

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 16

अनुक्रमांक

नाम

131/2 335(WB)**2016****गणित**

द्वितीय प्रश्नपत्र

(कलन, निर्देशांक ज्यामिति, रेखिक प्रोग्रामन, सदिश तथा
त्रिविमीय ज्यामिति)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 50

निर्देश : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र
पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।*Instruction* : First 15 minutes are allotted for
the candidates to read the
question paper.

- नोट :
- इस प्रश्नपत्र में कुल आठ प्रश्न हैं ।
 - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
 - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड करने हैं ।

642191

| Turn over

335(WB)

2

- प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।
- प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए ।
- जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।

- Note* :
- There are in all *eight* questions in this question paper.
 - All questions are compulsory.
 - In the beginning of each question, the number of parts to be attempted is clearly mentioned.
 - Marks allotted to the questions are indicated against them.
 - Start from the first question and proceed to the last.
 - Do not waste time over a question you cannot solve.

642191

1. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

क) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta/2)}{\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

ख) $\int \frac{x^2}{x^2-9} dx$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

ग) उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की माप 2 इकाई है और यह लम्ब x -अक्ष से 60° का कोण बनाता है । 1

घ) बिन्दुओं $(-1, -3)$ एवं $(2, 5)$ को मिलाने वाली रेखा को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए । 1

ङ) सदिशों $2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ और $6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए । 1

1. Attempt any four parts of the following :

a) Evaluate $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta/2)}{\theta}$. 1

b) Evaluate $\int \frac{x^2}{x^2-9} dx$. 1

c) Find the equation of the line on which the perpendicular drawn from the origin is of 2 units in length and makes an angle of 60° with x -axis. 1

d) Find the equation of the circle drawn on the line joining the points $(-1, -3)$ and $(2, 5)$ as diameter. 1

e) Find the angle between the vectors $2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ and $6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$. 1

2. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $y = \tan^{-1} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)$, तो दर्शाइए कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2} \quad 2$$

ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2+y^2}{a^2+x^2}$ को हल

कीजिए । 2

ग) यदि D और E त्रिभुज ABC की भुजाओं AB और AC के मध्य बिन्दु हों, तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{BE} + \vec{DC} = \frac{3}{2} \vec{BC}$. 2

घ) उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी उत्केन्द्रता 2, एक नाभि $(1, 1)$ और संगत नियता $x + y + 1 = 0$ हो । 2

ङ) यदि फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & , x \neq 2 \\ k & , x = 2 \end{cases}$

बिन्दु $x = 2$ पर संतत है, तो k का मान ज्ञात कीजिए । 2

2. Attempt any four parts of the following :

a) If $y = \tan^{-1} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)$, show that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2} \quad 2$$

b) Solve the differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2+y^2}{a^2+x^2} \quad 2$$

c) If D and E be the middle points of the sides AB and AC of the triangle ABC , prove that $\vec{BE} + \vec{DC} = \frac{3}{2} \vec{BC}$. 2

d) Find the equation of the hyperbola whose eccentricity is 2, one focus is $(1, 1)$ and the corresponding directrix is $x + y + 1 = 0$. 2

e) If the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & , x \neq 2 \\ k & , x = 2 \end{cases}$$

is continuous at $x = 2$, find the value of k . 2

3. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

क) बिन्दु 't' पर वक्र $x = at^2$, $y = 2at$ के स्पर्शों का समीकरण ज्ञात कीजिए । 2

ख) $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$ का समाकलन कीजिए । 2

ग) उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि $(-8, -2)$ और नियता $y = 2x - 9$ हो । 2

घ) यदि बिन्दुओं $(1, -8, a)$ और $(-3, -5, 4)$ के बीच की दूरी 5 इकाई हो तो, a का मान ज्ञात कीजिए । 2

ङ) यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, तो $\vec{a} \times \vec{b}$ का मान ज्ञात कीजिए । 2

3. Attempt any four parts of the following :

a) Find the equation of tangent to the curve $x = at^2$, $y = 2at$ at point 't'. 2

b) Integrate $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$. 2

c) Find the equation of the parabola whose focus is $(-8, -2)$ and directrix is $y = 2x - 9$. 2

d) If the distance between the points $(1, -8, a)$ and $(-3, -5, 4)$ is 5 units, find the value of a . 2

e) If $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, find $\vec{a} \times \vec{b}$. 2

4. निम्नलिखित में से किन्हीं तीन खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि वृत्तों $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y = 0$ और

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y = 0 \text{ एक-दूसरे}$$

को स्पर्श करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$f_1 g_2 = f_2 g_1. \quad 3$$

ख) यदि $y = x^{x^{x^{\dots \infty}}}$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y \log x}. \quad 3$$

ग) सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x} dx = \frac{\pi^2}{4}. \quad 3$$

घ) दीर्घवृत्त $4x^2 + 9y^2 = 144$ की नाभियाँ एवं

उत्क्रेन्द्रता ज्ञात कीजिए । 3

4. Attempt any *three* parts of the following :

a) If the circles

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y = 0 \text{ and}$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y = 0 \text{ touch}$$

each other, prove that $f_1 g_2 = f_2 g_1$.

3

b) If $y = x^{x^{x^{\dots \infty}}}$, prove that

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y \log x}. \quad 3$$

c) Prove that

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x} dx = \frac{\pi^2}{4}. \quad 3$$

d) Find the foci and eccentricity of the

ellipse $4x^2 + 9y^2 = 144$. 3

5. निम्नलिखित में से किन्हीं तीन खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि उस त्रिभुज का क्षेत्रफल, जिसके शीर्षों के स्थिति सदिश \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} हैं,

$$\frac{1}{2} | \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} | \text{ होगा।} \quad 3$$

ख) $\sin \theta + \cos \theta$ का महत्तम मान ज्ञात कीजिए। 3

ग) अवकल समीकरण

$$y dx - (x + 2y^2) dy = 0 \text{ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।} \quad 3$$

घ) वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें समतल $x + y - z = \frac{1}{5}$ बिन्दुओं $(3, 1, 4)$ और $(4, 2, 5)$ को मिलाने वाली रेखा को विभाजित करता है। 3

5. Attempt any *three* parts of the following :

a) Prove that the area of the triangle, the position vectors of whose vertices are \vec{a} , \vec{b} and \vec{c} , is

$$\frac{1}{2} | \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} |. \quad 3$$

b) Find the maximum value of $\sin \theta + \cos \theta$. 3

c) Find the general solution of the differential equation

$$y dx - (x + 2y^2) dy = 0. \quad 3$$

d) Find the ratio in which the plane $x + y - z = \frac{1}{5}$ divides the line joining the points $(3, 1, 4)$ and $(4, 2, 5)$. 3

6. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) दर्शाइए कि एक निश्चित आयतन के शंक्वाकार डेरे के निर्माण में कम से कम कपड़ा लगेगा जब उसकी ऊँचाई और आधार की त्रिज्या का अनुपात $\sqrt{2} : 1$ है । 4

ख) वक्र $x^2 = 4y$ और रेखा $x = 4y - 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 4

6. Attempt any one part of the following :

a) Show that the cloth required to construct a conical tent of given volume is minimum when the ratio of its height and the radius of the base is $\sqrt{2} : 1$. 4

b) Find the area enclosed between the curve $x^2 = 4y$ and the line $x = 4y - 2$. 4

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) लेखाचित्रीय विधि से $Z = 150x + 250y$ का निम्नलिखित शर्तों के अधीन अधिकतम मान ज्ञात कीजिए :

$$x + y \leq 24$$

$$2x + y \leq 32$$

$$x, y \geq 0.$$

4

ख) यदि रेखा $lx + my + n = 0$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर अभिलम्ब हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$. 4

7. Attempt any one part of the following :

a) By graphical method find the maximum value of $Z = 150x + 250y$ subject to the constraints :

$$x + y \leq 24$$

$$2x + y \leq 32$$

$$x, y \geq 0.$$

4

- b) If the straight line $lx + my + n = 0$ is normal to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, prove that $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$.

4

निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) उन सभी सरल रेखाओं के लिए, जो मूल बिन्दु से इकाई दूरी पर हैं, अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए ।

4

- ख) सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(4, -2, 5)$ और समतलों $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 7\hat{j} + 2\hat{k}) = 15$ एवं $\vec{r} \cdot (4\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 16$ की प्रतिच्छेदन रेखा से गुजरने वाले समतल का समीकरण $\vec{r} \cdot (201\hat{i} - 136\hat{j} - 73\hat{k}) = 897$ है ।

4

8. Attempt any one part of the following :
- a) Find the differential equation for all those straight lines which are at unit distance from the origin. 4
- b) Prove that the equation of the plane passing through the point $(4, -2, 5)$ and the line of intersection of the planes $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 7\hat{j} + 2\hat{k}) = 15$ and $\vec{r} \cdot (4\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 16$ is $\vec{r} \cdot (201\hat{i} - 136\hat{j} - 73\hat{k}) = 897$.

4

335(WB) - 1,50,000