

131

324(XD)

2020

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट ] [ पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
  - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
  - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
  - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
  - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
  - जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

- There are in all *nine* questions in this question paper.
- All questions are compulsory.

J28746

[ Turn over

324(XD)

2

- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) समुच्चय  $\{ 1, 2, 3, 4 \}$  में सम्बन्ध  $R$  निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$R = \{ (1,2), (2,2), (1,1), (4,4), (1,3), (3,3), (3, 2) \}.$$

यह सम्बन्ध  $R$

- स्वतुल्य तथा सममित है, किन्तु संक्रामक नहीं
- स्वतुल्य तथा संक्रामक है, किन्तु सममित नहीं
- सममित तथा संक्रामक है, किन्तु स्वतुल्य नहीं
- एक तुल्यता सम्बन्ध है।

- ख)  $f(x) = x^2$  द्वारा परिभाषित फलन  
 $f: R \rightarrow R$  है
- एकैक और आच्छादक
  - बहु-एक और आच्छादक
  - एकैक, किन्तु आच्छादक नहीं
  - न तो एकैक और न ही आच्छादक।

1

- ग) समाकलन  $\int \sin 3x dx$  का मान है

- $\frac{1}{3} \cos 3x + c$
- $\frac{1}{3} \sin 3x + c$
- $-\frac{1}{3} \cos 3x + c$
- $-\cos 3x + c.$

1

- घ) अवकल समीकरण

$$2x \frac{d^2y}{dx^2} + 3e^x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + 9y^3 = x^4 \text{ की}$$

घात है

- $\frac{1}{3}$
- 2
- 3
- 4.

1

- ड)  $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{k} \times \hat{i}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$  का मान है.

- 0
- 1
- 2
- 3.

1

1. Attempt all the parts :

- a) The relation  $R$  is defined in the set  
 $\{1, 2, 3, 4\}$  as follows :

$$R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}.$$

This relation  $R$  is

- reflexive and symmetric, but not transitive
- reflexive and transitive, but not symmetric
- symmetric and transitive, but not reflexive
- an equivalence relation. 1

- b) The function  $f: R \rightarrow R$ , defined by

$$f(x) = x^2, \text{ is}$$

- one-one and onto
- many-one and onto
- one-one, but not onto
- neither one-one nor onto. 1

c) The value of the integral  $\int \sin 3x dx$  is

i)  $\frac{1}{3} \cos 3x + c$

ii)  $\frac{1}{3} \sin 3x + c$

iii)  $-\frac{1}{3} \cos 3x + c$

iv)  $-\cos 3x + c$  1

d) The degree of the differential equation

$$2x \frac{d^2y}{dx^2} + 3e^x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + 9y^3 = x^4 \text{ is}$$

i) 1                      ii) 2

iii) 3                     iv) 4. 1

e) The value of

$$\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{k} \times \hat{i}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j}) \text{ is}$$

i) 0                      ii) 1

iii) 2                     iv) 3. 1

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि यदि  $f: X \rightarrow Y$  और  $g: Y \rightarrow Z$  एकैक हैं, तो  $gof: X \rightarrow Z$  भी एकैक है। 1

ख)  $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$  का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

1

ग) दिखाइए कि फलन  $f(x) = |x|$ ,  $x = 0$  पर सतत है। http://www.upboardonline.com 1

घ) एक थैले में 5 लाल तथा 3 काली गेंदें हैं। एक गेंद यादृच्छया थैले से निकाली जाती है। निकाली गयी गेंद के काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 1

ङ)  $x$  तथा  $y$  ज्ञात कीजिए यदि

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}. \quad 1$$

2. Attempt all the parts :

a) Prove that if  $f: X \rightarrow Y$  and  $g: Y \rightarrow Z$  are one-one, then  $gof: X \rightarrow Z$  is also one-one. 1

b) Find the principal value of  $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ . 1

c) Show that the function  $f(x) = |x|$  is continuous at  $x = 0$ . 1

d) There are 5 red and 3 black balls in a bag. A ball is taken out of the bag at random. Find the probability that the ball taken out is black. 1

e) Determine  $x$  and  $y$  if

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}. \quad 1$$

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि  $f(x) = 8x^3$  और  $g(x) = x^{1/3}$ , तो  $gof$  तथा  $fog$  ज्ञात कीजिए। 2

ख) सिद्ध कीजिए कि यदि  $E$  और  $F$  दो स्वतंत्र घटनायें हैं,  $E$  तो और  $F'$  भी स्वतंत्र होंगी। 2

ग) स्वेच्छ अचरों  $a$  तथा  $b$  को विलुप्त करके वक्रों के कुल  $y = ae^{3x} + be^{-2x}$  को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। 2

घ)  $x$ ,  $y$  और  $z$ -अक्षों की दिक्-कोज्यायें ज्ञात कीजिए। 2

3. Attempt all the parts :

a) If  $f(x) = 8x^3$  and  $g(x) = x^{1/3}$ , find  $gof$  and  $fog$ . 2

b) Prove that if  $E$  and  $F$  are two independent events, then  $E$  and  $F'$  are also independent. 2

c) Find the differential equation representing the family of curves  $y = ae^{3x} + be^{-2x}$  by eliminating the arbitrary constants  $a$  and  $b$ . 2

d) Find the direction-cosines of  $x$ ,  $y$  and  $z$ -axes. 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि  $a * b = a + 2b$  द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया  $*: R \times R \rightarrow R$  क्रम विनिमेय नहीं है। 2

ख) सदिश  $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$  का सदिश  $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$  पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए। 2

ग) यदि  $y = \sin^{-1} x$ , तो सिद्ध कीजिए कि  $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx}$ . 2

घ) दर्शाइए कि बिन्दु  $A(a, b + c)$ ,  $B(b, c + a)$  तथा  $C(c, a + b)$  संरेख हैं। 2

4. Attempt all the parts :

- a) Prove that the binary operation  $*$  :  $R \times R \rightarrow R$  defined by  $a * b = a + 2b$  is not commutative. 2
- b) Find the projection of the vector  $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$  on the vector  $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ . 2
- c) If  $y = \sin^{-1} x$ , prove that  $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx}$ . 2
- d) Show that the points  $A(a, b + c)$ ,  $B(b, c + a)$  and  $C(c, a + b)$  are collinear. 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

- क) यदि  $R^+$  धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय हो तो सिद्ध कीजिए कि  $f(x) = x^2 + 4$  द्वारा परिभाषित फलन  $f : R^+ \rightarrow (4, \infty)$  व्युत्क्रमणीय है तथा  $f$  का प्रतिलोम  $f^{-1} : (4, \infty) \rightarrow R^+$  निम्नवत् है :  $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 4}$ . 5

ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}. \quad 5$$

ग) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)^2. \quad 5$$

घ) अवकल समीकरण

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0 \text{ को हल कीजिए।} \quad 5$$

ङ) वक्र  $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$  के बिन्दु  $(1, 1)$  पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए। 5

च) क्रमशः 3, 4, 5 परिमाण के तीन सदिश  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  इस प्रकार हैं कि इनमें से प्रत्येक शेष दो सदिशों के योगफल के लम्बवत् है, तो  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  का परिमाण ज्ञात कीजिए। 5

5. Attempt any five parts of the following :

- a) If  $R^+$  is the set of non-negative real numbers, prove that the function  $f : R^+ \rightarrow (4, \infty)$  defined by  $f(x) = x^2 + 4$  is invertible and the inverse of  $f$ ,  $f^{-1} : (4, \infty) \rightarrow R^+$ , is as follows :

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y - 4}. \quad 5$$

b) Prove that

$$\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}. \quad 5$$

c) Prove that

$$\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)^2. \quad 5$$

d) Solve the differential equation  
 $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0.$  5

e) Find the equation of the normal to the curve  $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$  at the point  $(1, 1).$  5

f) Three vectors  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  of magnitudes 3, 4, 5 respectively are such that each of them is perpendicular to the sum of the rest two. Find the magnitude of  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$  5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि  $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ , तो सिद्ध

$$\text{कीजिए कि } A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix},$$

जहाँ  $n \in N$

ख) फलन  $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$  के लिए अन्तराल  $[1, 4]$  में माध्य मान प्रमेय को सत्यापित कीजिए। 5

ग) उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिन्दुओं  $A(3, 4, 1)$  और  $B(5, 1, 6)$  को मिलाने वाली रेखा  $xy$ -समतल को काटती है। 5

घ) अवकल समीकरण  
 $ydx - (x + 2y^2)dy = 0$  को हल कीजिए। 5

ङ) छः सिक्के उछाले जाते हैं। केवल 2 के चित (heads) आने की प्रायिकता क्या है ? 5

च) सिद्ध कीजिए कि एक दिये गये वृत्त के अन्तर्गत सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होता है। 5

6. Attempt any five parts of the following :

a) If  $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ , prove that

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}, \text{ where}$$

$n \in N.$

- b) Verify mean value theorem for the function  $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$  in the interval  $[1, 4]$ . 5
- c) Find the coordinates of the point where the line joining the points  $A(3, 4, 1)$  and  $B(5, 1, 6)$  cuts  $xy$ -plane. 5
- d) Solve the differential equation  $y dx - (x + 2y^2) dy = 0$ . 5
- e) 6 coins are tossed. What is the probability that only two of them show heads? 5
- f) Prove that among all the rectangles inscribed in a circle the area of square is maximum. 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) आव्यूह  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$  का प्रतिलोम ज्ञात

कीजिए।

ख) आव्यूह विधि से निम्नलिखित रेखिक समीकरण-निकाय को हल कीजिए :  
 $2x - 3y + 5z = 11,$   
 $3x + 2y - 4z = -5,$   
 $x + y - 2z = -3.$  8

7. Attempt any one part of the following :

- a) Find the inverse of the matrix  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ . 8
- b) Solve by matrix method the following system of linear equations :  
 $2x - 3y + 5z = 11,$   
 $3x + 2y - 4z = -5,$   
 $x + y - 2z = -3.$  8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}.$$
 8

ख) प्रथम चतुर्थांश में वृत्त  $x^2 + y^2 = 32$ , रेखा  $y = x$  एवं  $x$ -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 8

Attempt any one part of the following :

a) Prove that

$$\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab} \quad 8$$

b) Find the area of the region in the first quadrant enclosed by the circle  $x^2 + y^2 = 32$ , the line  $y = x$  and the x-axis. 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) निम्नलिखित व्यक्तियों

$$x + 2y \geq 10$$

$$3x + 4y \leq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

के अन्तर्गत  $Z = 200x + 500y$  का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। 8

ख) रेखाओं

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

और

$$\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$$

के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 8

http://www.upboardonline.com

http://www.upboardonline.com

9. Attempt any one part of the following :

a) Find the minimum value of  $Z = 200x + 500y$  subject to the following constraints :

$$x + 2y \geq 10$$

$$3x + 4y \leq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0. \quad 8$$

b) Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

and

$$\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}). \quad 8$$

http://www.upboardonline.com

**324(XD)-1,25,000**

http://www.upboardonline.com

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से

http://www.upboardonline.com