q.D-যে প্ৰায় 50% আৰেক্ষণক অন্তৰ্ভুক্ত কৰে।

এই প্ৰসংগত মন কৰিবলগীয়া যে চতুৰাংশ বিচলন পৰিমাপটোক নিশ্চিতভাৱে বিচলনৰ পৰিমাপ বুলি ক'ব নোৱাৰি। কিয়নো ই গড়ৰ দুয়োফালে আৰেক্ষণবোৰৰ বিস্তৃতি নিৰ্দেশ নকৰে বৰং ইয়াক অৱস্থানমূলক গড় হিচাপে বিবেচনা কৰিব পাৰে।

টোকা ঃ

1. **সমমিত বিভাজন ঃ** এই বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত গড়ৰ দুয়োফালে আৰেক্ষণবোৰৰ বাৰংবাৰতা সমানুপাতিকভাৱে অৱস্থান কৰে।
2. বিভিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত চতুৰাংশ বিচলন নিৰ্ণয় কৰাৰ সময়ত শ্ৰেণীটোৰ Q_1 আৰু Q_3 ৰ মান (গড় অধ্যায়ত আলোচনা হৈছে) নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

চতুৰাংশ বিচলনৰ সুবিধা-অসুবিধাসমূহ ঃ

সুবিধা ঃ

1. ই বুজিবলৈ আৰু গণনা কৰিবলৈ সহজ।
2. 50% আৰেক্ষণ ইয়াৰ গণনা কাৰ্যত অন্তৰ্ভুক্ত হ'লেও প্ৰসাৰৰ তুলনাত ই বেছি ফলপ্ৰসূ।
3. বিভাজনটোত লঘুমান বা গুৰুমানৰ দ্বাৰাই ই প্ৰভাৱান্বিত নহয় কিয়নো প্ৰথম 25% আৰেক্ষণ আৰু শেষৰ 25% আৰেক্ষণ ই অন্তৰ্ভুক্ত নকৰে।
4. মুক্ত সীমা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি।
5. বিভাজনৰ বিভাগবোৰৰ অন্তৰাল অসমান হ'লেও ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি।

অসুবিধা ঃ

1. ই আটাইকেইটা আৰেক্ষণক অন্তৰ্ভুক্ত নকৰাৰ ফলত বেছি বিশ্বাসযোগ্য নহয়।
2. প্ৰতিদৰ্শজ তাৰতম্যৰ দ্বাৰাই ই বেছি প্ৰভাৱান্বিত হয়।
3. বীজগণিতীয় সম্প্ৰসাৰণ সম্ভৱ নহয়।
4. গড়ৰ দুয়োফালে আৰেক্ষণবোৰৰ বিচলনৰ ধাৰণা নিদিয়ে।
5. বেছি পৰিমাণৰ বিচলন থকা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত ই বেছি ফলপ্ৰসূ নহয়।

ব্যৱহাৰ ঃ

1. সীমামুক্ত বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত ইয়াৰ ব্যৱহাৰ দেখা যায়।
2. এটা বিভাজনৰ তথ্যখিনি সম্পূৰ্ণৰূপে পোৱা নহ'লেও চতুৰাংশ বিচলন ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি।
3. আৰ্থ-সামাজিক ব্যৱসায়িক সমস্যাবোৰৰ বিভাজন অসমমিত হোৱাৰ ফলত আৰু এইবোৰৰ বিচলন অধ্যয়নত চতুৰাংশ বিচলনৰ ব্যৱহাৰ দেখা যায়।

3. **গড় বিচলন** (Mean or Average Deviation) ঃ

প্ৰসাৰ আৰু চতুৰাংশ বিচলন— এই দুয়োটা পৰিমাপে গড়ৰ দুয়োফালে আৰেক্ষণবোৰৰ বিস্তৃতিৰ ধাৰণা নিদিয়ে। অৰ্থাৎ শ্ৰেণীটোৰ গঠনৰ প্ৰকৃতি কেনেকুৱা এই বিষয়ে ধাৰণা কৰিব নোৱাৰি।

গড় বিচলনৰ পৰিমাপটোৱে ওপৰৰ উল্লিখিত অসুবিধাবোৰ দূৰ কৰে।

সংজ্ঞা ঃ নির্দিষ্ট মানৰ শ্রেণীৰ ক্ষেত্রত ঃ

যদি X চলকৰ n সংখ্যক মান $x_1, x_2, \ldots x_n$ থাকে তেন্তে গড় বিচলন হ'ল গড় বা মধ্যমাৰ পৰা আৰেক্ষণবোৰৰ পাৰ্থক্যৰ গাণিতিক গড় (অৱশ্যে পাৰ্থক্যবোৰৰ পৰম মান লোৱা হয়)। গড় বিচলনক δ (ডেল্টা) আখৰেৰে চিহ্নিত কৰা হয়।

অর্থাৎ, $\delta = \frac{1}{n}\sum |(x - \bar{x}$ বা $M_e)|$

x– বোৰ চলকৰ মান

$\bar{x}$ = মাধ্য, M_e = মধ্যমা
|| – চিহ্নটোক মডুলাছ চিহ্ন বোলা হয়।
|| – চিহ্নটোৱে পাৰ্থক্যবোৰৰ পৰম মানকে সূচায়।
n – হ'ল মুঠ আৰেক্ষণৰ সংখ্যা।

বিচ্ছিন্ন আৰু অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত সূত্ৰটো তলত দিয়া ধৰণৰ হ'ব—

$\delta = \frac{1}{n}\sum f\,|x - \bar{x}$ বা $M_e|$, য'ত n = মুঠ পৰিসংখ্যা

f = বোৰ পৰিসংখ্যা

বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত x বোৰ = চলকৰ মানবোৰ

অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত x বোৰ = বিভাগৰ মধ্যমান।

গড় বিচলন গুণাংক = $\frac{\text{গড় বিচলন}}{\text{মধ্য}}$ বা $\frac{\text{গড় বিচলন}}{\text{মধ্যমা}}$

টোকা ঃ

1. কোনো শ্ৰেণীৰ মধ্যমাৰ পৰা আৰেক্ষণবোৰৰ পাৰ্থক্যবোৰৰ (পৰম মান) যোগফল (অইন গড় অৰ্থাৎ মাধ্য বা বহুলকৰ তুলনাত) ন্যূনতম। সেয়েহে গড় বিচলন গণনাত পাৰ্থক্যবোৰ মধ্যমাৰ পৰা ল'লে বেছি ফলপ্ৰসূ।
2. বীজগণিতীয় দৃষ্টিভংগীৰ পৰা পাৰ্থক্যবোৰৰ চিনবোৰক ধনাত্মক লোৱাৰ কোনো যুক্তি নাই যদিও চিনবোৰ ধণাত্মক বা ঋণাত্মক ল'লে পাৰ্থক্যবোৰৰ যোগফল শূন্য হ'ব (মাধ্যৰ ক্ষেত্ৰত) কিয়নো $\sum (x-\bar{x})=0$ মাধ্যৰ এই ধৰ্মটো আগতে আলোচনা কৰা হৈছে)

   সমমিত বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত $\sum(x - M_e) = \sum(x - M_o) = 0$

   কিয়নো সমমিত বিভাজনত, ($\bar{x}=M_e=M_o$) বা আংশিকভাৱে অসমমিত বিভাজনত।
3. গড় বিচলনৰ দ্বাৰাই বিভাজনটোৰ গড় হিচাপে বিচলনৰ পৰিমাণ গণনা কৰা আমাৰ উদ্দেশ্য। সেয়েহে পাৰ্থক্যবোৰৰ পৰম মান লোৱা হৈছে।

গড় বিচলনৰ সুবিধা আৰু অসুবিধা ঃ

সুবিধা ঃ

1. বুজিবলৈ আৰু গণনা কৰিবলৈ সহজ।
2. আটাইকেইটা আৰেক্ষণক অন্তৰ্ভুক্ত কৰা হয়।

3. গুৰুমান অথবা লঘুমানৰ দ্বাৰাই বেছি প্ৰভাৱান্বিত নহয়।
4. পাৰ্থক্যবোৰৰ পৰম মান লোৱাৰ ফলত বিভাজনটো অনিয়মীয়া তথ্যৰ প্ৰভাৱ মুক্ত হয় আৰু বিচলনৰ ধাৰণা পৰিষ্কাৰভাৱে পোৱা যায়।
5. যিহেতু গড় বিচলনত কেন্দ্ৰীয়মানৰ মানৰ পৰা আৱেক্ষণবোৰৰ পাৰ্থক্য বিবেচনা কৰা হয়, সেয়েহে ইয়াক বিচলনৰ এটা ভাল পৰিমাপ বুলি ক'ব পাৰি।

অসুবিধা ঃ

1. পাৰ্থক্যখিনিৰ পৰম মান বিবেচনা কৰটো গাণিতিকভাৱে যুক্তিযুক্ত নহয়।
2. বীজগণিতীয় সম্প্ৰসাৰণ সম্ভৱ নহয়।
3. কোনো বিভাজনৰ মধ্যমা প্ৰতিনিধিত্বমূলক নহ'লে গড় বিচলনো ফলপ্ৰসূ নহয়।
4. সমাজবিজ্ঞানৰ সমস্যাৰ ক্ষেত্ৰত ই অনুপযোগী।
5. মুক্ত বিভাগ থকা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত গড় বিচলন নিৰ্ণয় কৰিব নোৱাৰি।
6. প্ৰতিদৰ্শ (নমুনা)ৰ আকাৰ বৃদ্ধি পালে গড় বিচলনো বৃদ্ধি পায়।

ব্যৱহাৰ ঃ

গাণিতিক দৃষ্টিভংগীত দুৰ্বল হ'লেও গড় বিচলন আৰ্থ-ব্যৱসায়িক সমস্যাবোৰৰ ক্ষেত্ৰত বেছি কাৰ্যকৰী। ব্যৱসায় চক্ৰৰ ভৱিষ্যৎবাণী, জাতীয় অৰ্থনৈতিক অনুসন্ধান— এইবোৰ বিষয়ত গড় বিচলন নিৰ্ণয় বেছি ফলপ্ৰসূ।

উদাহৰণ 1 ঃ তলৰ তথ্যৰ গড় বিচলন (মাধ্যৰ পৰা) নিৰ্ণয় কৰা ঃ

7, 10, 15, 22, 26

সমাধান ঃ ইয়াত মাধ্য $(\bar{x}) = \dfrac{7+10+15+22+26}{5}$

$= \dfrac{80}{5} = 16$, ইয়াত $n=5$.

	x	|x-16|
	7	9
	10	6
	15	1
	22	6
	22	6
	26	10
মুঠ	80	32

এতিয়া, $\delta = \dfrac{1}{n}\Sigma|x = \bar{x}|$

$= \dfrac{1}{5} \times 32 = 6.4$

উদাহৰণ 2 ঃ তলৰ তথ্যৰ মধ্যমাৰ পৰা গড় বিচলন আৰু গড় বিচলন গুণাংক নিৰ্ণয় কৰা।

নম্বৰ (x) ঃ	5	10	15	20	25
ছাত্ৰ সংখ্যা (f) ঃ	6	7	8	11	8

শ্ৰেণীটো বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণী

সমাধান ঃ

	নম্বৰ (x)	**ছাত্ৰ সংখ্যা** f	**সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা** cf	$\|x-15\|$	$f\|x-15\|$
	5	6	6	10	60
	10	7	13	5	35
	15	8	21	0	0
	20	11	32	5	55
	25	8	40	10	80
মুঠ		40–n			230

মধ্যমা $= \frac{n}{2}$ তম ছাত্ৰজন $= \frac{40}{2}$ তম ছাত্ৰজন = 20 তম ছাত্ৰজন, 21 সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাত অন্তৰ্ভুক্ত আৰু অনুৰূপ চলকৰ মান 15 নম্বৰ সেয়েহে মধ্যমা = 15 নম্বৰ

এতিয়া, $\delta = \frac{1}{n}\sum f|x - M_e| = \frac{1}{40} \times 230 = 5.75$ নম্বৰ

গড় বিচলন গুণাংক $= \frac{\delta}{M_e} = \frac{5.75}{15} = 0.363$

উদাহৰণ 3 ঃ তলৰ তথ্যৰ মাধ্যৰ পৰা গড় বিচলন আৰু গড় বিচলনৰ গুণাংক নিৰ্ণয় কৰা ঃ

ওজন (পাউণ্ড) ঃ	95–105	105–115	115–125	125–135
মানুহৰ সংখ্যা ঃ	20	26	38	16

শ্ৰেণীটো অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণী

ওজন (পাউণ্ড)	মানুহৰ সংখ্যা f	মধ্যমান x	f.x	$\|x-115\|$	$f\|x-115\|$
95–105	20	100	2000	15	300
105–115	26	110	2860	5	130
115–125	38	120	45.60	5	190
125–135	16	130	2080	15	240
মুঠ	100=n		11500		860

এতিয়া, $\overline{x} = \frac{\sum fx}{n} = \frac{11500}{100} = 115,$

$$\delta = \frac{1}{n}\sum f\,|x - \overline{x}| = \frac{1}{100} \times 860 = 8.60 \text{ পাউণ্ড}$$

গড় বিচলন গুণাংক $= \frac{\delta}{\overline{x}} = \frac{8.60}{115} = 0.074$

4. **মানক বিচলন** (Standard Deviation) **(নিৰ্দিষ্ট শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত) ঃ**

সংজ্ঞা ঃ যদি x চলকৰ n সংখ্যক মান $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ লোৱা হয়, তেন্তে মানকেইটাৰ মানক বিচলন হ'ল— মাধ্যৰ পৰা মানকেইটাৰ পাৰ্থক্যৰ বৰ্গৰ মাধ্যৰ ধনাত্মক বৰ্গমূল। মানক বিচলনক σ (ছিগ্‌মা) আখৰেৰে চিহ্নিত কৰা হয়।

এতেকে— $\sigma = +\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x - \overline{x})^2}$ .... (i)

য'তে $\overline{x}$ = মাধ্য, n = মুঠ আৰেক্ষণৰ সংখ্যা, x' বোৰ চলকৰ মান।

(1) নং সূত্ৰটো এটা প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি।

(1) নং সূত্ৰটোৰ পৰা পাওঁ—

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum\left(x^2 - 2\overline{x}.x + \overline{x}^2\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - 2\overline{x}.\frac{\sum x}{n} + \frac{1}{n}\overline{x}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - 2\overline{x}.\overline{x} + \overline{x}^2}$$

$$\therefore \overline{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \overline{x}^2} \text{ .... (2) [প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি]}$$

বিচ্ছিন্ন আৰু অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত মানক বিচলনৰ সূত্ৰটো হ'ল—

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum f(x - \overline{x})^2} \text{ .... (3) [প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি]}$$

ইয়াত n = মুঠ পৰিসংখ্যা, f^1 বোৰ পৰিসংখ্যা

বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত x^1 বোৰ হ'ল চলকৰ মান

অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত x^1 বোৰ হ'ল বিভাজনৰ মধ্যমান

$\overline{x}$ = মাধ্য

মানক বিচলন ঃ

কল্পিত গড় পদ্ধতি (নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত)

সূত্ৰটো হ'ল ঃ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$ .... (4)

য'ত, $d_i = x_i - A$, $i = 1, 2, 3, ... n$

$A =$ কল্পিত গড়

$n =$ মুঠ আৰেক্ষণৰ সংখ্যা

মানক বিচলন ঃ কল্পিত গড় পদ্ধতি (বিচ্ছিন্ন আৰু অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত) ঃ

মানক বিচলনৰ সূত্ৰকেইটা হ'ল—

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2} \text{ .... (5)}$$

আৰু $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f\left(d^1\right)^2}{n} - \left(\frac{\sum fd^1}{n}\right)^2} \times i$ .... (6)

য'ত $d = x - A$, $A =$ কল্পিত গড়

$d^1 = \frac{x - A}{i}$, i বিভাগৰ অন্তৰাল

$n =$ মুঠ পৰিসংখ্যা

বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত x^1 বোৰ চলকৰ মান

অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত x^1 বোৰ বিভাগৰ মাধ্যমান

(5) নং সূত্ৰটো বিচ্ছিন্ন আৰু অবিচ্ছিন্ন দুয়োটা শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰযোজ্য

(6) নং সূত্ৰটো অকল অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰযোজ্য। অৱশ্যে বিভাগবোৰৰ অন্তৰাল একেই থাকিব লাগিব। যদি বিভাগবোৰৰ অন্তৰাল একেই নাথাকে তেন্তে (6) নং সূত্ৰ প্ৰযোজ্য নহয়, সেইক্ষেত্ৰত (5) নং সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰিবা।

টোকা ঃ

1. বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত কল্পিত গড় A ৰ মান চলকৰ মানকেইটাৰ মাজৰ পৰা ধৰিব লাগে।
2. অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত কল্পিত গড় A ৰ মান বিভাগবোৰৰ মধ্যমানবোৰৰ মাজৰ পৰা ল'ব লাগে।

মানক বিচলনৰ ধৰ্মসমূহ ঃ

1. মূলবিন্দু পৰিৱৰ্তনত মানক বিচলন প্ৰভাৱান্বিত নহয়, কিন্তু মাত্ৰাৰ পৰিৱৰ্তনত প্ৰভাৱান্বিত হয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, x- চলকৰ মানবোৰ হ'ল— $x_1, x_2, ..., x_n$

ধৰা হ'ল, $d_i = x_i - A$ $(i=1,2,...., n)$

A = এটা ধ্ৰুৱক সংখ্যা (অৰ্থাৎ মূলবিন্দু A-ৰ পৰা চলকৰ মানবোৰৰ পাৰ্থক্য লোৱা হৈছে)

প্ৰমাণ কৰিব লাগে— $\sigma_x = \sigma_d$

আমি জানো— $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}.\sum(x_i - \bar{x})^2, \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

এতিয়া, $d_i = x_i - A \quad \therefore x_i = A + di$

$\therefore \sum d_i = \sum(x_i) - \sum(A) = \sum x_i - nA$

$\Rightarrow \frac{\sum d_i}{n} - \frac{\sum x_i}{n} - A$ (উভয়পক্ষক n ৰে ভাগ কৰি)

$\Rightarrow \bar{d} = \bar{x} - A$ অৰ্থাৎ, $\bar{x} = A + \bar{d}$

এতিয়া, $x_i - \bar{x}(A + d_i) - (A + \bar{d}) = di - \bar{d}$

$$\therefore \sigma_x^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum(d_i - \bar{d})^2 = \sigma_d^2$$

অৰ্থাৎ $\sigma_x = \sigma_d$

এতেকে দেখা গ'ল যে মূলবিন্দুৰ পৰিৱৰ্তন মানক বিচলন একেই থাকে। অৰ্থাৎ মানক বিচলন পৰিৱৰ্তন নহয়।

আকৌ, x চলকৰ মানবোৰ $x_1, x_2,..... x_n$ লোৱা হ'ল। এই মানবোৰক 'h'ৰে ভাগ কৰি নতুন চলক এটা u পোৱা গ'ল অৰ্থাৎ—

$$u = \frac{x}{h} \qquad \therefore x = hu$$

সংজ্ঞা মতে, $\sigma_x^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}$, $\sigma_x^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}$.......... (1)

এতিয়া, $u = \frac{x}{h} \Rightarrow x = hu$

$\therefore \bar{x} = h\bar{u}$

আকৌ, $x - \bar{x} = hu - h\bar{u} = h(u - \bar{x})$

$\therefore \sigma_x^2 = \frac{\sum h\{u - \bar{x}\}^2}{n} = h^2.\sigma_x^2$ [(1) ৰ পৰা]

$\therefore \sigma_x = h.\sigma x$

অৰ্থাৎ, $\sigma_x = \frac{\sigma_x}{h}$

এতেকে দেখা গ'ল মাত্ৰাৰ পৰিৱৰ্তনত মানক বিচলনৰ পৰিৱৰ্তন হয়।

2. x-চলকৰ দুটা মান x_1 আৰু x_2ৰ মানক বিচলন মান দুটাৰ পাৰ্থক্যৰ আধা।

প্ৰমাণ ঃ ইয়াত, চলকৰ মান দুটা x_1 আৰু x_2, অৰ্থাৎ, $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$

এতিয়া, $\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2}{2}$ (6-ৰ সংজ্ঞা মতে)

$$= \frac{1}{2}\left[\left(x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2\right]$$

$\therefore \sigma = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ $\therefore \sigma$ সদায় ধনাত্মক

3. দুটা বিভাগৰ যুগ্ম মানক বিচলন হ'ল—

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{x_1\sigma_1{}^2 + x_2\sigma_2{}^2 + n_1d_1{}^2 + n_2d_2{}^2}{n_1 + n_2}}$$

য'ত, σ_{12} = বিভাগ দুটাৰ যুগ্ম মানক বিচলন
σ_1 = প্ৰথম বিভাগৰ মানক বিচলন
σ_2 = দ্বিতীয় বিভাগৰ মানক বিচলন
$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_{12}$
$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_{12}$
$\bar{x}_{12}$ = বিভাগ দুটাৰ যুগ্ম গড়
$\bar{x}_1$ = প্ৰথম বিভাগৰ গড়
$\bar{x}_2$ = দ্বিতীয় বিভাগৰ গড়

টোকা ঃ

তিনিটা বা ততোধিক বিভাগৰো ওপৰৰ সূত্ৰটো মতে লিখিব পৰা যাব।

4. n সংখ্যক স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ মানক বিচলন হ'ব—

$\sigma = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{12}}$ (প্ৰমাণ দিয়া নহ'ল)

5. পাৰ্থক্যবোৰ $\bar{x}$ৰ বাহিৰে অইন কোনো ধ্ৰুৱক সংখ্যাৰ পৰা লোৱা হ'লে মানক বিচলনৰ মান $s = \frac{1}{n}\Sigma(x_i - A)^2$ তকৈ ন্যূনতম, A = ধ্ৰুৱক সংখ্যা
(প্ৰমাণ দিয়া নহ'ল)

বিচলনৰ পৰিমাপবোৰৰ কেইটামান সম্বন্ধ ঃ

মানক বিণ্টন বা সমমিত বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত—

1. চতুৰাংশ বিচলন $= \frac{2}{3}$ মানক বিচলন $= \frac{5}{6}$ গড় বিচলন

2. গড় বিচলন $= \frac{4}{5}$ মানক বিচলন।

3. 6 চতুৰাংশ বিচলন = 5 গড় বিচলন = 4 মানক বিচলন।

মানক বিচলনৰ সুবিধা-অসুবিধাসমূহ ঃ

সুবিধা ঃ

1. ইয়াৰ সংজ্ঞা সঠিক
2. ই আটাইকেইটা আৰেক্ষণক অন্তৰ্ভুক্ত কৰে।
3. বীজগণিতীয় সম্প্ৰসাৰণ সম্ভৱ।
4. প্ৰতিদৰ্শজ তাৰতম্যৰ দ্বাৰাই ই বেছি প্ৰভাৱান্বিত হয়।
5. বিভিন্ন শ্ৰেণীৰ বিচলন তুলনা কৰাৰ ক্ষেত্ৰত মানক বিচলন গুণাংকৰ ব্যৱহাৰ বেছি দেখা যায়। (মানক বিচলন গুণাংক $=\frac{6}{x}\times 100$)

অসুবিধা ঃ

1. মানক বিচলন বুজিবলৈ আৰু গণনা কৰিবলৈ টান।
2. গুৰুমান বা লঘুমানৰ দ্বাৰাই মানক বিচলন বেছি প্ৰভাৱান্বিত হয়।

ব্যৱহাৰ ঃ বিচলনৰ পৰিমাপবোৰৰ ভিতৰত মানক বিচলন এটা আদৰ্শ পৰিমাপ। কিয়নো ই আদৰ্শ পৰিমাপৰ প্ৰায়বোৰ বৈশিষ্ট্য সিদ্ধ কৰে আৰু বেলেগ পৰিমাপবোৰৰ তুলনাত ই বেছি ভাগ সমস্যাৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰযোজ্য হয়। সহ-সম্বন্ধ-সমাশ্ৰয়ণ, নমুনাতত্ত্বত (Sampling theory), প্ৰকল্প পৰীক্ষাত, সাংখ্যিকীয় গুণাগুণ নিয়ন্ত্ৰণ সমস্যাবোৰৰ ক্ষেত্ৰত তত্ত্বগত বণ্টন ইত্যাদিৰ ক্ষেত্ৰত মানক বিচলনৰ ভূমিকা অনস্বীকাৰ্য।

টোকা ঃ

মানক বিচলনৰ বৰ্গক প্ৰসৰণ (variance) বুলি কোৱা হয়।

বিচলন গুণাংক (Coeffient of Variation) ঃ

বিচলনৰ পৰম পৰিমাপবোৰ যেনে— প্ৰসাৰ, চতুৰাংশ বিচলন, গড় বিচলন আৰু মানক বিচলনৰ দ্বাৰাই দুই বা ততোধিক বিভাজন বিভিন্ন এককত প্ৰকাশিত থাকিলে বিচলনৰ তুলনা কৰা সম্ভৱ নহয়। কিয়নো এই পৰিমাপবোৰ সংশ্লিষ্ট বিভাজনৰ এককত (অৰ্থাৎ ভিন্ ভিন্ এককত) থাকিব।

আনহাতে তুলনা কৰিব লগা বিভাজনবোৰৰ মাধ্যৰ মানবোৰৰ পাৰ্থক্য যথেষ্ট বেছি হ'লে বিচলনৰ পৰম পৰিমাপবোৰৰ দ্বাৰাই (বিভাজনবোৰৰ একক একেই থাকিলেও) বিচলনৰ তুলনা যুক্তিযুক্ত নহয়।

সেয়েহে, কাৰ্ল পীয়াৰছনে এটা আপেক্ষিক পৰিমাপ যেনে— বিচলন গুণাংকৰ দিহা দিছে। তেওঁৰ মতে, বিচলন গুণাংক হ'ল মাধ্যৰ শতাংশ বিচলন অৰ্থাৎ,

বিচলন গুণাংক $=\frac{6}{x}\times 100$

= মানক বিচলন গুণাংক × 100

বিচলন গুণাংক এটা শুদ্ধ সংখ্যা আৰু ই এককমুক্ত।

সেয়েহে বিভাজনবোৰৰ একক যিয়েই নহওক লাগিলে, বিচলন গুণাংকৰে বিচলনৰ তুলনা কৰা সম্ভৱ।

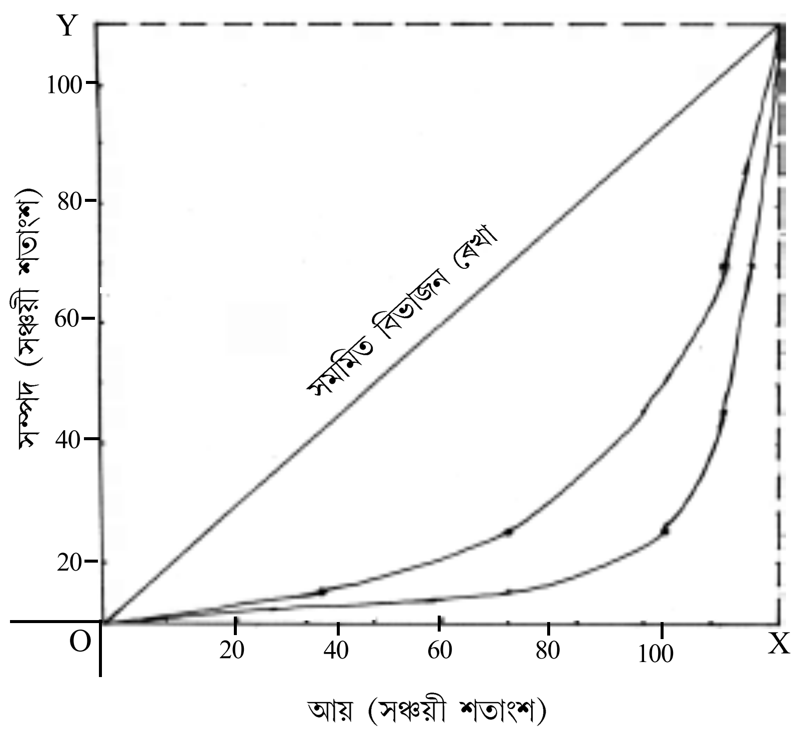
এটা বিভাজন A-ৰ বিচলন গুণাংকৰ মান অইন এটা বিভাজন B-ৰ বিচলন গুণাংকৰ মানতকৈ কম হ'লে A-বিভাজনটোৰ আৰেক্ষণবোৰ B-ৰ তুলনাত বেছি সংগতিপূৰ্ণ (Consistent) আৰু সমমিত বুলি কোৱা হয়।

ল'ৰেঞ্জ বক্ৰ (Lorenz Curve) ঃ

ল'ৰেঞ্জ বক্ৰ হ'ল বিচলন অধ্যয়নৰ এটা লৈখিক পদ্ধতি। এই বক্ৰটোৰ উদ্ভাৱক হ'ল প্ৰখ্যাত আৰ্থ-পৰিসংখ্যানবিদ ড° মেক্স-ও-ল'ৰেঞ্জ। তেখেতে আয় আৰু সম্পদৰ বিচলন অধ্যয়ন কৰিবলৈ এই বক্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰিছিল। এই উদ্দেশ্যে আয় আৰু সম্পদৰ মানকেইটাৰ সঞ্চয়ী সংখ্যা শতাংশত প্ৰকাশ কৰি এইবোৰ ক্ৰমে X আৰু Y অক্ষৰেখাত (উপযুক্ত পৰিমাপ মাত্ৰ লৈ) সংস্থাপিত কৰি মসৃণ বক্ৰৰে সংযোগ কৰি যিটো বক্ৰ পোৱা হয় তাকেই ল'ৰেঞ্জ বক্ৰ বোলা হয়। লেখ কাগজৰ প্ৰথম চ'কক যিটো ৰেখাই সমদ্বিখণ্ডিত কৰে তাক সমমিত বিভাজন ৰেখা (Line of equal distribution) বোলা হয়। বক্ৰটো সমমিত বিভাজন ৰেখাৰ পৰা যিমানেই আঁতৰত থাকে সিমানেই বিভাজনটোৰ বিচলন বেছি হয় আৰু কম আঁতৰত থাকিলে বিভাজনটোৰ বিচলন কম হয়।

ল'ৰেঞ্জ বক্ৰ অকল আয় আৰু সম্পদৰ ক্ষেত্ৰত সীমাবদ্ধ নহয়। যিকোনো দুটা সম্বন্ধ থকা চলকৰ বিচলন অধ্যয়নত এই বক্ৰৰ ব্যৱহাৰ দেখা যায়।

ল'ৰেঞ্জ বক্ৰই বিচলনৰ পৰিমাণক সংখ্যাৰে জুখিব নোৱাৰে সঁচা বৰং বিচলনৰ গুণগত দিশৰ দিহা দিয়ে। ল'ৰেঞ্জ বক্ৰই বিচলন অধ্যয়নৰ এটা থূলমূল আভাস দাঙি ধৰে।



ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

1. তলৰ তথ্যৰ মানক বিচলন নিৰ্ণয় কৰা।

(a) 9, 7, 5, 11, 3

(b)

বয়স (বছৰত) ঃ	30	40	50	60	70
মানুহৰ সংখ্যা ঃ	64	132	153	140	51

(c)

উচ্চতা (ইঞ্চি) ঃ	60–62	62–64	64–66	66–68	68–70
ছাত্ৰ সংখ্যা ঃ	34	27	20	13	6

সমাধান ঃ

(a) প্ৰদত্ত তথ্যখিনি এটা নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণী।

দুটা পদ্ধতিত অৰ্থাৎ প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি আৰু কল্পিত গড় পদ্ধতিত মানক বিচলনৰ মান নিৰ্ণয় কৰা হ'ব।

সূত্ৰ দুটা হ'ল ঃ $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(x-\overline{x})^2}$ .... (1)

আৰু $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$ .... (2), $d = x - A$

A = কল্পিত গড় = 5 (ধৰা হ'ল)

	x	$x-\overline{x}$ $x-7$	$(x-7)^2$	$d=x-5$	d^2
	9	2	4	4	16
	7	0	0	2	4
	5	–2	4	0	0
	11	4	16	6	36
ইয়াত n=5	3	–4	16	–2	4
মুঠ	35		40	10	60

$\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{35}{5} = 7$

(1) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{40}{5}} = \sqrt{8} = 2.83$

(2) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{60}{5} - \left(\frac{10}{5}\right)^2}$

$= \sqrt{12-4} = \sqrt{8} = 2.83$

(b) প্ৰদত্ত তথ্যখিনি এটা বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণী।

ইয়াত, কল্পিত গড় পদ্ধতিৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি মানক বিচলন নিৰ্ণয় কৰা হ'ব।

সূত্ৰটো হ'ল ঃ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2} \quad d = x - A$$

A = কল্পিত গড় = 50 (ধৰা হ'ল), n = মুঠ পৰিসংখ্যা

টোকা ঃ

তালিকাখন প্ৰস্তুত কৰাৰ সময়ত সূত্ৰত লাগতিয়াল প্ৰতীক চিনবোৰৰ আধাৰত তালিকাৰ স্তম্ভকেইটা তৈয়াৰ কৰা হয়।

	বয়স x **বছৰত**	**মানুহৰ সংখ্যা** f	$d = x - 50$	d^2	fd	fd^2
	30	64	–20	400	–1280	25600
	40	132	–10	100	–1320	13200
	50	153	0	0	0	0
	60	140	10	100	1400	14000
	70	51	20	400	1020	20400
মুঠ		540-n			–180	73200

$$\sigma = \sqrt{\frac{73200}{540} - \left(\frac{-180}{540}\right)^2}$$

$$= \sqrt{135.5 - 0.01}$$

$$= \sqrt{135.44}$$

= 11.64 বছৰ (প্ৰায়)

টোকা ঃ

প্ৰসৰণ = $\sigma^2 = (11.64)^2$

= 135.4896 বৰ্গ বছৰ

(c) প্ৰদত্ত তথ্যখিনি এটা অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ উদাহৰণ আৰু প্ৰত্যেকটো বিভাগৰ অন্তৰাল সমান। সেয়েহে কল্পিত গড় পদ্ধতিৰ তলত উল্লেখ কৰা সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰা সুবিধাজনক।

সূত্ৰটো হ'ল— $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(d^/)^2}{n} - \left(\frac{\sum fd^/}{n}\right)^2} \times i$, $d^/ = \frac{x-A}{i}$

A = কল্পিত গড়

65 = (ধৰা হ'ল) i= 2.

	উচ্চতা (ই)	মধ্যমান x	ছাত্ৰসংখ্যা f	$d^/ = \frac{x-65}{2}$	$(d^/)^2$	$fd^/$	$f(d^/)^2$
	60–62	61	34	–2	4	–68	136
	62–64	63	27	–1	1	–27	27
	64–66	65	20	0	0	0	0
	66–68	67	13	1	1	13	13
	68–70	69	6	2	4	12	24
মুঠ			100=n			–70	200

এতিয়া, $\sigma = \sqrt{\frac{200}{100} - \left(\frac{-70}{100}\right)^2} \times 2$

$= \sqrt{2 - 0.49} \times 2$

$= \sqrt{1.51} \times 2$

$\simeq 1.23 \times 2 \simeq 2.46$ ইঞ্চি

উদাহৰণ 2 ঃ

(a) n সংখ্যক স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ মানক বিচলন $\sqrt{14}$ হ'লে n-ৰ মান কিমান?

(b) দুটা প্ৰতিদৰ্শত ক্ৰমে 60 টা আৰু 90 টা আৰেক্ষণ আছে আৰু সিহঁতৰ মাধ্য আৰু ক্ৰমে 52 আৰু 48 আৰু মানক বিচল ক্ৰমে 9 আৰু 12 হ'লে প্ৰতিদৰ্শ দুটাৰ যুগ্ম গড় আৰু যুগ্মমানক বিচলন নিৰ্ণয় কৰা।

(c) যদি Q_1=142, Q_3–Q_1=18 হয় তেন্তে মধ্যমা কিমান?
(বিভাজনটো মধ্যমাৰ লগত সমমিত)

(d) 20 টা সংখ্যাৰ মাধ্য আৰু মানক বিচলন ক্ৰমে 10 আৰু 2। পিছত দেখা গ'ল এটা সংখ্যা ভুলক্ৰমে 8 লোৱা হৈছে। শুদ্ধ মাধ্য আৰু মানক বিচলন নিৰ্ণয় কৰা যদি

(i) অশুদ্ধ সংখ্যাটো বাদ দিয়া হয়।

(ii) অশুদ্ধ সংখ্যাৰ সলনি 12 অন্তৰ্ভুক্ত কৰা হয়।

(e) এটা শ্ৰেণীত 100 টা আৰেক্ষণ আছে। 4 চে.মিৰ পৰা আৰেক্ষণবোৰৰ পাৰ্থক্যৰ যোগফল আৰু আৰেক্ষণবোৰ পাৰ্থক্যৰ বৰ্গৰ যোগফল ক্ৰমে – 11 চে. মি. আৰু 257 বৰ্গ চে.মি. হ'লে বিচলন গুণাংক নিৰ্ণয় কৰা।

(f) বিচলন গুণাংক 25 আৰু মাধ্য 20 হ'লে, মানক বিচলন কিমান?

(g) প্ৰতিষ্ঠান এটাৰ বনুৱাসকলৰ গড় মজুৰি 8 টকাৰ পৰা 12 টকালৈ বৃদ্ধি পালে আৰু মজুৰিৰ মানক বিচলন 1 টকাৰ পৰা 5 টকালৈ বৃদ্ধি পালে। বৰ্তমান বনুৱাসকলৰ মজুৰি বেছি নে কম সংগতিপূৰ্ণ?

(h) 5 টা সংখ্যাৰ মাধ্য 4.4 আৰু প্ৰসৰণ 8.24। যদি তিনিটা সংখ্যা 4, 6 আৰু 9 হয়, তেন্তে বাকী দুটা সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

উদাহৰণ 3 ঃ

(a) দুটা সংখ্যাৰ মানক বিচলন 5 আৰু ইয়াৰে এটা সংখ্যা 12 হ'লে অইন সংখ্যাটো কিমান?

(b) 5, 5, 5, 7, 7, 7 ৰ মানক বিচলন কিমান?

(c) যদি 2, 5, 6, 8, 9 ৰ মানক বিচলন 2.449 হয় তেন্তে তলৰ তথ্যখিনিৰ মানক বিচলন নিৰ্ণয় কৰা—(গণনা নকৰাকৈ)

(i) 15, 18, 19, 21, 22, (ii) 4, 10, 12, 16, 18 (iii) 5, 11, 13, 17, 19

(d) x ৰ মানক বিচলন 14 হ'লে মানক বিচলন নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $x - 2$ (ii) $x + 1$ (iii) $2x$

(iv) $\frac{x}{2}$ (v) $2x + 1$ (vi) $-x + 1$

উদাহৰণ 4 ঃ

(a) যদি x আৰু y চলক দুটাৰ সম্বন্ধ $5x–7y=11$ হয় আৰু x-ৰ প্ৰসাৰ 5 হয়, তেন্তে y-ৰ প্ৰসাৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) যদি x আৰু y চলক দুটাৰ সম্বন্ধ $2x+3y=7$ হয় আৰু x-ৰ চতুৰাংশ বিচলন 3 হয়, তেন্তে y-ৰ চতুৰাংশ বিচলন নিৰ্ণয় কৰা।

(c) যদি x আৰু y চলক দুটাৰ সম্বন্ধ $5x+2y=17$ হয় আৰু y-ৰ মাধ্য 6 ৰ পৰা y-ৰ গড় বিচলন 5 হয় তেন্তে মাধ্যৰ পৰা x-ৰ গড় বিচলন নিৰ্ণয় কৰা।

(d) মিঃ বৰুৱাই 10,000 টকা দুটা কোম্পানী A অথবা B-ত খটুৱাব বিচাৰে। A কোম্পানিটোৰ বছৰেকীয়া গড় আয় 16000 টকা আৰু মানক বিচলন 125 টকা। B কোম্পানিটোৰ বছৰেকীয়া গড় আয় 20,000 টকা আৰু মানক বিচলন 200 টকা। কোনটো কোম্পানিত টকা বিনিয়োগ কৰা লাভজনক হ'ব?

উদাহৰণ 2 ঃ

সমাধান ঃ (a) আমি জানো যে, n সংখ্যক স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ মানক বিচলন—

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{14} = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

$$\Rightarrow 14 = \frac{n^2-1}{12}$$ (উভয় পক্ষক বৰ্গ কৰি)

$\Rightarrow n^2 = 169 \quad \therefore\ n = 13$ উত্তৰ

(b) ইয়াত, $n_1 = 60,\ n_2 = 90,\ \bar{x}_1 = 53,\ \bar{x}_2 = 48,\ \sigma_1 = 9,\ \sigma_2 = 12$

এতিয়া, $$\bar{x}_{12} = \frac{x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2}{n_1+n_2} = \frac{60\times 52 + 90\times 48}{60+90}$$

$$= \frac{3120+4320}{150} = \frac{7440}{150} = 49.6$$

$$d_1 - \bar{x}_1 - \bar{x}_{12} = 52 - 49.6 = 2.4$$

$$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_{12} = 48 - 49.6 = -1.6$$

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{n_1\sigma_1{}^2 + n_2\sigma_2{}^2 + n_1d_1{}^2 + n_2d_2{}^2}{n_1+n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{60\times 9^2 + 90\times 12^2 + 60\times(2.4)^2 + 90\times(-1.6)^2}{60+90}}$$

$\therefore\ \sigma_{12} = 11.1$ (গণনা কৰাৰ পিছত)

(c) ইয়াত, $Q_1 = 143,\ Q_3 - Q_1 = 18$ অৰ্থাৎ, $Q_3 = 18 + Q_1 = 18 + 142 = 160$

$\therefore$ বিভাজনটো মধ্যমাৰ লগত সমমিত,

$$\therefore\ M_e - Q_1 = Q_3 - M_e$$

$$\Rightarrow 2M_e = Q_3 + Q_1 = 160 + 142$$

$$\therefore\ M_e = \frac{302}{2} = 151$$

(d) (i) প্ৰশ্নমতে, 19 টা সংখ্যাৰ সমষ্টি (শুদ্ধ) $= 20\times 10 - 8 = 192$

$\therefore$ শুদ্ধ মাধ্য $= \frac{192}{19} = 10.11$

(ii) 20 টা সংখ্যাৰ সমষ্টি (শুদ্ধ) $= 20\times 10 - 8 + 12 = 204$

$\therefore$ শুদ্ধ মাধ্য $= \frac{204}{20} = 10.2$

আকৌ,

(i) অশুদ্ধ মানক বিচলন $=\sqrt{\frac{\text{অশুদ্ধ } \sum x^2}{n} - \text{অশুদ্ধ } \bar{x}^2}$

$\Rightarrow 2=\sqrt{\frac{\text{অশুদ্ধ } \sum x^2}{20} - 10^2}$

$\Rightarrow 104 \times 20=$অশুদ্ধ $\sum x^2$ (উভয় পক্ষক বৰ্গ কৰি)

$\therefore$ শুদ্ধ $\sum x^2 = 2080-8^2 = 2016$

এতিয়া, শুদ্ধ মানক বিচলন $= \sqrt{\frac{\text{শুদ্ধ } \sum x^2}{19} - \text{শুদ্ধ } \bar{x}^2}$

$=\sqrt{\frac{2016}{19}-(10.11)^2}$

$= 1.98$ (গণনা কৰাৰ পিছত)

(ii) একেদৰে,

শুদ্ধ $\sum x^2 = 2080-8^2+12^2=2160$

এতেকে, শুদ্ধ মানক বিচলন $=\sqrt{\frac{\text{শুদ্ধ } \sum x^2}{20} - \text{শুদ্ধ } \bar{x}^2}$

$=\sqrt{\frac{2160}{20}-(10.2)^2}$

$=\sqrt{108-104.04}$

$=\sqrt{3.96}$

$=1.99$

(e) ইয়াত, $\sum d = \sum(x-4) = -11$ চে.মি., $A=4$, $n = 100$

$\sum d^2 = \sum(x-4)^2=257$ বৰ্গ চে.মি., বিচলন গুণাংক = ?

এতিয়া, $\bar{x} = A + \frac{\sum d}{n} = 4 + \frac{-11}{100} = 3.89$

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{257}{100} - \left(\frac{-11}{100}\right)^2}$

$= \sqrt{2.57-0.0121} = \sqrt{2.5579} = 1.59$

আকৌ, বিচলন গুণাংক $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{1.59}{3.89} \times 100 = \frac{15900}{389} \simeq 41\%$

(f) ইয়াত, বিচলন গুণাংক = 25, $\overline{x}=20$, $\sigma=?$

আমি জানো যে, বিচলন গুণাংক $=\frac{\sigma}{\overline{x}}\times 100$

$$\Rightarrow 25=\frac{\sigma}{20}\times 100 \quad \therefore \sigma=5$$

(g) বনুৱাসকলৰ মজুৰি সংগতিপূৰ্ণ নিৰ্ণয় কৰাৰ ক্ষেত্ৰত, বিচলন গুণাংকৰে তুলনা কৰা হ'ব।

প্ৰথম অৱস্থাত, বিচলন গুণাংক $=\frac{\sigma}{\overline{x}}\times 100=\frac{1}{8}\times 100=12.5\%$

দ্বিতীয় অৱস্থাত বিচলন গুণাংক $=\frac{\sigma}{\overline{x}}\times 100=\frac{5}{12}\times 100=\frac{125}{3}=41\frac{2}{3}\%$

$$\because 41\frac{2}{3}\% > 12.5\%$$

$\therefore$ বৰ্তমানে বনুৱাসকলৰ মজুৰিৰ কম সংগতিপূৰ্ণ।

(h) ধৰা হ'ল, বাকী থকা সংখ্যা দুটা ক্ৰমে x_1 আৰু x_2

এতিয়া $\overline{x}=\frac{\sum x}{n}$

$$\Rightarrow 4.4=\frac{\sum x}{5} \quad \therefore \sum x=22$$

$\because$ তিনিটা সংখ্যাৰ মান 4, 6 আৰু 9 $\therefore$ $x_1+x_2=22-4-6-9=3$

অৰ্থাৎ $x_1+x_2=3$ .... (1)

আকৌ, $\sigma^2=\frac{\sum x^2}{n}-\overline{x}^2$

$$\Rightarrow 8.24=\frac{x_1^2+x_2^2+4^2+6^2+9^2}{5}-(4.4)^2$$

$$\Rightarrow (8.24+19.36)\times 5-16-36-81=x_1^2+x_2^2$$

$$\Rightarrow 138-133=x_1^2+x_2^2$$

$$\therefore x_1^2+x_2^2=5 \text{............ (2)}$$

এতিয়া, (1) নং সমীকৰণৰ পৰা পাওঁ, $x_2=3-x_1$

এতেকে (2) নং সমীকৰণৰ পৰা পাওঁ, $x_1^2+(3-x_1)^2=5$

$\Rightarrow 2x_1^2-6x_1+4=0$

$\Rightarrow x_1^2-3x_1+2=0$ (উভয়পক্ষক 2 ৰে ভাগ কৰি)

$\Rightarrow x_1^2-2x_1-x_1+2=0$

$\Rightarrow x_1(x_1-2)-1(x_1-2)=0$

$\therefore x_1=1$ or 2

আৰু (1) ৰ পৰা পাওঁ, $x_2=2$ or 1

অৰ্থাৎ, সংখ্যা দুটা হ'ল 1 আৰু 2।

উদাহৰণ 3 ঃ

সমাধান ঃ

(a) দুটা সংখ্যাৰ মানক বিচলন $=\frac{1}{2}(x_1-x_2)$ ধৰা হ'ল অইন সংখ্যাটো x_2

$$\Rightarrow 5=\frac{1}{2}(12-x_2)$$
$$\Rightarrow\ 10=12-x_2$$
$$\therefore\ x_2 = 2$$

যদি, $x_2>x_1$ হয় তেন্তে, $5=\frac{1}{2}(x_2-x_1)=\frac{1}{2}(x_2-12)$

$$\Rightarrow\ 10=x_2-12$$
$$\therefore\ x_2=22$$

অৰ্থাৎ, অইন সংখ্যাটো 2 অথবা 22 (উত্তৰ)

(b) 5, 5, 5, 7, 7 অৰু 7 ৰ মানক বিচলন = 5 আৰু 7 ৰ মানক বিচলন $=\frac{1}{2}(7-5)=1$

(c) ইয়াত, 2, 5, 6, 8 আৰু 9 ৰ মানক বিচলন = 2.449

(i) 2, 5, 6, 8 আৰু 9 শ্ৰেণীটোৰ প্ৰত্যেকটো আৰেক্ষণৰ লগত 13 যোগ কৰিলে প্ৰদত্ত শ্ৰেণীটো পোৱা যায়।

যিহেতু মানক বিচলন মূল বিন্দুৰ পৰিৱৰ্তনৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল নহয়, এতেকে প্ৰদত্ত শ্ৰেণীৰ মানক বিচলন আগৰ দৰেই থাকিব অৰ্থাৎ 2.449 হ'ব।

(ii) 2, 5, 6, 8 আৰু 9 শ্ৰেণীটোৰ প্ৰত্যেকটো আৰেক্ষণক 2-ৰে হৰণ কৰিলে প্ৰদত্ত শ্ৰেণীটো পোৱা যায়।

যিহেতু মানক বিচলন মাত্ৰাৰ পৰিৱৰ্তনত নিৰ্ভৰশীল, সেয়েহে প্ৰদত্ত শ্ৰেণীৰ মানক বিচলন $= 2.449 \times 2 = 4.898$

(iii) 2, 5, 6, 8 আৰু 9 শ্ৰেণীটোৰ প্ৰত্যেকটো আৰেক্ষণক 2 ৰে গুণ কৰি 1 যোগ দিলে প্ৰদত্ত শ্ৰেণীটো পোৱা যায়, সেয়েহে প্ৰদত্ত শ্ৰেণীৰ মানক বিচলন = 2.449 × 2 = 4.898 (কাৰণ মূল বিন্দুৰ পৰিৱৰ্তনত মানক বিচলন নিৰ্ভৰশীল নহয় আৰু মাত্ৰাৰ পৰিৱৰ্তনৰ ওপৰতহে নিৰ্ভৰশীল)

(d) ইয়াত, x-ৰ মানক বিচলন = 14

(i) $\sigma = 14$ (ii) $\sigma = 14$ (iii) $\sigma = 2\times14=28$

(iv) $\sigma=\frac{14}{2}=7$ (v) $\sigma = 14 \times 2 = 28$ (vi) $\sigma = 14$ ($\because \sigma > 0$)

(কাৰণ, মানক বিচলন মূলবিন্দুৰ পৰিৱৰ্তনত নিৰ্ভৰশীল নহয় কিন্তু মাত্ৰাৰ পৰিৱৰ্তনত নিৰ্ভৰশীল)

উদাহৰণ 4 ঃ

সমাধান ঃ আমি জানো যে,

যদি $ax+by+c=0$ হয়, (a, b আৰু c ধ্ৰুৱক সংখ্যা)

তেন্তে, $|a|\times x$ বিচলন $|b|\times y$-ৰ বিচলন (বিচলন শব্দটো প্ৰসাৰ, চতুৰাংশ, বিচলন, গড় বিচলন আৰু মানক বিচলন— এই আটাইকেইটা পৰিমাপকেই বুজায় আৰু ওপৰৰ সূত্ৰটো প্ৰত্যেকটো পৰিমাপৰ বাবেই প্ৰযোজ্য হ'ব)

(a) ইয়াত, x আৰু y ৰ সম্বন্ধটো হ'ল ঃ $5x-7y-11=0$ (ইয়াত $a=5$, $b=-7$)

x-ৰ প্ৰসাৰ = 5, $\therefore$ $|5|\times$ x-ৰ প্ৰসাৰ $=|-7|\times$ y-ৰ প্ৰসাৰ

$= 5\times 5 = 7$y-ৰ প্ৰসাৰ $\therefore$ y-ৰ প্ৰসাৰ $=\frac{25}{7}$

(b) আগৰ দৰেই, $|2|\times$ xৰ চতুৰাংশ বিচলন $=|3|\times$ y-ৰ চতুৰাংশ বিচলন

$\Rightarrow 2\times 3 = 3\times$y-ৰ চতুৰাংশ বিচলন

$\therefore$ y-ৰ চতুৰাংশ বিচলন = 2

(c) আগৰ দৰেই, $=|5|\times$ xৰ গড় বিচলন $=|2|\times$ yৰ গড় বিচলন

$\Rightarrow 5\times$x–ৰ গড় বিচলন $= 2\times 5$

$\therefore$ xৰ গড় বিচলন = 2

(d) কোম্পানিত লাভজনকভাৱে টকা বিনিয়োগ কৰাৰ ক্ষেত্ৰত দুয়োটা কোম্পানিৰ লাভৰ বিচলন গুণাংক নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব।

A কোম্পানিৰ ক্ষেত্ৰত, বিচলন গুণাংক $=\frac{\sigma}{X}\times 100=\frac{125}{16000}\times 100=0.8\%$ (প্ৰায়)

B কোম্পানিৰ ক্ষেত্ৰত, বিচলন গুণাংক $=\frac{\sigma}{X}\times 100=\frac{200}{20000}\times 100=1\%$ (প্ৰায়)

$\because$ 0.8% < 1%

এতেকে, কোম্পানিত A-ত টকা বিনিয়োগ কৰা লাভজনক হ'ব।

উদাহৰণ 5 ঃ

(a) তলৰ তথ্যৰ $\bar{x}=135.3$ আৰু $6=9.6$ বিভাগ অন্তৰাল আৰু বিভাগবিলাক নিৰ্ণয় কৰা।

d' :	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
f :	2	5	8	18	22	13	8	4

(b) তলৰ তথ্যৰ ল'ৰেঞ্জ বক্ৰ অংকন কৰা।

দৰমহা (টকাত) ঃ	50–70	70–90	90–110	110–130	130–150
প্ৰতিষ্ঠান A-ত কৰ্মচাৰীৰ সংখ্যা ঃ	20	15	20	25	20
প্ৰতিষ্ঠান B-ত কৰ্মচাৰীৰ সংখ্যা ঃ	150	100	90	110	50

কোনটো প্ৰতিষ্ঠানত দৰমহাৰ বিচলন বেছি? [নিজে চেষ্টা কৰা, প্ৰতিষ্ঠানত B-ত বেছি]

(c) 80টা আৰেক্ষণৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ ক্রমে 63.2 আৰু 25.93। ইয়াৰে 60 টা আৰেক্ষণৰ মাধ্য 64.8 আৰু মানক বিচলন $=4$। বাকী থকা 20 টা আৰেক্ষণৰ মাধ্য আৰু মানক বিচলন নির্ণয় কৰা।

(d) তলৰ তথ্যখিনিৰ পৰা (i) 44 টকাতকৈ বেছি (ii) 22 টকা আৰু 58 টকাৰ ভিতৰত দৰমহা পোৱা শতকৰা কেইভাগ কর্মচাৰী আছে নির্ণয় কৰা। (iii) চতুৰাংশ বিচলন নির্ণয় কৰা।

দৰমহা (টকাত) ঃ	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
কর্মচাৰীৰ সংখ্যা ঃ	20	45	85	160	70	55	35	30

(e) দুটা প্রতিষ্ঠান A আৰু B ৰ পৰা তলৰ তথ্যখিনি পোৱা গ'ল—

	প্রতিষ্ঠান A	**প্রতিষ্ঠান B**
বনুৱাৰ সংখ্যা ঃ	586	648
গড় মজুৰি ঃ	52.5 টকা	47.5 টকা
মজুৰিৰ প্রসৰণ ঃ	100	121

(i) কোনটো প্রতিষ্ঠানৰ মজুৰিৰ পৰিমাণ বেছি?

(ii) কোনটো প্রতিষ্ঠানৰ মজুৰিৰ বিচলন বেছি?

(f) ছার্টৰ কলাৰ উৎপাদনকাৰী এজনে মানুহবোৰৰ ডিঙিৰ পৰিধিৰ মাপৰ তথ্যখিনি তলত দিয়া ধৰণে পালে।

ডিঙিৰ পৰিধিৰ মধ্যমান (ইঞ্চিত) ঃ	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0	15.5	16.0	16.5
মানুহৰ সংখ্যা ঃ	4	19	30	63	66	29	18	1	1

তথ্যখিনিৰ মানক বিচলন নির্ণয় কৰা আৰু $(\overline{x} \pm 3\sigma)$ ৰাশিটোৰ ব্যৱহাৰ কৰি সর্বোচ্চ আৰু সর্বনিম্ন কলাৰৰ মাপ নির্ণয় কৰা, যাতে উৎপাদনকাৰীজনে সৰহসংখ্যক মানুহৰ প্রয়োজন মিটাব পাৰে; অৱশ্যে মন কৰিবলগীয়া যে মানুহবিলাকে ডিঙিৰ পৰিধিতকৈ $\frac{3}{4}$ ইঞ্চিত বেছি মাপৰ কলাৰহে ব্যৱহাৰ কৰে।

সমাধান ঃ (a) ইয়াত, $\overline{x} = 135.3$, $\sigma = 9.6$, $i = ?$

	d'	f	fd'	$(d')^2$	$f(d')^2$
	−4	2	−8	16	32
	−3	5	−15	9	45
	−2	8	−16	4	32
	−1	18	−18	1	18
	0	22	0	0	0
	1	13	13	1	13
	2	8	16	4	32
	3	4	12	9	36
মুঠ,		80	−16		208

এতিয়া,

$\overline{x} = A + \frac{\sum fd^{/}}{n} \times i$, A = কল্পিত গড়, i = বিভাগৰ অন্তৰাল

$\Rightarrow 135.3 = A + \frac{-16}{80} \times i = A - \frac{i}{5} = \frac{5A - i}{5}$

$\Rightarrow$ 5A–i = 676.5 ....(i)

আকৌ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f\left(d^{/}\right)^2}{n} - \left(\frac{\sum fd^{/}}{n}\right)^2} \times i$

$\Rightarrow 9.6 = \sqrt{\frac{208}{80} - \left(\frac{-16}{80}\right)} \times i$

$= \sqrt{2.6 - 0.04} \times i$

$= \sqrt{2.56 \times i}$

$= 1.6\ i$

$\therefore i = \frac{9.6}{1.6} = 6$

(1)ৰ পৰা পাওঁ ঃ 5A–6 = 676.5

$\therefore\ A = \frac{682.5}{5} = 136.5$

বিভাজনটোৰ মধ্যমানবোৰ—

112.5 118.5 124.5 130.5 136.5 142.5 148.5 154.5

$\therefore$ প্ৰথম বিভাগটো হ'ব— $112.5 - \frac{i}{2} - 112.5 + \frac{i}{2}$ অৰ্থাৎ 109.5–115.5

এতেকে, বাকী বিভাগবোৰ ঃ 115.5–121.5, 121.5–127.5, 127.5–133.5, 133.5–139.5, 139.5–145.5, 145.5–151.5, 151.5–157.5

(c) ইয়াত 80 টা আৰেক্ষণক দুটা বিভাগত ভাগ কৰা হৈছে।

প্ৰথম বিভাগত 60 টা (n_1) আৰু দ্বিতীয় বিভাগত 20 টা (n_2)

আৰু, $\overline{x}_1 = 64.8, \sigma_1 = 4$ আৰু n_1=60_1, n_2 = 20.

$\overline{x}_2$ = ? σ_2 = ?, $\overline{x}_{12} = 63.2$, σ_{12}^2 = 25.93

আমি জানো, $\overline{x}_{12} = \frac{x_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2}{x_1 + x_2}$

$$\Rightarrow 63.2 = \frac{64.8 \times 60 + 20 \times \overline{x}_2}{80}$$

$$\Rightarrow 5056 - 3888 = 20\overline{x}_2 \quad \therefore \overline{x}_2 = \frac{1168}{20} = 58.4$$

আকৌ, $d_1 = \overline{x}_1 - \overline{x}_{12} = 64.8 - 63.2 = +1.6$

$d_2 = \overline{x}_2 - \overline{x}_{12} = 58.4 - 63.2 = -4.8$

এতিয়া, $\sigma_{12}\sqrt{\dfrac{n_1\sigma_1{}^2 + n_2\sigma_2{}^2 + n_1d_1{}^2 + n_2d_2{}^2}{n_1 + n_2}}$

$$\Rightarrow 25.93 = \frac{60 \times 4^2 + 20 \times \sigma_2{}^2 + 60 \times (1.6)^2 + 20(-4.8)^2}{80}$$

(সৰল কৰাৰ পিছত)

$\sigma_2 = 5$

(d) (i) 40–50 বিভাগটোৰ অন্তৰাল 10

$\therefore$ বিভাগটোত গড়ে কৰ্মচাৰীৰ সংখ্যা $= \frac{70}{10} = 7$

এতেকে 44 তকৈ বেছি আৰু 50 লৈ, কৰ্মচাৰীৰ সংখ্যা $= 7 \times 6 = 42$ জন

তথ্যখিনিৰ পৰা 50 টকাতকৈ বেছি পোৱা কৰ্মচাৰীৰ সংখ্যা $= 55 + 35 + 30 = 120$

(বিভাগ ঃ	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
f :	20	45	85	160	70	55	35	30

$\therefore$ 44 টকাতকৈ বেছি পোৱা কৰ্মচাৰীৰ সংখ্যা =42 + 120 = 162

আৰু নিৰ্ণেয় শতকৰা ভাগ $= \frac{162}{500} \times 100 = 32.4$

(ii) একেদৰেই, 22 টকাতকৈ বেছি আৰু 58 টকাতকৈ কম পোৱা কৰ্মচাৰীৰ সংখ্যা $= 8.5 \times 8 + 160 + 70 + 5.5 \times 8 = 342$

আৰু নিৰ্ণেয় শতকৰা ভাগ $= \frac{342}{500} \times 100 = 68.4$

(iii) চতুৰাংশ বিচলন $= \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$

[তথ্যখিনিৰ পৰা Q_1 আৰু Q_3 নিৰ্ণয় কৰা। চতুৰাংশ বিচলন = 11.12 (উত্তৰ) নিজে চেষ্টা কৰা]

(e) ইয়াত, $n_1 = 586$, $n_2 = 648$,

$\overline{x}_1 = 525$ টকা, $\overline{x}_2 = 47.5$ টকা

$\sigma_1{}^2 = 100$, $\sigma_2{}^2 = 121$

$\therefore \sigma_1 = 10$, $\sigma_2 = 11$

(i) প্ৰতিষ্ঠান A-ৰ বনুৱাসকলৰ মুঠ = $x_1\bar{x}_1 = 586 \times 525$ টকা

= 30,765 টকা

প্ৰতিষ্ঠান B-ৰ বনুৱাসকলৰ মুঠ মজুৰি = $x_2\bar{x}_2 = 648 \times 47.5$ টকা

= 30,780 টকা

∴ প্ৰতিষ্ঠান B-ৰ মজুৰিৰ পৰিমাণ বেছি।

(ii) প্ৰতিষ্ঠান দুটাৰ বনুৱাসকলৰ মজুৰিৰ বিচলন নিৰ্ধাৰণ কৰাৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰতিষ্ঠান দুটাৰ বনুৱাসকলৰ মজুৰিৰ বিচলন গুণাংক নিৰ্ণয় কৰা হ'ব।

বিচলন গুণাংক (প্ৰতিষ্ঠান A) $= \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100 = \frac{10}{52.5} \times 100 = 19.04$

বিচলন গুণাংক (প্ৰতিষ্ঠান B) $= \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100 = \frac{11}{47.5} \times 100 = 23.16$

এতেকে দেখা গ'ল যে প্ৰতিষ্ঠান Bৰ বনুৱাসকলৰ মজুৰিৰ বিচলন বেছি।

(f) **সংকেত ঃ** ইয়াত, $\bar{x} = 14.232$, $\sigma = 0.72$ (ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে নিজে চেষ্টা কৰিব)

সৰ্বোচ্চ কলাৰৰ মাপ $= \bar{x} + 3\sigma$

$= 14.232 + 3 \times 0.72$

$= 16.392$

সৰ্বনিম্ন কলাৰৰ মাপ $= \bar{x} - 3\sigma = 14.232 - 3 \times 0.72$

$= 12.072$

∵ মানুহবিলাকে নিজৰ ডিঙিৰ পৰিধিতকৈ $\frac{3}{4}$ ইঞ্চি মাপৰ কলাৰ ব্যৱহাৰ কৰে,

∵ সৰ্বোচ্চ কলাৰৰ মাপ = 16.392 + 0.75 = 17.14 ইঞ্চি

আৰু সৰ্বনিম্ন কলাৰৰ মাপ = $12.072 + 0.75 = 12.82$ ইঞ্চি

উদাহৰণ 6 ঃ তলৰ তথ্যৰ প্ৰসাৰ, চতুৰাংশ বিচলন, গড় বিচলন (মধ্যমাৰ পৰা) আৰু সেইবোৰৰ গুণাংক নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(a) 11, 12, 14, 17, 19, 21, 27, 28, 30, 32, 33

(b)

x:	5	10	15	20	25
f:	6	7	8	11	8

(c)

বিভাগ ঃ	3.50–5.50	5.50–7.50	7.50–9.50	9.50–11.50	11.50–13.50
পৰিসংখ্যা ঃ	6	14	16	10	4

সমাধান ঃ (a) ইয়াত, সৰ্বোচ্চ মান = 33 ∴ প্ৰসাৰ = $33 - 11 = 22$

সৰ্বনিম্ন মান =11 প্ৰসাৰ গুণাংক = $\frac{33-11}{33+11} = \frac{22}{44} = 0.5$

ইয়াত, n = 11

$Q_1 = \frac{n+1}{4}$ তম্ সংখ্যাৰ মান $= \frac{11+1}{4} = 3$ (তৃতীয় সংখ্যাৰ মান)

= 14 (প্ৰদত্ত মানকেইটা ঊৰ্ধ্বক্ৰমত সজোৱা আছে)

$Q_3 = \frac{3(n+1)}{4} = 9$ (অৰ্থাৎ নৱম সংখ্যাৰ মান)

= 30

এতিয়া, চতুৰাংশ বিচলন $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{30-3}{2} = 13.5$

চতুৰাংশ বিচলন গুণাংক $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{27}{33} = \frac{9}{11} = 0.82$ (প্ৰায়)

আকৌ, মধ্যমা $= \frac{n+1}{2}$ তম সংখ্যাৰ মান = ষষ্ঠ সংখ্যাৰ মান

= 21

এতিয়া, গড় বিচলন $= \frac{1}{n}\Sigma$ |(x–মধ্যমা)|

x	|x–মধ্যমা=21|
11	10
12	9
14	7
17	4
19	2
21	0
27	6
28	7
30	9
32	11
33	12
মুঠ	77

∴ গড় বিচলন $= \frac{1}{11} \times 77 = 7$

গড় বিচলনৰ গুণাংক = $\frac{\text{গড় বিচলন}}{\text{মধ্যমা}}$

$= \frac{7}{21} = 0.33$ (প্ৰায়)

(b) ইয়াত, সৰ্বোচ্চ মান = 25

সৰ্বনিম্ন মান = 5

∴ প্ৰসাৰ = 25 – 5 = 20

প্ৰসাৰ গুণাংক $= \frac{25-5}{25+5} = \frac{20}{30} = 0.67$ (প্ৰায়)

x :	5	10	15	20	25
বাৰংবাৰতা ঃ	6	7	8	11	8
সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা ঃ	6	13	21	32	40

$Q_1 = \frac{n}{4}$তম চলকৰ মান $= \frac{40}{4}$ তম চলকৰ মান = 10 তম চলকৰ মান

$\because$ 10 তম চলকৰ মান সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা 13-ত অন্তৰ্ভুক্ত

আৰু ইয়াৰ বিপৰীতে চলকৰ মান 10

$\therefore$ প্ৰথম চতুৰাংশ $(Q_1) = 10$

$Q_3 = \frac{3n}{4}$ তম চলকৰ মান = 30 তম চলকৰ মান

$\therefore Q_3 = 20$

এতিয়া, চতুৰাংশ বিচলন $= \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(20-10) = 5$

চতুৰাংশ বিচলন গুণাংক $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{20-10}{20+10} = \frac{10}{30} = 0.33$ (প্ৰায়)

ইয়াত, মধ্যমা $= \frac{n}{2}$তম চলকৰ মান $= \frac{40}{2}$ তম চলকৰ মান

= 20 তম চলকৰ মান

$\therefore$ মধ্যমা = 15

x	f	cf	|x–মধ্যমা|
5	6	6	10
10	7	13	5
15	8	21	0
20	11	32	5
25	8	40	10
মুঠ	40		30

এতিয়া, গড় বিচলন $= \frac{1}{n}\Sigma$ |x–মধ্যমা|

$= \frac{1}{40} \times 30$

$= 0.75$

গড় বিচলন গুণাংক $= \frac{\text{গড় বিচলন}}{\text{মধ্যমা}}$

$= \frac{0.75}{15} = 0.05$

(c) ইয়াত, সৰ্বোচ্চ মান = 13.50 $\therefore$ প্ৰসাৰ = 1350–3.50 = 10

সৰ্বনিম্ন মান = 3.50 প্ৰসাৰ গুণাংক = $= \frac{1350-350}{13{,}50+350} = \frac{10}{17} \cong 0.59$ (প্ৰায়)

বিভাগ	মধ্যমান x	f	cf	8.13 |x–মাধ্যমা|	f|x–মধ্যমা|
3.50–5.50	4.50	6	6	3.63	21.78
5.50–7.50	6.50	14	20	1.63	22.82
7.50–9.50	8.50	16	36	0.37	4.92
9.50–11.50	10.50	10	46	2.37	23.70
11.50–13.50	12.50	4	50	4.37	17.48
মুঠ		50			90.70

ইয়াত, মধ্যমা $= \frac{n}{2}$ তম মান $= \frac{50}{2}$ তম মান $= 25$ তম মান

$\therefore$ মধ্যমা বিভাগ $= 7.50–9.50$

মধ্যমা $= L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times i,$ $\quad$ $i =$ বিভাগ অন্তৰাল $= 2$

$$= 7.50 + \frac{25-20}{16} \times 2$$

$$= 7.50 + \frac{10}{16} = 7.50+0.63 \simeq 8.13$$

$Q_1 = \frac{n}{4}$ তম মান$= \frac{50}{4}$ তম মান $= 12.50$ তম মান

$\therefore$ প্ৰথম চতুৰাংশ (Q_1) বিভাগ $= 5.50–7.50$

$Q_3 = \frac{3n}{4}$ তম মান $= 37.50$ তম মান

$\therefore$ তৃতীয় চতুৰাংশ বিভাগ $= 9.50–11.50$ বিভাগ
(Q_3)

এতিয়া, $Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - cf}{f} \times i$

$$= 5.50 + \frac{12.50-6}{14} \times 2$$

$$= 5.50 + \frac{13}{14}$$

$$= 5.50+0.92$$

$$= 6.42$$

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3n}{4} - cf}{f} \times i$$

$$= 9.50 + \frac{37.50 - 36}{10} \times 2$$

$$= 9.50 + \frac{3}{10} = 9.50 + 0.30 = 9.80$$

চতুৰাংশ বিচলন $= \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(9.80 – 6.42)$

$$= \frac{1}{2} \times 3.38$$

$$= 1.69$$

চতুৰাংশ বিচলন গুণাংক $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{3.38}{16.22} = \frac{338}{1622} = 0.2$

গড় বিচলন $= \frac{1}{n} \sum f \,|\, x -$ মধ্যমা $| = \frac{1}{50} \times 90.7 = \frac{907}{500} = 1.79$ (প্ৰায়)

গড় বিচলন গুণাংক $= \dfrac{\text{গড় বিচলন}}{\text{মধ্যমা}} = \frac{1.79}{8.13} = \frac{179}{813} = 0.21$ (প্ৰায়)

অনুশীলনী

1. বিচলনৰ অৰ্থ কি? গড় আৰু বিচলন একেলগে অধ্যয়ন কৰাৰ কাৰণ কি? বিচলনৰ পৰিমাপবোৰে কি উদ্দেশ্য সিদ্ধ কৰে? পৰম আৰু আপেক্ষিক বিচলনৰ পাৰ্থক্য কি? দুটা বিভাজনৰ বিচলনৰ তুলনাত কি ধৰণৰ বিচলন বেছি ফলপ্ৰসূ? কাৰণ উল্লেখ কৰা।
2. বিচলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। বিচলনৰ বিভিন্ন পৰিমাপবোৰ কি কি? প্ৰত্যেকৰে সংজ্ঞা উল্লেখ কৰি সিহঁতৰ সুবিধা আৰু অসুবিধাসমূহ লিখা।
3. বিচলনৰ প্ৰত্যেকটো পৰিমাপৰ ব্যৱহাৰ আলোচনা কৰা।
4. বিচলনৰ আদৰ্শ পৰিমাপৰ বৈশিষ্ট্যবোৰ লিখা।
5. মানক বিচলনক আদৰ্শ পৰিমাপ বুলি কোৱা হয় কিয়?
6. বিচলন গুণাংক কি? ই কি উদ্দেশ্য সিদ্ধ কৰে? প্ৰসৰণ বুলিলে কি বুজা?
7. দেখুউৱা যে— মানক বিচলন মূল বিন্দুৰ পৰিৱৰ্তনত নিৰ্ভৰশীল নহয় কিন্তু মাত্ৰাৰ পৰিৱৰ্তনৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল।
8. টোকা লিখা ঃ ল'ৰেঞ্জ বক্ৰ আৰু মানক বিচলন।
9. সাংখ্যিকীয় অধ্যয়নত বিচলনৰ ভূমিকা ব্যাখ্যা কৰা।
10. প্ৰসাৰ আৰু চতুৰ্থাংশ বিচলনৰ তুলনাত গড় বিচলন বেছি ফলপ্ৰসূ নে? তোমাৰ মতামতৰ সপক্ষে যুক্তি দাঙি ধৰা।
11. গড় বিচলন আৰু মানক বিচলনৰ তুলনা কৰা। অৰ্থনীতিবিদসকলে কিয় মানক বিচলনৰ তুলনাত গড় বিচলনক বেছি প্ৰাধান্য দিয়ে?
12. তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

    (i) 15, 15, 15, 15, 15 ৰ মানক বিচলন কিমান?

    (ii) x_1, x_2,...........x_n-ৰ মানক বিচল σ হ'লে—

    (a) $x_1 \pm 10$, $x_2 \pm 10$,........,$x_n \pm 10$ ৰ মানক বিচলন কিমান?

    (b) $3x_1$, $3x_2$, ..., $3x_n$ৰ মানক বিচলন কিমান?

    (iii) 50, 60, 70, 80, 90, 100 আৰু 5, 6, 8, 9, 10 শ্ৰেণী দুটাৰ মানক বিচলনৰ সম্বন্ধ কি?

    (iv) 5, 7, 7, 5, 7, 5-ৰ মানক বিচলন কিমান?

    (v) কোনটো শ্ৰেণীৰ মানবোৰ বেছি সংগতিপূৰ্ণ?

    18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32 অথবা

    5, 12, – 20, 18, 27, 40, 59, 82

(vi) দুজন খেলুৰৈৰ গড় স্কোৰ আৰু স্কোৰৰ মানক বিচল ক্ৰমে 50, 48 আৰু 15, 12 হ'লে কোনজন খেলুৰৈ বেছি পাকৈত?

(vii) এটা বিভাজনৰ মাধ্য আৰু মানক বিচলন ক্ৰমে 20 আৰু 31 যদি বিভাজনটোৰ প্ৰত্যেক আৰেক্ষণৰ লগত 2 যোগ কৰা হয় তেন্তে নতুন শ্ৰেণীটোৰ বিচলন গুণাংক কিমান?

(viii) বিচলনৰ কোনটো পৰিমাপ একক মুক্ত?

(ix) এটা শ্ৰেণীৰ চতুৰাংশ বিচলন 10 হ'লে, প্ৰসৰণ কিমান?

(x) এটা শ্ৰেণীৰ গড় বিচলন 16 হ'লে, মানক বিচলন কিমান?

(xi) চতুৰাংশ বিচলন, গড় বিচলন আৰু মানক বিচলনৰ আসন্ন অনুপাত কিমান?

(xii) 10 টা আৰেক্ষণৰ মানক বিচলন 14 হ'লে, আৰেক্ষণবোৰৰ বৰ্গৰ সমষ্টি কিমান?

(xiii) প্ৰমাণ কৰা — n সংখ্যক স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ মানক বিচলন $\sqrt{\frac{x^2-1}{12}}$ আৰু প্ৰথম 5 টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ গড় বিচলন $\sqrt{2}$

(xiv) 4, 6, 8, 12, 15 আৰেক্ষণকেইটাৰ মাধ্য 9 আৰু মানক বিচলন 4

(i) মানক বিচলন 20 হ'বলৈ হ'লে নতুন আৰেক্ষণকেইটা কি কি হ'ব লাগিব?

(ii) মাধ্য 50 হ'বলৈ হ'লে আৰেক্ষণকেইটা কি কি হ'ব লাগিব।

(xv) যদি n=10, $\bar{x}=13, \sum x^2=1730$ হয়, বিচলন গুণাংক কিমান?

(xvi) দুজন খেলুৰৈ A আৰু B ৰ গড় স্ক'ৰ আৰু স্ক'ৰবোৰৰ মানক বিচলন ক্ৰমে 50, 15 আৰু 48, 12 হ'লে, কোনজন খেলুৰৈক সাংখ্যিকীয় দৃষ্টিভংগীত বাছনি কৰা উচিত?

13. n সংখ্যক স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ মানক বিচলন নিৰ্ণয় কৰা।

14. খালীঠাই পূৰ কৰা ঃ

(i) সীমামুক্ত বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত উপযুক্ত বিচলনৰ পৰিমাপ হ'ল ——।

(ii) মানক বিচলনৰ মাপ প্ৰসাৰতকৈ ——।

(iii) বিচলনৰ সকলো আপেক্ষিক পৰিমাপ —— মুক্ত।

(iv) এটা বিভাগৰ 25% আৰেক্ষণৰ মান 10 তকৈ কম আৰু 25% আৰেক্ষণ 40 ৰ বেছি হ'লে চতুৰাংশ বিচলন —।

(v) মানক বিচলন মূল বিন্দু পৰিৱৰ্তনৰ ওপৰত —— ; কিন্তু মাত্ৰাৰ পৰিৱৰ্তনৰ ওপৰত ——।

(vi) যদি x-ৰ মানক বিচলন 2 হয় তেন্তে (x–2) ৰ মানক বিচলন ——

(vii) 8 আৰু 12 ৰ মানক বিচলন ——

(viii) $(Q_3 - Q_1)$ ক —— বোলা হয়।

(ix) এটা অসমাৰ্মত বিভাজনৰ মানক বিচলন 4 হ'লে বিভাজনটোৰ গড় বিচলন ———— আৰু চতুৰাংশ বিচলন ————।

(x) p আৰু q ৰ মানক বিচলন ——।

(xi) —— আৰেক্ষণবোৰৰ পাৰ্থক্যৰ বৰ্গৰ যোগফল ন্যূনতম।

(xii) সমমিত বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত উচ্চ আৰু নিম্ন চতুৰাংশ দুটা —— সমদূৰৱৰ্তী।

(xiii) —— বিচলনৰ শ্ৰেষ্ঠ পৰিমাপ।

(xiv) প্ৰসৰণ ——

(xv) এটা বিভাজনৰ মাধ্য, মধ্যমা আৰু মানক বিচলন ক্ৰমে 18, 17 আৰু 4। প্ৰতিটো আৰেক্ষণৰ লগত 4 যোগ কৰিলে, মাধ্য = — মধ্যমা = —, মানক বিচলন ——।

(xvi) এটা সমমিত বিভাজনৰ মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক ——।

(xvii) বিচলন গুণাংক —— পৰিমাপ আৰু ——

(xviii) ল'ৰেঞ্জ বক্ৰই বিচলনৰ পৰিমাপ —— নিৰূপণ নকৰে।

(xix) অৰ্থনৈতিক সমস্যাবোৰৰ ক্ষেত্ৰত বিচলনৰ পৰিমাপ —— বিশেষ ভূমিকা লয়।

(xx) বতৰ বিজ্ঞানৰ ক্ষেত্ৰত বিচলনৰ —— বেছি ফলপ্ৰসূ।

(xxi) বিচলন অধ্যয়ন —— ভূমিকা নুই কৰিব নোৱাৰি।

(xxii) দুই বা ততোধিক বিভাজনৰ মাধ্য সমান হ'লেও সিঁহতৰ মানক বিচলন —— হ'ব বুলি ক'ব নোৱাৰি।

বিক্ষেপণ (অনুশীলনী)

উত্তৰ

প্ৰশ্ন নং 12

(i) 0

(ii) (a) = 6 (b) 3σ

(iii) প্ৰথম শ্ৰেণীৰ মানক বিচলন = 10 × দ্বিতীয় শ্ৰেণীৰ মানক বিচলন।

(iv) 1

(v) প্ৰথম শ্ৰেণীৰ

(vi) দ্বিতীয়জন খেলুৱৈ।

(vii) নতুন শ্ৰেণীটোৰ বিচলন গুণাংক 15%। (পৰিৱৰ্তন নহয়)

(viii) বিচলন গুণাংক

(ix) চতুৰাংশ বিচলন $= \frac{2}{3} \times$ মানক বিচলন

$\Rightarrow 10 = \frac{2}{3} \times$ মানক বিচলন

$\therefore$ মানক বিচলন = 15, প্ৰসৰণ = $15^2 = 225$

(x) গড় বিচলন $= \frac{4}{5} \times$ মানক বিচলন

$\Rightarrow 16 = \frac{4}{5} \times$ মানক বিচলন $\therefore$ মানক বিচলন = 20

(xi) 8 : 12 : 15

(xii) $SD = \sqrt{\frac{1}{10}\sum(x-\overline{x})^2} = 14$

$\Rightarrow 196 = \frac{1}{10}\sum(x-\overline{x})^2$

$\therefore \sum(x-\overline{x})^2 = 1960$

(xiv) (i) 20, 30, 40, 60, 75

(ii) 50, 52, 54, 58, 61

(xv) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{1730}{10} - 13^2} = 2$

$\therefore$ বিচলন গুণাংক $= \frac{6}{\overline{x}} \times 100 = \frac{2}{13} \times 100 = 15\frac{5}{13}\%$

(xvi) $CV(A) = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} \times 100 = \frac{15}{50} \times 100 = 30\%$

$CV(B) = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} \times 100 = \frac{12}{48} \times 100 = 25\%$

$\because CV(B) < CV(A)$

$\therefore$ সাংখ্যিকীয় দৃষ্টিভংগীত খেলুৱৈজনক বাছনি কৰা উচিত।

প্ৰশ্ন নং 14 (i) চতুৰাংশ বিচলন (ii) কম (iii) একক (iv) 15 (v) নিৰ্ভৰশীল নহয়, নিৰ্ভৰশীল (vi) 2 (vii) 2 (viii) আন্তঃচতুৰাংশ প্ৰসাৰ (ix) $\frac{16}{5}, \frac{8}{3}$ (x) $\frac{1}{2}(p \sim q)$ (xi) মাধ্যৰ পৰা (xii) মধ্যমাৰ পৰা (xiii) মানক বিচলন (xiv) 0^2 (xv) 22, 17, 4 (xvi) একেই (xvii) আপেক্ষিক, এককমুক্ত (xviii) সংখ্যাৰে (xix) গড় বিচলন (xx) প্ৰসাৰ (xxi) গড়ৰ (xxii) সমান।

* * *

ষষ্ঠ অধ্যায়

সম্ভাৱিকতা
(PROBABILITY)

ভূমিকা আৰু অৰ্থ ঃ

আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত এনেকুৱা কিছুমান সমস্যা আছে যিবিলাকৰ ফলাফল সম্বন্ধে আমি নিশ্চিতভাৱে একো ক'ব নোৱাৰোঁ। খুব সম্ভৱতঃ মই কলেজলৈ নাযাওঁ, ভাৰতে আফ্ৰিকাৰ বিৰুদ্ধে অহাকালিৰ এদিনীয়া ক্ৰিকেট খেলখন জিকিব, আবেলিৰ ফালে বৰষুণ হ'ব পাৰে ইত্যাদি।

ওপৰৰ মন্তব্যখিনিত এটা অনিশ্চয়তাৰ সুৰ আছে অৰ্থাৎ ঘটনাটো সংঘটিত হ'ব নে নহ'ব এই বিষয়ে কোনেও নিশ্চিতভাৱে ক'ব নোৱাৰে।

অংক আৰু পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানত কিছুমান অভিধাৰণাৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি ওপৰৰ ঘটনাবোৰৰ সম্বন্ধে বিজ্ঞানসন্মতভাৱে বাস্তৱ ধৰণৰ মন্তব্য দাঙি ধৰাৰ প্ৰচেষ্টা চলোৱা হৈছে। সাংখ্যিকীয় দৃষ্টিভংগীত সম্ভাৱিকতাৰ সংজ্ঞাৰ সহায়ত অনিশ্চিত ঘটনাবোৰ অধ্যয়ন কৰা হয়। সেয়েহে সাংখ্যিকীয় মন্তব্যবোৰ অনুমানৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ নকৰে।

ব্যৱহাৰ ঃ প্ৰথম অৱস্থাত সম্ভাৱিকতা তত্বৰ ব্যৱহাৰ অনিশ্চিত ফলাফল থকা খেল-ধেমালিৰ লগত সীমাবদ্ধ আছিল। মানৱীয় সভ্যতাৰ ক্ৰমবিকাশৰ লগে লগে আৰ্থ-সামাজিক, ব্যৱসায়িক আৰু প্ৰকৃতি বিজ্ঞানৰ বিভিন্ন সমস্যাবোৰৰ ক্ষেত্ৰত সম্ভাৱিকতা তত্বৰ ব্যৱহাৰ অনস্বীকাৰ্য। এটা ঘটনা সংঘটিত হোৱা কিমানদূৰ সম্ভৱ সম্ভাৱিকতা তত্বই এই বিষয়ে সাংখ্যিকীয়ভাৱে বুজ লয়। অৱশ্যে কিছু পৰিমাণৰ ঝুঁকি নথকা নহয়।

আজিৰ যুগত আমাৰ বিভিন্ন সমস্যাবোৰ বিশেষকৈ আৰ্থ-সামাজিক, ব্যৱসায়িক সমস্যাবোৰৰ ফলাফল যে অনিশ্চিত এই বিষয়ে সন্দেহৰ অৱকাশ নাই। সেয়েহে সম্ভাৱিকতা তত্বই এই বিষয়ে কিছু ঝুকিৰ বিনিময়ত হ'লেও এটি বাস্তৱসন্মত মন্তব্য দাঙি ধৰাত যথেষ্ট অৰিহণা যোগায়। ফলত সম্ভাৱিকতা তত্বই হৈ পৰিছে এটি গুৰুত্বপূৰ্ণ আহিলাস্বৰূপ। সাংখ্যিকীয় তথ্যৰ ওপৰত মন্তব্য দাঙি ধৰাৰ মূল ভিত্তি হ'ল সম্ভাৱিকতা তত্ব। কাৰণ সাংখ্যিকীয় তথ্যখিনি প্ৰতিদৰ্শ নিৰ্ভৰ আৰু যাদৃচ্ছিক বিক্ষেপণৰ দ্বাৰা প্ৰভাৱান্বিত।

কিছুমান ব্যৱসায়িক সমস্যা, যেনে— কোনো এটা নতুন দ্ৰব্যৰ চাহিদা, উৎপাদন খৰচ, শস্যৰ ফলন, বাজেট প্ৰস্তুতকৰণ ইত্যাদি বিষয়বোৰৰ ফলাফল অনিশ্চিত হোৱাৰ সম্ভাৱনা থকাৰ ফলত ভৱিষ্যৎ মন্তব্য দাঙি ধৰাটো জটিল, সেয়েহে সম্ভাৱিকতা তত্বই এই বিষয়বোৰ অধ্যয়নৰ ক্ষেত্ৰত যথেষ্ট বৰঙণি আগবঢ়ায় আৰু মন্তব্য দিয়াত সহায় কৰে।

একেই পৰিস্থিতি বা অৱস্থাত এটা পৰীক্ষা বাৰে বাৰে সংঘটিত কৰিলে ফলাফল দুই ধৰণৰ হ'ব পাৰে, যেনে— (a) নিশ্চিত, (b) অনিশ্চিত অৰ্থাৎ পৰীক্ষাটোৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰা কেইটামান (সমান বা বিভিন্ন সম্ভাৱিকতা থকা) ফলাফল।

যিবিলাক পৰীক্ষাৰ ফলাফল আগতীয়াকৈ নিশ্চিত বুলি ক'ব পাৰি সেইবোৰক নিশ্চিত ধৰণৰ (Deterministic) পৰীক্ষা বুলি কোৱা হয়। আনহাতে যিবিলাক পৰীক্ষাৰ ফলাফল নিশ্চিত ধৰণৰ নহয় অৰ্থাৎ আগতীয়াকৈ ফলাফল সম্বন্ধে কোৱা টান সেইবোৰক সম্ভাৱিকতা নিৰ্ভৰ (Probabilistic) পৰীক্ষা বুলি কোৱা হয়।

আমি অৱশ্যে সম্ভাৱিকতা নিৰ্ভৰ পৰীক্ষা সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

সম্ভাৱিকতা তত্ত্ব অধ্যয়ন মূলতঃ দুটা ভাগত বিভক্ত।

(a) ধ্ৰুপদী বা চিৰায়ত (classical) পদ্ধতি আৰু (b) ব্যৱহাৰিক বা পৰীক্ষালব্ধ (Empirical) পদ্ধতি।

(a) যদি সংশ্লিষ্ট পৰীক্ষাটোৰ ফলাফলবোৰ সম্ভাৱিকতাৰ লগত জড়িত থকা হয়, যেনে— মুদ্ৰা, বা লুডুগুটি দলিওৱা, তাচৰ পেকেটৰ পৰা তাচ উলিওৱা, বেগত বিভিন্ন ৰঙৰ বল থকা বলৰ পৰা বল লোৱা ইত্যাদি। এইবোৰ ক্ষেত্ৰত ধ্ৰুপদি পদ্ধতি ব্যৱহাৰ হয়।

(b) এই পদ্ধতিত পৰীক্ষাটো সংঘটিত হোৱাৰ পিছত ফলাফলৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি ঘটনাৰ সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা হয়। এই পদ্ধতিক সাংখ্যিকীয় পদ্ধতিও বোলা হয়। অৱশ্যে পৰীক্ষাটো কেইবাবাৰো কৰিব লাগে আৰু ঘটনাৰ সম্ভাৱিকতা নিৰ্ভৰ কৰে ঘটনাটোৰ আপেক্ষিক বাৰংবাৰতাৰ ওপৰত।

এই পদ্ধতি অৱলম্বনৰ ক্ষেত্ৰত কেইটামান প্ৰয়োজনীয় কথা ঃ

1. ঘটনাটো সংগঠিত হোৱাৰ প্ৰকৃতমানৰ আকলক (estimate) হে সম্ভাৱিকতাৰ মান।
2. পৰীক্ষাটো যিমান বেছি বাৰ কৰা হ'ব, ফলাফলৰ সম্ভাৱিকতাৰ মানো সিমানে বেছি ফলপ্ৰসূ হ'ব।
3. একেই অৱস্থাত বা পৰিস্থিতিত পৰীক্ষাটো চলোৱা উচিত।

ওপৰত উল্লিখিত পদ্ধতি দুটাৰ বাহিৰেও অইন এটা পদ্ধতি আছে যেনে— ব্যক্তিগত অভিজ্ঞতাৰ আধাৰত সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয়। আলোচ্য অধ্যায়ত অৱশ্যে এই পদ্ধতিৰ বিষয়ে আমাৰ আলোচনাৰ থল নাই। অভিজ্ঞতাৰ মূল্যবোধ নথকা নহয়। সেয়েহে কোনো কোনো সমস্যাৰ ক্ষেত্ৰত এই পদ্ধতি ফলপ্ৰসূ। সম্ভাৱিকতাৰ সংজ্ঞা দিয়াৰ আগতে কেইটামান লাগতিয়াল কথা সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰা প্ৰয়োজন, যেনে— পৰীক্ষা (Trial or experiment), যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা (Random experiment), ঘটনা (Event or Sample point), সৰল আৰু যৌগিক ঘটনা (Simple and Compound Composite Event), পৰস্পৰ বিবৰ্জিত ঘটনা (Mutually exclusive events), সমানকৈ সম্ভৱ থকা ঘটনা (Equally likely events), সম্পূৰ্ণ বা বিস্তৃত ঘটনা (Sample space or Exhauctive events), নিশ্চিত আৰু অসম্ভৱ ধৰণৰ ঘটনা (Certain and impossible events), আৰু স্বতন্ত্ৰ আৰু পৰতন্ত্ৰ ঘটনা (Independent and dependent events)।

পৰীক্ষা ঃ কোনো এটা কাম কৰাকেই সাধাৰণভাৱে পৰীক্ষা বুলি ক'ব পাৰি। কামটোৰ ফলাফল নিশ্চিত অথবা অনিশ্চিত ধৰণৰ হ'ব পাৰে। যেনে— হাতত ৰাসায়নিক দ্ৰব্য নোলোৱাকৈ হাতখন জুইৰ ওপৰত ধৰিলে হাতখন নিশ্চিতভাৱে পুৰিব বা জ্বলিব অৰ্থাৎ পৰীক্ষাটোৰ ফলাফল নিশ্চিত। আনহাতে মুদ্ৰা এটা দলিয়ালে ফলাফল দুটা মুণ্ড বা পুচ্ছ আৰু আগতীয়াকৈ সিহঁতৰ আৰিৰ্ভাবৰ কথা খাটাংকৈ ক'ব নোৱাৰি। সেয়েহে সিহঁত অনিশ্চিত ঘটনা। অৱশ্যে এই ক্ষেত্ৰত মুদ্ৰাটো ত্ৰুটি নথকা হ'ব লাগিব আৰু পৰীক্ষাটো একেই চৰ্তত বা অৱস্থাত কৰিব লাগিব।

যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা ঃ যিটো পৰীক্ষা একে চৰ্তত বা পৰিস্থিতিত বাৰে বাৰে সংগঠিত কৰা হয় আৰু ফলাফলবোৰ সম্বন্ধে জ্ঞাত থাকিলেও কোনো ফলাফল সম্বন্ধে আগতীয়াকৈ একো ক'ব নোৱাৰি তেনেধৰণৰ পৰীক্ষাক যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা বোলা যায়। যেনে— মুদ্ৰা বা লুডুগুটি দলিওৱা পৰীক্ষা, কোনো বস্তুৰ দৈনিক উৎপাদন, বিভিন্ন মাহত কোনো বস্তুৰ মূল্য, চাহিদা, বিক্ৰী ইত্যাদি এইবোৰৰ প্ৰত্যেকেই যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা কিয়নো ফলাফল সম্বন্ধে সঠিকভাৱে কোৱা টান। এইবোৰ পৰীক্ষাৰ ফলাফলৰ লগত সম্ভাৱিকতা শব্দটো জড়িত হৈ আছে।

ঘটনা (Event or Sample point) **ঃ** কোনো যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ সম্ভাব্য ফলাফলবোৰৰ প্ৰত্যেককে ঘটনা বোলা হয়।

সৰল আৰু যৌগিক ঘটনা ঃ এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ এটা ফলাফলকেই সৰল ঘটনা বোলা হয়। এই ফলাফলটোক বিভিন্ন অংশত ভগাব নোৱাৰি। আনহাতে, কেইটামান সৰল ঘটনাৰ সমষ্টিক যৌগিক ঘটনা বোলা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, মুদ্ৰা এটা দলিয়ালে এটা সৰল ঘটনা হ'ল মুণ্ড আৰু অইন সৰল ঘটনাটো হ'ল পুচ্ছ। কিন্তু মুণ্ড অথবা পুচ্ছ হ'ল যৌগিক ঘটনা। কিয়নো ইয়াক দুটা সৰল ঘটনাত যেনে— মুণ্ড আৰু পুচ্ছত ভাগ কৰা যায়। দুটা মুদ্ৰা একেলগে দলিয়ালে— ঘটনা দুয়োটা মুণ্ড বা দুয়োটা ঘটনা পুচ্ছ সৰল ঘটনা কিন্তু ঘটনা এটা মুণ্ড আৰু এটা পুচ্ছ যৌগিক ঘটনা। যেনে— (মুণ্ড পুচ্ছ) বা (পুচ্ছ মুণ্ড)।

বেলেগ এটা উদাহৰণ দিয়া হ'ল—

দুটা লুডুগুটি একেলগে দলিয়ালে ঘটনা মুঠ 12 অৰ্থাৎ (6, 6) এটা সৰল ঘটনা। আনহাতে ঘটনা মুঠ 7 এটা যৌগিক ঘটনা কিয়নো ঘটনা মুঠ 7 ক কেইবাটাও সৰল ঘটনাত ভাগ কৰা যায়। যেনে (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (4, 3) আৰু (3, 4)।

সমান সম্ভৱ ঘটনা (Equally likely event) **ঃ**

যদি কোনো এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত ফলাফলবোৰ (ঘটনাবোৰ) এনে ধৰণৰ যে কোনো এটা ঘটনা সংগঠিত হোৱাটো নিশ্চিতভাৱে ক'ব নোৱাৰি অৰ্থাৎ ঘটনাবোৰৰ যিকোনো এটা ঘটনা সংঘটিত হ'ব পাৰে— তেনেধৰণৰ ঘটনাবোৰক সমান সম্ভৱ ঘটনা বোলা হয়। এইক্ষেত্ৰত কোনো ঘটনাক অইন ঘটনাবোৰৰ পৰা আগতীয়াকৈ বাছনি কৰাৰ থল নাই।

উদাহৰণস্বৰূপে, মুদ্ৰা এটা দলিৱালে ঘটনা মুণ্ড অথবা পুচ্ছ যিকোনো এটা ঘটনা সংঘটিত হ'ব পাৰে, অৱশ্যে যদি মুদ্ৰাটো ত্ৰুটিমুক্ত আৰু পৰীক্ষাটো একেই চৰ্ত বা পৰিস্থিতিত সংঘটিত কৰা হয়।

সম্পূৰ্ণ ঘটনা ঃ এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ সকলো সম্ভাব্য ঘটনাবোৰক সম্পূৰ্ণ ঘটনা বোলা হয়। যেনে— লুডুগুটি এটা দলিয়ালে 6 টা ঘটনাৰ আৱিৰ্ভাৱ হয়, যেনে— 1, 2, 3, 4, 5, 6 আৰু সেয়েহে সম্পূৰ্ণ ঘটনাৰ সংখ্যা = 6.

অসম্ভৱ ঘটনা ঃ যদি কোনো এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত কোনো এটা ঘটনা সংঘটিত হ'বই নোৱাৰে তেন্তে তেনেকুৱা ঘটনাক অসম্ভৱ ঘটনা বুলি কোৱা হয়। যেনে— মুদ্ৰা এটা দলিয়ালে কমলাটেঙা এটা পোৱা অবাস্তৱ।

পৰস্পৰ বিবৰ্জিত ঘটনা ঃ যদি কোনো এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত এটা ঘটনা সংঘটিত হ'লে অইন এটা

ঘটনা সংঘটিত হ'বই নোৱাৰে তেনেহ'লে ঘটনা দুটাক পৰস্পৰ বিৰ্জিত ঘটনা বুলি কোৱা হয়। যেনে— মুদ্রা এটা দলিয়ালে মুণ্ড পোৱা হ'লে পুচ্ছ ঘটনাটো সংঘটিত হ'ব নোৱাৰে। সেয়েহে ঘটনা দুটা পৰস্পৰ বিৰ্জিত।

এটা ঘটনাৰ অনুকূল ঘটনা ঃ এটা ঘটনাৰ যিমান ধৰণে সংঘটিত হ'ব পাৰে তাকেই ঘটনাটোৰ অনুকূল ঘটনা বোলা হয়। যেনে— মোনা এটাত 5 টা বগা বল আৰু 4 টা ৰঙা বল আছে। মোনাটোৰ পৰা এটা বগা বল 5 ধৰণে উলিয়াব পাৰি। সেয়েহে ঘটনাটোৰ (বগা বল) অনুকূল ঘটনা 5 টা। ইয়াত মন কৰিবলগীয়া যে বলবিলাকক 1, 2, 3, 4, 5 নম্বৰেৰে সূচিত কৰা হৈছে। তাচৰ পেকেট এটাৰ পৰা এখিলা পাত লোৱা হ'লে পাতখন ৰঙা, কলাপাণ, ৰজা হোৱাৰ অনুকূল ঘটনা ক্রমে 26, 13 আৰু 4 হ'ব। আনহাতে দুখিলা পাত একেলগে লোৱা হ'লে পাতখন ৰজা হোৱাৰ অনুকূল ঘটনা হ'ব $4_{C_2} = 6$টা।

স্বতন্ত্র আৰু পৰতন্ত্র ঘটনা ঃ যদি কোনো এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত এটা ঘটনাৰ আৱিৰ্ভাব অইন কোনো ঘটনাৰ দ্বাৰা প্রভাৱান্বিত নহয়, তেন্তে উল্লিখিত ঘটনাটো স্বতন্ত্র। আনহাতে পৰীক্ষাটোত যদি কোনো এটা ঘটনা সংঘটিত হ'লেহে অইন এটা ঘটনা সংঘটিত হ'ব তেন্তে দ্বিতীয় ঘটনাটোক পৰতন্ত্র ঘটনা বোলা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, লুডুগুটি দলিওৱাৰ প্রত্যেকটো ঘটনা স্বতন্ত্র।

আনহাতে বেগ এটাত 5 টা বগা আৰু 4 টা ৰঙা বল আছে। যদি এটাৰ পিছত এটা অৰ্থাৎ 2 টা বল উলিওৱা হ'ল আৰু বল দুটাৰ প্রথমটো বগা আৰু দ্বিতীয়টো ৰঙা বল পোৱা গ'ল। তেনেহ'লে দ্বিতীয় বলটো ৰঙা হ'বলৈ হ'লে প্রথমটো বগা হ'ব লাগিব। অৰ্থাৎ দ্বিতীয় বলটোৰ আৱিৰ্ভাব প্রথম বলটোৰ বগা হোৱাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে। সেয়েহে দ্বিতীয় বলটো ৰঙা— এই ঘটনাটো পৰতন্ত্র আৰু প্রথমটো স্বতন্ত্র।

বিন্যাস আৰু জোঁটৰ ধাৰণা (Concept of Permutation and Combination) ঃ

বিন্যাস ঃ

বিভিন্ন বস্তুৰ পৰা এক বা ততোধিক বস্তু লৈ সজোৱাকেই বিন্যাস বুলি কোৱা হয়। বস্তুবোৰ সজোৱাৰ সময়ত সজোৱাৰ ক্রম বিবেচনা কৰা হয়। যেনে— ৰঙা, নীলা আৰু বগা এই তিনিবিধ ৰঙৰ দুবিধ ৰঙ একেলগে লৈ সজোৱা হ'লে ৰঙা, নীলা; নীলা, ৰঙা; নীলা, বগা; বগা, নীলা; ৰঙা, বগা; বগা, ৰঙা এই ছয়ধৰণে সজাব পাৰি।

ওপৰৰ উদাহৰণটো সাংকেতিক চিন 3_{p_2} ধৰণে লিখা হয়। 'P' হ'ল বিন্যাস (Permutation)

$$\text{অৰ্থাৎ, } 3_{p_2} = 6$$

বিন্যাসৰ সূত্র ঃ

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুৰ পৰা r–সংখ্যক $(r \leq n)$ বস্তু লৈ বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ল—

$$= n_{p_r} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$$

টোকা ঃ

$\underline{|n} = 1 \times 23 \ldots . n = n(n+1)(n-2) \ldots 3.2$

'$\underline{|}$' চিনটোক ক্রমগুণিতক চিন বোলা হয় (factorial notation)

উদাহৰণ 1 ঃ (i) $$3_{p_2} = \frac{\underline{|3}}{\underline{|3-2}} = \frac{3.2.1}{\underline{|1=1}} = 6$$

(ii) $$8_{p_3} = \frac{\underline{|8}}{\underline{|8-3}} = \frac{\underline{|8}}{\underline{|5}} = \frac{8.7.6\underline{|5}}{\underline{|5}} = 336$$

বিন্যাসৰ এটা প্ৰয়োজনীয় বিধি ঃ

যদি কোনো এটা কাম ‘m’ ধৰণে কৰা হয় আৰু ইয়াৰ প্ৰত্যেক ধৰণৰ লগত দ্বিতীয় এটা কাম ‘n’ ধৰণে কৰা হয় তেন্তে দুয়োটা কাম একেলগে $m \times n$ ধৰণে কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ ঃ দুটা লুডুগুটি একেলগে নিক্ষেপ কৰিলে দুয়োটা লুডুগুটি একেলগে 6×6 ধৰণে =36 ধৰণে নিক্ষেপ কৰিব পৰা যাব। কিয়নো প্ৰথম লুডুগুটিটোৱে 1 বা 2 বা 3 বা 4 বা 5 বা 6 সংখ্যা দেখুৱাব। অৰ্থাৎ 6 ধৰণে পৰিব আৰু ইয়াৰ প্ৰত্যেক ধৰণৰ লগত দ্বিতীয় লুডুগুটি 6 ধৰণে পৰিব। অৰ্থাৎ, (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) 6 ধৰণে পৰিব।

এতেকে দুয়োটা লুডুগুটি একেলগে 6×6=36 ধৰণে পৰিব।

জোঁটৰ ধাৰণা ঃ জোঁটৰ অৰ্থ হ’ল বিভাগ কৰা বা বাছনি কৰা। যেনে— ৰঙা, নীলা আৰু বগা— এই তিনিবিধ ৰঙৰ দুবিধ ৰঙ একেলগে লৈ ৰঙা, নীলা; নীলা, বগা আৰু বগা, নীলা— এই তিনিটা বিভাগ বা তিনি ধৰণে বাছনি কৰিব পাৰি)।

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুৰ পৰা r সংখ্যক $(r \leq n)$ বস্তু লৈ জোঁটৰ সংখ্যা হ’ব—

$$n_{C_r} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n}-r}$$

যেনে ঃ $$5_{C_2} = \frac{\underline{|5}}{\underline{|2}\ \underline{|5-2}} = \frac{5.4\underline{|3}}{2 \times 1 \times \underline{|3}} = 10$$

টোকা ঃ $\underline{|O} = 1$

সম্পূৰ্ণ ঘটনাৰ কেইটামান উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ তিনিটা মুদ্ৰা একেলগে দলিয়ালে সম্পূৰ্ণ ঘটনাবোৰ দেখুউৱা।

সমাধান ঃ সম্পূৰ্ণ ঘটনাবোৰ তলত দিয়া ধৰণৰ হ’ব—

{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H T T), (T T T), (T T H), (T H T), (T H H)}

অৰ্থাৎ 8 টা ঘটনা অৰ্থাৎ 3 টা মুদ্ৰা একেলগে $2^3=8$ ধৰণে কৰিব পাৰে।

উদাহৰণ 2 ঃ বেগ এটাত 4টা বগা আৰু 3 টা ক'লা বল আছে। 3 টা বল একেলগে যাদৃচ্ছিক ধৰণে লোৱা হ'লে সম্পূৰ্ণ ঘটনাকেইটা হ'ব? বল দুটাৰ ভিতৰত (i) 2টা বগা আৰু 1 টা ক'লা (ii) 2 টা ক'লা আৰু 1টা বগা বল কিমান ধৰণে লোৱা যাব? (iii) প্ৰথম আৰু দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰত অনুকূল ঘটনাৰ সংখ্যা কিমান হ'ব?

সমাধান ঃ ইয়াত মুঠ বলৰ সংখ্যা $=4+3=7$ টা

7 টা বলৰ পৰা 3টা বল $^7C_3 = \frac{\lfloor 7}{\lfloor 3 \; \lfloor 7-3} \times \frac{7.6.5\lfloor 4}{3.2.1\lfloor 4} = 35$ ধৰণে ল'ব পাৰি অৰ্থাৎ

সম্পূৰ্ণ ঘটনাৰ সংখ্যা $=35$

(i) 2টা বগা আৰু 1টা ক'লা বল $^4C_2 \times {^3C_1} = \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \; \lfloor 4-2} \times \frac{\lfloor 3}{\lfloor 1 \; \lfloor 3-1}$

$$= \frac{4.3.\lfloor 2}{\lfloor 2 \; .2 \times 1} \times \frac{3\lfloor 2}{1\lfloor 2}$$

= 18 ধৰণে লোৱা যাব।

(ii) 2টা ক'লা আৰু 1টা বগা বল $^3C_2 \times {^4C_1} = 3 \times 4 = 12$ ধৰণে লোৱা যাব।

(iii) যদি 3 টা বল একেলগে যাদৃচ্ছিক ধৰণে লোৱা হয়, তেন্তে প্ৰথম ক্ষেত্ৰত অনুকূল ঘটনা = 18 আৰু দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰত অনুকূল ঘটনা =12

সম্ভাৱিকতাৰ সংজ্ঞা (Mathamatical or Classical Definition of Probability) ঃ

সংজ্ঞা ঃ যদি এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত পৰস্পৰ বিবৰ্জিত, সমান সম্ভাৱনা থকা n সংখ্যক সম্পূৰ্ণ ফলাফল পোৱা হয় আৰু ফলাফলবোৰৰ ভিতৰত m সংখ্যক ফলাফল কোনো এটা ঘটনা A ৰ অনুকূল হয় তেনেহ'লে A ঘটনাটোৰ সম্ভাৱিকতা হ'ব—

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{A ঘটনাটোৰ সপক্ষে অনুকূল ঘটনা}}{\text{সম্পূৰ্ণ (মুঠ) ঘটনা}}$$

টোকা ঃ

(1) ঘটনাবোৰক ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ ডাঙৰ আখৰেৰে চিহ্নিত কৰা হয় আৰু ঘটনাৰ সম্ভাৱনাক P (ঘটনা)ৰে লিখা হয়।

(2) A-ৰ পৰিপূৰক (A ঘটনাটো সংগঠিত নোহোৱা) ঘটনাক $\overline{A}$ বা A^c বা A' আখৰেৰে চিহ্নিত কৰা হয়।

$$\therefore\ P(\overline{A}) = \frac{\text{A-ঘটনাটোৰ প্ৰতিকূল ঘটনা}}{\text{মুঠ ঘটনা}}$$

$$= \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$$

এতেকে, $\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$

$\because$ m আৰু n ঋণাত্মক সংখ্যা নহয়, সেয়েহে $P(A) \geq 0$, [$P(A) \not< 0$ A ঘটনাৰ সম্ভাৱিকতা ঋণাত্মক নহয়।]

আৰু $\because m \leq n$ হয়, সেয়েহে $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$ হ'ব।

টোকা ঃ

1. নিশ্চিত ঘটনাৰ সম্ভাৱিকতা 1 হ'ব।
2. অস্বাভাৱিক বা অবাস্তৱ ঘটনাৰ সম্ভাৱিকতা '0' হ'ব।
3. অনিশ্চিত ঘটনাৰ সম্ভাৱিকা 0 আৰু 1 ৰ মাজত থাকে যদি A ঘটনাটো অনিশ্চিত হয় তেনেহ'লে— $0 < P(A) < 1$ অৰ্থাৎ, ঘটনা এটাৰ সম্ভাৱিকতাৰ সৰ্বোচ্চ মান 1 আৰু সৰ্বনিম্ন মান 0 হয়।
4. এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ আটাইকেইটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিকতাৰ যোগফল =1 হ'ব।

উদাহৰণস্বৰূপে,

1. মুদ্ৰা এটা এবাৰ দলিয়ালে, মুণ্ড বা পুচ্ছ পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $= \frac{1}{2}$
2. লুডুগুটি এটা এবাৰ দলিয়ালে যিকোনো এটা মান 1 বা 2 বা 3 বা 4 বা 5 বা 6 ৰ সম্ভাৱিকতা $= \frac{1}{6}$
3. তাচৰ পেকেট এটাৰ পৰা এখিলা পাত যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল—

   (a) পাতখন ৰজা বা ৰাণী বা টেক্কা বা গোলাম হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $= \frac{4_{C_2}}{52_{C_1}} = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$

   (b) আনহাতে পাতখন ৰঙা বা ক'লা ৰঙৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $= \frac{26_{C_1}}{52_{C_1}} = \frac{1}{2}$

   (c) পাতখন লালপাণ বা কলাপাণ বা ইটা বা কলাফুল হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $= \frac{13_{C_1}}{52_{C_1}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

   (d) পাতখনৰ নম্বৰ 10 হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $= \frac{4_{C_1}}{52_{C_1}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

কোনো ঘটনাৰ অনুকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনা আৰু ঘটনাটোৰ অনুকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনা (Odds in favour and against an event) ঃ

কোনো ঘটনাৰ অনুকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনা হ'ল ঘটনাটো যিমান ধৰণে সংগঠিত হ'ব পাৰে আৰু যিমান ধৰণে সংগঠিত হ'ব নোৱাৰাৰ অনুপাত। উদাহৰণস্বৰূপে, n সংখ্যক ঘটনাৰ ভিতৰত ঘটনাটোৰ অনুকূলে 'm' টা ঘটনা থাকে, তেনেহ'লে ঘটনাটোৰ অনুকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনা $=\frac{m}{n-m}$

আকৌ ঘটনাটোৰ প্ৰতিকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনা হ'ল ঘটনাটো যিমান ধৰণে নঘটে আৰু যিমান ধৰণে ঘটাৰ অনুপাত।

আগৰ উদাহৰণটোত ঘটনাটোৰ প্ৰতিকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনা $=\frac{n-m}{m}$

ওপৰৰ সূত্ৰকেইটা বেলেগ ধৰণেও দিব পাৰি—

(1) A ঘটনাটোৰ অনুকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনা $=\frac{P(A)}{p(\overline{A})}=\frac{\frac{m}{n}}{\frac{n-m}{n}}=\frac{m}{n}\times\frac{n}{n-m}=\frac{m}{n-m}$

(2) A ঘটনাটোৰ প্ৰতিকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনা $=\frac{P(\overline{A})}{P(A)}=\frac{\frac{n-m}{n}}{\frac{m}{n}}=\frac{n-m}{n}\times\frac{n}{m}=\frac{n-m}{m}$

উদাহৰণ ঃ X-এ অংক এটা সমাধা কৰাৰ প্ৰতিকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনাটো 4:3-ত সংগঠিত হয়, আৰু Y-এ অংকটো সমাধা কৰাৰ অনুকূলে অপ্ৰত্যাশিত ঘটনাটো 7:8-ত সংঘটিত হ'লে X আৰু Y- এ অংকটো সমাধা কৰা আৰু নকৰাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

সমাধান ঃ X-এ অংকটো সমাধা কৰাৰ সম্ভাৱিকতা $=\frac{3}{4+3}=\frac{3}{7}$

X-এ অংকটো সমাধা নকৰাৰ সম্ভাৱিকতা $=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

Y-এ অংকটো সমাধা কৰাৰ সম্ভাৱিকতা $=\frac{7}{7+8}=\frac{7}{15}$

Y-এ অংকটো সমাধা নকৰাৰ সম্ভাৱিকতা $=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$

সম্ভাৱিকতাৰ প্ৰথম সংজ্ঞাটোৰ সীমাবদ্ধতা ঃ

1. যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাটোৰ ফলাফল অসীম সংখ্যক হ'লে সংজ্ঞাটো প্ৰযোজ্য নহয়।
2. সকলো ফলাফলবোৰ সমান সম্ভাৱনাপূৰ্ণ নহ'বও পাৰে।
3. সংজ্ঞাটো পৰীক্ষা নকৰাকৈ ফলাফলবোৰৰ সম্বন্ধে অভিধাৰণাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল।

2. সম্ভাৱিকতাৰ পৰিসাংখ্যিকীয় বা আপেক্ষিক বাৰংবাৰতা নিৰ্ভৰ সংজ্ঞা (Statistical defn or Relative frequency approach to probability) ঃ

সংজ্ঞা ঃ একেই পৰিস্থিতিত আৰু একেই ধৰণে এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা বাৰংবাৰতা সংগঠিত কৰিলে মুঠ n/ সংখ্যক ঘটনা (ফলাফল) ৰ ভিতৰত যদি এটা ঘটনা 'A', m সংখ্যক বাৰ আৱিৰ্ভাৱ হয় তেন্তে $\frac{m}{n}$ অনুপাতটোৰ সীমামূৰীয়া মানক (n-ৰ মান অসীম হ'লে) ঘটনাটোৰ সম্ভাৱিকতাৰ মান বোলা হয়, অৱশ্যে সীমামূৰীয়া মানটো সসীম বুলি ধৰা হৈছে। প্ৰতীক চিনত লিখিলে—

$$P(A)= \underset{n\to\alpha}{\text{সীমা}} \left(\frac{m}{n}\right), \frac{m}{n}\text{-ক আপেক্ষিক বাৰংবাৰতা বোলা হয়।}$$

সুবিধা ঃ

1. যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা কৰাৰ পিছতহে কোনো ঘটনাৰ সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা হয়।
2. পৰিসাংখ্যিকীয় সংজ্ঞাটোৰ দ্বাৰা নিৰ্ণয় কৰা কোনো ঘটনাৰ সম্ভাৱিকতাই গাণিতিক সংজ্ঞাটোৰ সত্যাপন কৰে। উদাহৰণস্বৰূপে, মুদ্ৰা 20 বাৰ দলিয়ালে প্ৰথম সংজ্ঞা মতে 10 টা মুণ্ড আৰু 10 টা পুচ্ছ পাব লাগিব, কিয়নো মুণ্ড বা পুচ্ছ পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $\frac{1}{2}$। কিন্তু প্ৰকৃততে 14 টা মুণ্ড আৰু 6 টা পুচ্ছ পোৱা গ'ল। এতেকে, 20 বাৰ দলিওৱাৰ পিছত মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা হ'ল $\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$ অৱশ্যে পৰীক্ষাটো অসীম সংখ্যক বাৰ সংগঠিত কৰিলে সম্ভাৱিকতাৰ গাণিতিক আৰু পৰিসাংখ্যিকীয় সংজ্ঞাৰ মাজত পাৰ্থক্য বেছি নাথাকে।
3. পৰীক্ষাটো সসীম সংখ্যক বাৰ সংগঠিত কৰা নহয় আৰু প্ৰত্যেকটো ফলাফল (ঘটনা) সমান সম্ভাৱনাপূৰ্ণ নহয়।

সীমাবদ্ধতা ঃ

1. পৰীক্ষাটো একেই অৱস্থাত আৰু একেই পৰিস্থিতিত কৰা সম্ভৱ নহ'বও পাৰে, কিয়নো পৰীক্ষাটো অসীম সংখ্যক বাৰ কৰিব লাগিব।
2. $\frac{m}{n}$ অনুপাতটোৰ মান সসীম নহ'বও পাৰে যদি n-ৰ মান অসীম হয়।
3. বাস্তৱ জগতৰ যিকোনো সমস্যাৰ ফলাফল সসীম (অসীম নহয়)।
4. পৰীক্ষাটো অসীম সংখ্যক বাৰ কৰিব লাগে— এই কথাষাৰ এটা অভিধাৰণাহে।

কেইটামান ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

1. ত্ৰুটি নথকা লুডুগুটি এটা দলিয়াই (a) যুগ্ম সংখ্যা (b) 4 তকৈ ডাঙৰ সংখ্যা (c) 4 সংখ্যাটো পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

2. এযোৰ ত্ৰুটি নথকা লুডুগুটি দলিওৱা হ'ল। সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা—

   (a) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 7 (b) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 8 (c) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল <10

   (d) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল < 5 (e) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 10 ৰ কম নহয়।

   (f) সংখ্যা দুটাৰ গুণফল 4 (g) সংখ্যা দুটা যুগ্ম (h) সংখ্যা দুটা অযুগ্ম।

   (i) সংখ্যা দুটাৰ এটা যুগ্ম আৰু অইনটো অযুগ্ম।

3. 52 খন পাত থকা তাচৰ পেকেট এটাৰ পৰা 3 খন পাত যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'লে সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা—

   (a) পাতকেইখন ৰজা, ৰাণী আৰু গোলাম (b) আটাইকেইখন টেক্কা

   (c) আটাইকেইখন কলাপাণৰ পাত (d) দুখন ৰঙা আৰু এখন ক'লা

   (e) আটাইকেইখন ছবি পাত থকা পাত (f) দুটা টেক্কা আৰু এজনী ৰাণী

   (g) পাতকেইখন ছবি থকা নহয় (h) দুখন ক'লাপাণৰ আৰু এখন ৰজা

   (i) এখন লালপাণ আৰু দুখন টেক্কা।

4. 20 জন মানুহৰ ভিতৰত 5 জন বি. কম পাছ 120 জন মানুহৰ পৰা 3 জনক যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হ'ল। সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা।

   (a) 3 জনেই বি. কম পাছ (b) অতি কমেও 31 জন বি. কম. পাছ।

5. লিপিয়েৰ/লিপিয়াৰ নহয় বছৰ দুটাত 53 টা দেখুৱা থকাৰ সম্ভাৱনা কিমান?

6. 100 জন ল'ৰা-ছোৱালীৰ ভিতৰত 55 জন হ'ল ছোৱালী। 36 জন ল'ৰাই সংখ্যা বিজ্ঞান পঢ়ে আৰু 13 জনী ছোৱালীয়ে সংখ্যাবিজ্ঞান নপঢ়ে। ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলৰ পৰা এজন ল'ৰা ছাত্ৰ বাছনি কৰা হ'ল। বাছনি কৰা ল'ৰাজনে সংখ্যাবিজ্ঞান নপঢ়াৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

7. তাচৰ পেকেট এটাৰ পৰা এখিলা পাত যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল। পাতখন

   (i) ৰজা অথবা ৰাণী হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

   (ii) পাতখন স্পেড (ক'লাপাণ) অথবা লালপাণ হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

8. বেগ এটাত 13 টা বল আছে। বলকেইটাক 1 ৰ পৰা 13 নম্বৰেৰে সূচিত কৰা হৈছে। বেগটোৰ পৰা এটা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল। বলটোৰ নম্বৰ 3 অথবা 4 ৰ কোনো গুণিতক সংখ্যা হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

9. তলৰ তথ্যখিনিত 6 জন বনুৱাৰ দৈনিক মজুৰি দিয়া হ'ল—

   67, 89, 78, 79, 63, 82 (টকা)

   ইয়াৰে 2 জন বনুৱাক যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল।

   সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা— অতি কমেও এজন বনুৱাৰ মজুৰি গড় মজুৰিতকৈ কম।

10. 3 জন অৰ্থনীতিবিদ, 4 জন অভিযন্তা, 2 জন পৰিসংখ্যানবিদ আৰু 1 জন ডাক্তৰৰ পৰা 4 জনীয়া কমিটী এখন গঠন কৰিব লাগে। সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা।

(i) কমিটীত প্ৰত্যেক বিধ মানুহৰ এজন অন্তৰ্ভুক্ত হৈছে।

(ii) কমিটীত অতি কমেও এজন অৰ্থনীতিবিদ অন্তৰ্ভুক্ত হ'ব।

(iii) কমিটীত ডাক্তৰজন আৰু বেলেগ বিধৰ 3 জন মানুহ অন্তৰ্ভুক্ত হ'ব।

11. বেগ এটাত 10 টা বগা আৰু 8 টা ৰঙা বল আছে। বেগটোৰ পৰা 2 টা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল। বল দুটাৰ এটা বগা আৰু এটা ৰঙা হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

সমাধান ঃ

1. লুডুগুটি এটাত যুগ্ম সংখ্যা 3 টা (যেনে— 2, 4 আৰু 6)

(a) যুগ্ম সংখ্যাটো 3 ধৰণে (অৰ্থাৎ ঃ সংগঠিত হ'ব পাৰে।

$\therefore$ সংখ্যাটো যুগ্ম হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $=\frac{3}{6}$ ইয়াত মুঠ ঘটনা $=6$ টা$=\frac{1}{2}$

(b) 4-তকৈ ডাঙৰ সংখ্যা দুটা (যেনে— 5 আৰু 6) আছে।

$\therefore$ সংখ্যাটো 4 তকৈ ডাঙৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(c) সংখ্যাটো 4 হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $=1$

2. এযোৰ লুডুগুটি দলিওৱা হ'ল।

(a) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 7 তলত দিয়া ধৰণে সংগঠিত হ'ব পাৰে—

(2,5), (5,2), (3,4), (4,3), (1,6) আৰু (6,1) অৰ্থাৎ 6 ধৰণে হ'ল অনুকূল ঘটনা

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{6}{36}$, ইয়াত মুঠ ঘটনা$=6\times6=36=\frac{1}{6}$

(b) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 8 তলত দিয়া ধৰণে সংগঠিত হ'ব পাৰে—

(2,6), (6,2), (3,5), (5,3) আৰু (4,4) অৰ্থাৎ 5 ধৰণ হ'ল অনুকূল ঘটনা।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{5}{36}$

(c) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল >10 দুইধৰণে হ'ব পাৰে যেনে— যোগফল H

সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 11, দুই ধৰণে অৰ্থাৎ (5,6) আৰু (6,5) সংগঠিত হ'ব পাৰে।

সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 12, এক ধৰণে অৰ্থাৎ (6, 6) সংগঠিত হ'ব পাৰে।

এতেকে, ইয়াত মুঠ অনুকূল ঘটনা হ'ল (2+1)=3 টা

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(d) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল <5 অৰ্থাৎ যোগফল 2 অথবা 3 অথবা 4 হ'ব।

সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 2 ৰ অনুকূল ঘটনা 1 {অৰ্থাৎ (1,1)}

সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 3 ৰ অনুকূল ঘটনা 2 {অৰ্থাৎ (1,2), (2,1)}

সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 4 ৰ অনুকূল ঘটনা 3 {অৰ্থাৎ (1,3), (3,1) আৰু (2,2)}

$\therefore$ মুঠ অনুকূল ঘটনা = 1+2+3=6

সেয়েহে, নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{3}{36}=\frac{1}{6}$

(e) সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 10 ৰ কম নহয় বুলিলে যোগফল 10, 11 অথবা 12 বুজায়।

সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 10 ৰ অনুকূল ঘটনা 3 টা {অৰ্থাৎ (5,5), 6,4) আৰু (4,6)}

সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 11 ৰ অনুকূল ঘটনা 2 টা {অৰ্থাৎ (6,5), (5,6)}

সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 12 ৰ অনুকূল ঘটনা 1 টা {অৰ্থাৎ (6,6)}

$\therefore$ মুঠ অনুকূল ঘটনা = 3+2+1=6 টা

সেয়েহে, নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(f) সংখ্যা দুটাৰ গুণফল 4 ৰ অনুকূল ঘটনা 3 টা {অৰ্থাৎ, (2,2), (1,4), (4,1)}

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(g) ইয়াত যুগ্ম সংখ্যা হ'ল 3 টা, অৰ্থাৎ (2, 4, 6)

সংখ্যা দুটা যুগ্ম তলত দিয়া ধৰণে সংগঠিত হ'ব পাৰে—

(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (4, 4), (6, 6) অৰ্থাৎ অনুকূল ঘটনা 9 টা।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

(h) ইয়াত অযুগ্ম সংখ্যা 3 টা অৰ্থাৎ (1, 3, 5)

আগৰ দৰে, নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

(i) সংখ্যা দুটাৰ 1 টা যুগ্ম আৰু অইনটো অযুগ্ম তলত দিয়া ধৰণে সংগঠিত হ'ব পাৰে —

(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (4, 1), (6, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (2, 3), (4, 3), (6, 3), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (2, 5), (4, 5), (6, 5) অৰ্থাৎ অনুকূল ঘটনা 18 টা

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

3. (a) তাচৰ পেকেটত 4 জন ৰজা, 4 জনী ৰাণী আৰু 4 জন গোলাম আছে। তাচৰ পেকেটৰ পৰা 3 খন পাত যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'লে—

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \dfrac{4_{C_1} \times 4_{C_1} \times 4_{C_1}}{52_{C_3}}$, ভগ্নাংশটোত লব হ'ল অনুকূল ঘটনা আৰু হৰ হ'ল মুঠ ঘটনা

$$= \frac{64}{22100} = \frac{16}{5525}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 52_{C_3} = \dfrac{^{26}\cancel{52}.\cancel{51}^{17}.50}{\cancel{6}_2} \\ \quad = 22,100 \end{array} \right.$$

(b) তাচৰ পেকেটত 4 টা টেক্কা আছে।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \dfrac{4_{C_3}}{52_{C_3}} = \dfrac{4}{22100} \times \dfrac{1}{5525}$

(c) তাচৰ পেকেটত 13 খন কলাপাণৰ পাত আছে

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \dfrac{13_{C_3}}{52_{C_3}} = \dfrac{286}{22100} = \dfrac{143}{11050}$

(d) তাচৰ পেকেটত 26 খন ৰঙা পাত আৰু 26 খন ক'লা পাত আছে।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \dfrac{26_{C_2} \times 26_{C_1}}{52_{C_3}}$ (ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে নিজে গণনা কৰিব)

(e) তাচৰ পেকেটত 12 খন ছবি থকা পাত আছে (ৰজা 4 জন, ৰাণী 4 জনী আৰু গোলাম 4 জন)

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা$= \dfrac{12_{C_3}}{52_{C_3}}$

(f) তাচৰ পেকেটত 4 টা টেক্কা আৰু 4 জনী ৰাণী আছে।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \dfrac{4_{C_2} \times 4_{C_1}}{52_{C_3}}$

(g) নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \dfrac{40_{C_3}}{52_{C_3}}$

(h) নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা$= \dfrac{12_{C_2} \times 3_{C_1}}{52_{C_3}}$

(i) নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \dfrac{12_{C_1} \times 3_{C_2}}{52_{C_3}}$

4. 20 জন মানুহৰ ভিতৰত 5 জন বি. কম পাছে আৰু 15 জন অইন মানুহ আৰু 20 জনৰ পৰা 3 জন মানুহক যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হৈছে।

(a) নিৰ্ণেয় সম্ভাৰিকতা $= \dfrac{5_{C_3}}{20_{C_3}}$

(b) বি. কম পাছ নথকা মানুহৰ সম্ভাৰিকতা $= \dfrac{15_{C_3} \times 5_{C_0}}{20_{C_3}} \quad \because 5_{C_0} = 1$

$\therefore$ অতি কমেও 1 জন বি. কম পাছ থকা মানুহৰ সম্ভাৰিকতা $= 1 - \dfrac{15_{C_3}}{20_{C_3}}$

5. লিপিয়াৰ বছৰত দিনৰ সংখ্যা =366=52 সপ্তাহ +2 দিন 52 সপ্তাহত 52 টা দেওবাৰ আছে, অতিৰিক্ত 2 টা দিন (দেওবাৰ, সোম), (সোম, মঙল), (মঙল, বুধ), (বুধ, বৃহস্পতি), (বৃহস্পতি, শুক্র), (শুক্র, শনি), (শনি, দেওবাৰ) হ'ব পাৰে। অৰ্থাৎ মুঠ ঘটনা $= 7$ টা। ইয়াৰে দুটা ঘটনা যেনে (দেওবাৰ, সোম) আৰু (শনি, দেওবাৰ)ৰ ভিতৰত 1টা দেওবাৰ আছে।

$\therefore$ অনুকূল ঘটনা = 2

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৰিকতা $= \dfrac{2}{7}$

লিপিয়াৰ নোহোৱা বছৰত 365 দিন অৰ্থাৎ (52 সপ্তাহ + 1 দিন)

$\therefore$ বছৰটোত 53 টা দেওবাৰ হ'বলৈ হ'লে অতিৰিক্ত দিনটো দেওবাৰ হ'ব লাগিব।

$\therefore$ অনুকূল ঘটনা $= 1$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৰিকতা$= \dfrac{1}{7}$

6. ইয়াত, ল'ৰাৰ সংখ্যা $= 45$

ছোৱালীৰ সংখ্যা $= 55$

সংখ্যা বিজ্ঞান পঢ়া ল'ৰাৰ সংখ্যা = 36, সংখ্যাবিজ্ঞান পঢ়া ছোৱালীৰ সংখ্যা = 55–13 = 42

$\therefore$ সংখ্যাবিজ্ঞান নপঢ়া ল'ৰাৰ সংখ্যা =9 সংখ্যাবিজ্ঞান নপঢ়া ছোৱালীৰ সংখ্যা = 13

ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলৰ পৰা এজন ল'ৰা ছাত্ৰক বাছনি কৰা হ'ল।

$\therefore$ বাছনি কৰা ল'ৰা ছাত্ৰজনে সংখ্যাবিজ্ঞান পঢ়াৰ সম্ভাৰিকতা $\dfrac{36_{C_1}}{45_{C_1}} = \dfrac{36}{45} = \dfrac{4}{5}$

এতেকে, ল'ৰা ছাত্ৰজনে সংখ্যাবিজ্ঞান নপঢ়াৰ সম্ভাৰিকতা $= 1 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}$

7. তাচৰ পেকেটত 4 জন ৰজা, 4 জনী ৰাণী, 13 খন কলাপাণ আৰু 13 খন লালপাণৰ পাত আছে।

(i) নিৰ্ণেয় সম্ভাৰিকতা $= \dfrac{4_{C_1} + 4_{C_1}}{52_{C_1}} = \dfrac{8}{52} = \dfrac{2}{13}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ইয়াত, অনুকূল ঘটনা } = 4_{C_1} + 4_{C_1} = 8 \\ \text{মুঠ ঘটনা } = 52_{C_1} = 52 \end{array} \right.$

(ii) নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \dfrac{13_{C_1} + 13_{C_1}}{52_{C_1}} = \dfrac{26}{52} = \dfrac{1}{2}$

8. ইয়াত, বলৰ সংখ্যা 13 টা (বলকেইটাক 1 ৰ পৰা 13 নম্বৰেৰে সূচিত কৰা হৈছে) আৰু 1 টা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হৈছে।

এতিয়া, 3 ৰ গুণিতক সংখ্যা হ'ল— 3, 6, 9, 12 অৰ্থাৎ 4 টা

4 ৰ গুণিতক সংখ্যা হ'ল— 4, 8, 12 অৰ্থাৎ 3 টা

কিন্তু 12 নম্বৰ বলটো 3 আৰু 4 ৰ দুয়োৰে গুণিতক

সেয়েহে, অনুকূল ঘটনা = 4+3–1=6 টা

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \dfrac{6}{13}$, মুঠ ঘটনা $= 13_{C_1} = 13$

9. ইয়াত, মজুৰি সংখ্যা $= 6$

গড় মজুৰি $= \dfrac{67 + 89 + 78 + 79 + 63 + 82}{6} = \dfrac{458}{6} = 76.33$ (প্ৰায়) টকা

গড় মজুৰি 76.33 টকাতকৈ কম পোৱা মজুৰৰ সংখ্যা =2 জন

আৰু মজুৰি 76.33 টকাতকৈ বেছি পোৱা মজুৰৰ সংখ্যা = 4 জন

$\therefore$ মজুৰ এজনে মজুৰি 76.33 টকা বা বেছি পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $= \dfrac{4_{C_2}}{6_{C_2}} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$

$\therefore$ অতি কমেও এজন বনুৱাৰ মজুৰি গড় মজুৰিতকৈ কম হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $= 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$

10. ইয়াত,

অৰ্থনীতিবিদৰ সংখ্যা	=	3
অভিযন্তাৰ সংখ্যা	=	4
পৰিসংখ্যানবিদৰ সংখ্যা	=	2
ডাক্তৰৰ সংখ্যা	=	1
$\therefore$ মুঠ মানুহৰ সংখ্যা	=	10

মানুহবিলাকৰ পৰা 4 জনীয়া কমিটী এটা গঠন কৰিব লাগে।

(i) নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \dfrac{3_{C_1} \times 4_{C_1} \times 2_{C_1} \times 1_{C_1}}{10_{C_4}}$ $\because 10_{C_1} = \dfrac{10.\cancel{9}^{3}.\cancel{8}.7}{\cancel{4}.\cancel{3}.\cancel{2}} = 210$

$= \dfrac{24}{210} = \dfrac{4}{35}$

(ii) অতি কমেও এজন অৰ্থনীতিবিদ অন্তৰ্ভুক্ত হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা

= 1– কমিটীত এজনো অৰ্থনীতিবিদ অন্তৰ্ভুক্ত নোহোৱাৰ সম্ভাৱিকতা

যদি কমিটীত এজনো অৰ্থনীতিবিদ অন্তৰ্ভুক্ত কৰিব নালাগে, তেনেহ'লে কমিটীত 4 জন সদস্যক 4 জন অভিযন্তা, 2 জন পৰিসংখ্যানবিদ আৰু 1 জন ডাক্তৰৰ পৰা ল'ব লাগিব। অৰ্থাৎ বাকী থকা 7 জনৰ (4+2+1) পৰা 4 জনক ল'ব লাগিব আৰু 7 জনৰ পৰা 4 জনক $7_{C_4} = 35$ ধৰণে ল'ব পাৰি।

$\therefore$ কমিটীত অৰ্থনীতিবিদ অন্তৰ্ভুক্ত নোহোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $= \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$

এতেকে, কমিটীত অতি কমেও এজন অৰ্থনীতিবিদ অন্তৰ্ভুক্ত হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

(iii) কমিটীত 1 জন ডাক্তৰ আৰু অইন 3 জন সদস্য অন্তৰ্ভুক্ত হোৱাৰ অনুকূল ঘটনা—

$= 1 \times 9_{C_3} = 84$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \frac{84}{210} = \frac{2}{5}$

11. ইয়াত, বগা বলৰ সংখ্যা = 10

ৰঙা বলৰ সংখ্যা = 80

$\therefore$ মুঠ বলৰ সংখ্যা = 18

$\therefore$ বেগটোৰ পৰা 2 টা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হৈছে।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিকতা $= \frac{10_{C_1} \times 8_{C_1}}{18_{C_2}} = \frac{80}{153}$

অনুশীলনী

1. সম্ভাৱিকতাৰ অৰ্থ কি? আৰ্থ-সামাজিক ব্যৱসায়িক আৰু প্ৰকৃতি বিজ্ঞানত ইয়াৰ ভূমিকা কি?
2. **টোকা লিখা ঃ** পৰীক্ষা, যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা, ঘটনা, পৰস্পৰ বিবৰ্জিত ঘটনা, (উদাহৰণেৰে ব্যাখ্যা কৰা) সম্পূৰ্ণ ঘটনা, কোনো ঘটনাৰ অনুকূল ঘটনা, অসম্ভৱ ঘটনা, সৰল আৰু যৌগিক ঘটনা, স্বতন্ত্ৰ আৰু পৰতন্ত্ৰ ঘটনা।
3. সম্ভাৱিকতাৰ গাণিতিক আৰু সাংখ্যিকীয় সংজ্ঞা লিখা। সংজ্ঞা দুটাৰ সীমাবদ্ধতা কি কি?
4. প্ৰমাণ কৰা ঃ $0 \leq P(A) \leq 1$
5. দুটা পৰস্পৰ বিবৰ্জিত ঘটনাৰ উদাহৰণ দিয়া।
6. তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ সম্পূৰ্ণ ঘটনা আৰু অনুকূল ঘটনাবোৰ নিৰ্ণয় কৰা —
   (a) লুডুগুটি দুটা একেলগে দলিয়ালে এটাত 6 আনটোত 2 দেখুৱাৰ ——
   (b) বেগ এটাত 8 টা বগা আৰু 5 টা ৰঙা বল আছে। 3 টা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'লে দুটা বগা আৰু 1 টা ৰঙা বল পোৱাৰ, 3 টা বগা বল পোৱাৰ ——
   (c) তাচৰ পেকেট এটাৰ পৰা 4 খন পাত যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'লে 3 খন পাত লালপাণৰ আৰু এখন ক'লাপাণৰ; 2 খন পাত ৰজা আৰু 2 খন পাত ৰাণী; এখন পাত টেক্কা আৰু 3 খন পাত লালপাণৰ; এখন পাত কলাপান, এখন পাত ৰজা, এখন পাত লালপানৰ আৰু অইনখন লালপাণৰ ৰাণী ......, ..., ..., ..., ..., ...
7. এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ আটাইকেইটা ঘটনাৰ মুঠ সম্ভাৱিকতাৰ মান কিমান? অতি কমেও এটা ঘটনা সংগঠিত হোৱা আৰু খুব বেছি হ'লে এটা ঘটনা সংগঠিত হোৱা— এই দুষাৰ কথাৰ পাৰ্থক্য কি?

   সম্ভাৱিকতা তত্বৰ উদ্ভাৱণ মূলতঃ কি ধৰণৰ সমস্যাৰ পৰা আৱিষ্কাৰ হৈছে? সম্ভাৱিকতাতত্ত্বৰ উন্নতিৰ বাবে বৰঙণি আগবঢ়োৱা কেইজনমান গণিতজ্ঞ নাম উল্লেখ কৰা।
8. খালীঠাই পূৰ কৰা ঃ
   (a) $P(A) \geq \frac{\cdots\cdots}{}$ (b) .... $\leq P(A) \leq$ .... (C) $n_{C_r} = \frac{\cdots\cdots}{}$
   (d) $10_{C_3} = \frac{\cdots\cdots}{}$ (e) $5_{C_2} \times 7_{C_3} =$.........
   (f) দুটা মুদ্ৰ আৰু দুটা লুডুগুটি একেলগে —— ধৰণে পৰিব পাৰে।
   (g) $P(\overline{A}) =$—— (h) $P(A) = 1-$ (............) (i) $n_{C_r} + n_{C_{r-1}} =$——
   (j) $5_{C_0} =$......... (k) $\lfloor n =$...........
   (l) এটা পৰীক্ষা p- ধৰণে আৰু অইন এটা পৰীক্ষা q- ধৰণে সংগঠিত হ'লে দুয়োটা পৰীক্ষা একেলগে —— ধৰণে সংগঠিত হ'ব।

(m) তাচৰ পেকেট এটাত ৰজাৰ সংখ্যা ——, ৰাণীৰ সংখ্যা ——, টেক্কাৰ সংখ্যা ——, গোলামৰ সংখ্যা ——।

(n) তাচৰ পেকেট এটাত —— বিধৰ পাত আছে; যেনে ——

(o) $\frac{10_{C_3} \times 7_{C_2}}{17_{C_5}}$ =......... (p) $\underline{|0}$ = ...

(q) $P(\overline{A})$ ৰ সূত্ৰটো হ'ল ———

(r) তিনিটা মুদ্ৰা একেলগে দলিয়ালে ঘটনাকেইটা হ'ল ক্ৰমে ——

(s) A, B, C-তিনি পৰস্পৰ বিবৰ্জিত আৰু সম্পূৰ্ণ ঘটনা যদি $P(A)=\frac{1}{2}$ P(B) আৰু $P(B)=\frac{2}{3}P(C)$ হয় তেন্তে P(A)=..........., P(B)=.........., P(C)=...............

(t) এটা লিপিয়াৰ বছৰত মুঠ দিনৰ সংখ্যা ....

(u) তাচ পেকেট এটাত মুঠ তাচ পাতৰ সংখ্যা ....

(v) —— সপ্তাহত এক বছৰ।

(w) 5 জন পুৰুষ আৰু 3 জনী মহিলাৰ পৰা 4 জনৰ দল এটা গঠন কৰিব লাগে। —— ধৰণে দলটো গঠন কৰা সম্ভৱ। যদি দলটোত অতি কমেও 2 জনী মহিলা অন্তৰ্ভুক্ত কৰিব লাগে তেন্তে —— ধৰণে দলটো গঠন কৰা সম্ভৱ। খুব বেছি হ'লে এজনী মহিলা অন্তৰ্ভুক্ত কৰিবলৈ হ'লে —— ধৰণে দলটো গঠন কৰা সম্ভৱ।

(x) দুটা লুডুগুটি একেলগে এবাৰ দলিয়ালে অতি কমেও এবাৰ 6 পোৱাৰ অনুকূল ঘটনা ——।

(y) লুডুগুটি এটা এবাৰ দলিয়ালে 5 ৰ অনুকূল 3 প্ৰতিকুল ঘটনা ক্ৰমে —— আৰু ——।

(z) তাচৰ পেকেট এটাৰ পৰা দুখিলা পাত একেলগে ল'লে —— ৰজা, ৰাণী, টেক্কা, আৰু লালপাণৰ অনুকূল ঘটনা ক্ৰমে —, ——।

1. তিনিটা মুদ্ৰা একেলগে দলিয়ালে 2 টা মুণ্ড পোৱাৰ অনুকূল ঘটনা -— এটা মুণ্ড আৰু 1 টা পুচ্ছ পোৱাৰ অনুকূল ঘটনা ——।

2. বেগ এটাত 4 টা বগা আৰু 3 টা ৰঙা বল আছে। 3 টা বল একেলগে যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'লে 2 টা বগা বল পোৱাৰ অনুকূল ঘটনা— 1 টা বগা আৰু 2 টা ৰঙা বল পোৱাৰ অনুকূল ।

3. তাচ পেকেট এটাৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে 4 খন পাত লোৱা হ'লে, 2 খন লালপাণ আৰু 2 জন ৰজা পোৱাৰ অনুকূল ঘটনা ——। 2 জন ৰজা আৰু 2 জনী ৰাণী পোৱাৰ অনুকূল ঘটনা -——।

   1খন ক'লাপাণ, 1 খন লালপাণ, 1 খন ডায়মণ্ড আৰু 1 খন ক'লা ফুল পোৱাৰ অনুকূল ঘটনা ——।

4. তিনিটা মুদ্রা একেলগে দলিয়ালে সম্পূৰ্ণ ঘটনাৰ সংখ্যা ——
5. তিনিটা লুডুগুটি একেলগে দলিয়ালে মুঠ ঘটনাৰ সংখ্যা ——
6. বেগ এটাত 10 টা বল (1ৰ পৰা 10) সংখ্যাৰে চিহ্নিত কৰা হ'ল। বেগৰ পৰা এটা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল। বলটো (i) 2-ৰ গুণিতক অথবা 5-ৰ গুণিতক হোৱাৰ অনুকূল ঘটনা ——।

   (ii) 2 ৰ গুণিতক অথবা 7 ৰ গুণিতক হোৱাৰ অনুকূল ঘটনা ——।
9. বেগ এটাত 3 টা বগা আৰু 4টা ৰঙা বল আছে। বেগটোৰ পৰা এটা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'লে সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা।

   (i) বলটো বগা আৰু

   (ii) বলটো ৰঙা হ'ব। বলটো ৰঙা হোৱাৰ অনুকূল আৰু প্ৰতিকুল ঘটনাৰ অনুপাত কিমান?

(উত্তৰ ঃ $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}$;4:3 আৰু 3:4)

10. (a) লুডুগুটি এটা দলিয়ালে (a) (i) 6 পৰাৰ আৰু (ii) 1, অথবা 3 অথবা 5 ৰ যিকোনো এটা সংখ্যা পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা।

(উত্তৰঃ (i) $\frac{1}{6}$ (ii)) $\frac{1}{2}$

(b) অযুগ্ম সংখ্যা (c) 4 তকৈ বেছি সংখ্যা (d) 2 পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰঃ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{6}$)

11. বেগ এটাত 3 টা বগা আৰু 4 টা সেউজীয়া ৰঙৰ বল আছে। বেগটোৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে 2 টা বল লোৱা হ'লে প্ৰতিটো ৰঙৰ বল পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰঃ $\frac{4}{7}$)

12. (a) 52 খন পাত থকা তাচৰ পেকেট এটাৰ পৰা এখিলা পাত যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'লে সম্ভাৱিকতা নিৰ্ণয় কৰা। (i) পাতখন ক'লাপাণৰ (ii) পাতখন ডায়মণ্ড নহয় (iii) পাতখন টেক্কা (iv) পাতখন লালপাণ অথবা ক'লা ফুল নহয়।

উত্তৰ ঃ (a) (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{1}{13}$ (iv) $\frac{1}{2}$

(b) পাতখন ৰজা অথবা ৰাণী (c) পাতখন ক'লাপাণ অথবা টেক্কা

(d) পাতখন লালপাণ নহয়। (e) পাতখন ছবি থকা হ'ব

(f) পাতখন ছবি থকাৰ অনুকূল আৰু প্ৰতিকুল ঘটনাৰ অনুপাত।

(g) পাতখন ছবি থকা অথবা ডায়মণ্ডৰ পাত (h) পাতখন ক'লা ৰঙৰ অথবা টেক্কা

উত্তৰ ঃ (b) $\frac{2}{13}$ (c) $\frac{4}{13}$ (d) $\frac{3}{4}$ (e) $\frac{3}{13}$

(f) 3:10, 10:3 (g) $\frac{11}{26}$ (h) $\frac{7}{13}$

13. লিপিয়াৰ/লিপিয়াৰ নোহোৱা বছৰ এটাত 53টা দেওবাৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰ ঃ $\frac{2}{7}$ আৰু $\frac{1}{7}$)

14. চাৰিটা মুদ্ৰা একেলগে দলিওৱা হ'ল
   (i) 2 টা পুচ্ছ পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?
   (ii) 2 টা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?
   (iii) 3 টা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰ ঃ (i) $\frac{2}{8}$(ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{1}{4}$)

15. যদি $P(A)=\frac{1}{2}P(B), P(B)=\frac{4}{5}\ P(C)$, তেন্তে, P(A), P(B) আৰু P(C)-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(উত্তৰ ঃ$P(A)=\frac{1}{11},\ P(B)=\frac{4}{11},\ P(C)=\frac{5}{11}$)

16. এটা লুডুগুটিত থকা কোনো সংখ্যাৰ সম্ভাৱিকতা সংখ্যাটোৰ সমানুপাতিক হ'লে আৰু লুডুগুটিটো এবাৰ দলিয়ালে যুগ্ম সংখ্যা পোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰ ঃ$\frac{4}{7}$)

17. 1 ৰ পৰা 120 লৈ সংখ্যাবোৰৰ পৰা এটা সংখ্যা যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰিলে সংখ্যাটো 8 অথবা 10ৰ গুণিতক হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰ ঃ 0.2)

18. তাচৰ পেকেট এটাৰ পৰা এখিলা পাত যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল। যদি পাতখন ছবি থকা হয় তেন্তে পাতখন ৰজা হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰ ঃ $\frac{1}{3}$)

19. এজন মানুহে 4 টা কথাৰ ভিতৰত 3 টা কথা সঁচা কয়। মানুহজনে এটা লুডুগুটি দলিয়াই 6 পৰিছে বুলি দাবী কৰিলে। তেওঁ দাবী কৰা কথাষাৰৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰ ঃ $\frac{3}{4}$)

20. 5 জন পুৰুষ আৰু 3জনী মহিলাৰ পৰা 4 জনীয়া দল এটা গঠন কৰিব লাগে।
   (a) দলটোত অতি কমেও এজনী মহিলা অন্তৰ্ভুক্ত হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰ ঃ $\frac{13}{14}$)

   (b) দলটোত 2 জন পুৰুষ আৰু 2 জনী মহিলা অন্তৰ্ভুক্ত হোৱাৰ সম্ভাৱিকতা কিমান?

(উত্তৰ ঃ $\frac{3}{7}$)

উত্তৰ

6. (a) 36 আৰু 1 (b) $13_{C_3}; 8_{C_2} \times 5_{C_1}; 8_{C_3}$

(c) $52_{C_4}; 13_{C_3} \times 13_{C_1}; 4_{C_2} \times 4_{C_2}; 4_{C_1} \times 13_{C_3}; 13_{C_1} \times 4_{C_1} \times 13_{C_1} \times 13_{C_1}$

8. (a) 0 (b) 0, 1 (c) $\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}$ (d) 120

(e) 350 (f) 144 (g) 1 – P(A), 1 – $P(\overline{A})$

(h) $n+1_{C_r}$ (j) 1 (k) n(n–1)....3.2.1 (l) pq

(m) 4, 4, 4, 4 (n) 4; ক’লাপাণ, লালপাণ, ইটা, ক’লাফুল

(o) $\frac{105}{3094}$ (p) 1 (q) $\frac{n-m}{n}$

(r) (HHH), (H,H,T), (HTH), (HTT), (TTT), (TTH), (THT), (THH)

(s) $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ (t) 366 (u) 52 (v) 52

(w) 8_{C_4},35,40 (x) 11 (y) 1; 5 (z) 16, 52

8. (1) $3_{C_2} = 3$ (2) (i) $4_{C_2} = 6$ (ii) $4_{C_1} \times 3_{C_2} = 12$

(3) (i) $13_{C_2} \times 4_{C_2} = 5148$ (ii) $4_{C_2} \times 4_{C_2} = 36$

(iii) $13_{C_1} \times 13_{C_1} \times 13_{C_1} \times 13_{C_1}$

4. $2^3 = 8$ 5. $6^3 = 216$ 6. (i) = 4 (ii) 6

সহ-সম্বন্ধ
(Co-rrelation)

গড় আৰু বিচলন ঃ

গড় আৰু বিচলন অধ্যায় দুটাত আমি এটা চলক লৈ আলোচনা কৰি আহিছোঁ। এটা চলকৰ বিভাজনৰ বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যৰ কথা আমি অৱগত। আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনত দুই বা ততোধিক চলকৰ বিভিন্ন সমস্যা আছে। যেনে— বস্তুৰ মূল্য আৰু ইয়াৰ চাহিদা; মূল্য আৰু যোগান ব্যৱস্থা; আয় আৰু ব্যয়; বিজ্ঞাপন খৰচ আৰু বিক্ৰীৰ পৰিমাণ; মানুহৰ উচ্চতা আৰু ওজন; প্ৰতিষ্ঠান এটাৰ উৎপাদন খৰচ আৰু লাভৰ পৰিমাণ; গ্যাসৰ চাপ আৰু আৰু আয়তন; দূৰত্ব আৰু যান-বাহনৰ গতিবেগ; স্বামী-স্ত্ৰীৰ বয়স; ইত্যাদি সমস্যাবোৰৰ ক্ষেত্ৰত দুটা চলক জড়িত।

সহসম্বন্ধ কি? ঃ

সহ-সম্বন্ধ হ'ল দুই বা ততোধিক চলকৰ এটা সম্পৰ্ক আৰু এই সম্পৰ্ক এনে ধৰণৰ যে এটা চলকৰ মানৰ পৰিৱৰ্তনৰ লগে লগে অইন চলকৰ মানৰো পৰিৱৰ্তন হয়। পৰিৱৰ্তন শব্দটো দুটা অৰ্থত ব্যৱহাৰ হয়— বৃদ্ধি অথবা হ্ৰাস অৰ্থাৎ চলক দুটাই একে দিশত অথবা বিপৰীত দিশত গতি কৰিব পাৰে। যেনে— আয় আৰু ব্যয়, উচ্চতা আৰু ওজন, গতিবেগ আৰু দূৰত্ব (অৱশ্যে সময় ধ্ৰুৱক হ'ব লাগিব), স্বামী-স্ত্ৰীৰ বয়স ইত্যাদি চলকবোৰে একে দিশত গতি কৰে। আনহাতে বস্তুৰ মূল্য আৰু চাহিদা, সময় আৰু মন্থৰ গতিৰ যানবাহনৰ চাহিদা, গ্যাসৰ চাপ আৰু আয়তন (অৱশ্যে তাপমাত্ৰা ধ্ৰুৱক হ'ব লাগিব), ঊলৰ সামগ্ৰী আৰু তাপমাত্ৰা ইত্যাদি চলকবোৰে বিপৰীত দিশত গতি কৰে।

ওপৰৰ কথাখিনি গড় হিচাপেহে শুদ্ধ আৰু স্বাভাৱিক অভিধাৰণাৰ ওপৰত উল্লেখ কৰা হৈছে।

বিভিন্ন ধৰণৰ সহ-সম্বন্ধ ঃ

(a) ধনাত্মক, ঋণাত্মক আৰু সহ-সম্বন্ধহীনতা।

(b) ৰৈখিক আৰু অৰৈখিক সহ-সম্বন্ধ।

(c) সৰল, তিনি বা ততোধিক চলক সহ-সম্বন্ধ আৰু আংশিক সহ-সম্বন্ধ।

(a) যদি এটা চলকৰ মান বৃদ্ধি/হ্ৰাস পোৱাৰ লগে লগে অইন চলকৰ মানো বৃদ্ধি/হ্ৰাস পায় তেন্তে চলক দুটাৰ মাজত ধনাত্মক সহসম্বন্ধ আছে বুলি জনা যায়। যেনে— আয় বাঢ়িলে ব্যয় বাঢ়ে, মানুহৰ উচ্চতা বাঢ়িলে ওজন বাঢ়ে, মটৰগাড়ীৰ গতিবেগ বৃদ্ধি পালে অতিক্ৰম কৰাৰ দূৰত্ব বাঢ়ে ইত্যাদি। যদি এটা চলকৰ মান বৃদ্ধি/হ্ৰাস পোৱাৰ লগে লগে অইন চলকৰ মানো হ্ৰাস/বৃদ্ধি পায় তেন্তে চলক দুটাৰ মাজত ঋণাত্মক সহ-সম্বন্ধ আছে বুলি কোৱা হয়। যেনে— সাধাৰণতে বস্তুৰ মূল্য বৃদ্ধি পালে চাহিদা হ্ৰাস পায়, তাপমাত্ৰা বৃদ্ধি পালে ঊলৰ সামগ্ৰীৰ চাহিদা হ্ৰাস পায় ইত্যাদি।

যদি এটা চলকৰ মান হ্ৰাস/বৃদ্ধি পোৱাৰ ফলত অইন চলকৰ কোনো ধৰণৰ পৰিৱৰ্তন নহয় তেন্তে চলক দুটাৰ মাজত সহ-সম্বন্ধহীনতা থকা বুলি জনা হয়। যেনে— গছৰ বয়স আৰু মটৰগাড়ীৰ গতিবেগ। এনেস্থলত চলক দুটা স্বতন্ত্ৰ চলক বুলি জনা যায়।

(b) চলক দুটাৰ মানবোৰ লেখ কাগজত (এটা চলকক মানবোৰ X অক্ষৰেখাত আৰু অইন চলকৰ মানবোৰ Y অক্ষৰেখাত) সংস্থাপন কৰাৰ পিছত যদি দেখা যায় যে সংস্থাপিত বিন্দুবোৰ এটা ৰেখাৰ দুয়োফালে সিঁচৰতি অৱস্থাত থাকে তেন্তে চলক দুটাৰ মাজত ৰৈখিক সম্বন্ধ আছে বুলি কোৱা হয়। আনহাতে সংস্থাপিত বিন্দুবোৰ তেনেকুৱা অৱস্থাত নাথাকিলে চলক দুটাৰ মাজত অৰৈখিক সম্বন্ধ থকা বুলি জনা যায়। অৰ্থাৎ সংস্থাপিত বিন্দুবোৰ এটা বক্ৰৰ দুয়োফালে সিঁচৰতি অৱস্থাত থাকে।

(c) যদি দুটা চলকৰ সহ-সম্বন্ধ অধ্যয়ন কৰা হয় তেন্তে সেই সহ-সম্বন্ধক সৰল সহ-সম্বন্ধ বুলি কোৱা হয়। আনহাতে দুটাতকৈ বেছি চলকৰ সহ-সম্বন্ধক বহু চলকৰ সহ-সম্বন্ধ বুলি জনা যায়। আকৌ দুটাতকৈ বেছি চলকবোৰৰ ক্ষেত্ৰত যদি দুটা চলকৰ সহ-সম্বন্ধ (বাকী চলকবোৰক স্থিৰ ৰাখি) অধ্যয়ন কৰা হয় তেন্তে তেনেকুৱা সহ-সম্বন্ধক আংশিক সহ-সম্বন্ধ বোলা হয়।

সহ-সম্বন্ধ জোখাৰ প্ৰক্ৰিয়াবোৰ ঃ

সহ-সম্বন্ধ জোখাৰ মূলতঃ দুটা পদ্ধতি আছে। যেনে—

1. প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰ (Scatter diagram) পদ্ধতি 2. বীজগণিতীয় পদ্ধতি।

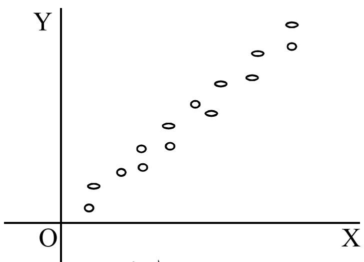
1. প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰ ঃ

সাধাৰণতে স্বতন্ত্ৰ চলক X আৰু পৰতন্ত্ৰ চলকক Y বুলি ধৰা হয়। X আৰু Y ৰ মানকেইটা ক্ৰমে X অক্ষৰেখাত আৰু Y অক্ষৰেখাত উপযুক্ত পৰিমাপ মাত্ৰা লৈ সংস্থাপন কৰি যদি দেখা যায় যে বিন্দু বাওঁফালৰ তলৰ পৰা আৰম্ভ হৈ সোঁফালৰ ওপৰকৈ গতি কৰে তেন্তে চলক দুটাৰ মাজত ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ আছে বুলি জনা যায় আৰু এনে স্থলত বিন্দুবোৰৰ মাজেৰে এডাল কাল্পনিক ৰেখাৰ দুয়োফালে সিঁচৰতি অৱস্থাত পোৱা যায় আৰু ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা (slope) ধনাত্মক হয়। এইক্ষেত্ৰত চলক দুটাৰ মাজত সম্পূৰ্ণ ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ আছে বুলি ধৰা হয়। সম্পূৰ্ণ ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধৰ ক্ষেত্ৰত চলক দুটা আনুপাতিকভাৱে হ্ৰাস বা বৃদ্ধি পায়।

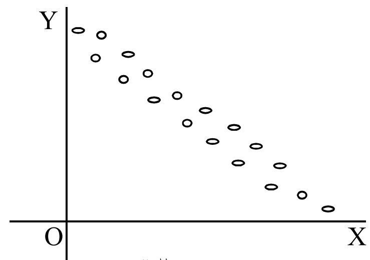
আনহাতে সংস্থাপিত বিন্দুবোৰ যদি বাওঁফালৰ ওপৰৰ পৰা আৰম্ভ হৈ সোঁফালৰ তললৈ গতি কৰে তেন্তে সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ মাজত ঋণাত্মক সহ-সম্বন্ধ আছে বুলি জনা যায় আৰু বিন্দুবোৰৰ মাজেৰে যদি এটা ৰেখা কল্পনা কৰা হয় তেন্তে ৰেখাটোৰ দুয়োফালে বিন্দুবোৰ সিঁচৰতি অৱস্থাত থাকে আৰু ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা ঋণাত্মক হয়। এনেস্থলত চলক দুটাৰ মাজত সম্পূৰ্ণ ঋণাত্মক সহ-সম্বন্ধ আছে বুলি ধৰা হয় আৰু এনেস্থলত চলক দুটা আনুপাতিকভাৱে পৰিৱৰ্তন হয়।

এই প্ৰসংগত উল্লেখ কৰিব পাৰি যে সংস্থাপিত বিন্দুকেইটা যিমানে ওচৰা-উচৰি অৱস্থান কৰে সহ-সম্বন্ধও সিমানে বেছি আৰু আনহাতে বিন্দুবোৰৰ দূৰত্ব বেছি হ'লে সহ-সম্বন্ধও সিমানে কম হয়।

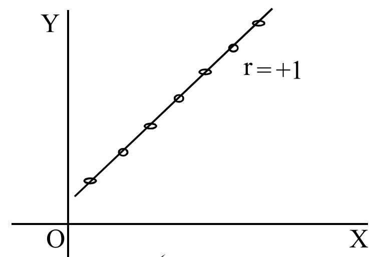
বিভিন্ন ধৰণৰ সহ-সম্বন্ধৰ প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰ লেখ ঃ



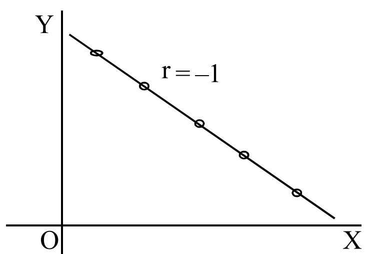
ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ



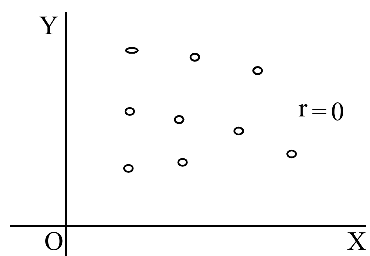
ঋণাত্মক সহ-সম্বন্ধ



সম্পূৰ্ণ ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ



সম্পূৰ্ণ ঋণাত্মক সহ-সম্বন্ধ



সহ-সম্বন্ধহীনতা

প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰই চলকৰ মাজত সম্পৰ্ক আছে নে নাই এই বিষয়ে আলোকপাত কৰে। দ্বিতীয়তে সহ-সম্বন্ধৰ প্ৰকৃতি কেনেকুৱা অৰ্থাৎ (ধনাত্মক, ঋণাত্মক অথবা কোনো সম্বন্ধ নথকা) এই বিষয়ে উনুকিয়ায়। তৃতীয়তে সহ-সম্বন্ধৰ উৎকৰ্ষৰ বিষয়ে প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰ পৰা জ্ঞান লাভ কৰিব পাৰি।

প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰ সীমাবদ্ধতা হ'ল এয়ে যে— এই চিত্ৰৰ পৰা চলক দুটাৰ সহ-সম্বন্ধৰ পৰিমাণ সংখ্যাৰে নিৰূপণ কৰিব নোৱাৰি। অৰ্থাৎ প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰে সহ-সম্বন্ধৰ গুণগত দিশৰ থূলমূলকৈ আভাস এটা পোৱা যায়।

টোকা ঃ

$r=+1,-1$ আৰু 0 এই প্ৰশ্নটোৰ উত্তৰ দিয়াৰ সময়ত সম্পূৰ্ণ ধনাত্মক, সম্পূৰ্ণ ঋণাত্মক আৰু সহ সম্বন্ধহীনতাৰ সংজ্ঞা লিখি প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰবোৰ অংকন কৰিবা।

সহ-সম্বন্ধৰ প্ৰয়োজনীয়তা ঃ

1. সহ-সম্বন্ধ গুণাংকই সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ পাৰস্পৰিক সম্পৰ্কৰ গভীৰতা বা প্ৰকৃতি এটা শুদ্ধ সংখ্যাৰে নিৰূপণ কৰে।
2. সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণৰ জৰিয়তে অৰ্থনৈতিক আৰু ব্যৱসায় সংক্ৰান্ত সমস্যাবোৰৰ লগত জড়িত চলকবোৰৰ সম্ভাব্য প্ৰভাৱ সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ কৰিব পাৰি। সেয়েহে সমস্যাটোৰ বাবে অভিজ্ঞতাৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি ভৱিষ্যৎ আঁচনি যুগুতোৱা সম্ভৱ।

3. সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণৰ দ্বাৰাই ভৱিষ্যৎ বাণীৰ অনিশ্চয়তা ভালেখিনি লাঘৱ কৰে।
4. অৰ্থনৈতিক সমস্যাৰ ক্ষেত্ৰত কোন কোন চলকবোৰৰ বেছি কাৰ্যকৰী এই বিষয়ে সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণৰ দ্বাৰাই অৰ্থনীতিবিদজনে বুজ লয়।

সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণৰ কেইটামান লাগতিয়াল কথা ঃ

1. সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ তথ্যখিনিত যথেষ্টসংখ্যক আৰেক্ষণ অন্তৰ্ভুক্ত হ'ব লাগিব।
2. চলক দুটাৰ গতিবিধিৰ সম্পৰ্ক গড় হিচাপেহে অধ্যয়ন কৰা হয়। এনেস্থলত চলক দুটাই আনুপাতিকভাৱে হ্ৰাস বা বৃদ্ধিৰ প্ৰশ্ন নুঠে।
3. সহ-সম্বন্ধত চলক দুটা কাৰণগত আৰু প্ৰভাৱান্বিত সম্পৰ্ক ৰূপত নাথাকিবও পাৰে।
4. সামাজিক, অৰ্থনৈতিক আৰু ব্যৱসায়িক চলকবোৰৰ ক্ষেত্ৰত চলক দুটাই আনুপাতিকভাৱে হ্ৰাস বা বৃদ্ধি নোপোৱাটো স্বাভাৱিক কিয়নো এই চলকবোৰৰ ক্ষেত্ৰত কেইবাটাও চলকে সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ ওপৰত প্ৰভাৱ বিস্তাৰ কৰে।
5. সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ সম্বন্ধ থূলমূলকৈ অধ্যয়ন কৰাটোৱেই হ'ল সহ-সম্বন্ধ জোখাৰ লক্ষ্য।

ওপৰৰ আলোচনাৰ পৰা দেখা গ'ল যে সহ-সম্বন্ধৰ ক্ষেত্ৰত এটা চলক হ'ল কাৰণ আৰু অইনটো হ'ল প্ৰভাৱান্বিত— এনেধৰণৰ সম্পৰ্ক জোখাৰ বুজ নলয়। সেয়েহে অকল সাংখ্যিকীয় বিশ্লেষণৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ সম্বন্ধ সম্পৰ্কে মন্তব্য দাঙি ধৰাটো যুক্তিযুক্ত নহয়। এই বিষয়ে ব্যক্তিগত অভিজ্ঞতা, অনুভূতি আৰু বিচাৰ ক্ষমতা যথেষ্ট ফলপ্ৰসূ।

2. বীজগণিতীয় পদ্ধতি (নিৰ্দিষ্ট মানৰ শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত) ঃ

অধ্যাপক কাৰ্ল পীয়াৰচনে সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ সহ-সম্বন্ধ সংখ্যাৰে জুখিবলৈ এটা সূত্ৰ দাঙি ধৰিছে আৰু তেওঁৰ নাম অনুসাৰে সূত্ৰটোক কাৰ্ল পীয়াৰচনৰ সহ-সম্বন্ধ গুণাংক বুলি জনা যায়।

সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ সংজ্ঞা ঃ

সহ-সম্বন্ধ গুণাংক হ'ল চলক দুটাৰ মাধ্যৰ পৰা মানবোৰৰ পাৰ্থক্যৰ গুণফলৰ যোগফল আৰু চলক দুটাৰ মাজত বিচলন দুটাৰ আৰু আৰেক্ষণবোৰক (চলক দুটাৰ) যোৰ হিচাপে লৈ গুণফল। সহ-সম্বন্ধ গুণাংকক *r* আখৰেৰে সূচোৱা হয় আৰু সূত্ৰটো তলত দিয়া ধৰণে উপস্থাপন কৰা হয়।

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N} xy}{N.\sigma_x.\sigma_y} \text{..........} \quad \text{(i)}$$

(প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি)

য'ত, $x_i = X_i - \overline{x}$

$y_i = y_i - \overline{y}$

$\overline{x} = x$-চলকৰ মাধ্য

$\overline{y} = y$-চলকৰ মাধ্য

$\sigma_x = x$-চলকৰ মানক বিচলন

$\sigma_y = y$-চলকৰ মানক বিচলন

N= যোৰ সংখ্যক আৰেক্ষণবোৰ

(1) নং সূত্ৰটোৰ পৰা পাওঁ—

$$r = \frac{\sum xy}{N.\sqrt{\frac{1}{N}\sum(x-\overline{x})^2 \cdot \frac{1}{N}\sum(y-\overline{y})^2}}$$

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2} \times \sqrt{\sum y^2}}$$

$$\therefore \quad r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(2) নং সূত্ৰটোক প্ৰকৃত গড় পদ্ধতিৰ সূত্ৰ বুলি কোৱা হয়।

কাল্পনিক গড় পদ্ধতি ঃ

সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ সূত্ৰটো হ'ল—

$$r = \frac{\sum d_x d_y - \frac{\sum d_x . \sum d_y}{N}}{\sqrt{\sum(d_x)^2 - \frac{(\sum d_x)^2}{N}} \times \sqrt{\sum(d_y)^2 - \frac{(\sum d_y)^2}{N}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

য'ত, d_x = X–A, A = X-চলকৰ পৰা লোৱা কাল্পনিক গড়

d_y = Y–B, B=Y -চলকৰ পৰা লোৱা কাল্পনিক গড়

N = যোৰ সংখ্যক আৰেক্ষণবোৰ

প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতিত (1) নং সূত্ৰটো বেলেগ ধৰণে দিব পাৰি—

সূত্ৰটো হ'ল—

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum \times . \sum y}{N}}{\sqrt{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}} . \sqrt{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{N}}}$$

চলক দুটাৰ প্ৰদত্ত মানবোৰ ব্যৱহাৰ কৰি ওপৰৰ সূত্ৰটো প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি।

টোকা ঃ

(a) প্ৰকৃত গড় পদ্ধতি অৰ্থাৎ (2) নং সূত্ৰ x আৰু y চলকৰ প্ৰকৃত গড় দুয়োটা পূৰ্ণ সংখ্যাত থাকিলে ব্যৱহাৰ কৰা সুবিধাজনক।

(b) (3) নং সূত্ৰটো ব্যৱহাৰৰ ক্ষেত্ৰত কোনো বাধ্যবাধকতা নাই। অৰ্থাৎ $\overline{x}$ আৰু $\overline{y}$ পূৰ্ণসংখ্যাত থাকিলে কিম্বা নাথাকিলেও (3)নং সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি।

(c) বিচ্ছিন্ন আৰু অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ সূত্ৰ বৰ্তমান পৰিসৰত অন্তৰ্ভুক্ত কৰা নহ'ল।

কাৰ্ল পীয়াৰচনৰ সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ সূত্ৰটোত লোৱা কেইটামান অভিধাৰণা ঃ

অভিধাৰণা ঃ

1. সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ সম্পৰ্ক ৰৈখিক অৰ্থাৎ চলক দুটাৰ মানবোৰ প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰে উপস্থাপন কৰিলে চিত্ৰটো সৰল ৰেখা আকৃতিৰ হ'ব।
2. যদিও প্ৰতিটো চলকৰ মান কেইবাটাও কাৰণ (factors) ৰ দ্বাৰা প্ৰভাৱান্বিত তথাপি সৰহসংখ্যক আৰেক্ষণ অন্তৰ্ভুক্ত কৰিলে সংশ্লিষ্ট বিভাজনটো শেষত সমমিত বণ্টনৰ ৰূপ ল'ব।
3. সংশ্লিষ্ট চলক দুটাৰ এটা কাৰণ আৰু অইনটো প্ৰভাৱান্বিত ৰূপত সম্বন্ধযুক্ত আছে বুলি ধৰা হয়।

সম্ভাব্য ত্ৰুটি (Probable Error) ঃ

কাৰ্ল পীয়াৰচনৰ সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ সূত্ৰ অৱলম্বন কৰি চলক দুটাৰ সম্বন্ধ জুখি কোনো মন্তব্য দাঙি ধৰাৰ সময়ত কিছু সন্দেহৰ অৱতাৰণা হয়, কিয়নো সূত্ৰটো কেইটামান অভিধাৰণাৰ ওপৰত উলিওৱা হৈছে। সেয়েহে সূত্ৰটো প্ৰয়োগ কৰিলে সম্ভাব্য ভুল-ত্ৰুটিৰ এটা সূত্ৰ পীয়াৰচনে আগবঢ়াইছে—

$$\text{সম্ভাব্য ত্ৰুটি} = \text{P.E(r)} = 0.6745 \times \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

সম্ভাব্য ত্ৰুটিৰ ব্যৱহাৰ ঃ

1. P.E(r) ৰ মান r-ৰ লগত যোগ-বিয়োগ কৰিলে r-ৰ মান দুটা সীমা পোৱা যায়। অৰ্থাৎ যদি সমষ্টিটোৰ পৰা বেলেগ এটা যাদৃচ্ছিক প্ৰতিদৰ্শ লোৱা হয় আৰু r-ৰ মান উলিওৱা তেন্তে r-ৰ মানটো আগতে উল্লেখ কৰা দুটা সীমাৰ মাজত থাকিব বুলি আশা কৰিব পাৰি। সেয়েহে সম্ভাব্য ত্ৰুটিৰ গণনাই r-ৰ মানৰ সীমা নিৰ্দেশ কৰে।
2. যদি $r < PE(r)$ হয় তেন্তে r-ৰ মান তাৎপৰ্যপূৰ্ণ নহ'ব।
3. যদি $r > 6PE(r)$হয় তেন্তে r-ৰ মান তাৎপৰ্যপূৰ্ণ হ'ব।
4. অন্যান্য পৰিস্থিতি r-সম্বন্ধে নিশ্চিতভাৱে একো ক'ব নোৱাৰি।

টোকা ঃ

1. যোৰ সংখ্যক আৰেক্ষণবোৰ কম হ'লে PE(r)ৰ ব্যৱহাৰ ত্ৰুটিপূৰ্ণ হ'ব পাৰে।
2. তথ্যখিনি সমমিত বণ্টনৰ পৰা সংগৃহীত হ'ল PE(r) তত্ত্বটো প্ৰযোজ্য।
3. প্ৰতিদৰ্শ সংগ্ৰহ যাদৃচ্ছিক প্ৰতিদৰ্শ পদ্ধতি লোৱা হ'লে PE(r) তত্ত্বটো প্ৰযোজ্য।

r-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰি সহ-সম্পৰ্ক সম্বন্ধে তেনেকৈ মন্তব্য দাঙি ধৰিবা?

তলত উল্লেখ কৰা কথাখিনিৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি সাধাৰণতে চলক দুটাৰ সম্পৰ্ক সম্বন্ধে মন্তব্য দিয়া হয়।

1. $r=+1$ হ'লে, সহ-সম্বন্ধ সম্পূৰ্ণ ধনাত্মক।
2. $r=-1$, হ'লে সহ-সম্বন্ধ সম্পূৰ্ণ ঋণাত্মক।
3. $r=0$, সহ-সম্বন্ধ খুব কম।
4. r-ৰ মান 1-ৰ সন্নিকট বা ওচৰা-উচৰি হ'লে সহ-সম্বন্ধ বেছি তাৎপৰ্যপূৰ্ণ।
5. সহ-সম্বন্ধ বেছি তাৎপৰ্যপূৰ্ণ হ'লেও চলক দুটাৰ মান আনুপাতিকভাৱে হ্রাস/বৃদ্ধি নাপাবও পাৰে।

সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ ধৰ্ম ঃ

1. r-ৰ মান +1 আৰু –1 ৰ মাজত থাকে অৰ্থাৎ $-1 \leq r \leq +1$
2. মূল বিন্দু (origin) আৰু মাত্রা (scale) ৰ পৰিৱৰ্তন হ'লেও 'r'ৰ মান অপৰিৱৰ্তিত থাকে।
3. r–ৰ এটা শুদ্ধ সংখ্যা।
4. চলক দুটাৰ যিকোনো এটাক × বা y ধৰিলেও r-ৰ মানৰ পৰিৱৰ্তন নহয়। অৰ্থাৎ $r_{xy}=r_{yx}$
5. চলক দুটাৰ সম্পৰ্ক ৰৈখিক হ'লেহে r-ৰ সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি।
6. x আৰু y-ৰ সম্বন্ধ বিপৰীত চিনৰ হয় যদি— x-আৰু y অথবা x আৰু –y হয়।
7. যদি চলক দুটা x আৰু y-ৰ মাজত এটা ৰৈখিক সম্বন্ধ যেনে $ax+by+c=0$ বৰ্তমান থাকে তেনেহ'লে 'a' & b-ৰ চিন বিপৰীত হ'লে r-ৰ মান +1 হয়। আনহাতে a আৰু b-ৰ চিন একেই হ'লে r-ৰ মান –1 হয়।

কেইটামান ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1 ঃ তলত দিয়া তথ্যৰ পৰা সহ-সম্বন্ধ গুণাংক নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(a)

মূল্য ঃ	10	12	15	20	23
পৰিমাণ ঃ	2	7	6	4	1

(b)

x :	70	50	55	58	63
y:	60	63	67	56	60

(c) দিয়া আছে : $\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2=120, \sum_{i=1}^{9}(y_i-\bar{y})^2=346,$

$$\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=193$$

(d) দিয়া আছে : $N=10$, $\sum x=125$, $\sum y=80$, $\sum x^2=1586$, $\sum y^2=650$, $\sum xy=1007$

(e) দিয়া আছে : $N=10$, $\sum x=140$, $\sum y=150$, $\sum(x-10)^2=180$, $\sum(y-15)^2=215$, $\sum(x-10)(y-15)=60$

(f) দিয়া আছে : $r=0.6, \sum xy=130, \sum x^2=100, \sigma_y=10,$

যʼত $x = x - \bar{x}, \quad y = y - \bar{y}$, N-ৰ মান কিমান?

সমাধান ঃ (a) ইয়াত মূল্যক x আৰু পৰিমাণক বুলি ধৰা হʼব।

নিৰীক্ষণ পদ্ধতিত দেখা যায় $\bar{x}$ আৰু $\bar{y}$ ৰ মান পূৰ্ণ সংখ্যা হʼব। সেয়েহে প্ৰকৃত মাধ্য পদ্ধতিত সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ মান নিৰ্ণয় কৰা হʼব।

সূত্ৰটো হʼল—

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}}, \qquad \text{যʼত } x = x - \bar{x}, \quad y = y - \bar{y}$$

	x	x=x–16	x^2	y	y=y–4	y^2	xy
	10	–6	36	2	–2	4	12
	12	–4	16	7	3	9	–12
	15	–1	1	6	2	4	–2
	20	4	16	4	0	0	0
N=5	23	7	49	1	–3	9	–21
মুঠ	80		118	20		26	–23

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{80}{5} = 16, \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{N} = \frac{20}{5} = 4$$

এতিয়া, $$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}} = \frac{-23}{\sqrt{118 \times 26}}$$

$$\simeq -\frac{23}{55} \simeq -0.42$$

$\therefore r \cong -0.42$

(b) নিৰীক্ষণ পদ্ধতি দেখা যায় $\bar{x}$ আৰু $\bar{y}$-ৰ মান পূৰ্ণ সংখ্যাত নাথাকে। সেয়েহে কল্পিত গড় পদ্ধতি সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ মান নিৰ্ণয় কৰা হʼব।

সূত্ৰটো হʼল—

$$r = \frac{\sum d_x d_y - \frac{\sum d_x . \sum dy}{N}}{\sqrt{\sum(d_x)^2 - \frac{\left(\sum d_x\right)^2}{N}} . \sqrt{\sum(d_y)^2 - \frac{\left(\sum d_y\right)^2}{N}}}$$

য'ত $d_x = x - A$, $A = X$–চলকৰ পৰা লোৱা কাল্পনিক গড়

$d_y = Y - B$, $B = Y$,–চলকৰ পৰা লোৱা কাল্পনিক গড়

N = আৰেক্ষণবোৰৰ যোৰ।

ধৰা হ'ল X চলকৰ কাল্পনিক গড় অৰ্থাৎ, A=55, আৰু Y-চলকৰ কাল্পনিক গড় অৰ্থাৎ B=60

(টোকা ঃ কাল্পনিক গড়ৰ মান সাধাৰণতে চলকবোৰৰ মানবোৰৰ মাজৰ পৰা লোৱা সুবিধাজনক)

	x	$d_x = x-55$	$(d_x)^2$	y	dy=y–60	$(dy)^2$	dx.dy
	70	15	225	60	0	0	0
	50	–5	25	63	3	9	–15
	55	0	0	67	7	49	0
	58	3	9	56	–4	16	–12
ইয়াত N=5	63	8	64	60	0	0	0
মুঠ		21	323		6	74	–27

সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ—

$$r = \frac{-27 - \frac{21 \times 6}{5}}{\sqrt{323 - \frac{(21)^2}{5}} \times \sqrt{74 - \frac{(6)^2}{5}}}$$

$$= \frac{-52.2}{\sqrt{234.8 \times 66.8}}$$

$$\boxed{\simeq \frac{-52}{\sqrt{235 \times 67}}}$$

$$\simeq -\frac{52}{125}$$

$$\therefore\ r \simeq -0.39$$

(c) সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ

$$r = \frac{\Sigma(x - \overline{x})(y - \overline{y})}{\sqrt{\Sigma(x - \overline{x})^2 \times \Sigma(y - \overline{y})^2}} = \frac{193}{\sqrt{120 \times 346}}$$

$$\simeq \frac{193}{204}$$

$$\simeq 0.95$$

(d) সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x.\sum y}{N}}{\sqrt{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}} \times \sqrt{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{N}}}$$

$$= \frac{1007 - \frac{125 \times 80}{10}}{\sqrt{1586 - \frac{(125)^2}{10}} \times \sqrt{650 - \frac{(80)^2}{10}}}$$

নিজে চেষ্টা কৰা। (উত্তৰ, $r = 0.47$)

(e) ইয়াত, X-ৰ কল্পিত গড় $A=10$

Y-ৰ কল্পিত গড় $B=15$

প্ৰদত্ত তথ্যখিনি সূত্ৰৰ চিন ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ

$N=10, \sum x=140, \sum y=150, \sum(d_x)^2 = 180, \sum(dy)^2=215, \sum dxdy=60,$

এতিয়া, $d_x = x-10$

$\therefore \sum dx=\sum(x-10) = \sum x-10\times10 \because N = 10$

$= 140-100$

$\therefore \sum dx = 40$

আকৌ, $dy= y-15$

$\therefore \sum dy = \sum(y-15) = \sum y-15\times10$

$= 150-150 = 0$

সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ—

$$r = \frac{\sum dx\,dy - \frac{\sum dx.\sum dy}{N}}{\sqrt{\sum(dx)^2 - \frac{(\sum dx)^2}{N}}\sqrt{\sum dy^2 - \frac{(\sum dy)^2}{N}}}$$

$$= \frac{60 - \frac{40 \times 0}{10}}{\sqrt{180 - \frac{(40)^2}{10}}.\sqrt{215 - \frac{(0)^2}{10}}}$$

$$= \frac{60}{\sqrt{20 \times 215}}$$

$$= \frac{60}{10\sqrt{43}} = \frac{6}{\sqrt{43}} \cong \frac{6}{6.5} \cong \frac{\cancel{60}^{12}}{\cancel{65}_{13}} \cong 0.92$$

$$\boxed{\therefore \quad r = 0.92}$$

(f) সূত্ৰৰ পৰা পাওঁ

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}}$$

$$\Rightarrow 0.6 = \frac{130}{\sqrt{100 \times 100N}}$$

$$= \frac{130}{100\sqrt{N}}$$

$$\therefore 0.6 = \frac{13}{10\sqrt{N}}$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{N} = 13$$

$\Rightarrow 36N = 169$ (বৰ্গ কৰি) $\quad \therefore N = \frac{169}{36} \simeq 5$

আমি জানো, $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma(y-\bar{y})^2}$

$$\Rightarrow 10 = \sqrt{\frac{1}{N}\sum y^2}$$

$$\Rightarrow 100 = \frac{1}{N}\sum y^2$$

$$\therefore \sum y^2 = 100N$$

উদাহৰণ 2 ঃ (a) X আৰু Yৰ 12 যোৰ আৰেক্ষণৰ তলৰ তথ্যখিনি পোৱা হ'ল। $\sum x = 30$, $\sum y = 5$, $\sum x^2 = 670$, $\sum y^2 = 285$, $\sum xy = 334$ পিছত তথ্যখিনি পুনৰ পৰীক্ষণৰ পিছত দেখা গ'ল যে এযোৰ (x=10, y=14)-ৰ সলনি লোৱা হৈছে (x=11, y=4)

শুদ্ধ সহ-সম্বন্ধ গুণাংক নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ প্ৰশ্নমতে, শুদ্ধ $\sum x = 30-11+10=29$

শুদ্ধ $\sum y = 5-4+14=15$

শুদ্ধ $\sum x^2 = 670-11^2+10^2 = 649$

শুদ্ধ $\sum y^2 = 285-4^2+14^2 = 465$

শুদ্ধ $\sum xy = 334-11\times4+10\times14 = 430$

$N = 12$

এতিয়া, সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি শুদ্ধ r-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(উত্তৰ ঃ $r = 0.78$)

(b) যদি x আৰু Y চলকৰ সম্বন্ধটো হ'ল $2x+3y=4$, x আৰু y-ৰ সহ-সম্বন্ধৰ মান কিমান?

সমাধান ঃ x আৰু y-ৰ সম্বন্ধটো ax+by+c=0 ধৰণৰ

$\therefore$ r =+1 (যদি a আৰু b-ৰ চিন বিভিন্ন)

= –1 (যদি a আৰু b-ৰ চিন একেই হয়)

সংশ্লিষ্ট অংকটোত a>0, b>0 অর্থাৎ a আৰু b-ৰ চিন একেই

$\therefore$ r = –1 [সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ 7 নং ধৰ্মটো চোৱা]

(c) x আৰু y-ৰ মানবোৰ (20,5), (21.4), (22,3) হ'লে সহ-সম্বন্ধ গুণাংক কিমান?

সমাধান ঃ তথ্যখিনিৰ পৰা পাওঁ—

$$20+5=25, \quad 21+4=25, \; 22+3=25$$

অর্থাৎ x আৰু y-ৰ সম্বন্ধটো হ'ব— x+y=25

$\because$ x আৰু y-ৰ সহগ প্রত্যেকৰে +1 (অর্থাৎ a আৰু b-ৰ চিনে একেই)

সেয়েহে X আৰু Y-ৰ সহ-সম্বন্ধ r-ৰ মান = –1

(d) যদি x আৰু Y-চলকৰ r-ৰ মান 0.5 হয় তেন্তে 2x–4 আৰু 3–2y-ৰ সহ-সম্বন্ধ কিমান?

সমাধান ঃ a আৰু b-ৰ চিন বিভিন্ন অর্থাৎ x-ৰ +, y-ৰ (–)

সেয়েহে r = – 0.5

উদাহৰণ 3 ঃ তলৰ তথ্যখিনিত বয়সৰ বিভাগ, মানুহৰ সংখ্যা (হাজাৰত) আৰু অন্ধ মানুহৰ সংখ্যা দিয়া আছে।

বয়স আৰু অন্ধত্বৰ সহ-সম্বন্ধ গুণাংক নির্ণয় কৰা।

বয়সৰ বিভাগ	মানুহৰ সংখ্যা (হাজাৰত)	অন্ধ মানুহৰ সংখ্যা
0–10	100	55
10–20	60	40
20–30	40	40
30–40	36	40
40–50	24	36
50–60	11	22
60–70	6	18
70–80	3	15

সমাধান সংকেত ঃ বয়সক x আৰু অন্ধত্বক Y বুলি ধৰা।

বয়সৰ বিভাগবোৰৰ মধ্যমানবোৰক x-ৰ মান ধৰা

প্রতি লাখত অন্ধ মানুহৰ সংখ্যাবোৰ y-ৰ মান ধৰা

যেনে— প্ৰথম বিভাগৰ অন্ধ মানুহৰ সংখ্যা $= \frac{40}{60,000} \times 100000 = 67$ (প্ৰায়) ইত্যাদি

সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি r-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। (উত্তৰ ঃ 0.898)

উদাহৰণ 4 ঃ যুক্তি দেখুৱাই তলৰ উক্তিবোৰ সঁচা নে মিছা প্ৰতিপন্ন কৰা ঃ

(i) r-ৰ মান 0 আৰু 1 ৰ মাজত থাকে।

(ii) চলক দুটাৰ সম্বন্ধ— 1.6

(iii) r=0 হ'লে চলক দুটা সম্বন্ধযুক্ত নহয়।

(iv) x আৰু y চলক দুটাৰ সহ-সম্বন্ধ গুণাংক = 0.6 হ'লে x আৰু –y চলক দুটাৰ সহ-সম্বন্ধ – 0.6

(v) x-আৰু y-চল দুটাৰ সহ-সম্বন্ধ গুণাংক 0.3 হ'লে (3x–4) আৰু (4–y)-ৰ সহ-সম্বন্ধ – 0.3 হ'ব।

(vi) x-আৰু y-চলকৰ ক্ষেত্ৰত r=0.8 হ'লে x-আৰু $\frac{1}{2}y$ চলকৰ ক্ষেত্ৰত $r = 0.4$ হ'ব।

(vii) চলক দুটা একে একক থাকিলে r-ৰ মান উলিয়াব নোৱাৰি।

(viii) r-ৰ মান ঋণাত্মক নহয়।

(ix) r-চলক দুটাৰ সকলো ধৰণৰ সম্পৰ্কৰ বুজ লয়।

(x) –x আৰু –y চলকৰ সহ-সম্বন্ধ ধনাত্মক।

(xi) x-আৰু –y অথবা –x আৰু y-ৰ ক্ষেত্ৰত r-ৰ মান ধনাত্মক

(xii) চলক দুটা স্বতন্ত্ৰ হ'লে r=0 হ'ব?

(xiii) x-আৰু y-চলকৰ ক্ষেত্ৰত $r = \frac{1}{3}$ হ'লে $x + \frac{1}{3}$ আৰু $y + \frac{1}{3}$ চলকৰ ক্ষেত্ৰত $r = 1$ হ'ব।

(xiv) x-আৰু y-চলকৰ ক্ষেত্ৰত $r = \frac{1}{2}$ হ'লে 2x আৰু 3y চলক দুটাৰ ক্ষেত্ৰত r = 1 হ'ব।

(xv) x-ৰ সলনি y আৰু y-ৰ সলনি × ধৰিলে r-ৰ মান পৰিৱৰ্তন হয়।

সমাধান ঃ

(i) মিছা কাৰণ r-ৰ মান –1 আৰু 1-ৰ মাজত থাকে।

(ii) মিছা, কাৰণ r-ৰ মান –1-তকৈ কম নহয়।

(iii) মিছা কাৰণ r=0 হ'লে চলক দুটাৰ মাজত ৰৈখিক সম্পৰ্ক নাথাকে।
সঁচা তথাপি চলক দুটা সহ-সম্বন্ধযুক্ত নহয় বুলি ক'ব নোৱাৰি।

(iv) সঁচা কাৰণ যেতিয়া y-ৰ সলনি— y-হয় তেতিয়া $(y - \bar{y})$ৰ সলনি $-(y - \bar{y})$ হয়।

(v) সঁচা, কাৰণ (4–y)-ক –(y–4) লিখিব পাৰি।

(vi) মিছা, কাৰণ মাত্ৰাৰ পৰিৱৰ্তন হ'লে r-ৰ মানৰ পৰিৱৰ্তন হয়। সেয়েহে r-ৰ মান 0.8 থাকিব।

(vii) মিছা, কিয়নো r-ৰ মান এককৰ লগত জড়িত নহয়— ই এটা শুদ্ধ সংখ্যা।

(viii) মিছা, কিয়নো খুব বেছি হ'লে r-ৰ মান –1 হ'ব

(ix) মিছা, r-এ অকল চলক দুটাৰ ৰৈখিক সম্পৰ্কৰ বুজ লয়।

(x) সঁচা, কাৰণ x আৰু y-ৰ চিন একেই।

(xi) সঁচা, কাৰণ x আৰু y-ৰ চিন বেলেগ। অৰ্থাৎ r-ৰ চিন ধনাত্মক হ'ব।

(xii) মিছা কাৰণ r = 0-এ চলক দুটাৰ মাজত ৰৈখিক সম্বন্ধ নাই বুলি সূচায়। চলক দুটা স্বতন্ত্ৰ নহ'বও পাৰে।

(xiii) মিছা কাৰণ r-ৰ মান মূলবিন্দু পৰিৱৰ্তন হ'লেও একেই থাকে, অৰ্থাৎ ইয়াত $r=\frac{1}{3}$ থাকিব।

(xiv) মিছা কাৰণ r-ৰ মান মাত্ৰাৰ পৰিৱৰ্তনৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল নহয়। অৰ্থাৎ $r=\frac{1}{2}$ থাকিব।

(xv) মিছা কাৰণ $r_{yx} = r_{xy}$ অৰ্থাৎ চলক দুটাৰ সাল-সলনি হ'লেও r-ৰ মান পৰিৱৰ্তন নহয়।

উদাহৰণ ঃ(i) দিয়া আছে r = 0.5, N = 25 একেই সমষ্টিৰ পৰা অইন এটা প্ৰতিদৰ্শ ল'লে r-ৰ মানৰ সীমা কি হ'ব?

(ii) যদি r = 0.7 আৰু N = 25 হয় r-ৰ মান বেছি তাৎপৰ্যপূৰ্ণ নে?

সমাধান ঃ (i) একেই সমষ্টিৰ পৰা অইন এটা প্ৰতিদৰ্শ ল'লে r-ৰ মানৰ সীমা হ'ব $r \pm PE(r)$

$$\text{অৰ্থাৎ, } PE(r)=0.6745\times\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}=\frac{1-0.25}{5}\times 0.6745$$

$$= 0.15\times 0.6745 = .101175$$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সীমা হ'ব 0.5 ± 0.10 অৰ্থাৎ 0.40 আৰু 0.60

(ii) ইয়াত, $PE(r)= 0.6745\times\frac{1-0.49}{5} = \frac{0.6745\times 0.51}{5}$

$$= 0.1349 \times 0.51$$

$$= .068799$$

এতিয়া $6PE(r) = 6\times .068799$

$$= .412794$$

$\because$ r= o.7> 6PE(E) i.e.> 0.41

$\therefore$ r-ৰ মান বেছি তাৎপৰ্যপূৰ্ণ।

প্ৰশ্নমালা

1. সহ-সম্বন্ধ বুলিলে কি বুজা? সহ-সম্বন্ধ অধ্যয়নৰ তাৎপৰ্য কি?
2. প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰ বুলিলে কি বুজা? বিভিন্ন ধৰণৰ সহ-সম্বন্ধ প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰে ব্যাখ্যা কৰা। প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰ সীমাবদ্ধতা কি?
3. সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ সংজ্ঞা দিয়া। সহ-সম্বন্ধ গুণাংকই কিহৰ নিৰ্দেশ দিয়ে? ইয়াৰ সীমা কি?
4. মন্তব্য দিয়া ঃ $r = +1, -1$ আৰু O
5. প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰ দ্বাৰাই সহ-সম্বন্ধৰ কি ধৰণে বুজ লোৱা হয়?
6. সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ লগত জড়িত অভিধাৰণাবোৰ কি কি? সহ-সম্বন্ধ গুণাংকৰ ধৰ্ম কি?
7. সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণৰ মূল কথাবোৰ কি কি? আৰু সহ-সম্বন্ধ অধ্যয়নৰ প্ৰয়োজনীয়তা কি?
8. সম্ভাব্য ক্ৰটি কি আৰু ইয়াৰ ব্যৱহাৰ কেনেকৈ কৰা হয়?
9. 9-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰি সহ-সম্বন্ধ সম্পৰ্কে কেনেকৈ মন্তব্য দাঙি ধৰিবা?
10. তলৰ তথ্যখিনি কি ধৰণৰ সহ-সম্বন্ধৰ বুজ লোৱা?

    (a) বস্তুৰ মূল আৰু চাহিদা (b) বস্তুৰ মূল্য আৰু যোগান ব্যৱস্থা (c) মানুহৰ উচ্চতা আৰু ওজন (d) আয় আৰু ব্যয় (e) বাইকৰ গতিবেগ আৰু দূৰত্ব, সময় স্থিৰ থাকিলে (f) আলুৰ মূল্য আৰু জোতাৰ মূল্য (g) বিজ্ঞাপন খৰচ আৰু বিক্ৰীৰ পৰিমাণ (h) বনুৱাৰ নিযুক্তি আৰু কাম শেষ কৰাৰ সময় (i) পেপ্‌ছিৰ চাহিদা আৰু ঋতু (j) মোবাইল ফোনৰ চাহিদা আৰু মূল্য (k) গেছৰ চাপ আৰু আয়তন (তাপমাত্ৰা একেই থাকিলে)।

    (ওপৰৰ কথাখিনি সাধাৰণ অভিধাৰণাৰ ওপৰত আধাৰিত)

উত্তৰ ঃ (a) ঋণাত্মক (b) ধনাত্মক (c) ধনাত্মক (d) ধনাত্মক (e) ধনাত্মক (f) সহ-সম্বন্ধহীনতা (g) ধনাত্মক (h) ঋণাত্মক (i) ধণাত্মক অথবা ঋণাত্মক (j) ঋণাত্মক (k) ঋণাত্মক।

11. তলৰ তথ্যখিনিৰ পৰা r-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(a)

x:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
y:	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	

(b)

x:	43	44	46	40	44	42	45	42	38	40	42	57
y:	29	31	19	18	19	27	27	29	41	30	26	10

(c) $\sum_{i=1}^{25} X_i = 125,\ \sum_{i=1}^{25} y_i = 100,\ \sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 650,\ \sum_{i=1}^{25} y_i^2 = 460,\ \sum_{i=1}^{25} x_i y_i = 508$

(উত্তৰ ঃ (a) 0.95 (b) – 0.733 (c) 0.207)

12. $N=25,\ \sum x=125,\ \sum x^2=650,\ \sum y=100,\ \sum y^2=460,\ \sum xy=508$
এযোৰ মান (8, 6) ৰ সলনি (6,8) লোৱা হৈছিল।
শুদ্ধ সহ-সম্বন্ধ গুণাংক নিৰ্ণয় কৰা।

(উত্তৰ ঃ 0.26)

13. r-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$N=10, \sum x=140, \sum y=150, \sum(x-10)^2=180, \sum(y-15)^2=215, \sum(x-10)(y-15)=60$

(উত্তৰ ঃ 0.92)

14. তলৰ তথ্যৰ পৰা N-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$r=1,\ \sum xy\text{-}330,\ \sum y^2=990$, x-ৰ প্ৰসৰণ =10, য'ত, $X = x - \bar{x}$
$y = Y - \bar{Y}$

(উত্তৰ ঃ N=11)

15. তলৰ তথ্যৰ পৰা r-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

x:	6	2	10	4	8
y:	9	11	?	8	7

$\bar{x} = 6,\ \bar{y} = 8$

16. তলৰ তথ্যৰ প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰ অংকন কৰি সহ-সম্বন্ধ ধনাত্মক নে ঋণাত্মক হ'ব প্ৰতিপন্ন কৰা।

উচ্চতা (ইঞ্চি) ঃ	62	72	68	58	65	70	66	63	60	72
ওজন (কিঃ গ্ৰাঃ)ঃ	50	65	63	50	54	60	61	55	54	65

(উত্তৰ ঃ ধনাত্মক)

17. x আৰু y চলকৰ 50 যোৰা আৰেক্ষণৰ তলৰ তথ্যখিনি পোৱা গ'ল—

$\bar{x} = 10,\ \sigma_x=3,\ \bar{y} = 6,\ \sigma_y=2,\ r= 0.3,$

পিছত দেখা গ'ল এযোৰ আৰেক্ষণ (x=10, y= 6) ভুলকৈ লোৱা হৈছে। ভুল আৰেক্ষণ যোৰ বাদ দি নতুন r-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(উত্তৰ ঃ 0.3)

18. x আৰু y-ৰ মানবোৰ এনে ধৰণৰ —

(a) {(x, y) = (10, 4), (11, 3), (12, 2), (14, 0), (8, 6)}
(b) {(x, y) = (15, 3), (20, 8), (25, 13), (30, 18)

এতেকে r-ৰ মান—

(i) – 1, (ii) 0.5 (iii) 1 (iv) 0

(a) আৰু (b) ঃ শুদ্ধ উত্তৰ বাছি উলিওৱা। তোমাৰ উত্তৰৰ ক্ষেত্ৰত সপক্ষে যুক্তি দাঙি ধৰা।

(উত্তৰ ঃ (a) r = –1 (b) r=+1)

* * *