अनुक्रमांक

नाम

131

324(FJ)

2022

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

निर्देश : i) इस प्रश्नपत्र में कुल **नौ** प्रश्न हैं।

ii) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं।

iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टत: लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

i) There are in all *nine* questions in this question paper.

ii) *All* questions are compulsory.

iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान बराबर है

(i) π (ii) $-\pi/3$

(iii) $\pi/3$ (iv) $2\pi/3$. 1

ख) मान लीजिए कि समुच्चय N में

$R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध है तो

(i) $(2, 4) \in R$

(ii) $(3, 8) \in R$

(iii) $(8, 6) \in R$

(iv) $(6, 8) \in R$ 1

ग) 3 × 3 कोटि के ऐसे आव्यूहों की कुल संख्या कितनी होंगी जबकि प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है ?

(i) 512 (ii) 81

(iii) 18 (iv) 27 1

घ) कौन-सा फलन $x = 1$ पर अवकलनीय नहीं है ?

(i) $f(x)=|x-2|$

(ii) $f(x)=|x-1|$

(iii) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$

(iv) $f(x)=|x+1|$ 1

ङ) भुजा में 3% वृद्धि के कारण भुजा x cm के घन के आयतन में सन्निकट परिवर्तन है

(i) $0{\cdot}06\ x^3\text{cm}^3$

(ii) $0{\cdot}6\ x^3\text{cm}^3$

(iii) $0{\cdot}09\ x^3\text{cm}^3$

(iv) $0{\cdot}9\ x^3\text{cm}^3$ 1

1. Attempt *all* parts of the following :

a) Value of $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ is

(i) π (ii) $-\pi/3$

(iii) $\pi/3$ (iv) $2\pi/3$ 1

b) A relation $R=\{(a,b): a=b-2, b>6\}$ is defined on the set N. Then

(i) $(2,4)\in R$

(ii) $(3,8)\in R$

(iii) $(8,6)\in R$

(iv) $(6,8)\in R$ 1

c) How many total number of matrices of order 3 × 3 are there whose entries are 0 or 1 ?

(i) 512 (ii) 81

(iii) 18 (iv) 27 1

d) Which function is not differential on $x = 1$?

(i) $f(x)=|x-2|$

(ii) $f(x)=|x-1|$

(iii) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$

(iv) $f(x)=|x+1|$ 1

e) What is the approximate change in the volume of a cube whose side is x cm, caused by increase of 3% in the side ?

(i) $0{\cdot}06\ x^3\text{cm}^3$

(ii) $0{\cdot}6\ x^3\text{cm}^3$

(iii) $0{\cdot}09\ x^3\text{cm}^3$

(iv) $0{\cdot}9\ x^3\text{cm}^3$ 1

2. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) $\int \frac{dx}{1+\tan x}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

ख) वक्र $y^2 = 4x$, y-अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 1

ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y-2}$ $(y \neq 2)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 1

घ) सदिशों $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 1

ङ) यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं जहाँ $P(A) = 0 \cdot 3$, $P(B) = 0 \cdot 6$ हों तो $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए। 1

2. Attempt *all* parts of the following :

a) Evaluate $\int \frac{dx}{1+\tan x}$. 1

b) Find the area of the region bounded by the curve $y^2 = 4x$, y-axis and line $y = 3$. 1

c) Find the general solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y-2}$ $(y \neq 2)$. 1

d) Find the angle between the vectors $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$. 1

e) If A and B are two independent events where $P(A) = 0 \cdot 3$, $P(B) = 0 \cdot 6$ then find $P(A \cap B)$. 1

3. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों के समुच्चय Z में $R = \{(a, b) : 2$, ($a - b$) को विभाजित करती है ; द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध है। 2

ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ तो दिखाइए $|2A| = 4|A|$. 2

ग) x के सापेक्ष $x^{\sin x}$ का अवकल **गुणांक** ज्ञात कीजिए ($x > 0$). 2

घ) किस अन्तराल में फलन $f(x) = x^2 - 4x + 6$ वर्धमान है ? 2

3. Attempt *all* parts of the following :

a) Prove that a relation $R = \{(a, b) : 2$ divides ($a - b$) $\}$ on the set of integers Z, is an equivalence relation.

b) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ then show that $|2A| = 4|A|$. 2

c) Find differential coefficient of $x^{\sin x}$ with respect to x ($x > 0$). 2

d) In which interval is the function $f(x) = x^2 - 4x + 6$ increasing ? 2

4. निम्नलिखित **सभी खण्डों** को हल कीजिए :

क) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

ख) बिन्दुओं (–2, 4, –5) और (1, 2, 3) को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए। 2

ग) निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 9y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए :
$x + 3y \leq 60$, $x + y \geq 10$, $x \leq y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. 2

घ) एक परिवार में दो बच्चे हैं, इनमें कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की क्या प्रायिकता है ? 2

4. Attempt *all* the parts of the following :

a) Evaluate $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$. 2

b) Find direction cosines of the line joining the points (–2, 4, –5) and (1, 2, 3). 2

c) Find the minimum value of $Z = 3x + 9y$ under the following restrictions : $x + 3y \leq 60$, $x + y \geq 10$, $x \leq y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. 2

d) There are two children in a family, in which at least one child is boy. What is the probability that both children are boy ? 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $P(x) = X$ के समस्त उपसमुच्चयों का समुच्चय है जहाँ $X \neq \phi$, एक सम्बन्ध $R, P(x)$ पर इस प्रकार परिभाषित है कि ARB यदि और केवल यदि $A \subset B$ है। सिद्ध कीजिए कि R तुल्यता सम्बन्ध नहीं है। 5

ख) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & 1\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$A^3-6A^2+7A+2I=0$. 5

ग) यदि $(\cos x)^y=(\cos y)^x$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 5

घ) $f(x)=x+\sin 2x$ का $[0, 2\pi]$ पर उच्चतम तथा निम्नतम मान ज्ञात कीजिए। 5

ङ) $(255)^{1/4}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। 5

च) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix}(y+z)^2 & xy & zx\\xy & (x+z)^2 & yz\\xz & yz & (x+y)^2\end{vmatrix}=2xyz(x+y+z)^3$$

5

5. Attempt any *five* parts of the following :

a) If $P(x)=$ set of all subsets of X, where $X\neq\phi$, a relation R is defined on $P(x)$ as ARB if and only if $A\subset B$. Prove that R is not an equivalence relation. 5

b) If $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & 1\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ then prove that

$A^3-6A^2+7A+2I=0$. 5

c) If $(\cos x)^y=(\cos y)^x$ then find $\frac{dy}{dx}$. 5

d) Find the maximum and minimum values of $f(x)=x+\sin 2x$ on $[0, 2\pi]$. 5

e) Find approximate value of $(255)^{1/4}$. 5

f) Prove that

$$\begin{vmatrix}(y+z)^2 & xy & zx\\xy & (x+z)^2 & yz\\xz & yz & (x+y)^2\end{vmatrix}=2xyz(x+y+z)^3$$

5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** खण्डों को हल कीजिए :

क) $\int\left(\cot\sqrt{x}+\tan\sqrt{x}\right)dx$ ज्ञात कीजिए। 5

ख) रेखाओं $\vec{r}=\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ और $\vec{r}=3\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

ग) अवकल समीकरण

$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x$ का हल ज्ञात कीजिए। 5

घ) आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत हल कीजिए :

$x+y \le 8,\ \ x \le 5,\ y \le 5,\ x+y \ge 4,$
$x \ge 0,\ y \ge 0$

$Z = 10(x - 7y + 190)$ का न्यूनतमीकरण कीजिए। 5

ङ) एक बक्से में दस कार्ड 1 से 10 तक पूर्णांक लिखकर रखे गये हैं। उन्हें अच्छी तरह मिलाया गया तथा बक्से से एक कार्ड यादृच्छया निकाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाले गये कार्ड पर संख्या 3 से अधिक है, तथा इस संख्या सम हो। 5

च) यदि तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4$ तथा $|\vec{c}|=5$ और इनमें से प्रत्येक, अन्य दो सदिशों के योगफल पर लम्बवत् हैं तो $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ को ज्ञात कीजिए। 5

6. Attempt any *five* parts of the following :

a) Evaluate :

$$\int \left(\cot\sqrt{x} + \tan\sqrt{x}\right) dx$$ 5

b) Find the shortest distance between the lines

$\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ and

$\vec{r} = 3\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$. 5

c) Find the solution of the differential equation

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x.$$ 5

d) Solve the following linear programming problem by graphical method, under the following constraints :

$x+y \le 8,\ \ x \le 5,\ y \le 5,\ x+y \ge 4,$
$x \ge 0,\ y \ge 0$. Minimize
$Z = 10(x - 7y + 190)$. 5

e) Ten cards numbered 1 to 10 are put in a box. The cards are mixed in well manner and one card is drawn at random from the box. Find the probability that the number appeared on the card is greater than 3 and the number is an even number. 5

f) If there are three vectors $\vec{a}, \vec{b}$ and $\vec{c}$ such as $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ and $|\vec{c}|=5$ and each vector is perpendicular to the sum of other two vectors, find $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$. 5

7. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

ख) $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ के मध्य वक्र $y = \cos x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 8

7. Attempt any *one* part of the following :

a) Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}.$$ 8

b) Find the area of the region bounded by $y = \cos x$, $x = 0$ and $x = 2\pi$. 8

8. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) निम्नलिखित समीकरण निकाय

$3x - 2y + 3z = 8$

$2x + y - z = 1$

$4x - 3y + 2z = 4$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8

ख) i) यदि $y = e^{a\cos^{-1}x}$, $-1 \le x \le 1$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0.$$ 4

ii) यदि $x = a(\cos t + t\sin t)$ और $y = a(\sin t - t\cos t)$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए। 4

8. Attempt any *one* part of the following :

a) Find the solution by matrix method of the following system of equations :

$3x-2y+3z=8$

$2x+y-z=1$

$4x-3y+2z=4.$ 8

b) i) If $y=e^{a\cos^{-1}x}, -1\leq x\leq 1$ then prove that

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-a^2y=0.$$ 4

ii) If $x=a(\cos t+t\sin t)$ and $y=a(\sin t-t\cos t)$ then find $\frac{d^2y}{dx^2}$. 4

9. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) यदि $A=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A.adj(A)=|A|.I$ तथा A^{-1} ज्ञात कीजिए। 8

ख) दिखाइए कि $y=c_1e^{ax}\cos bx+c_2e^{ax}\sin bx$ जहाँ c_1, c_2 अचर हैं, अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+(a^2+b^2)y=0$$ का हल है। 8

9. Attempt any *one* part of the following :

a) If $A=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}$ then prove that $A.adj(A)=|A|.I$ and find A^{-1}. 8

b) Show that $y=c_1e^{ax}\cos bx+c_2e^{ax}\sin bx$, where c_1, c_2 are constants, is a solution of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+(a^2+b^2)y=0.$$ 8

324(FJ)- 95,000