

131/2 335(HQ)

2015

गणित

द्वितीय प्रश्नपत्र

(कलन, निर्देशांक ज्यामिति, रेखिक प्रोग्रामन, सदिश तथा
त्रिविमीय ज्यामिति)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट]

[पूर्णांक : 50

निर्देश : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र
पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Instruction : First 15 minutes are allotted for
the candidates to read the
question paper.

- नोट :
- इस प्रश्नपत्र में कुल आठ प्रश्न हैं ।
 - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
 - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड करने हैं ।

- प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।
- प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए ।
- जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।

Note : i) There are in all *eight* questions in this question paper.

ii) All questions are compulsory.

iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted is clearly mentioned. upboardonline.com

iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

v) Start from the first question and proceed to the last.

vi) Do not waste time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

क) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x^3-a^3}$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

ख) $(ax)^n + \left(\frac{b}{x}\right)^m$ का x के सापेक्ष अवकल

गुणांक ज्ञात कीजिए । 1

ग) $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

घ) A, B, C और D एक समतल के चार बिन्दु हैं तो

सिद्ध कीजिए कि $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{DA} = \vec{DC}$ । 1

ङ) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए । 1

1. Attempt any four parts of the following :

a) Find the value of $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x^3-a^3}$. 1

b) Find the differential coefficient of $(ax)^n + \left(\frac{b}{x}\right)^m$ with respect to x .

1

c) Find the value of $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$. 1

d) A, B, C and D are four points of a plane then prove that $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{DA} = \vec{DC}$. 1

e) Find the eccentricity of $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$. upboardonline.com 1

2. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $y = \cos^{-1} (2x\sqrt{1-x^2})$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = -2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$. 2 ✓

ख) $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

2

ग) सिद्ध करें कि उस परवलय का समीकरण जिसका शीर्ष और नाभि x -अक्ष पर मूल बिन्दु से क्रमानुसार a और a' की दूरियों पर हैं, है

$$y^2 = 4(a' - a)(x - a). \quad 2$$

घ) यदि \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} तथा \vec{d} एक चतुर्भुज की क्रमागत भुजाओं के सदिशों को निरूपित करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0$. 2

ङ) उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नियता $2x + y = 1$, नाभि $(1, 1)$ तथा उत्केन्द्रता $\sqrt{3}$ हैं । 2

2. Attempt any four parts of the following :

a) If $y = \cos^{-1} (2x\sqrt{1-x^2})$ then prove that $\frac{dy}{dx} = -2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$. 2

b) Find the value of $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx$. 2

c) Prove that the equation of that parabola whose vertex and focus lie on x -axis and distances from origin are a and a' respectively is

$$y^2 = 4(a' - a)(x - a). \quad 2$$

d) If \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} and \vec{d} represent the vectors of the sides of a quadrilateral respectively then prove that $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0$. 2

e) Find the equation of that hyperbola whose directrix $2x + y = 1$, focus $(1, 1)$ and eccentricity are $\sqrt{3}$. 2

3. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

क) समीकरण $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ के लिये अवकल समीकरण प्राप्त करें, जहाँ a स्वेच्छ अचर है । 2

ख) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int \frac{dx}{x [6 (\log x)^2 + 7 \log x + 2]} = \log \left| \frac{1 + \log x^2}{2 + \log x^3} \right| + c.$$

2

ग) $\int_1^3 \frac{\cos (\log x^2)}{x} dx$ का मान ज्ञात करें । 2

घ) उस इकाई सदिश को ज्ञात करें जो अक्षों से समान कोण बनाता है । 2

ङ) यदि परवलय $y^2 = 4ax$ की नाभीय जीवा के एक सिरे का निर्देशांक $(at^2, 2at)$ हो तो दूसरे सिरे के निर्देशांक ज्ञात करें । 2

3. Attempt any four parts of the following :

a) Find the differential equation of the equation $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ where a is arbitrary constant. 2

b) Prove that :

$$\int \frac{dx}{x [6 (\log x)^2 + 7 \log x + 2]} = \log \left| \frac{1 + \log x^2}{2 + \log x^3} \right| + c.$$

upboardonline.com 2

c) Find the value of

$$\int_1^3 \frac{\cos (\log x^2)}{x} dx. \quad 2$$

d) Find that unit vector which makes equal angle with axes. 2

e) If $(at^2, 2at)$ are the coordinates of one end of a focal chord of a parabola $y^2 = 4ax$, then find the coordinates of another end. 2

4. निम्नलिखित में से किन्हीं तीन खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $y = \sin (m \cos^{-1} x)$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(1 - x^2) y_2 - xy_1 + m^2 y = 0. \quad 3$$

ख) यदि किसी दीर्घवृत्त का लघु अक्ष OB है तथा F और F' नाभियाँ हैं तथा $\angle FBF'$ समकोण है, तो दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए । 3

ग) सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi/4} \log \left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x} \right) dx = \frac{\pi}{8} \log 2.$$

upboardonline.com 3

घ) सिद्ध कीजिए कि रेखा $y = x + a\sqrt{2}$ वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ को स्पर्श करती है और उसका स्पर्श बिन्दु $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$ है । 3

4. Attempt any three parts of the following :

a) If $y = \sin (m \cos^{-1} x)$, then prove that $(1 - x^2) y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$.

3

b) If OB is minor axis of any ellipse and F and F' are its foci and $\angle FBF'$ is a right angle then find the eccentricity of the ellipse. 3

c) Prove that

$$\int_0^{\pi/4} \log \left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x} \right) dx = \frac{\pi}{8} \log 2.$$

3

d) Prove that the straight line $y = x + a\sqrt{2}$ touches circle $x^2 + y^2 = a^2$ and point of contact is $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$.

3



5. निम्नलिखित में से किन्हीं तीन खण्डों को हल कीजिए :

क) दिखाइए कि

$$x \left[y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = y \frac{dy}{dx} \quad \text{का हल}$$

$$Ax^2 + By^2 = 1 \text{ है।} \quad 3$$

ख) बिन्दु A, B, C और D की स्थिति सदिश क्रमशः

$$\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, 2\hat{i} + 3\hat{j}, 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k} \text{ और}$$

$$-\hat{j} + \hat{k} \text{ हैं। सिद्ध कीजिए कि रेखा AB और CD समान्तर हैं।} \quad 3$$

ग) आलेख द्वारा निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या का हल कीजिए : upboardonline.com

निम्न अवरोधों

$$x + y \leq 40, 2x + y \leq 70, x \geq 0, y \geq 0$$

के अन्तर्गत $Z = 5x + 2y$ का अधिकतम तथा न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। 3

घ) रेखा युग्म $\frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ तथा

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{4} \text{ के मध्य कोण ज्ञात}$$

कीजिए। 3

5. Attempt any three parts of the following :

a) Show that the solution of

$$x \left[y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = y \frac{dy}{dx} \text{ is}$$

$$Ax^2 + By^2 = 1. \quad 3$$

b) Position vectors of points A, B, C and D are $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 3\hat{j}$, $3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ and $-\hat{j} + \hat{k}$ respectively. Prove that straight lines AB and CD are parallel. 3

c) Solve the following linear programming graphically :

Find the maximum and minimum values of $Z = 5x + 2y$ under the constraints $x + y \leq 40$, $2x + y \leq 70$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. 3

- d) Find the angle between straight lines $\frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ and $\frac{x+1}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{4}$. 3

6. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि upboardonline.com

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\cos x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \log(2+\sqrt{3}). \quad 4$$

ख) सरल रेखा $x = \frac{a}{2}$ द्वारा विभाजित वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के भागों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए। 4

6. Attempt any one part of the following :

a) Prove that upboardonline.com

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\cos x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \log(2+\sqrt{3}). \quad 4$$

- b) Find the ratio of the areas of portions of the circle $x^2 + y^2 = a^2$ is divided by straight line $x = \frac{a}{2}$. 4

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि $y = kx$ द्वारा दीर्घवृत्त

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

पर अन्तःखण्डित जीवा की लम्बाई $2ab \sqrt{\frac{1+k^2}{a^2 k^2 + b^2}}$ है। 4

ख) यदि परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $(at_1^2, 2at_1)$

पर खींची गयी अभिलम्ब परवलय से बिन्दु

$(at_2^2, 2at_2)$ पर फिर मिलता है, तो सिद्ध

कीजिए कि $t_1 + t_2 + \frac{2}{t_1} = 0$. 4

7. Attempt any *one* part of the following :

- a) Prove that the length of a chord intercepted by the straight line $y = kx$ on the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ is } 2ab \sqrt{\frac{1+k^2}{a^2k^2+b^2}}.$$

upboardonline.com 4

- b) If the normal at the point $(at_1^2, 2at_1)$ of a parabola $y^2 = 4ax$ meets again the parabola at point $(at_2^2, 2at_2)$, then prove that $t_1 + t_2 + \frac{2}{t_1} = 0$. 4

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) बिन्दु $(3, 4)$ पर फलन $\log\left(\frac{x^2+12}{7x}\right)$ के लिये रोले के प्रमेय को सत्यापित करें। 4

- ख) तीन बिन्दुओं जिनकी स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{i} + \hat{j}$, $2\hat{j} - 3\hat{k}$ और $3\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}$ हैं, से जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करें। 4

8. Attempt any *one* part of the following :

- a) Verify the Rolle's theorem for the function $\log\left(\frac{x^2+12}{7x}\right)$ at point $(3, 4)$. 4

- b) Find the equation of a plane which passes through three points whose position vectors are $\hat{i} + \hat{j}$, $2\hat{j} - 3\hat{k}$ and $3\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}$. 4

335(HQ) - 1,50,000