

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 16

अनुक्रमांक

नाम

131/1 334(PY)

2017

गणित

प्रथम प्रश्नपत्र

(आव्यूह, सारणिक, रेखिक असमिकाएँ, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन तथा निर्देशांक ज्यामिति )

समय : तीन घण्टे 15 मिनट ] [ पूर्णांक : 50

निर्देश : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

*Instruction :* First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- नोट :
- इस प्रश्नपत्र में कुल आठ प्रश्न हैं।
  - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
  - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

748539

[ Turn over

334(PY)

2

- प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
- जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

*Note :* i) There are in all *eight* questions in this question paper.

- All questions are compulsory.
- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start from the first question and proceed to the last one.
- Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि  $\begin{bmatrix} -x & +y & +z \\ x & -y & +z \\ x & +y & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  तो,

$x, y, z$  का मान ज्ञात कीजिए। 1

ख)  $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$  का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। 1

ग) बिन्दुओं  $P(2, 4, -6)$  तथा  $Q(-5, 2, 7)$  के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। 1

घ) हल कीजिए :  $|3x - 2| \leq \frac{1}{2}$ . 1

ङ) परवलय  $y^2 = 12x$  पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जिसकी कोटि, भुज की तिगुनी है। 1

1. Attempt any four parts of the following :

a) If  $\begin{bmatrix} -x & +y & +z \\ x & -y & +z \\ x & +y & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  then find

the values of  $x, y, z$ . 1

b) Find the principal value of  $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ . 1

c) Find the distance between the points  $P(2, 4, -6)$  and  $Q(-5, 2, 7)$ . 1

d) Solve :  $|3x - 2| \leq \frac{1}{2}$ . 1

e) Find the point on the parabola  $y^2 = 12x$  whose ordinate is thrice of abscissa. 1

2. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

क) असमिका  $\frac{x}{2} < \frac{5x-2}{3} - \frac{7x-3}{5}$  को हल कीजिए तथा उन्हें संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए। 2

ख) हल कीजिए :  $\sin^{-1}\frac{5}{x} + \sin^{-1}\frac{12}{x} = \frac{\pi}{2}$ . 2

ग) सिद्ध कीजिए कि रेखा  $x\cos\theta + y\sin\theta = a$  वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  को स्पर्श करती है। 2

घ) अतिपरवलय  $x^2 + 2x - y^2 + 5 = 0$  की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए। 2

ड) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ एक विषम}$$

सममित आव्यूह है। 2

2. Attempt any *four* parts of the following :

a) Solve the inequality

$$\frac{x}{2} < \frac{5x-2}{3} - \frac{7x-3}{5} \text{ and draw on}$$

the number line. 2

b) Evaluate :  $\sin^{-1} \frac{5}{x} + \sin^{-1} \frac{12}{x} = \frac{\pi}{2}$ . 2

c) Prove that the line  $x \cos \theta + y \sin \theta = a$  be the tangent of circle  $x^2 + y^2 = a^2$ . 2

d) Find the eccentricity of the hyperbola  $x^2 + 2x - y^2 + 5 = 0$ . 2

e) Prove that the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ is a skew-}$$

symmetric matrix. 2

3. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  हो तो सिद्ध कीजिए कि  $A^2 - 5A + 7I = 0$ , जहाँ  $I$  इकाई आव्यूह है। 2

ख) यदि किसी दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  के लघु अक्ष के सिरो को नाभियों से मिलाने वाली सरल रेखाओं के मध्य कोण  $90^\circ$  हो, तो उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए। 2

ग) सिद्ध कीजिए कि  $2 \tan^{-1} x = \cos^{-1} \left[ \frac{1-x^2}{1+x^2} \right]$ . 2

घ) सिद्ध कीजिए कि वृत्त  $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$  तथा  $x^2 + y^2 + 2by + c = 0$  एक दूसरे को स्पर्श करेंगे, यदि  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$ . 2

ड) सिद्ध कीजिए कि  $\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = 0$ . 2

3. Attempt any *four* parts of the following :

a) If  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ , then prove that

$A^2 - 5A + 7I = 0$ , where  $I$  be the identity matrix. 2

b) If the angle between the straight lines joining foci and the ends of minor axis of the ellipse

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  is  $90^\circ$ , find

eccentricity. 2

c) Prove that

$2 \tan^{-1} x = \cos^{-1} \left[ \frac{1-x^2}{1+x^2} \right]$ . 2

d) Prove that the circles

$x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$  and

$x^2 + y^2 + 2by + c = 0$  will touch

each other, if  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$ . 2

e) Prove that  $\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = 0$ . 2

4. निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** खण्डों को हल कीजिए :

क) निम्नलिखित असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

$3x + 4y \leq 60, x + 3y \leq 30$

$x \geq 0, y \geq 0$ . 3

ख) सिद्ध कीजिए कि

$\cos^{-1} \left[ \frac{1-a^2}{1+a^2} \right] - \cos^{-1} \left[ \frac{1-b^2}{1+b^2} \right]$   
 $= 2 \tan^{-1} \left[ \frac{a-b}{1+ab} \right]$ . 3

ग) अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ  $(6, 4)$  एवं  $(-4, 4)$  हैं तथा उत्केन्द्रता 2 है। 3

घ) सिद्ध कीजिए कि किसी वर्ग आव्यूह को एक सममित एवं एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

3

4. Attempt any *three* parts of the following :

a) Solve the following system of linear inequalities graphically :

$$3x + 4y \leq 60, \quad x + 3y \leq 30$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

3

b) Prove that

$$\cos^{-1} \left[ \frac{1-a^2}{1+a^2} \right] - \cos^{-1} \left[ \frac{1-b^2}{1+b^2} \right]$$

$$= 2 \tan^{-1} \left[ \frac{a-b}{1+ab} \right]. \quad 3$$

c) Find the equation of hyperbola, whose foci are (6, 4) and (-4, 4) and eccentricity is 2. 3

d) Prove that any square matrix can be expressed as the sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix. 3

5. निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2 - (b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2 - (c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2 - (a-b)^2 & ab \end{vmatrix} =$$

$$(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2).$$

3

ख) बिन्दुओं (4, 8, 10) और (6, 10, -8) को मिलाने वाली रेखा खण्ड को  $yz$ -तल जिस अनुपात में विभक्त करता है, उसे ज्ञात कीजिए।

3

ग) यदि रेखा  $lx + my + n = 0$  अतिपरवलय

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ का स्पर्शी है तो सिद्ध कीजिए}$$

$$\text{कि } a^2l^2 - b^2m^2 = n^2. \quad 3$$

घ) सिद्ध कीजिए कि परवलय  $y^2 = 4ax$  का

अर्द्ध नाभिलम्ब किसी नाभीय जीवा के खण्डों  
का हरात्मक माध्य होता है। 3

5. Attempt any *three* parts of the following :

a) Prove that

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2 - (b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2 - (c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2 - (a-b)^2 & ab \end{vmatrix} =$$

$$(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2). \quad 3$$

b) Find the ratio in which the line joining the points (4, 8, 10) and (6, 10, -8) is divided by  $yz$ -plane.

3

748539

[ Turn over

c) If line  $lx + my + n = 0$ , be tangent

of hyperbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  then

prove that  $a^2l^2 - b^2m^2 = n^2$ . 3

d) Prove that the semi-latus rectum of the parabola  $y^2 = 4ax$  is the harmonic mean between the segments of any focal chord of the parabola. 3

6. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) यदि  $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y + \cos^{-1} z = \pi$

तो सिद्ध कीजिए कि

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1. \quad 4$$

ख) क्रेमर नियम की सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$3x + y + z = 2$$

$$2x - 4y + 3z = -1$$

$$4x + y - 3z = -11. \quad 4$$

748539

6. Solve any *one* part of the following :

a) If  $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y + \cos^{-1} z = \pi$

then prove that

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1. \quad 4$$

b) Solve the following equations by Cramer's rule :

$$3x + y + z = 2$$

$$2x - 4y + 3z = -1$$

$$4x + y - 3z = -11. \quad 4$$

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) प्रारम्भिक संक्रिया का उपयोग करके व्युत्क्रम

ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}. \quad 4$$

ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}$$

$$= (1 + xyz)(x - y)(y - z)(z - x)$$

4

7. Solve any *one* part of the following :

a) Find the inverse of the following matrix using elementary operations :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}. \quad 4$$

b) Prove that

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}$$

$$= (1 + xyz)(x - y)(y - z)(z - x)$$

4

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए की रेखा  $y = mx$  द्वारा दीर्घवृत्त

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ पर अन्तःखण्डित जीवा की}$$

$$\text{लम्बाई } 2ab\sqrt{\frac{1+m^2}{a^2m^2+b^2}} \text{ है।} \quad 4$$

ख) सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  की

स्पर्शियों से अक्षों के बीच कटे हुए भागों के

$$\text{मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ } \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 4 \text{ है।}$$

4

8. Attempt any one part of the following :

a) Prove that the length of intercept chord by line  $y = mx$  on ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ is } 2ab\sqrt{\frac{1+m^2}{a^2m^2+b^2}} \quad 4$$

b) Prove that the locus of the mid-points of the portion of the tangents to the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

intercepted between the axes is

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 4. \quad 4$$

**334(PY)-1,35,000**