

# 131/2

# 335(EB)

## 2018

## गणित

### द्वितीय प्रश्नपत्र

(कलन, रेखिक प्रोग्रामन, सदिश तथा त्रिविधीय ज्यामिति)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 50

निर्देश : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

- नोट :
- (i) इस प्रश्नपत्र में कुल आठ प्रश्न हैं।
  - (ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
  - (iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड करने हैं।
  - (iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
  - (v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
  - (vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Note : (i) There are in all eight questions in this question paper.

335(EB)

1

(Y-1)

P.T.O.

- (ii) All questions are compulsory.
- (iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted is clearly mentioned.
- (iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.
- (v) Start from the first question and proceed to the last.
- (vi) Do not waste time over a question you cannot solve.

I. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

(क) फलन  $2x + 3y = \sin x$ , तो  $\frac{dy}{dx}$  का मान ज्ञात कीजिए।

(ख)  $\int \frac{\sec x}{\sec x + \tan x} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

(ग) निम्नलिखित अवकल समीकरण की कोटि एवं घात बताइये :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

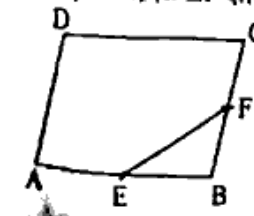
(घ) किसी  $\Delta ABC$  में सिद्ध कीजिए कि

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{O}$$

(ङ) चित्र में ABCD एक समान्तरचतुर्भुज है, जिसमें AB तथा

BC का मध्य बिन्दु क्रमशः E तथा F हैं। यदि  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,

$\vec{AD} = \vec{b}$  हो, तो सदिश  $\vec{EF}$  ज्ञात कीजिए।



1. Attempt any four parts of the following :

(a) Find the value of  $\frac{dy}{dx}$  of the function

$$2x + 3y = \sin x. \quad 1$$

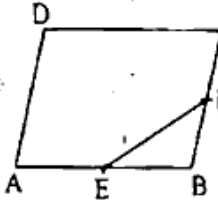
(b) Evaluate  $\int \frac{\sec x}{\sec x + \tan x} dx$  1

(c) State the order and degree of the differential equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[4]{y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad 1$$

(d) In any  $\Delta ABC$ , prove that  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{O}$  1

(e) In figure ABCD is a parallelogram, middle points of sides AB and BC are E and F. If  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{AD} = \vec{b}$ , find the vector  $\vec{EF}$ . 1



2. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

(क) प्रथम सिद्धान्त से  $\cos^{-1}x$  का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 2

(ख)  $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$  का मान ज्ञात कीजिए। 2

(ग) यदि  $\vec{a} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ ,  $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$  तो दर्शाइए कि सदिश  $(\vec{a} + \vec{b})$  और  $(\vec{a} - \vec{b})$  लम्बवर्त हैं। 2

(घ) फलन  $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx$  का मान ज्ञात कीजिए। 2

(ङ) अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1+y^2}{y}\right)$  को हल कीजिए। 2

2. Attempt any four parts of the following :

(a) Find the differential co-efficient of  $\cos^{-1}x$  from first principle. 2

(b) Evaluate  $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$ . 2

(c) If  $\vec{a} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ ,  $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ , show that vector  $(\vec{a} + \vec{b})$  and  $(\vec{a} - \vec{b})$  are perpendicular. <http://www.upboardonline.com> 2

(d) Evaluate  $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx$ . 2

(e) Solve the differential equation  $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1+y^2}{y}\right)$  2

3. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

(क) वक्र  $y = x^2 - 4x - 5$  के बिन्दु  $x = -2$  पर स्पर्श-रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। 2

(ख) फलन  $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$  का  $x$  के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए। 2

(ग) अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1+y^2}{x}\right) = 0$  को हल कीजिए। 2

(घ) सदिश  $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$  के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए, जिसका परिमाण 8 इकाई है। 2

(ङ) एक कण पर तीन बल  $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ,  $\hat{i} - 4\hat{j}$  और  $-3\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$  लग रहे हैं, सिद्ध कीजिए कि कण सन्तुलन की अवस्था में है। 2

3. Attempt any four parts of the following :
- (a) Find the equation of the tangent to the curve  $y = x^2 - 4x - 5$  at the point  $x = -2$ . 1
- (b) Evaluate  $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$  w.r.t.  $x$  2
- (c) Solve the differential equation  $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1+y^2}{x}\right) = 0$ . 2
- (d) Find a vector parallel to the given vector  $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ , and its magnitude is 8 unit. 2
- (e) Three forces  $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ,  $\hat{i} - 4\hat{j}$  and  $-3\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$  are acting on a particle. Prove that the particle will be in rest. 2

4. निम्नलिखित में से किन्हीं तीन खण्डों को हल कीजिए :
- (क) फलन  $\sin^{-1} 2x\sqrt{1-x^2}$  का  $x$  के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 3
- (ख)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$  का मान ज्ञात कीजिए। 3
- (ग) अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y + \sin y}$  को हल कीजिए। 3
- (घ) यदि  $\vec{OA} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$  तथा  $\vec{OB} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$  हो, तो  $\Delta OAB$  का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 3

4. Attempt any three parts of the following :
- (a) Find the differential co-efficient of the function  $\sin^{-1} 2x\sqrt{1-x^2}$  w.r.t.  $x$ . 3
- (b) Evaluate  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$  3
- (c) Solve the differential equation  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y + \sin y}$  3
- (d) If  $\vec{OA} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ,  $\vec{OB} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ , find the area of the  $\Delta OAB$ . 3

5. निम्नलिखित में से किन्हीं तीन खण्डों को हल कीजिए :

(क) परवलय  $y^2 = 16x$  के उस अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए जो  $x$ -अक्ष से  $60^\circ$  का कोण बनाता है। उस बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए, जहाँ पर यह अभिलम्ब है। 3

(ख) एक फल विक्रेता सेब व संतरे खरीदने में ₹ 500 की पूंजी लगा सकता है। उसकी दुकान में फलों की केवल 12 पेटियाँ ही रखी जा सकती हैं। सेब की एक पेटि ₹ 50 और संतरों की एक पेटि ₹ 25 की आती है। वह सेब की प्रति पेटि ₹ 10 और संतरों की एक पेटि ₹ 6 के लाभ से बेच सकता है। यह मानकर कि वह खरीदी हुई सभी पेटियाँ बेच सकता है। उसे सेब और संतरों की कितनी-कितनी पेटियाँ खरीदनी चाहिए ताकि उसे अधिकतम लाभ हो? 3

(ग) सिद्ध कीजिए कि  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{4}$  3

(घ) प्रदर्शित कीजिए कि सदिशों  $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$  और  $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$  के बीच का कोण  $60^\circ$  है। 3

5. Attempt any three parts of the following :

(a) To find the equation of the normal of the parabola  $y^2 = 16x$ , which cuts the axis of  $x$  at  $60^\circ$  angle. Also find the co-ordinate of the point where this normal is. 3

- (b) A fruit seller can invest ₹ 500 to purchase apples and oranges. Only 12 boxes of fruits can be placed in his shop. Cost of one box of apples is ₹ 50 and one box of oranges is ₹ 25. He can sell with a profit of ₹ 10 per box of apples and ₹ 6 per box of oranges. If he sells all the boxes, then how many boxes of apples and oranges should he purchase, so that he could get maximum profit? 3

(c) Prove that  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{4}$  3

- (d) Show that angle between vectors  $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$  and  $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$  is  $60^\circ$ . 3

6. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- (क) दर्शाइए कि एक निश्चित आयतन के शंकाकार डेरे के बनाने में कम से कम कपड़ा लगेगा जब उसकी ऊँचाई और आधार की त्रिज्या में अनुपात  $\sqrt{2} : 1$  हो। 4

(ख) सिद्ध कीजिए कि  $\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$  4

6. Attempt any one part of the following :

- (a) Show that a minimum cloths use to make definite volume of conical tent when height and radius of the base of the cone is in the ratio of  $\sqrt{2} : 1$ . 4

(b) Prove that  $\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$  4

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- (क) मध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए; यदि अन्तराल  $[a, b]$  में  $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ , जहाँ  $a = 1, b = 3$  है।  $f(c) = 0$  के लिए  $c \in (1, 3)$  को ज्ञात कीजिए। 4

- (ख) परवलय  $y^2 = 4ax$  और सरल रेखा  $y = 2ax$  द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

7. Attempt any one part of the following :

- (a) Verify the mean value theorem for the function  $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$  in the interval  $[a, b]$ , where  $a = 1, b = 3$ . Find  $f(c) = 0$  where  $c \in (1, 3)$ . 4

- (b) Find the area enclosed between parabola  $y^2 = 4ax$  and straight line  $y = 2ax$ . 4

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- (क) दर्शाइए कि रेखाएँ

$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5} \text{ तथा}$$

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5} \text{ सह-तलीय हैं।} 4$$

- (ख) ग्राफीय विधि द्वारा निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल कीजिए :  
निम्न अवरोधों के अन्तर्गत

$$x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$$

$$z = 3x + 4y \text{ का अधिकतमीकरण कीजिए।} 4$$

8. Attempt any one part of the following :

- (a) Show that the straight lines

$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5} \text{ and}$$

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5} \text{ are coplanar.} 4$$

- (b) Solve the linear programming problem by graphical method with the following restrictions :  
 $x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$  and  
maximize  $z = 3x + 4y$ . 4