

131

324 (EX)

2024

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट ]

[पूर्णांक : 100

निर्देश :

- (i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।
- (ii) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं ।
- (iii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
- (iv) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं ।
- (v) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।
- (vi) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए ।
- (vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।

1. सभी खण्ड कीजिए :

प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए ।

(क) यदि आव्यूह  $A$  और  $B$  के क्रम क्रमशः  $p \times q$  और  $q \times r$  हैं, तो  $AB$  का क्रम है :(i)  $p \times r$ (ii)  $r \times p$ (iii)  $q \times p$ 

(iv) इनमें से कोई नहीं

1

(ख) किस बिन्दु पर रेखा  $y = x + 1$  की ढाल वक्र  $y^2 = 4x$  की ढाल के बराबर होगी ?

(i) (1, 2)

(ii) (2, 1)

(iii) (1, -2)

(iv) (-1, 2)

1

324 (EX)

1

P.T.O.

(ग) समाकलन  $\int \sqrt{1 + \sin 2x} dx$  का मान है :

(i)  $\sin x + \cos x + c$

(ii)  $\sin x - \cos x + c$

(iii)  $\cos x - \sin x + c$

(iv)  $-\cos x - \sin x + c$

(घ) यदि सदिश  $5\hat{i} - \lambda\hat{j} + 2\hat{k}$  और  $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$  एक दूसरे पर लम्ब हैं, तो  $\lambda$  का मान है :

(i) 3

(ii) 4

(iii) 6

(iv) 0

(ङ) अवकल समीकरण  $\frac{d^2y}{dx^2} = 4\sqrt{x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$  का घात है :

(i) 4

(ii) 3

(iii) 1

(iv) 2

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) दर्शाइए कि फलन  $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1 & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$   $x = 0$  पर संतत नहीं है ।

(ख)  $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$  का मुख्य मान ज्ञात कीजिए ।

(ग) यदि  $y = Ae^x + B$  है, तो सिद्ध कीजिए कि  $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$ , जहाँ  $A$  तथा  $B$  अचर हैं ।

(घ) अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$  को हल कीजिए ।

(ङ) किसी दौड़ में  $A$  के जीतने की प्रायिकता  $\frac{1}{3}$  है तथा  $B$  के जीतने की प्रायिकता  $\frac{1}{4}$  है । इस दौड़ में,  $A$  और  $B$  में से कोई न जीत पाए, इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

3. सभी खण्ड कीजिए :

(क) प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय  $N$  पर एक सम्बन्ध  $R = \{(a, b) : a, b \in N \text{ तथा } a = b^2\}$  से व्यक्त किया गया है । क्या  $(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$  सत्य है ? एक उदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए ।

(ख) यदि  $y = \frac{x^2 + 3x + 4}{e^x \cos x}$  है, तो  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए ।

(ग) अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} = e^x \sin x$  को हल कीजिए । 2

(घ) एक पासे को एक बार उछाला जाता है । पासे पर प्राप्त संख्या जो 3 का अपवर्त्य है, को E से, और पासे पर प्राप्त संख्या जो सम है, को F से, निरूपित किया गया है । क्या E तथा F स्वतंत्र घटनाएँ हैं ? 2

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) अवकलन कीजिए :  $y = (\cos x)^{\sin x}$  2

(ख) किसी लीप ईयर (अधि वर्ष) में 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । 2

(ग) बिन्दु (5, 2, -4) से जाने वाली तथा सदिश  $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$  के समान्तर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए । 2

(घ)  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$  का मान ज्ञात कीजिए । 2

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  से  $B = \{1, 4, 5\}$  में सम्बन्ध R “छोटा है” हो, तो R से संबंधित क्रमित युग्मों का समुच्चय ज्ञात कीजिए तथा B से A तक सम्बन्ध को परिभाषित कीजिए । 5

(ख)  $x, y, z$  के मानों को ज्ञात कीजिए, यदि आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ , समीकरण  $A'A = I$  को सन्तुष्ट करता है । 5

(ग)  $x$  के सापेक्ष  $y = x^x + (\cos x)^{\tan x}$  का अवकलन कीजिए । 5

(घ) निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत  $z = x + 3y$  का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए : 5

$$x + y \leq 8, 3x + 5y \geq 15$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

(ङ) रेखाओं  $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$  और  $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$  के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए । 5

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) ऐसी दो धन संख्याओं को ज्ञात कीजिए जिनका योगफल 15 है और जिनके वर्गों का योगफल न्यूनतम है । 5

(ख) वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 5

(ग) सदिशों  $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$  और  $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$  पर लम्ब इकाई सदिश ज्ञात कीजिए, तथा उनके बीच के कोण की ज्या (sine) भी ज्ञात कीजिए। 5

(घ) यदि  $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ , तो सिद्ध कीजिए कि  $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$  जहाँ  $n \in \mathbb{N}$ . 5

(ङ) एक प्रश्न को A तथा B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः  $\frac{1}{2}$  और  $\frac{1}{3}$  हैं। यदि दोनों स्वतंत्र रूप से प्रश्न हल करने का प्रयास करते हैं, तो (i) उनमें से कोई भी प्रश्न हल न कर पाए, (ii) कम-से-कम एक उसे हल कर ले, की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

7. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) यदि आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$  है, तो  $A^{-1}$  ज्ञात कीजिए। 8

(ख) निम्न समीकरणों के निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए : 8

$$2x + 3y + 3z = 5$$

$$x - 2y + z = -4$$

$$3x - y - 2z = 3$$

8. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) अवकल समीकरण को हल कीजिए : 8

$$(\tan^{-1} y - x) dy = (1 + y^2) dx$$

(ख) अवकल समीकरण को हल कीजिए : 8

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2, \text{ यदि } y = 1 \text{ जबकि } x = 1$$

9. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) मान ज्ञात कीजिए : 8

$$\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x \tan^{-1}(\sin x) dx = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

**Instructions :**

- (i) First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.
- (ii) There are in all **nine** questions in this question paper.
- (iii) **All** questions are compulsory.
- (iv) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.
- (v) Marks allotted to the questions are indicated against them.
- (vi) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- (vii) Do not waste your time over a question you cannot solve.

**1. Do all parts :**

Select the correct option of each part and write it on your answer book.

- (a) If orders of matrices A and B are  $p \times q$  and  $q \times r$  respectively, then order of AB is : 1
- (i)  $p \times r$  (ii)  $r \times p$   
(iii)  $q \times p$  (iv) None of these
- (b) At which point is the slope of the line  $y = x + 1$  equal to the slope of the curve  $y^2 = 4x$  ? 1
- (i) (1, 2) (ii) (2, 1)  
(iii) (1, -2) (iv) (-1, 2)
- (c) The value of the integral  $\int \sqrt{1 + \sin 2x} dx$  is : 1
- (i)  $\sin x + \cos x + c$  (ii)  $\sin x - \cos x + c$   
(iii)  $\cos x - \sin x + c$  (iv)  $-\cos x - \sin x + c$
- (d) If vectors  $5\hat{i} - \lambda\hat{j} + 2\hat{k}$  and  $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$  are perpendicular to each other, then the value of  $\lambda$  is : 1
- (i) 3 (ii) 4  
(iii) 6 (iv) 0
- (e) The degree of the differential equation  $\frac{d^2y}{dx^2} = 4\sqrt{x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$  is : 1
- (i) 4 (ii) 3  
(iii) 1 (iv) 2

2. Do **all** the parts :

(a) Show that the function

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x=0 \end{cases} \text{ is not continuous at } x=0. \quad 1$$

(b) Find the principal value of  $\sin^{-1} \left( \sin \left( \frac{7\pi}{4} \right) \right)$ . 1

(c) If  $y = Ae^x + B$  where  $A, B$  are constants, then show that  $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$ . 1

(d) Solve the differential equation  $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$ . 1

(e) The probability of  $A$  winning the race is  $\frac{1}{3}$  and that of  $B$  is  $\frac{1}{4}$ . In this race, find the probability that neither  $A$  nor  $B$  can win the race. 1

3. Do **all** the parts :

(a)  $R$  is a relation on a set of natural numbers  $N$  defined by

$$R = \{(a, b) : a, b \in N \text{ and } a = b^2\}.$$

Is  $(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$  true? Justify it by one example. 2

(b) If  $y = \frac{x^2 + 3x + 4}{e^x \cos x}$ , then find  $\frac{dy}{dx}$ . 2

(c) Solve the differential equation  $\frac{dy}{dx} = e^x \sin x$ . 2

(d) A die is thrown once. The number on the die is a multiple of 3 is denoted by  $E$ , and the number on the die is even is denoted by  $F$ . Are  $E$  and  $F$  independent events? <https://www.upboardonline.com> 2

4. Do **all** the parts :

(a) Differentiate :  $y = (\cos x)^{\sin x}$  2

(b) Find the probability of 53 Sundays in a leap year. 2

(c) Find the vector equation of the line which passes through the point  $(5, 2, -4)$  and parallel to the vector  $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ . 2

(d) Find the value of :

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) \quad 2$$

5. Do **all** the parts :

(a) If  $R$  is the relation "less than" from  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  to  $B = \{1, 4, 5\}$ , find the set of ordered pairs corresponding to  $R$ . Also define this relation from  $B$  to  $A$ . 5

(b) Find the values of  $x, y, z$  if the matrix  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$  satisfies the equation  $A'A = I$ . 5

(c) Differentiate :  $y = x^x + (\cos x)^{\tan x}$  with respect to  $x$ . 5

(d) Find the minimum value of  $z = x + 3y$  under the following constraints :  
 $x + y \leq 8, 3x + 5y \geq 15$   
 $x \geq 0, y \geq 0$ . 5

(e) Find the shortest distance between the lines  
 $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$  and  $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$ . 5

6. Do **all** the parts :

(a) Find two positive numbers whose sum is 15 and the sum of their squares is minimum. 5

(b) Find the area of the circle  $x^2 + y^2 = a^2$ . 5

(c) Find the perpendicular unit vectors on the vectors  $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$  and  $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$  and find the sine of the angle between them. 5

(d) If  $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ , prove that  $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$  where  $n \in N$ . 5

(e) The probabilities of solving a question by  $A$  and  $B$  independently are  $\frac{1}{2}$  and  $\frac{1}{3}$  respectively. If both of them try to solve it independently, find the probability that

(i) none of them solved it.

(ii) at least one of them solved it. 5

7. Do any **one** part :

(a) If matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ , then find  $A^{-1}$ . 8

(b) Solve the system of equations by matrix method : 8

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 3z &= 5 \\ x - 2y + z &= -4 \\ 3x - y - 2z &= 3 \end{aligned}$$

8. Do any **one** part :

(a) Solve the differential equation :

$$(\tan^{-1} y - x) dy = (1 + y^2) dx$$

(b) Solve the differential equation :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2, \text{ if } y = 1 \text{ when } x = 1$$

9. Do any **one** part :

(a) Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

(b) Prove that :

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x \tan^{-1}(\sin x) dx = \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

<https://www.upboardonline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से