

U.P.BOARD CLASS 12 MATHEMATICS PAPER 2-2018

उत्तर प्रदेश बोर्ड कक्षा 12 गणित द्वितीय प्रश्नपत्र - 2018

335 (EE)

गणित

(कलन, रैखिक प्रोग्रामन, सदिश तथा त्रिविमीय ज्यामिति)

समय: तीन घण्टे 15 मिनट)

(पूर्णांक: 50)

निर्देश: प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित है।

Instruction : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

निर्देश: (i) इस प्रश्न-पत्र में कुल आठ प्रश्न हैं।

(ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

(iv) प्रश्नों के अंक उसके सम्मुख अंकित हैं।

(v) प्रथम प्रश्न से प्रारम्भ कीजिए और अंतिम प्रश्न तक करते जाइए।

(vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Note : (i) There are in all eight questions in this question paper.

(ii) All questions are compulsory.

(iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.

(iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(v) Start from the first question and proceed to the last one.

(vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए।

(क) यदि किसी सरल रेखा की दिक् कोज्याएँ l, m, n हैं तो सिद्ध कीजिए कि: (1)

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

(ख) फलन $e^{\sin x^2}$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। (1)

(ग) फलन $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$ का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। (1)

(घ) $\int \frac{1 - \cos x}{\cos x(1 + \cos x)} dx$ का मान निकालिए। (1)

(ङ.) ABCDEF एक समषटभुज है, जिसमें A पर बल $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}$ तथा \overline{AF} कार्य करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि उनका परिणामी $3 \cdot \overline{AD}$ हैं। (1)

1. Attempt any four parts of the following :

(a) If l, m, n be the direction cosines of a straight line then prove that $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. (1)

(b) Find the differential coefficient of the function $e^{\sin x^2}$. (1)

(c) Find the differential equation of the function $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$ (1)

(d) Find the value of $\int \frac{1-\cos x}{\cos x(1+\cos x)} dx$. (1)

(e) If ABCDEF be a regular hexagon in which at A forces \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , \overline{AE} and \overline{AF} act together, then prove that their resultant is $3\overline{AD}$. (1)

2. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए:

(क) यदि $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 + \cos t)$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। (2)

(ख) $\int \sqrt{3-2x-2x^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। (2)

(ग) अवकल समीकरण $(1-x)dy - (3+y)dx = 0$ को हल कीजिए। (2)

(घ) सिद्ध कीजिए कि $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ परस्पर लम्ब हैं। (2)

(ङ.) फलन $\frac{\tan x}{3+2\tan x}$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। (2)

2. Attempt any four parts of the following :

(a) If $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 + \cos t)$, then find $\frac{dy}{dx}$ (2)

(b) Find the value of $\int \sqrt{3-2x-2x^2} dx$. (2)

(c) Solve the differential equation $(1-x)dy - (3+y)dx = 0$ (2)

(d) Prove that $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ are perpendicular to each other. (2)

(e) Obtain the differential coefficient of the function $\frac{\tan x}{3+2\tan x}$ w.r.t. 'x'. (2)

3. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए:

(क) $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ का समाकलन कीजिए। (2)

(ख) यदि दो मात्रक सदिशों \hat{a} और \hat{b} के बीच का कोण θ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}|$

(2)

(ग) अवकलन समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y + \sin y}$ को हल कीजिए। (2)

(घ) फलन $\cot(\cos^{-1} x)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। (2)

(ङ.) सिद्ध कीजिए कि: (2)

$$\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = 2\vec{a}$$

3. Attempt any four parts of the following : (2)

(a) Integrate : $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ (2)

(b) If θ be the angle between the unit vectors \hat{a} and \hat{b} then prove that $\sin \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}|\hat{a}-\hat{b}|$. (2)

(c) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y + \sin y}$ (2)

(d) Find the differential coefficients of the function $\cot(\cos^{-1} x)$ w.r.t. 'x'. (2)

(e) Prove that

$$\hat{i} \times (\bar{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\bar{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\bar{a} \times \hat{k}) = 2\bar{a}$$

4. निम्नलिखित में से किन्हीं तीन खण्डों को कल कीजिए:

(क) दिखाइए कि: (3)

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a}) + \bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = 0.$$

(ख) ग्राफीय विधि द्वारा निम्न अवरोधों के अन्तर्गत (3)

$$x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$$

$Z = 3x + 4y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

(ग) $\int \frac{\sec^2 x dx}{(1 + \tan x)(2 + \tan x)}$ को हल कीजिए। (3)

(घ) वक्र $x = at^2, y = 2at$ के किसी बिन्दु t पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए। (3)

4. Attempt any three parts of the following :

(a) $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a}) + \bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = 0$ (3)

(b) Find the maximum value of $Z = 3x + 4y$ by graphical method for the following restrictions, $x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$. (3)

(c) Solve : (3)

$$\int \frac{\sec^2 x dx}{(1 + \tan x)(2 + \tan x)}$$

(d) Find the equation of normal at any point t of the curve $x = at^2, y = 2at$. (3)

5. निम्नलिखित में से किन्हीं तीन खण्डों को हल कीजिए:

(क) अवकल समीकरण $(x+y)\frac{dy}{dx} = 1$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। (3)

(ख) $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx$ का मान कीजिए। (3)

(ग) उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु $(-2, 4, -5)$ से जाती हो तथा $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ के समान्तर हो। (3)

(घ) 6 को ऐसे दो भागों में विभाजित कीजिए कि दोनों भागों के घनों का योग निम्निष्ठ हो। (3)

5. Attempt any three parts of the following :

(a) Find the general solution of the differential equation $(x+y)\frac{dy}{dx}=1$. (3)

(b) Find the value of $\int \frac{x^2-1}{\sqrt{x^4+x^2+1}} dx$. (3)

(c) Find the Cartesian equation of that line which passes through the point $(-2, 4, -5)$ and which is parallel to the line $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$. (3)

(d) Divide 6 into two such parts such that the sum of cube of both parts be minimum. (3)

6. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए:

(क) फलन $f(x) = x^2 + 2x - 8$, $x \in [-4, 2]$ के लिए रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए। (4)

(ख) फलन $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ के $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। (4)

6. Attempt any one part of the following :

(a) Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = x^2 + 2x - 8$ for $x \in [-4, 2]$. (4)

(b) Find the differential coefficient of the function $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ w.r.t. $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए:

(क) सदिश विधि से निम्न रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1} \text{ और } \frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}. (4)$$

(ख) बिन्दुओं

$-2\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}$, $-3\hat{i} + 10\hat{j} - 9\hat{k}$ और $-5\hat{i} - 6\hat{j} - 6\hat{k}$ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। (4)

7. Attempt any one part of the following :

(a) By vector method, obtain the minimum distance between the following two lines :

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1} \text{ and } \frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}. (4)$$

(b) Find the equation of a plane which passes through the points.

$$-2\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}, -3\hat{i} + 10\hat{j} - 9\hat{k} \text{ and } -5\hat{i} - 6\hat{j} - 6\hat{k} (4)$$

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए:

(क) सिद्ध कीजिए कि (4)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{4}.$$

(ख) वक्रों $y^2 - x - 1 = 0$ और $y^2 + x - 1 = 0$ द्वारा घिरे हुए भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (4)

8. Attempt any one part of the following :

(a) Prove that

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{4}. \quad (4)$$

(b) Find the area enclosed between the curves $y^2 - x - 1 = 0$ and $y^2 + x - 1 = 0$. (4)
